

استنباط بیزی پارامتر قابلیت اطمینان در توزیع رایلی دو پارامتری تحت نمونه‌های

سانسور فزاینده پیوندی

اکرم کهن‌سال

(نویسنده مسئول) استادیار، دانشگاه بین‌المللی امام‌خمينی (ره)، گروه آمار*

شیرین شعاعی

استادیار، دانشگاه شهید بهشتی، گروه بیم‌سنجی، Sh_Shooae@sbu.ac.ir

چکیده: در این مقاله برآورد بیزی پارامتر قابلیت اطمینان، $R = P(X < Y)$ ، در توزیع رایلی دو پارامتری، تحت نمونه‌های سانسور فزاینده پیوندی بررسی می‌گردد. این مسئله در سه حالت مختلف مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در حالت اول، با فرض این که متغیرهای تنش، X ، و مقاومت، Y ، هر دو دارای پارامتر مکان مشترک و پارامترهای مقیاس غیرمشترک هستند و تمام این پارامترها نامعلوم‌اند، برآورد بیزی R بررسی می‌شود. از آن‌جا که در این حالت برآورد بیز دارای فرم بسته نیست، لذا با دو روش لیندلی و MCMC تقریب زده می‌شود. در حالت دوم، با فرض این که متغیرهای تنش و مقاومت دارای پارامتر مکان مشترک معلوم و پارامترهای مقیاس غیرمشترک و نامعلوم هستند، برآورد بیزی دقیق برای R محاسبه می‌گردد. در حالت سوم، با فرض این که همه پارامترها متفاوت و نامعلوم هستند، برآورد بیزی R به روش تقریبی MCMC محاسبه می‌شود. در تمامی روش‌ها فواصل باور بیزی نیز به دست آورده می‌شوند. در نهایت، با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو، عملکرد برآوردگرهای مختلف با هم مقایسه می‌گردند.

کلمات کلیدی: پارامتر قابلیت اطمینان، برآورد بیز، تقریب لیندلی، توزیع رایلی دو پارامتری، سانسور فزاینده پیوندی

۱- مقدمه

علی‌رغم این که مقاله‌ها بسیاری مدل‌های تنش-مقاومت را در داده‌های کامل مطالعه کرده‌اند، اما در نمونه‌های سانسور شده، توجه زیادی به برآورد این پارامتر نشده است. در بسیاری از مطالعه‌های مربوط به طول عمر، آزمایش‌های کلینیکی مربوط به تاثیر دوز سم‌ها، تحقیق‌های زیست‌شناسی، تحلیل بقا و دیگر زمینه‌های کاربردی علم آمار حالت‌هایی وجود دارند که قسمت‌هایی از مقادیر ممکن متغیر تصادفی مورد مطالعه، محدود و همه مشاهدات ثبت نشده‌اند یا همه واحدهای نمونه به نتیجه نرسیده‌اند. این محدودیت‌ها گاهی اوقات به صورت اختیاری توسط آزمایش‌گر و به منظور نگه‌داشتن مواد آزمایش جهت استفاده در دیگر آزمایش‌ها، حفظ زمان و هزینه در نظر گرفته می‌شود و در مواردی نیز ماهیت آزمایش‌طوری است که خود به خود باعث از دست دادن واحدهای آزمایشی می‌شود. به‌عنوان مثال، ممکن است یک واحد آزمایشی به‌طور تصادفی خراب شود یا شخص تحت آزمایش به دلایل پیش‌بینی نشده‌ای از ادامه همکاری کناره‌گیری کند. به داده‌هایی که قبل از مشاهده زمان شکست آن‌ها از آزمایش حذف می‌شوند، داده‌های سانسور شده می‌گویند. در بسیاری از موقعیت‌های کاربردی،

اصطلاح تنش از نیمه دوم قرن بیستم به‌طور گسترده‌ای مطرح گردید. به‌طور کلی همه اشخاص و محصولات به‌طور مداوم تحت نوعی تنش قرار دارند و واضح است که همیشه قدرت و توانایی غلبه بر این تنش امکان‌پذیر نیست. اخیراً رابطه بین تنش و میزان مقاومت اشخاص و یا محصول و سیستم در بسیاری از شاخه‌های علوم از جمله صنعت، پزشکی، روان‌پزشکی و داروسازی مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. یکی از جالب‌ترین مسائل در نظریه قابلیت اطمینان، مسئله میزان پایایی و اعتمادپذیری سیستم و یا محصول است. به‌عبارت دیگر، مسئله مورد علاقه استنباط درباره پارامتر تنش-مقاومت، $R = P(X < Y)$ ، است. متغیرهای X و Y به ترتیب به‌عنوان تنش و مقاومت شناخته می‌شوند. بنا بر این پارامتر R میزان پایایی و اعتمادپذیری سیستم و یا محصول را اندازه‌گیری می‌کند. در یک سیستم اگر میزان تنش وارد شده از مقاومت بیش‌تر باشد، سیستم از کار می‌افتد. در علم آمار برآورد R ، بر اساس دو دیدگاه فراوانی‌گرا و بیزی انجام می‌شود.

* (Corresponding author) kohansal@sci.ikiu.ac.ir

به دلایل مختلف مانند طرح‌های مالی یا محدودیت زمانی، محققان با داده‌های سانسور شده مواجه هستند.

در میان طرح‌های سانسور مختلف، طرح‌های نوع I و نوع II از اساسی‌ترین طرح‌های سانسور هستند که می‌توانند به صورت زیر توصیف شوند. در طرح سانسور نوع I، آزمایش طول عمر تا رسیدن به یک زمان از پیش تعیین شده T ادامه می‌یابد و نیز در طرح سانسور نوع II، آزمایش طول عمر تا رسیدن به یک تعداد از پیش تعیین شده شکست‌ها ادامه یافته و بعد از آن آزمایش متوقف می‌شود. از ترکیب این دو نوع طرح، طرح سانسور پیوندی به دست می‌آید. در این طرح سانسور، آزمایش طول عمر در زمان $T^* = \min\{X_{n:n}, T\}$ به پایان می‌رسد که در آن، $X_{n:n}$ امین زمان شکست در بین N واحد تحت آزمایش است و نیز T یک زمان از پیش تعیین شده است.

اگر آزمایش‌گر تصمیم داشته باشد که واحدهای آزمایشی سالم را در نقاطی غیر از نقاط پایانی آزمایش از ادامه بررسی کنار بگذارد، نمی‌تواند از هیچ‌یک از طرح‌های سانسور فوق استفاده کند. هیچ‌کدام از این طرح‌ها اجازه حذف یا خروج واحدهای آزمایشی را در نقاطی غیر از نقاط انتهایی آزمایش نمی‌دهند. لازم به ذکر است این اجازه زمانی مطلوب است که در مطالعه فرایند طول عمر، جمع‌آوری ارقام در طی مراحل مختلف آزمایش مدنظر باشد. همچنین وقتی که کاهش زمان آزمایش و مشاهده حد اقل تعدادی طول عمر بزرگ به طور همزمان خواسته شود و نیز به منظور حفظ برخی واحدهای آزمایشی (به ویژه زمانی که دستیابی به ارقام آزمایشی خیلی مشکل یا ارقام خیلی گران قیمت هستند)، در نظر گرفتن حذف‌های میانی پسندیده است. همان‌طور که قبلاً ذکر شد حالت‌هایی همچون شکست تصادفی واحدهای آزمایشی یا از دست دادن ارتباط با اشخاص تحت مطالعه از جمله مواردی است که از دست دادن ارقام در نقاطی غیر از نقاط پایانی را اجتناب‌ناپذیر می‌نماید. این دلایل نظریه‌پردازان و کسانی که در این زمینه کار می‌کنند را به سمت سانسور فزاینده متمایل نمود.

برای تشریح این طرح، فرض می‌کنیم که N واحد تحت آزمایش طول عمر قرار گرفته‌اند. بلافاصله بعد از اولین شکست، R_1 واحد تحت بررسی از آزمایش خارج می‌شوند، بعد از دومین شکست، R_2 واحد تحت بررسی از آزمایش خارج می‌شوند و به همین ترتیب، در زمان شکست m ام، همه $R_n = N - R_1 - \dots - R_{n-1} - n$ واحد تحت بررسی، به طور تصادفی از آزمایش خارج می‌شوند. در این حالت طرح سانسور را با (R_1, \dots, R_n) و

مقادیر مرتب شده حاصل از این طرح را با $\{X_{1:n:N}, \dots, X_{n:n:N}\}$ نشان می‌دهیم. که برای جزئیات بیشتر این سانسور به بالا کریشنان و آگاروارا [۱] می‌توان مراجعه نمود.

از ترکیب طرح سانسور پیوندی و سانسور فزاینده، طرح سانسور فزاینده پیوندی (HPC) حاصل می‌گردد که این طرح توسط کاندو و جوآردر [۲] معرفی شده است.

برای بررسی بیش‌تر این ساختار، فرض کنید تعداد کل واحدهای تحت آزمایش برابر N ، طرح سانسور مورد نظر به صورت (R_1, \dots, R_n) و $T^* = \min\{X_{n:n:N}, T\}$ است، به طوری که $X_{1:n:N} < \dots < X_{n:n:N}$ یک نمونه از طرح سانسور فزاینده و $T > 0$ یک مقدار ثابت از پیش تعیین شده است. واضح است که اگر $X_{n:n:N} < T$ باشد آزمایش در زمان $X_{n:n:N}$ به اتمام می‌رسد و نمونه در دسترس به صورت $\{X_{1:n:N}, \dots, X_{n:n:N}\}$ است. در غیر این صورت، اگر $X_{j:n:N} < X_{j+1:n:N} < T$ باشد آزمایش در زمان T تمام می‌شود و نمونه در دسترس به صورت $\{X_{1:n:N}, \dots, X_{j:n:N}\}$ خواهد بود. در ادامه، به طور نمادین و برای سهولت، نمونه سانسور فزاینده پیوندی را با $\{X_1, \dots, X_J\}$ تحت طرح سانسور $\{N, n, T, J, R_1, \dots, R_J\}$ نشان می‌دهیم. از مرجع [۲]، تابع درستی‌نمایی نمونه‌های HPC به صورت زیر به دست می‌آید:

$$L(\theta) \propto \prod_{i=1}^J f(x_i) [1 - F(x_i)]^{R_i} [1 - F(T)]^{R_i^*},$$

که در آن $R_i^* = N - J - \sum_{i=1}^J R_i$ است.

همان‌طور که اشاره شد در برآورد پارامتر قابلیت اطمینان برای داده‌های سانسور شده، کارهای بسیار محدودی صورت گرفته است که در این میان می‌توان به مراجع [۳]، [۴]، [۵] و [۶] اشاره نمود.

همان‌طور که می‌دانیم یکی از توزیع‌های مورد توجه محققان در حوزه قابلیت اطمینان توزیع رایلی می‌باشد. متغیر تصادفی X دارای توزیع رایلی دو پارامتری با پارامترهای مکان و مقیاس به ترتیب، μ و λ ، است هرگاه، دارای تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی به ترتیب به صورت زیر باشد:

$$f(x) = 2\lambda(x - \mu)e^{-\lambda(x-\mu)^2}, x > \mu,$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda(x-\mu)^2}, x > \mu.$$

اغلب مقاله‌ها برآورد پارامتر R را تحت حالت‌های محدود (پارامتر مکان مشترک) مورد بررسی قرار داده‌اند. در این مطالعه سعی شده است که تمام حالت‌ها برای پارامترها در نظر گرفته شود. این حالت‌ها عبارت‌اند از: پارامتر مکان مشترک و نامعلوم، پارامتر مکان مشترک و معلوم و تمام پارامترها غیر مشترک و نامعلوم. لازم به ذکر است که معمولاً حالت سوم بیش‌تر مورد توجه محققان نظریه قابلیت اطمینان است.

ادامه مقاله دارای روند زیر است: در بخش ۲ برآورد بیز با فرض پارامتر مکان مشترک و نامعلوم محاسبه می‌شود. همچنین برآورد بیز با فرض پارامتر مکان مشترک و معلوم در بخش ۳ به دست می‌آید. در بخش ۴ برآورد بیز برای پارامتر R تحت متفاوت و نامعلوم بودن کلیه پارامترها محاسبه می‌شود. یک مطالعه شبیه‌سازی در بخش ۵ برای بررسی اهدافمان انجام شده است. سرانجام در بخش ۶، یک جمع‌بندی از این مطالعه ارائه می‌شود.

۲- استنباط بییزی پارامتر R با پارامتر مشترک و نامعلوم μ

اگر فرض کنیم که $X \sim tR(\mu, \lambda)$ و $Y \sim tR(\mu, \alpha)$ است، به طوری که X دارای تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی به ترتیب $f_X(x)$ و $F_X(x)$ و نیز Y دارای تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی به ترتیب $f_Y(y)$ و $F_Y(y)$ هستند، آن‌گاه به وضوح پارامتر قابلیت اطمینان برابر است با:

$$\begin{aligned} R &= P(X < Y) = \int_{\mu}^{\infty} \left(\int_{\mu}^y f_X(x) dx \right) f_Y(y) dy \\ &= \int_{\mu}^{\infty} F_X(y) f_Y(y) dy \\ &= \int_{\mu}^{\infty} (1 - e^{-\lambda(y-\mu)^2}) 2\alpha(y-\mu) e^{-\alpha(y-\mu)^2} dy \\ &= 1 - \frac{\alpha}{\alpha + \lambda} \int_{\mu}^{\infty} 2(\alpha + \lambda) e^{-(\alpha+\lambda)(y-\mu)^2} dy \\ &= 1 - \frac{\alpha}{\alpha + \lambda} = \frac{\lambda}{\alpha + \lambda}. \end{aligned}$$

در ادامه این بخش به بررسی برآورد بیز و فاصله باور بییزی پارامتر R تحت تابع زیان مربعات خطا، زمانی که λ ، α و μ دارای توابع چگالی پیشین به ترتیب:

$$\pi_1(\lambda) \propto \lambda^{a_1-1} e^{-b_1\lambda}, \quad \lambda, a_1, b_1 > 0,$$

$$\pi_2(\alpha) \propto \alpha^{a_2-1} e^{-b_2\alpha}, \quad \alpha, a_2, b_2 > 0,$$

در ادامه این مطالعه متغیر تصادفی با توزیع رایلی دو پارامتری که دارای پارامترهای μ و λ است را با نماد $X \sim tR(\mu, \lambda)$ نشان می‌دهیم.

در این مقاله، هدف اصلی استنباط بییزی پارامتر قابلیت اطمینان R بر مبنای طرح سانسور فزاینده پیوندی (HPC)، زمانی که متغیرهای تنش و مقاومت، X و Y ، دارای توزیع رایلی دو پارامتری هستند، است. در این راستا، مسئله در سه حالت مختلف بررسی می‌گردد. در هر سه حالت فرض می‌شود که هر دو متغیر تصادفی تنش و مقاومت دارای پارامترهای مقیاس متفاوت و نامعلوم هستند. علاوه بر این، در حالت اول با فرض مشترک و نامعلوم بودن پارامتر مکان مسئله بررسی می‌شود. همچنین در حالت دوم با فرض مشترک و معلوم بودن پارامتر مکان و در حالت سوم با فرض متفاوت و نامعلوم بودن پارامتر مکان هر دو متغیر تصادفی، مسئله مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

به دلیل عدم دسترسی برآورد دقیق بییزی در حالت‌های اول و سوم، از تقریب لیندلی و MCMC استفاده می‌شود. با به کار بردن روش شبیه‌سازی مونت کارلو، برآوردهای مختلف بییزی با معیارهای MSE، طول فاصله باور و درصد همگرایی مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. به عبارت دقیق‌تر در این مقاله به موارد زیر به طور مشخص و کامل پرداخته می‌شود:

أ. استنباط مدل‌های تنش-مقاومت بر اساس طرح سانسور جدید (HPC):

در این مطالعه، سانسور فزاینده پیوندی در مدل‌های تنش-مقاومت بررسی می‌شود. از ویژگی‌های این نوع سانسور این است که این نوع طرح شامل بسیاری از طرح‌های سانسور می‌شود. به عنوان نمونه، اگر T خیلی بزرگ باشد سانسور فزاینده، اگر T خیلی بزرگ و $R_1 = R_2 = \dots = R_{n-1} = 0$ و $R_n = N - n$ سانسور نوع دوم و همچنین اگر T خیلی بزرگ، $R_1 = R_2 = \dots = R_n = 0$ و $N = n$ باشد داده‌های کامل حاصل می‌شود.

ب. روش برآوردیابی:

اغلب مقاله‌ها بر مبنای روش‌های برآوردیابی کلاسیک به بررسی مدل‌های تنش-مقاومت پرداخته‌اند. در این مقاله از روش بییزی برای برآورد این پارامتر استفاده شده است. همچنین بنا به شرایط مختلف روش‌ها و تقریب‌های متعددی مانند تقریب لیندلی و روش MCMC و روش بیز دقیق محاسبه شده است.

ت. بررسی حالت‌های مختلف پارامترها:

$$\pi(\lambda, \alpha, \mu | data) \propto L(data | \lambda, \alpha, \mu) \pi_1(\lambda) \pi_2(\alpha) \pi_3(\mu). \quad (1)$$

با توجه به رابطه (۱) واضح است که در این حالت برآورد بیز نمی‌تواند به فرم بسته نمایش داده شود. بنا بر این آن را به دو روش مختلف تقریبی که عبارت‌اند از تقریب لیندلی و روش MCMC، برآورد می‌نماییم.

۱-۲ تقریب لیندلی

یکی از مهم‌ترین روش‌های تقریبی برای به دست آوردن برآورد بیزی توسط لیندلی [۷] معرفی شده است. این روش می‌تواند به صورت زیر توصیف شود.

فرض کنیم $U(\theta)$ تابعی از پارامتر θ باشد. برآورد بیز $U(\theta)$ تحت تابع زیان مربعات خطا، برابر است با:

$$E(u(\theta) | data) = \frac{\int u(\theta) e^{\ell(\theta) + \rho(\theta)} d\theta}{\int e^{\ell(\theta) + \rho(\theta)} d\theta},$$

که در آن $\ell(\theta)$ لگاریتم تابع درست‌نمایی و $\rho(\theta)$ لگاریتم تابع چگالی پیشین θ است. بنا بر این تقریب لیندلی به صورت زیر است:

$$E(u(\theta) | data) = u + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (u_{ij2} + u_i \rho_j) \sigma_{ij} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_p \ell_{ijk} \sigma_{ij} \sigma_{kp} u_p |_{\theta = \hat{\theta}}$$

که در آن $\hat{\theta} \quad i, j, k, p = 1, \dots, m$. $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامتر θ . $u_i = \frac{\partial u}{\partial \theta_i}$, $u = u(\theta)$. همچنین، $\rho_j = \frac{\partial \rho}{\partial \theta_j}$, $\ell_{ijk} = \frac{\partial^3 \ell}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k}$, $u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$ است. σ_{ij} (i, j) امین درایه در ماتریس معکوس $[-\ell_{ij}]$ می‌باشد. در حالت سه پارامتری $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ جمع‌ها در رابطه اخیر به صورت ساده‌تر زیر نتیجه می‌شوند:

$$E(u(\theta) | data) = u + u_1 d_1 + u_2 d_2 + u_3 d_3 + d_4 + d_5 + \frac{1}{2} [A(u_1 \sigma_{11} + u_2 \sigma_{12} + u_3 \sigma_{13}) + B(u_1 \sigma_{21} + u_2 \sigma_{22} + u_3 \sigma_{23}) + C(u_1 \sigma_{31} + u_2 \sigma_{32} + u_3 \sigma_{33})],$$

$$\pi_3(\mu) \propto 1, \quad 0 < \mu < t_1,$$

هستند، پرداخته می‌شود. لازم به ذکر است که از آن‌جا که پارامترهای λ و α مقادیر مثبت را اختیار می‌کنند مناسب‌ترین توزیع برای توصیف چگالی پیشین آن‌ها توزیع گاما است. همچنین انتخاب این توزیع پیشین منجر به توابع چگالی پسین مزدوج می‌شود، که این امر باعث راحتی محاسبات می‌گردد. علاوه بر این چون μ یک پارامتر مکانی با مقادیر مثبت است، لذا مناسب‌ترین گزینه برای تابع چگالی پیشین آن توزیع $U(0, t_1)$ است. باید توجه نمود که با نامعلوم بودن هر سه پارامتر، توزیع‌های پیشین مزدوج وجود ندارند و در چنین مواقعی حتی برای نمونه‌های کامل همه درایه‌های ماتریس اطلاع فیشر مورد انتظار متناهی نیستند. بنا بر این حتی پیشین جفری برای این حالت وجود ندارد.

بر این مبنا، فرض می‌کنیم که $\{X_1, \dots, X_{J_1}\}$ و $\{Y_1, \dots, Y_{J_2}\}$ دو نمونه تصادفی HPC با طرح‌های سانسور به ترتیب $\{M, m, T_2, J_2, S_1, \dots, S_{J_2}\}$ و $\{N, n, T_1, J_1, R_1, \dots, R_{J_1}\}$ باشند. تابع درست‌نمایی پارامترهای λ ، α و μ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$L(\lambda, \alpha, \mu) \propto \left(\prod_{i=1}^{J_1} f(x_i) [1 - F(x_i)]^{R_i} [1 - F(T_1)]^{R_{J_1}^*} \right) \times \left(\prod_{j=1}^{J_2} f(y_j) [1 - F(y_j)]^{S_j} [1 - F(T_2)]^{S_{J_2}^*} \right).$$

تابع درست‌نمایی بر مبنای داده‌های مشاهده شده برابر است با:

$$L(data | \lambda, \alpha, \mu) \propto \lambda^{J_1} \alpha^{J_2} \prod_{i=1}^{J_1} (x_i - \mu) \prod_{i=1}^{J_2} (y_j - \mu) \times e^{-\lambda (\sum_{i=1}^{J_1} (R_i + 1)(x_i - \mu)^2 + R_{J_1}^* (T_1 - \mu)^2)} \times e^{-\alpha (\sum_{j=1}^{J_2} (S_j + 1)(y_j - \mu)^2 + S_{J_2}^* (T_2 - \mu)^2)}.$$

حال بر مبنای نمونه سانسور مشاهده شده، تابع چگالی پسین توام به صورت زیر است:

$$+2\lambda \left\{ \sum_{i=1}^{J_1} (R_i + 1)(x_i - \mu)^2 + R_{J_1}^* (T_1 - \mu)^2 \right\} \\ +2\alpha \left\{ \sum_{j=1}^{J_2} (S_j + 1)(y_j - \mu)^2 + S_{J_2}^* (T_2 - \mu)^2 \right\}.$$

با قرار دادن $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\lambda, \alpha, \mu)$ و $u = R = \frac{\lambda}{\alpha + \lambda}$ داریم:

$$\rho_1 = \frac{\alpha_1 - 1}{\lambda}, \rho_2 = \frac{\alpha_2 - 1}{\alpha}, \rho_3 = 0, \\ \ell_{11} = -\frac{J_1}{\lambda^2}, \ell_{22} = -\frac{J_2}{\alpha^2}, \ell_{12} = \ell_{21} = 0, \\ \ell_{13} = 2 \sum_{i=1}^{J_1} (R_i + 1)(x_i - \mu) + 2R_{J_1}^* (T_1 - \mu), \\ \ell_{23} = 2 \sum_{j=1}^{J_2} (S_j + 1)(y_j - \mu) + 2S_{J_2}^* (T_2 - \mu), \\ \ell_{33} = -2\lambda \left(\sum_{i=1}^{J_1} (R_i + 1)x_i + R_{J_1}^* T_1 \right) \\ -2\alpha \left(\sum_{j=1}^{J_2} (S_j + 1)y_j + S_{J_2}^* T_2 \right) \\ + \sum_{i=1}^{J_1} \frac{1}{(x_i - \mu)^2} + \sum_{j=1}^{J_2} \frac{1}{(y_j - \mu)^2},$$

که در آن σ_{ij} بوسیله ℓ_{ij} به دست می‌آید. همچنین:

$$\ell_{111} = \frac{2J_1}{\lambda^3}, \ell_{222} = \frac{2J_2}{\alpha^3}, \\ \ell_{133} = -2 \sum_{i=1}^{J_1} (R_i + 1)x_i - 2R_{J_1}^* T_1, \\ \ell_{233} = -2 \sum_{j=1}^{J_2} (S_j + 1)y_j - 2S_{J_2}^* T_2 \\ \ell_{333} = -2 \sum_{i=1}^{J_1} \frac{1}{(x_i - \mu)^3} - 2 \sum_{j=1}^{J_2} \frac{1}{(y_j - \mu)^3},$$

و نیز سایر $\ell_{ijk} = 0$ می‌باشند، بنا بر این:

$$d_i = \rho_1 \sigma_{i1} + \rho_2 \sigma_{i2}, \quad i = 1, 2, 3, \\ d_4 = u_{12} \sigma_{12}, \quad d_5 = \frac{1}{2} (u_{11} \sigma_{11} + u_{22} \sigma_{22}),$$

$$A = \ell_{111} \sigma_{11} + \ell_{331} \sigma_{33},$$

$$B = \ell_{222} \sigma_{22} + \ell_{332} \sigma_{33},$$

$$C = 2\ell_{133} \sigma_{13} + 2\ell_{233} \sigma_{23} + \ell_{333} \sigma_{33}.$$

که این رابطه را باید به وسیله $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3)$ که برآورد ماکسیمم درست‌نمایی $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ است به دست آورد. در رابطه فوق:

$$d_i = \rho_1 \sigma_{i1} + \rho_2 \sigma_{i2} + \rho_3 \sigma_{i3}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$d_4 = u_{12} \sigma_{12} + u_{13} \sigma_{13} + u_{23} \sigma_{23},$$

$$d_5 = \frac{1}{2} (u_{11} \sigma_{11} + u_{22} \sigma_{22} + u_{33} \sigma_{33}),$$

و همچنین داریم:

$$A = \ell_{111} \sigma_{11} + 2\ell_{121} \sigma_{12} + 2\ell_{131} \sigma_{13} \\ + 2\ell_{231} \sigma_{23} + \ell_{221} \sigma_{22} + \ell_{331} \sigma_{33},$$

$$B = \ell_{112} \sigma_{11} + 2\ell_{122} \sigma_{12} + 2\ell_{132} \sigma_{13} \\ + 2\ell_{232} \sigma_{23} + \ell_{222} \sigma_{22} + \ell_{332} \sigma_{33},$$

$$C = \ell_{113} \sigma_{11} + 2\ell_{123} \sigma_{12} + 2\ell_{133} \sigma_{13} \\ + 2\ell_{233} \sigma_{23} + \ell_{223} \sigma_{22} + \ell_{333} \sigma_{33}.$$

در حالت توزیع رایلی دو پارامتری لگاریتم تابع درست‌نمایی به شرح زیر بدست می‌آید:

$$\ell(\lambda, \alpha, \mu) \propto J_1 \log(\lambda) + J_2 \log(\alpha) \\ + \sum_{i=1}^{J_1} \log(x_i - \mu) + \sum_{j=1}^{J_2} \log(y_j - \mu) \\ - \lambda \left(\sum_{i=1}^{J_1} (R_i + 1)(x_i - \mu)^2 + R_{J_1}^* (T_1 - \mu)^2 \right) \\ - \alpha \left(\sum_{j=1}^{J_2} (S_j + 1)(y_j - \mu)^2 + S_{J_2}^* (T_2 - \mu)^2 \right),$$

بنا بر این برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی λ و α به ترتیب به فرم زیر محاسبه می‌شوند:

$$\hat{\lambda}(\mu) = J_1 \left\{ \sum_{i=1}^{J_1} (R_i + 1)(x_i - \mu)^2 + R_{J_1}^* (T_1 - \mu)^2 \right\}^{-1}, \\ \hat{\alpha}(\mu) = J_2 \left\{ \sum_{j=1}^{J_2} (S_j + 1)(y_j - \mu)^2 + S_{J_2}^* (T_2 - \mu)^2 \right\}^{-1},$$

و همچنین $\hat{\mu}$ از حل معادله غیر خطی زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = - \sum_{i=1}^{J_1} \frac{1}{x_i - \mu} - \sum_{j=1}^{J_2} \frac{1}{y_j - \mu}$$

همچنین $u_3 = 0$ و $u_{i3} = 0$ برای $i = 1, 2, 3$

۳- با استفاده از روش متروپولیس-هستینگز $\mu_{(t)}$ را از توزیع پیشنهادی $\pi(\mu|\lambda_{(t-1)}, \alpha_{(t-1)}, data)$ با توزیع پیشنهادی $N(\mu_{(t-1)}, 1)$ به صورت زیر تولید کنید:

$$u_{11} = \frac{2\alpha}{(\alpha + \lambda)^3}, u_{22} = \frac{-2\lambda}{(\alpha + \lambda)^3}, u_{12} = \frac{\alpha - \lambda}{(\alpha + \lambda)^3}$$

الف: w_t را از $W(\cdot|\mu_{(t-1)}, 1) = N(\mu_{(t-1)}, 1)$ و نیز u را از $U(0,1)$ تولید کنید.

می‌باشند. در نتیجه، تحت تابع زیان مربعات خطا، برآورد بیز برابر است با:

ب: اگر $u < \min(1, \delta)$ آنگاه $\mu_t = w(t)$ قرار دهید که:

$$\hat{R}^{LB} = u + u_1 d_1 + u_2 d_2 + d_4 + d_5 + \frac{1}{2} [A(u_1 \sigma_{11} + u_2 \sigma_{12}) + B(u_1 \sigma_{21} + u_2 \sigma_{22}) + C(u_1 \sigma_{31} + u_2 \sigma_{32})] \quad (2)$$

$$\delta = \frac{\pi(w_t|data) W(\mu_{(t-1)}|w_t, 1)}{\pi(\mu_{(t-1)}|data) W(w_t|\mu_{(t-1)}, 1)}$$

در غیر این صورت به مرحله الف بازگردید.

باید توجه کرد که همه پارامترها در مقادیر $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha}, \hat{\mu})$ برآورد ماکسیمم درستنمایی (λ, α, μ) محاسبه شده‌اند.

۴- $\lambda_{(t)}$ از $\Gamma(J_1 + a_1, b_1 + V(\mu_{(t-1)}))$ تولید کنید.

۵- $\alpha_{(t)}$ از $\Gamma(J_2 + a_2, b_2 + U(\mu_{(t-1)}))$ تولید کنید.

۶- مقدار $R_t = \frac{\lambda_{(t)}}{\alpha_{(t)} + \lambda_{(t)}}$ را محاسبه کنید.

۷- قرار دهید $t = t + 1$.

۸- گام‌های ۳-۷ را به تعداد T مرتبه تکرار نمایید.

بنا بر این با به کار بردن این الگوریتم، برآورد بیزی پارامتر R تحت تابع زیان مربعات خطا، برابر است با:

$$\hat{R}^{MC} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t \quad (4)$$

همچنین با استفاده از این ساختار می‌توان یک فاصله باور HPD در سطح $\% (1 - \eta) 100$ با استفاده از روش چن و شائو [۷] ارائه نمود.

۳- استنباط بیزی پارامتر R با پارامتر مشترک و معلوم μ

در این بخش استنباط بیزی پارامتر R تحت تابع زیان مربعات خطا، زمانی که λ و α دارای توزیع‌های پیشین گامای مستقل هستند، بررسی می‌شود. در این صورت، بر مبنای نمونه سانسور مشاهده شده، تابع درستنمایی برابر است با:

$$L(data, \mu|\lambda, \alpha) \propto \lambda^{J_1} \alpha^{J_2} e^{-\lambda V(\mu) - \alpha U(\mu)}$$

بنا بر این تابع چگالی پسین توأم بصورت زیر است:

$$\pi(\lambda, \alpha|data, \mu) \propto L(data, \mu|\lambda, \alpha) \pi_1(\lambda) \pi_2(\alpha) \quad (5)$$

۲-۲ روش MCMC

در این روش با استفاده از رابطه (۱)، توابع چگالی احتمال پسین λ و α بعد از ساده کردن، می‌توانند به صورت زیر به دست آورده شوند:

$$\lambda|\alpha, \mu, data \sim \Gamma(J_1 + a_1, b_1 + V(\mu)),$$

$$\alpha|\lambda, \mu, data \sim \Gamma(J_2 + a_2, b_2 + U(\mu)),$$

$$\pi(\mu|\lambda, \alpha, data) \propto$$

$$\prod_{i=1}^{J_1} (x_i - \mu) \prod_{j=1}^{J_2} (y_j - \mu) e^{-\lambda V(\mu) - \alpha U(\mu)},$$

که در آن:

$$V(\mu) = \sum_{i=1}^{J_1} (R_i + 1)(x_i - \mu)^2 + R_{J_1}^* (T_1 - \mu)^2, \quad (3)$$

$$U(\mu) = \sum_{j=1}^{J_2} (S_j + 1)(y_j - \mu)^2 + S_{J_2}^* (T_2 - \mu)^2.$$

ملاحظه می‌شود که تابع چگالی پسین μ ، $\pi(\mu|\lambda, \alpha, data)$ یک توزیع شناخته شده نیست، بنا بر این تولید نمونه تصادفی از آن باید به روش متروپولیس-هستینگز با توزیع پیشنهادی نرمال انجام شود. بنا بر این الگوریتم گیبز پیشنهادی به صورت زیر ارائه می‌شود:

۱- با مقادیر اولیه $(\lambda_{(0)}, \alpha_{(0)}, \mu_{(0)})$ شروع کنید.

۲- قرار دهید $t = 1$.

$$\hat{R}^B = \begin{cases} E \times {}_2F_1(w, J_1 + a_1 + 1; w + 1, z) & |z| < 1 \\ F \times {}_2F_1(w, J_1 + a_1; w + 1, \frac{z}{1-z}) & z < -1, \end{cases} \quad (۶)$$

که در آن:

$$E = \frac{(1-z)^{J_1+a_1}(J_1+a_1)}{w}, F = \frac{J_1+a_1}{w(1-z)^{J_1+a_1}}$$

است. لذا، یک فاصله باور بییزی در سطح $100(1-\eta)\%$ به صورت (L, U) ساخته می‌شود که در آن L و U بایستی به ترتیب در روابط زیر صدق نمایند:

$$\int_0^L f_R(R) dR = \frac{\eta}{2}, \quad \int_0^U f_R(R) dR = 1 - \frac{\eta}{2} \quad (۷)$$

که در نهایت با استفاده از رابطه (۵) و به کارگیری روش تغییر متغیر می‌توان $f_R(R)$ را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$f_R(R) = \frac{(1-z)^{J_1+a_1} R^{J_1+a_1-1} (1-R)^{J_1+a_1-1} (1-Rz)^{-w}}{B(J_1+a_1, J_2+a_2)}$$

۴- استنباط بییزی پارامتر R در حالت کلی

در این بخش، فرض کنید که $X \sim tR(\mu_1, \lambda)$ و $Y \sim tR(\mu_2, \alpha)$ باشند، در این صورت پارامتر قابلیت اطمینان R به صورت انتگرالی زیر محاسبه می‌شود:

$$R = 1 - \int_{\mu_2}^{\infty} 2\alpha(y - \mu_2) e^{-\lambda(y - \mu_1)^2 - \alpha(y - \mu_2)^2} dy.$$

در این بخش به استنباط بییزی پارامتر R تحت تابع زیان مربعات خطا، زمانی که توابع چگالی پیشین λ ، α دارای توزیع‌های گامای مستقل، و پارامترهای μ_1 و μ_2 دارای توابع چگالی پیشین ناآگاهی بخش هستند، پرداخته می‌شود. مشابه بخش ۲-۲، از آن جاکه برآورد بییزی پارامتر R را نمی‌توان به صورت فرم بسته نمایش داد، با استفاده از روش MCMC تقریبی برای این برآورد ارائه می‌دهیم. با توجه به تابع چگالی پسین توأم، توابع چگالی پسین λ ، α ، μ_1 و μ_2 به ترتیب برابر هستند با:

$$\lambda | \mu_1, data \sim \Gamma(J_1 + a_1, b_1 + V(\mu_1)),$$

$$\alpha | \lambda^{J_1} \alpha^{J_2} e^{-\lambda V(\mu) - \alpha U(\mu)} \lambda^{a_1-1} e^{-b_1 \lambda} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha}$$

$$\alpha | \lambda^{J_1+a_1-1} \alpha^{J_2+a_2-1} e^{-\lambda(b_1+V(\mu)) - \alpha(b_2+U(\mu))}$$

$$= \frac{(\lambda(b_1+V(\mu)))^{J_1+a_1} (\alpha(b_2+U(\mu)))^{J_2+a_2}}{\alpha \lambda \Gamma(J_1+a_1) \Gamma(J_2+a_2)} \times e^{-\lambda(b_1+V(\mu)) - \alpha(b_2+U(\mu))},$$

که در $U(\mu)$ و $V(\mu)$ در رابطه (۳) بیان شده‌اند. حال برآورد بییزی پارامتر R تحت تابع زیان مربعات خطا از حل انتگرال زیر به دست می‌آید:

$$\hat{R}^B = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\lambda}{\alpha + \lambda} \pi(\lambda, \alpha | data, \mu) d\lambda d\alpha.$$

حال تبدیل‌های یک به یک $u_1 = \frac{\lambda}{\alpha + \lambda}$ و $u_2 = \alpha + \lambda$ را در نظر بگیرید. در این صورت $0 < u_1 < 1$ و $u_2 > 0$ و $\lambda = u_1 u_2$ است و $u_1 u_2$ برابر (u_1, u_2) است و \hat{R}^B را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\hat{R}^B = \frac{(\lambda(b_1+V(\mu)))^{J_1+a_1} (\alpha(b_2+U(\mu)))^{J_2+a_2}}{\alpha \lambda \Gamma(J_1+a_1) \Gamma(J_2+a_2)}$$

$$\times \int_0^1 \int_0^\infty u_1^{J_1+a_1} (1-u_1)^{J_2+a_2-1} u_2^{w-1}$$

$$\times e^{-u_2\{u_1(b_1+V(\mu)) + (1-u_1)(b_2+U(\mu))\}} du_2 du_1$$

$$= \frac{(1-z)^{J_1+a_1}}{B(J_1+a_1, J_2+a_2)}$$

$$\times \int_0^1 u_1^{J_1+a_1} (1-u_1)^{J_2+a_2} (1-u_1 z)^{-w} du_1,$$

که در آن $z = 1 - \frac{b_1+V(\mu)}{b_2+U(\mu)}$ و $w = J_1 + a_1 + J_2 + a_2$ است. انتگرال نمایش داده شده همان سری هایپرژئومتریک است، که توسط بسیاری از نرم افزارها مانند متلب قابل محاسبه می‌باشد:

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma, \lambda) =$$

$$\frac{1}{B(\beta, \gamma - \beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tz)^{-\alpha} dt.$$

بنا بر این با به کار بردن ایده کیزیلان و نادار [۸]، برآورد بیزی دقیق را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود:

۵- مطالعات شبیه‌سازی

در این بخش، عملکرد برآوردگرهای مختلف بیزی، تحت طرح‌های HPC، را با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو بررسی می‌نماییم. روش شبیه‌سازی مونت کارلو کاربردهای فراوانی در نظریه احتمال دارد. برآوردهای نقطه‌ای حاصل برحسب میانگین مربعات خطا (MSE) و برآوردهای فاصله‌ای برحسب میانگین طول فواصل و درصد همگرایی با هم مقایسه می‌شوند. تمامی نتایج با ۳۰۰۰ مرتبه تکرار حاصل شده‌اند. همچنین در این مطالعه، ۳ طرح سانسور مختلف مورد بررسی قرار داده می‌شود که این طرح‌ها عبارت‌اند از:

$$\text{طرح ۱: } R_1 = \dots = R_{n-1} = 0, R_n = N - n$$

$$\text{طرح ۲: } R_1 = N - n, R_2 = \dots = R_n = 0$$

$$\text{طرح ۳: } R_1 = \dots = R_n = \frac{N-n}{n}$$

علاوه بر آن، استنباط بیزی با استفاده از دو توزیع پیشین متفاوت به صورت زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد:

$$\text{پیشین ۱: } a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$$

$$\text{پیشین ۲: } a_1 = a_2 = 1, b_1 = b_2 = 0.1$$

در حالت اول، با فرض پارامتر μ مشترک و نامعلوم، مقادیر پارامتر $(\lambda, \alpha, \mu) = (2, 2.5, 1)$ برای به دست آوردن نتایج شبیه‌سازی به کار گرفته شده‌اند. تحت شرایط بالا، مقادیر MSE برای برآوردگرهای بیزی با استفاده از تقریب لیندلی و روش MCMC از روابط (۲) و (۴) به ترتیب به دست آمده‌اند. همچنین فواصل باور HPD در سطح اطمینان ۹۵٪ محاسبه شده‌اند. نتایج حاصل شده، در جدول ۱ گزارش شده است. از جدول ۱، ملاحظه می‌شود که بهترین عملکرد، برحسب MSE، به توابع چگالی پیشین آگاهی‌بخش (توابع چگالی پیشین ۲) تعلق دارد. علاوه بر این، برآورد بیزی به دست آمده به روش MCMC نسبت به روش لیندلی، در حالت کلی دارای عملکرد بهتری است. همچنین، ملاحظه می‌شود که فواصل باور HPD بر اساس توابع چگالی پیشین آگاهی‌بخش (توابع چگالی پیشین ۲) دارای طول فواصل کوتاه‌تر و درصد همگرایی بیش‌تری هستند و لذا بهترین عملکرد را نسبت به توابع چگالی پیشین ناآگاهی‌بخش (توابع چگالی پیشین ۱) دارند. همچنین به‌عنوان یک حقیقت، از جدول ۱، ملاحظه می‌شود که با افزایش n برای N و T ثابت، و با افزایش T برای N و n ثابت، مقادیر MSE و طول فواصل باور کاهش یافته و مقادیر درصد همگرایی به دلیل دسترس بودن داده‌های بیش‌تر، در تمامی حالت‌ها افزایش می‌یابد.

$$\alpha | \mu_2, data \sim \Gamma(J_2 + a_2, b_2 + U(\mu_2)),$$

$$\pi(\mu_1 | \lambda, data) \propto \prod_{i=1}^{J_1} (x_i - \mu_1) e^{-\lambda V(\mu_1)},$$

$$\pi(\mu_2 | \alpha, data) \propto \prod_{j=1}^{J_2} (y_j - \mu_2) e^{-\alpha U(\mu_2)}.$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود برای تولید یک نمونه تصادفی از توابع چگالی احتمال پسین $\pi(\mu_1 | \lambda, data)$ و $\pi(\mu_2 | \alpha, data)$ باید از روش متروپولیس-هستینگر استفاده گردد. بنا بر این الگوریتم گیبز پیشنهادی به صورت زیر ارائه می‌شود:

۱. با مقادیر اولیه $(\lambda_{(0)}, \alpha_{(0)}, \mu_{1(0)}, \mu_{2(0)})$ شروع کنید.

۲. قرار دهید $t = 1$.

۳. با استفاده از روش متروپولیس-هستینگر $\mu_{1(t)}$ را از $\pi(\mu_1 | \lambda_{(t-1)}, data)$ با توزیع پیشنهادی $N(\mu_{1(t-1)}, 1)$ تولید کنید.

۴. با استفاده از روش متروپولیس-هستینگر $\mu_{2(t)}$ را از $\pi(\mu_2 | \alpha_{(t-1)}, data)$ با توزیع پیشنهادی $N(\mu_{2(t-1)}, 1)$ تولید کند.

۵. $\lambda_{(t)}$ را از $\Gamma(J_1 + a_1, b_1 + V(\mu_{1(t-1)}))$ تولید کنید.

۶. $\alpha_{(t)}$ را از $\Gamma(J_2 + a_2, b_2 + U(\mu_{2(t-1)}))$ تولید کنید.

۷. مقدار R_t را به صورت زیر محاسبه کنید:

$$R_t = 1 - \int_{\mu_{2(t)}}^{\infty} 2\alpha_{(t)}(y - \mu_{2(t)}) \times e^{-\lambda_{(t)}(y - \mu_{1(t)}) - \alpha_{(t)}(y - \mu_{2(t)})} dy,$$

۸. قرار دهید $t = t + 1$.

۹. گام‌های ۸-۳ را به تعداد T مرتبه تکرار نمایید.

لذا برآورد بیزی پارامتر R ، تحت تابع زیان مربعات خطا برابر است با:

$$\hat{R}^{MC} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t. \quad (8)$$

همچنین می‌توان بر این اساس، یک فاصله باور HPD در سطح $100(1 - \eta)\%$ با استفاده از روش چن و شائو [۹] ارائه نمود.

جدول ۱. نتایج شبیه‌سازی با پارامتر مکان مشترک و نامعلوم.									
Prior 2				Prior 1				C.S	(N, n, T)
Lindley	MCMC			Lindley	MCMC				
MSE	C.P	Length	MSE	MSE	C.P	Length	MSE		
۰/۰۱۶۵	۰/۹۰۲	۰/۳۹۲۲	۰/۰۰۹۹	۰/۰۱۷۲	۰/۹۰۰	۰/۴۰۶۱	۰/۰۱۰۳	(۱و۱)	(۴۰/۷ و ۱۰/۴۰)
۰/۰۲۱۰	۰/۹۰۷	۰/۳۹۳۱	۰/۰۱۱۰	۰/۰۲۱۵	۰/۹۰۲	۰/۴۰۴۳	۰/۰۱۱۵	(۲و۲)	
۰/۰۱۴۰	۰/۹۰۸	۰/۳۹۵۶	۰/۰۰۹۶	۰/۰۱۶۱	۰/۹۰۳	۰/۴۱۱۷	۰/۰۱۰۰	(۳و۳)	
۰/۰۴۳۵	۰/۹۰۴	۰/۳۷۸۸	۰/۰۳۱۴	۰/۰۵۲۴	۰/۹۰۱	۰/۳۸۸۷	۰/۰۳۲۲	(۱و۲)	
۰/۰۱۴۷	۰/۹۱۵	۰/۳۸۶۴	۰/۰۰۹۴	۰/۰۱۶۱	۰/۹۱۵	۰/۴۰۱۹	۰/۰۰۹۷	(۱و۱)	(۴۰/۹ و ۱۰/۴۰)
۰/۰۱۳۸	۰/۹۱۶	۰/۳۹۰۲	۰/۰۰۸۴	۰/۰۱۶۸	۰/۹۱۵	۰/۴۰۲	۰/۰۰۸۷	(۲و۲)	
۰/۰۱۲۹	۰/۹۲۰	۰/۳۹۴۸	۰/۰۰۹۲	۰/۰۱۳۳	۰/۹۱۸	۰/۴۰۷۸	۰/۰۰۹۳	(۳و۳)	
۰/۰۳۷۴	۰/۹۲۰	۰/۳۷۰۸	۰/۰۲۷۰	۰/۰۴۵۴	۰/۹۱۵	۰/۳۷۶۹	۰/۰۲۷۶	(۱و۲)	
۰/۰۱۶۳	۰/۹۳۰	۰/۳۸۹۵	۰/۰۰۹۵	۰/۰۱۹۵	۰/۹۲۹	۰/۴۰۴۲	۰/۰۰۹۸	(۱و۱)	(۴۰/۹ و ۱۰/۶۰)
۰/۰۱۵۲	۰/۹۲۴	۰/۳۹۰۶	۰/۰۰۹۵	۰/۰۱۷۹	۰/۹۲۲	۰/۴۰۳۹	۰/۰۰۹۸	(۲و۲)	
۰/۰۱۱۷	۰/۹۲۲	۰/۰۳۹۲	۰/۰۰۸۲	۰/۰۱۳۹	۰/۹۲۱	۰/۴۰۵۵	۰/۰۰۸۳	(۳و۳)	
۰/۰۳۷۳	۰/۹۳۱	۰/۳۶۵۹	۰/۰۳۲۳	۰/۰۴۵۳	۰/۹۳۰	۰/۳۷۱۷	۰/۰۳۳۱	(۱و۲)	
۰/۰۰۶۷	۰/۹۴۲	۰/۲۹۱۹	۰/۰۰۴۶	۰/۰۰۷۶	۰/۹۴۰	۰/۲۹۷۹	۰/۰۰۴۷	(۱و۱)	(۴۰/۹ و ۲۰/۶۰)
۰/۰۰۷۱	۰/۹۴۰	۰/۲۸۷۳	۰/۰۰۵۳	۰/۰۰۷۹	۰/۹۳۹	۰/۲۹۷۷	۰/۰۰۵۴	(۲و۲)	
۰/۰۰۶۴	۰/۹۴۴	۰/۲۹۰۴	۰/۰۰۵۰	۰/۰۰۶۹	۰/۹۴۲	۰/۲۹۷۴	۰/۰۰۵۱	(۳و۳)	
۰/۰۳۵۳	۰/۹۴۰	۰/۲۵۶۲	۰/۰۲۴۳	۰/۰۴۲۲	۰/۹۳۹	۰/۲۵۹۸	۰/۰۲۵۱	(۱و۲)	

در حالت سوم، با فرض μ_1 و μ_2 متفاوت و نامعلوم، مقادیر پارامتر $(3, 2.5, 2, 1) = (\lambda, \alpha, \mu_1, \mu_2)$ برای به‌دست آوردن نتایج شبیه‌سازی لحاظ شده‌اند. این حالت برای محققان نظریه قابلیت اطمینان دارای اهمیت ویژه‌ای است، زیرا در بسیاری از شرایط کاربردی فرضیه مشترک بودن پارامترها بسیار ضعیف است و لذا این حالت مهم‌ترین حالت مورد بررسی است. تحت شرایط بالا، مقادیر MSE برآوردهای بی‌زی با استفاده از رابطه (۸) به‌دست آمده است. همچنین فواصل باور HPD در سطح ۹۵٪ محاسبه شده‌اند. نتایج حاصل شده، در جدول ۳ گزارش شده است. از جدول ۳ مشابه جداول قبل مشاهده می‌شود که بهترین عملکرد، برحسب MSE، به توابع چگالی پیشین آگاهی‌بخش (توابع چگالی پیشین ۲) تعلق دارد. علاوه بر این، برآورد MCMC بی‌زی در این حالت محاسبه شده است. همچنین، ملاحظه می‌شود که فواصل باور HPD بر اساس توابع چگالی پیشین آگاهی‌بخش (توابع چگالی پیشین ۲) دارای طول فواصل کوتاه‌تر و درصد همگرایی بیشتر هستند و لذا بهترین عملکرد را نسبت به توابع چگالی پیشین ناآگاهی‌بخش (توابع چگالی پیشین ۱) دارند.

در حالت دوم، با فرض پارامتر μ مشترک و معلوم، مقادیر پارامتر $(3, 2.5, 2) = (\lambda, \alpha, \mu)$ برای به‌دست آوردن نتایج شبیه‌سازی فرض شده‌اند. تحت شرایط بالا، مقادیر MSE برای برآوردگر دقیق بی‌زی و فاصله باور بی‌زی با استفاده از روابط (۶) و (۷) به‌ترتیب به‌دست آمده‌اند. نتایج حاصل شده، در جدول ۲ ارائه شده است. از جدول ۲، ملاحظه می‌شود که بهترین عملکرد، برحسب MSE، به توابع چگالی پیشین آگاهی‌بخش (توابع چگالی پیشین ۲) تعلق دارد. علاوه بر این، برآورد دقیق بی‌زی در این حالت محاسبه شده است، که ملاحظه می‌شود فواصل باور بی‌زی بر اساس توابع چگالی پیشین آگاهی‌بخش (توابع چگالی پیشین ۲) دارای طول فواصل کوتاه‌تر و درصد همگرایی بیشتری هستند و لذا بهترین عملکرد را نسبت به توابع چگالی پیشین ناآگاهی‌بخش (توابع چگالی پیشین ۱) دارند. علاوه بر این از جدول ۲، ملاحظه می‌شود که با افزایش n برای N و T ثابت، و با افزایش T برای N و n ثابت، مقادیر MSE و طول فواصل باور کاهش یافته و مقادیر درصد همگرایی به دلیل در دسترس بودن داده‌های بیشتر، در تمامی حالت‌ها افزایش می‌یابد.

جدول ۲. نتایج شبیه‌سازی با پارامتر مکان مشترک و معلوم.

Prior 2 (Exact)			Prior 1 (Exact)			C.S	(N, n, T)
C.P	Length	MSE	C.P	Length	MSE		
۰/۹۲۴	۰/۳۹۴۶	۰/۰۰۶۷	۰/۹۲۳	۰/۴۰۶۷	۰/۰۱۰۹	(۱و۱)	(۴۰و۱۰و۰/۷)
۰/۹۲۵	۰/۳۹۴۴	۰/۰۰۶۱	۰/۹۱۹	۰/۴۰۵۱	۰/۰۱۰۵	(۲و۲)	
۰/۹۰۵	۰/۳۹۶۴	۰/۰۰۶۸	۰/۹۰۲	۰/۴۰۷۲	۰/۰۱۱۷	(۳و۳)	
۰/۹۰۳	۰/۳۷۵۸	۰/۰۲۵۲	۰/۹۰۱	۰/۳۷۵۹	۰/۰۳۱۵	(۱و۲)	
۰/۹۱۹	۰/۳۹۳۵	۰/۰۰۶۴	۰/۹۱۵	۰/۴۰۳۷	۰/۰۱۱۶	(۱و۱)	(۴۰و۱۰و۰/۹)
۰/۹۲۵	۰/۳۹۳۵	۰/۰۰۵۵	۰/۹۲۴	۰/۴۰۴۴	۰/۰۰۹۵	(۲و۲)	
۰/۹۳۵	۰/۳۹۴۵	۰/۰۰۶۴	۰/۹۳۴	۰/۴۰۵۷	۰/۰۱۱۰	(۳و۳)	
۰/۹۲۹	۰/۳۷۳۳	۰/۰۱۹۸	۰/۹۲۵	۰/۳۷۳۶	۰/۰۲۹۹	(۱و۲)	
۰/۹۲۶	۰/۳۹۵۱	۰/۰۰۶۱	۰/۹۲۴	۰/۴۰۶۰	۰/۰۱۰۵	(۱و۱)	(۴۰و۱۰و۰/۹)
۰/۹۲۵	۰/۳۹۴۵	۰/۰۰۶۳	۰/۹۲۴	۰/۴۰۴۲	۰/۰۱۰۸	(۲و۲)	
۰/۹۲۴	۰/۳۹۴۲	۰/۰۰۶۲	۰/۹۲۳	۰/۴۰۵۳	۰/۰۱۰۶	(۳و۳)	
۰/۹۳۴	۰/۳۷۰۰	۰/۰۳۰۴	۰/۹۳۳	۰/۳۷۰۷	۰/۰۳۷۸	(۱و۲)	
۰/۹۴۷	۰/۲۹۱۹	۰/۰۰۴۵	۰/۹۴۴	۰/۲۹۷۰	۰/۰۰۶۱	(۱و۱)	(۴۰و۲۰و۰/۹)
۰/۹۴۸	۰/۲۹۲۱	۰/۰۰۴۱	۰/۹۴۴	۰/۲۹۷۰	۰/۰۰۵۵	(۲و۲)	
۰/۹۴۶	۰/۲۹۲۲	۰/۰۰۴۰	۰/۹۴۳	۰/۲۹۶۹	۰/۰۰۵۳	(۳و۳)	
۰/۹۴۶	۰/۲۶۰۶	۰/۰۲۰۹	۰/۹۴۶	۰/۲۶۱۲	۰/۰۳۲۱	(۱و۲)	

فواصل باور کاهش یافته و مقادیر درصد همگرایی به دلیل در دسترس بودن داده‌های بیشتر، در تمامی حالت‌ها افزایش می‌یابد.

علاوه بر این ملاحظه می‌شود که با افزایش n برای N و T ثابت، و با افزایش T برای N و n ثابت، مقادیر MSE و طول

جدول ۳. نتایج شبیه‌سازی در حالت کلی

Prior 2 (MCMC)			Prior 1 (MCMC)			C.S	(N, n, T)
C.P	Length	MSE	C.P	Length	MSE		
۰/۹۰۱	۰/۳۹۳۳	۰/۰۰۸۰	۰/۹۰۰	۰/۴۰۸۳	۰/۰۱۱۱	(۱و۱)	(۴۰و۱۰و۰/۷)
۰/۹۱۷	۰/۳۹۴۸	۰/۰۰۵۶	۰/۹۱۲	۰/۴۱۱۴	۰/۰۰۷۸	(۲و۲)	
۰/۹۰۶	۰/۳۹۴۴	۰/۰۰۸۰	۰/۹۰۰	۰/۴۰۵۳	۰/۰۱۱۵	(۳و۳)	
۰/۹۱۳	۰/۳۷۲۹	۰/۰۲۷۹	۰/۹۱۱	۰/۳۸۰۱	۰/۰۳۲۰	(۱و۲)	
۰/۹۲۴	۰/۳۹۲۲	۰/۰۰۶۶	۰/۹۲۳	۰/۴۰۴۸	۰/۰۰۹۰	(۱و۱)	(۴۰و۱۰و۰/۹)
۰/۹۱۹	۰/۳۹۴	۰/۰۰۴۸	۰/۹۱۵	۰/۴۰۷۶	۰/۰۰۷۶	(۲و۲)	
۰/۹۲۲	۰/۳۹۳۵	۰/۰۰۷۴	۰/۹۲۱	۰/۴۰۵۰	۰/۰۱۰۵	(۳و۳)	
۰/۹۳۵	۰/۳۵۳۲	۰/۰۲۱۲	۰/۹۳۳	۰/۳۷۱۹	۰/۰۲۸۱	(۱و۲)	
۰/۹۳۷	۰/۳۹۴۶	۰/۰۰۶۴	۰/۹۳۱	۰/۴۰۶۲	۰/۰۰۸۹	(۱و۱)	(۴۰و۱۰و۰/۹)
۰/۹۳۶	۰/۳۹۳	۰/۰۰۷۳	۰/۹۳۰	۰/۴۰۳۵	۰/۰۱۰۴	(۲و۲)	
۰/۹۲۶	۰/۳۸۱۱	۰/۰۰۵۸	۰/۹۲۱	۰/۴۰۳	۰/۰۰۷۱	(۳و۳)	
۰/۹۱۷	۰/۳۶۶۸	۰/۰۲۴۵	۰/۹۱۵	۰/۳۷۴	۰/۰۳۱۶	(۱و۲)	
۰/۹۴۳	۰/۲۹۲۳	۰/۰۰۴۳	۰/۹۴۲	۰/۲۹۷۳	۰/۰۰۵۱	(۱و۱)	(۴۰و۲۰و۰/۹)
۰/۹۴۵	۰/۲۸۹۲	۰/۰۰۴۳	۰/۹۴۰	۰/۲۹۵۶	۰/۰۰۵۰	(۲و۲)	
۰/۹۴۳	۰/۲۹۲۳	۰/۰۰۴۲	۰/۹۳۹	۰/۲۹۸۵	۰/۰۰۵۰	(۳و۳)	
۰/۹۴۴	۰/۲۵۷۷	۰/۰۲۰۳	۰/۹۴۰	۰/۲۵۹۸	۰/۰۲۷۱	(۱و۲)	

۷- مراجع

- [1] Balakrishnan, N. and Aggarwala, R. (2000). Progressive censoring, methods and applications, Boston, Birkhäuser.
- [۲] Kundu, D. and Joarder, A. (2006). Analysis of type-II progressively hybrid censored data, Computational Statistics and Data Analysis, 50(10): 2509-2528.
- [۳] Shoaee, S. and Khorram, E. (2015). Stress-strength reliability of a two-parameter bathtub-shaped lifetime distribution based on progressively censored samples, Communications in Statistics-Theory and Methods, 44(24): 5306-5328.
- [۴] Shoaee, S. and Khorram, E. (2016). Statistical inference of $R=P(Y<X)$ for Weibull distribution under Type-II progressively hybrid censored data, Journal of Statistical Computation and Simulation, 86(18): 3815-3834.
- [۵] Kohansal, A. (2019). On estimation of reliability in a multicomponent stress-strength model for a Kumaraswamy distribution based on progressively censored sample, Statistical Papers, 60(6): 2185-2224.
- [۶] Kohansal, A. and Rezakhah, S. (2019). Inference of $R = P(Y < X)$ for two-parameter Rayleigh distribution based on progressively censored samples, Statistics, 53(1): 81-100.
- [۷] Lindley, D. V. (1980). Approximate Bayesian methods, Trabajos de Estadística, 31(1): 281-288.
- [۸] Kizilaslan, F. and Nadar, M. (2018). Estimation of reliability in a multicomponent stress-strength model based on a bivariate Kumaraswamy distribution, Statistical Papers, 59(1): 307-340.
- [۹] Chen, M. H. and Shao, Q. M. (1999). Monte Carlo estimation of Bayesian Credible and HPD intervals, Journal of Computational and Graphical Statistics, 8(1): 69-92.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، تحت سانسور فزاینده پیوندی، زمانی که متغیرهای تنش و مقاومت دارای توزیع رایلی دو پارامتری هستند، برآورد بیزی پارامتر قابلیت اطمینان R به دست آمده است. در حقیقت ما مسئله را در سه حالت مختلف بررسی کرده‌ایم. حالت اول، برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای بیزی R ، وقتی که $X \sim tR(\mu, \lambda)$ و $Y \sim tR(\mu, \alpha)$ است، بدست آورده شده است. در این حالت چون برآورد بیزی دارای فرم بسته نمی‌باشد، به دو روش تقریبی لیندلی و MCMC محاسبه شده است. همچنین با استفاده از روش MCMC یک فاصله باور HPD در سطح ۹۵٪ برای پارامتر R محاسبه شده است. در حالت دوم، وقتی که پارامتر مشترک μ معلوم است، برآورد دقیق بیزی و همچنین فاصله باور بیزی در سطح ۹۵٪ برای پارامتر R بدست آورده شده است. در حالت سوم، وقتی که $X \sim tR(\mu_1, \lambda)$ و $Y \sim tR(\mu_2, \alpha)$ است، برآورد تقریبی بیزی با استفاده از روش MCMC و فاصله باور HPD بیزی در سطح ۹۵٪ برای پارامتر قابلیت اطمینان محاسبه شده است.

با به کار بردن روش شبیه‌سازی مونت کارلو برآوردهای مختلف بیزی با معیار MSE، طول فاصله باور و درصد همگرایی مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند. در ارزیابی مدل پیشنهادی، کم‌تر بودن مقدار MSE، کوتاه‌تر بودن طول فاصله باور و بیش‌تر بودن درصد همگرایی بیانگر مطلوب بودن روش برآوردیابی است.