

# طراحی آماری - اقتصادی نمودار کنترلی EWMA برای پایش میانگین فرایند تحت نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای

علیا رستمی

دانشجوی دکتری، دانشگاه علامه طباطبائی، olia\_rostami@yahoo.com

سید رحمت شجاعی علی‌آبادی

دانشجوی دکتری، دانشگاه علامه طباطبائی، shojaei\_ut@yahoo.com

محمد بامنی‌مقدم

(نویسنده مسئول) استاد تمام، دانشگاه علامه طباطبائی\*

## چکیده

اگر شناسایی تغییرهای کوچک در فرایند تولید مد نظر باشد، نمودار کنترلی میانگین متحرک موزون نمایی<sup>۱</sup> (EWMA) جایگزین مناسبی برای نمودار کنترلی  $\bar{X}$  است. در شرایطی که به علت محدودیت‌های اقتصادی نتوان نمونه‌ی بزرگ از جامعه استخراج کرد، طرح نمونه‌گیری تصادفی ساده<sup>۲</sup> (SRS) ممکن است از دقت کافی برخوردار نباشد، که در این صورت می‌توان از طرح نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای<sup>۳</sup> (RSS) استفاده نمود. در این مقاله برای اولین بار طراحی اقتصادی و آماری-اقتصادی نمودار کنترلی EWMA تحت طرح RSS بررسی شده است. با ارائه‌ی نتیجه‌های عددی، مزیت‌های طراحی آماری-اقتصادی نسبت به طراحی اقتصادی نشان داده شده است. نتیجه‌ها نشان می‌دهد که هزینه‌ها در طراحی آماری-اقتصادی نسبت به طراحی اقتصادی با اندک تغییری افزایش یافته است، اما به دلیل پایین بودن نرخ هشدار نادرست با هدف‌های کنترل کیفیت آماری هم‌راستا بوده و همزمان با کاهش هزینه‌ها، کیفیت محصول را در سطح مطلوبی از خطا و توان بالا، کنترل می‌کند.

**کلمات کلیدی:** طراحی آماری-اقتصادی، نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای، نمودار کنترلی EWMA.

## ۱- مقدمه

ناشی از وقوع تغییرهای ناشی از علت‌های اسنادپذیر باشد، فرایند خارج از کنترل تلقی می‌شود. بنا بر این، تشخیص سریع یک تغییر ناشی از علت اسنادپذیر و داشتن نرخ هشدار نادرست پایین در هر فرایند تولید، دو اولویت مهم در هر کسب و کار محسوب می‌شود. کنترل آماری فرایند<sup>۴</sup> (SPC) یک روش مؤثر برای بهبود کیفیت محصول و خدمات است، که شامل مجموعه‌ای قدرتمند از ابزارهایی است که در ایجاد ثبات فرایند و بهبود کارایی آن از

در فرایند تولید هر نوع محصول، علی‌رغم طراحی خوب یا نگهداری مناسب، همواره تغییرهایی در حین ساخت و پس از ساخت محصول رخ می‌دهد. میزان این تغییرها در کیفیت نهایی محصول به وقوع تغییرهای ناشی از علت‌های تصادفی<sup>۴</sup> و علت‌های اسنادپذیر<sup>۵</sup> وابسته است، به طوری که هرگاه فرایند فقط در حضور تغییرهای ناشی از علت‌های تصادفی عمل کند، گویند فرایند تحت کنترل آماری است. چنان‌چه منبع تغییرها در مشخصه‌ی کیفیت

\* (Corresponding author) bamenimoghadam@atu.ac.ir

<sup>1</sup> Exponentially Weighted Moving Average

<sup>2</sup> Simple Random Sampling

<sup>3</sup> Ranked Set Sampling

<sup>4</sup> Random Causes

<sup>5</sup> Assignable Causes

<sup>6</sup> Statistical Process Control

(h) و ضریب حدود کنترلی (L) است. مقادیر پارامترهای طراحی بسته به نوع طراحی تعیین می‌شوند، که انواع طراحی نمودار کنترلی عبارت‌اند از: تجربی، آماری، اقتصادی و آماری-اقتصادی. طراحی آماری نمودار کنترلی EWMA برای پایش میانگین تحت طرح RSS (EWMA<sub>RSS</sub>) و گونه‌های مختلف RSS توسط لی [۱۶]، ابوجیا و همکاران [۱۷]، حق و همکاران [۱۸]، [۱۹] و [۲۰]، تایاب و همکاران [۲۱]، اوایز و حق [۲۲] مورد بررسی قرار گرفته است و با توجه به معیارهای آماری، هم‌چون میانگین طول اجرا<sup>۷</sup> (ARL) که یکی از رایج‌ترین معیارها برای ارزیابی توان نمودار کنترلی است، در حالت تحت کنترل و خارج از کنترل بودن فرایند، نشان دادند که طرح RSS و گونه‌های مختلف RSS نسبت به طرح SRS کارتر است و همچنین نمودار کنترلی EWMA تحت این طرح‌ها نسبت به نمودار کنترلی EWMA تحت طرح SRS (EWMA<sub>SRS</sub>) توان بیش‌تری دارد. با توجه به مسائل اقتصادی، منطقی به نظر می‌رسد که نمودار کنترلی EWMA<sub>RSS</sub> علاوه بر رویکرد آماری، براساس رویکرد اقتصادی و آماری-اقتصادی، همانند نمودار کنترلی  $\bar{X}_{RSS}$  که توسط رستمی و همکاران [۲۳] معرفی شد، نیز طراحی و مورد بررسی قرار گیرد. در مدل‌های هزینه مربوط به طراحی اقتصادی و آماری-اقتصادی نمودارهای کنترلی، رده‌های مختلفی از هزینه‌ها همچون هزینه نمونه‌گیری، هزینه کشف یک هشدار خارج از کنترل و هزینه تولید محصول نامنطبق بررسی می‌شوند. ساختار مؤلفه‌های هزینه‌ی نمونه‌گیری تحت طرح RSS توسط افرادی چون دل و کلاتر [۱۳]، کور و همکاران [۲۴]، نهاز و همکاران [۲۵] و وانگ و همکاران [۲۶] معرفی شده است. اما تاکنون نمودار کنترلی EWMA<sub>RSS</sub> تحت طراحی‌های اقتصادی و آماری-اقتصادی در ادبیات کنترل کیفیت بررسی نشده است. از لحاظ آماری ارزیابی عملکرد نمودارهای کنترلی غیر شوهارتی همچون نمودار کنترلی EWMA، توسط معیار ARL امکان‌پذیر است. از طرفی معیار آماری ARL، مبنای مدل اقتصادی لورنزن و ونس [۲۷] و [۲۸] در شرایط تحت کنترل و خارج از کنترل بودن فرایند، می‌باشد. بدین ترتیب در این مقاله برای طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترلی EWMA<sub>RSS</sub> از مدل اقتصادی لورنزن و ونس [۲۹] استفاده شده است. پیش فرض‌های این مطالعه عبارت‌اند از ۱- مشخصه‌ی کیفیت مورد مطالعه تک متغیره است، ۲- مشخصه‌ی کیفیت فرایند از توزیع نرمال با میانگین و واریانس معلوم تبعیت می‌کند، ۳- مطالعه در مرحله دو انجام می‌شود لذا پارامترها معلوم فرض می‌شود و ۴- فرض بر این است که رتبه‌بندی مشخصه‌ی کیفیت در طرح RSS، بی نقص است. ساختار این مقاله به این صورت است که ابتدا در بخش دوم، طرح RSS، طراحی آماری

طریق کاهش تغییرها، مفید واقع می‌شود. یکی از ابزارهای اصلی کنترل آماری فرایند، نمودار کنترلی است. نمودار کنترلی  $\bar{X}$  و نمودار کنترلی EWMA رایج‌ترین نمودارهای کنترلی هستند که به‌طور گسترده برای پایش میانگین فرایند مورد استفاده قرار می‌گیرند. نمودارهای کنترلی شوهارتی مانند نمودار کنترلی  $\bar{X}$  تغییرهای کوچک را با تأخیر کشف می‌کنند که برای رفع این مشکل می‌بایست از نمودارهای کنترلی که نسبت به تغییرهای کوچک از حساسیت بالایی برخوردارند، استفاده شود. نمودار کنترلی EWMA برخلاف نمودار کنترلی  $\bar{X}$  نسبت به شناسایی تغییرهای کوچک از دقت کافی برخوردار است و جایگزین مناسبی برای نمودار کنترلی  $\bar{X}$  تلقی می‌شود. رابرتز [۱] اولین بار نمودار کنترلی غیرشوهارتی EWMA را معرفی نمود. بعد از وی افرادی همچون مونت گومری و همکاران [۲]، آلبین و همکاران [۳]، سری واستوا و وو [۴]، وو و اسپیدینگ [۵]، عباس و همکاران [۶]، موغال و همکاران [۷]، خان و همکاران [۸] و نوید و همکاران [۹] معتقد بودند این نمودار، بهترین ابزار برای شناسایی تغییرهای کوچک در میانگین فرایند می‌باشد.

نمودار کنترلی EWMA با استفاده از طرح SRS انجام شده است. طرح SRS، طرح پایه‌ای و کاربردی است و هر چه اندازه‌ی نمونه بزرگ‌تر باشد، نتیجه‌های به‌دست آمده توسط این طرح از دقت بالایی برخوردار است. در شرایطی که افزایش اندازه‌ی نمونه به دلیل (هزینه‌بر بودن، وقت‌گیر بودن و یا مخرب بودن) دشوار است، طرح RSS جایگزین مناسبی برای طرح SRS است. این طرح نمونه‌گیری اولین بار توسط مک‌این‌تایر [۱۰] برای برآورد محصول مرتع معرفی شد. هالز و دل [۱۱] از این طرح نمونه‌گیری برای برآورد میانگین محصول علوفه و میانگین ارتفاع درختان یک جنگل استفاده کردند. اولین نتیجه‌ی نظری طرح RSS توسط تاکاهاسی و واکیموتو [۱۲] به‌دست آمد. تاکاهاسی و واکیموتو، دل و کلاتر [۱۳]، استوکس [۱۴] و سینها و همکارانش [۱۵] ثابت کردند که میانگین نمونه‌ای به‌دست آمده از طرح نمونه‌گیری مجموعی رتبه‌ای ( $\bar{X}_{RSS}$ ) یک برآوردگر ناریب برای میانگین جامعه است و واریانس  $\bar{X}_{RSS}$  ( $\sigma_{\bar{X}_{RSS}}^2$ ) کم‌تر از واریانس  $\bar{X}_{SRS}$  ( $\sigma_{\bar{X}_{SRS}}^2$ ) است که میانگین نمونه‌ای به‌دست آمده از طرح نمونه‌گیری تصادفی ساده می‌باشد. از دیدگاه کنترل کیفیت، انتخاب طرح نمونه‌گیری مناسب و همچنین طراحی مناسب نمودار کنترلی می‌تواند بر بُعد آماری و نیز بُعد اقتصادی تأثیرگذار باشد. همین امر همچنین باعث افزایش توان و ارتقا حساسیت نمودارها نسبت به تغییرهای فرایند شده است. طراحی نمودار کنترلی به معنی گرفتن یک تصمیم اساسی درباره‌ی پارامترهای طراحی است که شامل اندازه‌ی نمونه (n)، فاصله‌ی نمونه‌گیری

<sup>7</sup> Average Run Length

$$\sigma_{\bar{X}_{RSS}}^2 = \text{var}(\bar{X}_{RSS}) = \frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \frac{\sigma_{(i:m)}^2}{m}$$

$$= \frac{1}{mr} \left\{ \sigma^2 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\mu_{(i:m)} - \mu)^2 \right\} \quad (2)$$

$\bar{X}_{RSS}$  طبق مرجع [۳۱] برآوردهگر ناریب برای میانگین جامعه ( $\mu$ ) است.

$\mu_{(i:m)}$  میانگین  $i$ -امین آماره‌ی مرتب در  $i$ -امین نمونه به اندازه‌ی  $m$  در  $r$ -امین تکرار می‌باشد که فرمول آن به صورت زیر است:

$$\mu_{(i:m)} = E[X_{(i:m)}] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{(i)}(x) dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x m \binom{m-1}{i-1} F^{i-1}(x) [1-F(x)]^{m-i} f(x) dx \quad (4)$$

با توجه به رابطه‌ی (۳) مشاهده می‌شود که واریانس  $\bar{X}_{RSS}$  نسبت به واریانس  $\bar{X}_{SRS}$  در حالتی که رتبه‌بندی بی نقص باشد، همواره کم‌تر است. با توجه به این ویژگی بهینه به معرفی نمودار کنترلی  $EWMA_{RSS}$  که نخستین بار توسط لی [۱۶] ارائه شد، می‌پردازیم. نمودار کنترلی  $EWMA$  به دلیل سادگی در رسم و تفسیر، ابزار مناسبی برای کنترل آماری فرایند است. آماره‌ی نمودار کنترلی  $EWMA_{RSSj}$  (به صورت زیر است:

$$EWMA_{RSSj} = \lambda \bar{X}_{RSSj} + (1-\lambda)EWMA_{RSSj-1} \quad (5)$$

که مقدار اولیه‌ی آماره‌ی  $EWMA_{RSSj}$  وقتی فرایند تحت کنترل آماری است، برابر با  $\mu$  می‌باشد، به عبارتی داریم:

$$EWMA_{RSSj} = \mu.$$

$\lambda$  ثابت هموارساز است و همواره مقدار ثابت هموارساز بین صفر و یک می‌باشد ( $0 < \lambda \leq 1$ ). وقتی  $\lambda = 1$  باشد، نمودار کنترلی  $EWMA_{RSS}$  مشابه نمودار کنترلی شوهراتی  $\bar{X}_{RSS}$  عمل می‌کند. مقدار کوچک  $\lambda$  حساسیت نمودار را نسبت به تغییرهای کوچک افزایش می‌دهد و مقدار بزرگ  $\lambda$  حساسیت نمودار را نسبت به تغییرهای بزرگ افزایش می‌دهد. میانگین و واریانس آماره‌ی  $EWMA_{RSSj}$  با توجه به رابطه‌های (۲) و (۳) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E(EWMA_{RSSj}) = \mu, \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (6)$$

$$\sigma_{EWMA_{RSSj}}^2 = \sigma_{\bar{X}_{RSSj}}^2 \left[ \frac{\lambda}{1-\lambda} \right] [1 - (1-\lambda)^{2j}] \quad (7)$$

نمودار کنترلی  $EWMA_{RSS}$  و محاسبه‌ی  $ARL$  به روش زنجیر مارکوف بیان می‌شود. سپس در بخش سوم، به ارائه‌ی مدل هزینه‌ی نمونه‌گیری تحت طرح  $RSS$  و طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترلی  $EWMA_{RSS}$  تحت مدل اقتصادی لورنزن و ونس با مدل شوک نمای می‌پردازیم. در بخش چهارم، نتیجه‌های عددی حاصل از طراحی اقتصادی و طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترلی  $EWMA_{RSS}$  و اثر تغییر پارامتر توزیع نمای بر متوسط هزینه‌ی بهینه در واحد زمان بررسی می‌شود. در بخش پنجم نیز به ارائه نتیجه‌گیری پرداخته می‌شود.

## ۲- نمودار کنترلی $EWMA_{RSS}$

### ۲-۱- طرح $RSS$

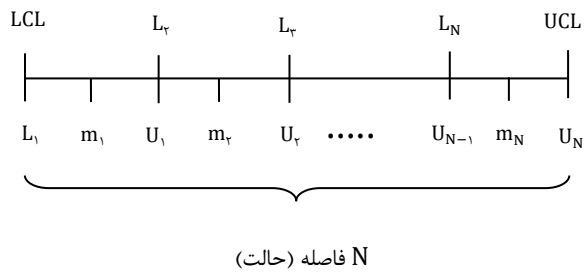
روش کلی طرح  $RSS$  به این صورت است که ابتدا  $m^2$  واحد از جامعه مورد مطالعه ( $m$  نمونه‌ی  $m$  تایی) به طور تصادفی انتخاب می‌شود. سپس واحدهای هر نمونه به طور جداگانه بر اساس نظر متخصص و قبل از اندازه‌گیری دقیق مشخصه‌ی کیفیت مورد نظر به صورت شهودی مرتب می‌شوند. در نهایت نمونه اصلی از آن‌ها به صورت زیر انتخاب می‌شود: ابتدا از نمونه‌ی اول کوچک‌ترین رتبه، از نمونه‌ی دوم دومین رتبه، ..... و در نهایت از نمونه‌ی  $m$ -ام،  $m$ -امین رتبه انتخاب می‌شود. بنا بر این، یک نمونه  $m$  تایی از جامعه مورد مطالعه به دست خواهد آمد. برای افزایش نمونه در این طرح، افزایش تعداد تکرارها را به جای افزایش  $m$ ، مورد نظر قرار می‌دهند. در حالت کلی، اگر تعداد نمونه مورد نظر به صورت  $n = rm$  باشد، می‌توان طرح  $RSS$  را برای  $m$  واحد به کار برد و این فرایند را  $r$  بار تکرار کرد. در این صورت نیاز به انتخاب  $rm^2$  واحد از جامعه مورد نظر است تا نمونه‌ای به اندازه  $n = rm$  استخراج شود.

### ۲-۲- محاسبه‌ی امید ریاضی و واریانس $\bar{X}_{RSS}$

فرض کنید  $X_{(i:m)}$   $i$ -امین آماره‌ی ترتیبی در  $i$ -امین نمونه به اندازه  $m$  در  $j$ -امین تکرار باشد. اگر توزیع مشخصه‌ی کیفیت طبق قضیه‌ی حد مرکزی لیاپانوف به طور مجانبی دارای توزیع نرمال با میانگین  $\mu$  و واریانس  $\sigma^2$  باشد ( $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ) [۳۰]. مطابق مرجع [۳۱]  $\mu_{\bar{X}_{RSS}}$  و  $\sigma_{\bar{X}_{RSS}}^2$  بدون خطای رتبه‌بندی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\bar{X}_{RSS} = \frac{1}{rm} \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^m X_{(i:m)} \quad (1)$$

$$\mu_{\bar{X}_{RSS}} = E(\bar{X}_{RSS}) = \frac{1}{rm} \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^m E(X_{(i:m)}) = \mu \quad (2)$$



هر چقدر افزایش‌ها بیشتر باشد، تقریب ARL از دقت بیشتری برخوردار است. محاسبه‌ی حدود کنترلی پایین و حدود کنترلی بالا در  $i$ -امین فاصله (حالت) به صورت زیر می‌باشد:

$$L_j = LCL + \frac{(j-1)(UCL - LCL)}{N} \quad (11)$$

$$U_j = LCL + \frac{j(UCL - LCL)}{N} \quad (12)$$

و برای  $i$ -امین خط مرکزی در فاصله‌ی  $i$ -ام داریم:

$$m_i = LCL + \frac{(i-1)(UCL - LCL)}{N} \quad (13)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N$$

به‌طور کلی احتمال انتقال از فاصله‌ی  $i$ -ام به فاصله‌ی  $j$ -ام به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} P_{ij} &= P(L_j < EWMA_{RSS_j} < U_j | EWMA_{RSS_{j-1}} = m_i) \\ &= P(L_j < \lambda \bar{X}_{RSS_j} + (1-\lambda)m_i < U_j) \\ &= P\left(\frac{L_j - (1-\lambda)m_i}{\lambda} < \bar{X}_{RSS_j} < \frac{U_j - (1-\lambda)m_i}{\lambda} \mid \mu = \mu + \delta\sigma\right) \\ &= P\left(\frac{\left(\frac{L_j - (1-\lambda)m_i}{\lambda} - (\mu + \delta\sigma)\right)}{\frac{\sigma_{\bar{X}_{RSS}}}{\lambda}} < \frac{\bar{X}_{RSS_j} - (\mu + \delta\sigma)}{\sigma_{\bar{X}_{RSS}}} < \frac{\left(\frac{U_j - (1-\lambda)m_i}{\lambda} - (\mu + \delta\sigma)\right)}{\sigma_{\bar{X}_{RSS}}}\right) \end{aligned}$$

وقتی که  $j \rightarrow \infty$  عبارت  $[1 - (1-\lambda)^j]$  برابر با مقدار یک می‌باشد و واریانس مجانبی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma_{EWMA_{RSS_j}}^2 = \sigma_{\bar{X}_{RSS_j}}^2 \left[ \frac{\lambda}{2-\lambda} \right] \quad (8)$$

حدود کنترلی براساس آماره‌ی  $EWMA_{RSS_j}$  که به‌طور مجانبی دارای توزیع نرمال با میانگین و واریانس معلوم است، توسط لی [۱۶] به صورت زیر معرفی شده است:

$$\begin{cases} UCL = \mu + L \sigma_{EWMA_{RSS_j}} \\ CL = \mu \\ LCL = \mu - L \sigma_{EWMA_{RSS_j}} \end{cases} \quad (9)$$

که  $L$  ضریب حدود کنترلی است و  $\sigma_{EWMA_{RSS_j}}$  به صورت زیر است:

$$\sigma_{EWMA_{RSS_j}} = \sqrt{\sigma_{\bar{X}_{RSS_j}}^2 \left[ \frac{\lambda}{2-\lambda} \right]} \quad (10)$$

طبق رابطه‌ی (۹)، هنگامی که فرایند تحت کنترل آماری است، در این صورت آماره‌ی کنترلی مورد نظر بین حدود کنترلی قرار می‌گیرد. در صورتی که آماره‌ی کنترلی خارج از حدود کنترلی قرار گیرد، فرایند خارج از کنترل تلقی می‌شود.

### ۳-۲- محاسبه‌ی ARL نمودار کنترلی EWMA

در این مقاله برای محاسبه‌ی ARL نمودار کنترلی  $EWMA_{RSS}$  در شرایط تحت کنترل و خارج از کنترل آماری از روش زنجیره مارکوف استفاده شده است، که اولین بار توسط بروک و اوانز [۳۲] معرفی شد. افرادی چون ساکوچی و لوکاس [۳۳]، تستیک [۳۴] برای محاسبه‌ی ARL نمودار کنترلی EWMA استفاده از روش مارکوفی را پیشنهاد کردند. به‌طور اساسی روش مارکوفی به این صورت است که حدود کنترلی بین UCL و LCL (وقتی فرایند تحت کنترل آماری است) به  $N$  فاصله برابر افزایش می‌شود که هر فاصله دارای حدود کنترلی بالا و حدود کنترلی پایین است. هر یک از فاصله‌ها به‌عنوان یک حالت در زنجیره مارکوف در نظر گرفته می‌شود که در تصویر زیر قابل رؤیت است:

طراحی اقتصادی و آماری-اقتصادی نمودار کنترلی EWMA<sub>RSS</sub> تحت مدل اقتصادی لورنزن و ونس می پردازیم.

### ۳- مدل هزینه

اندازه‌ی نمونه و هزینه دو عامل مؤثر در کارایی نمودار کنترلی هستند. افزایش اندازه‌ی نمونه باعث افزایش کارایی نمودار کنترلی می‌شود اما از آن‌جا که طراحی نمودارهای کنترلی عواقب اقتصادی متعددی به همراه دارد، موجب افزایش هزینه‌ی نمونه‌گیری می‌شود که مقرون به صرفه نیست. راه‌حل مناسب این است که در بررسی روند فرایند علاوه بر خواص آماری، رده‌بندی هزینه‌ها در نمودار کنترلی را که در مقدمه بیان شد، نیز مورد بررسی قرار داد. یکی از رده‌های هزینه که می‌تواند بر استفاده بهینه از نمودار کنترلی مؤثر واقع شود، هزینه‌ی نمونه‌گیری است. در طرح SRS هزینه‌ی نمونه‌گیری به‌طور معمول به صورت یک رابطه‌ی خطی بین هزینه‌های ثابت نمونه‌گیری و هزینه‌های متغیر نمونه‌گیری در نظر گرفته می‌شود. مدل هزینه‌ی نمونه‌گیری در مدل اقتصادی لورنزن و ونس تحت طرح SRS برابر با  $a + bn$  است و با توجه به مقاله‌ی نه‌ز و همکاران [۲۵] مدل هزینه‌ی نمونه‌گیری تحت طرح RSS عبارت است از:

$$C_{RSS} = C_{O(RSS)} + mr[mC_i + f(m)C_r + C_q] \quad (۱۶)$$

یک مدل هزینه‌ی نمونه‌گیری مناسب، محقق را قادر می‌سازد تا بر اساس اولویت‌های اندازه‌ی نمونه مناسب، دقت کافی و هزینه‌ی معقول، طرح نمونه‌گیری مناسب کار خود را به‌منظور استفاده بهینه از نمودار کنترلی به‌درستی انتخاب کند. دو عامل مهم در سودمندی طرح RSS، اندازه‌ی نمونه و ساختارهای عملیاتی در مدل هزینه‌ی نمونه‌گیری است که منجر به افزایش دقت در طرح RSS شده است. در طرح RSS هنگامی که هزینه‌ی رتبه‌بندی حائز اهمیت باشد، در مدل هزینه‌ی نمونه‌گیری ما باید این هزینه را نیز علاوه بر هزینه‌های ثابت  $a$  و متغیر  $b$  در طرح RSS در نظر بگیریم. دل و کلاتر [۱۳] اولین بار مدل هزینه‌ای برای هزینه‌ی نمونه‌گیری تحت طرح RSS پیش‌نهاد کردند. این مدل شامل هزینه‌ی نمونه‌گیری و رتبه‌بندی  $m$  واحد (که هزینه رتبه‌بندی صرف رتبه‌بندی  $m - 1$  واحد و مرتب کردن  $m$  واحد در هر نمونه می‌باشد) با نماد  $C_s$  و همچنین هزینه اندازه‌گیری برای هر واحد انتخاب شده با نماد  $C_q$  معرفی کردند. کور و همکاران [۲۴] یک مدل هزینه‌ی جزئی‌تر از دل و کلاتر [۱۳] که هزینه‌ی بیش‌تری را شامل می‌شود، ارائه نمودند که هدف‌شان بیان کارایی طرح RSS بود. کور و همکاران [۲۴] نمادها و فرمول هزینه‌ی نمونه‌گیری را تحت طرح RSS با اندازه‌ی نمونه  $n = mr$  به صورت زیر معرفی کردند:

$$= \Phi \left( \frac{\left( \frac{U_j - (1 - \lambda)m_i}{\lambda} - (\mu + \delta\sigma) \right)}{\sigma_{\bar{X}_{RSS}}} \right)$$

$$- \Phi \left( \frac{\left( \frac{L_j - (1 - \lambda)m_i}{\lambda} - (\mu + \delta\sigma) \right)}{\sigma_{\bar{X}_{RSS}}} \right)$$

فرض کنید  $Q$  یک ماتریس احتمال انتقال  $N \times N$  است، که عناصر آن از احتمال‌های انتقال  $p_{ij}$  در حالت تحت کنترل تشکیل شده است، یعنی:

$$Q = [P_{ij}] \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

فرض کنید بردار  $R$  یک بردار  $1 \times N$  است که بردار  $R$  را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$R = (I_N - Q)^{-1} 1_N \quad (۱۴)$$

که  $1_N$  یک بردار  $1 \times N$  از یک‌هاست و  $I_N$  یک ماتریس همانی  $N \times N$  است. بردار اولیه  $P_N$  یک بردار  $1 \times N$  است که می‌توان این مقدار را بنا به نظر پژوهش‌گر تعیین کرد.

$R$  (حالت خارج از کنترل آماری)       $Q$  (حالت تحت کنترل آماری)

$p_{11}$	$p_{12}$	$\dots$	$p_{1N}$	$P_{1(N+1)}$
$p_{21}$	$p_{22}$	$\dots$	$p_{2N}$	$P_{2(N+1)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_{1(N+1)}$	$P_{N2}$	$\dots$	$P_{NN}$	$P_{N(N+1)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$

به‌طور کلی محاسبه‌ی ARL نمودار کنترلی EWMA<sub>RSS</sub> با استفاده از روش زنجیر مارکوفی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$ARL = P_N^T (I_N - Q)^{-1} 1_N \quad (۱۵)$$

در رابطه‌ی (۱۵) اگر  $\delta = 0$  باشد، مقدار ARL تحت کنترل (ARL<sub>0</sub>) به دست می‌آید. در صورتی که  $\delta > 0$  باشد، مقدار ARL خارج از کنترل (ARL<sub>1</sub>) حاصل می‌شود. با توجه به برتری نمودار کنترلی EWMA<sub>RSS</sub> از نظر معیارهای آماری همچون ARL در اندازه‌ی نمونه برابر، نسبت به نمودار کنترلی EWMA که در مرجع [۱۶] مورد بررسی قرار گرفته است، در بخش بعدی به

$m$ : اندازه‌ی نمونه،  
 $r$ : تکرار چرخه،  
 $C_{RSS}$ : هزینه کل برای اجرای طرح،  
 $C_{O(RSS)}$ : هزینه‌های ثابت برای اجرای طرح RSS،  
 $C_i$ : هزینه شناسایی یک واحد نمونه‌گیری،  
 $C_q$ : هزینه اندازه‌گیری یک واحد نمونه‌گیری،  
 $C_r$ : هزینه رتبه‌بندی یک واحد نمونه‌گیری و  
 $f(m)$ : تعداد رتبه‌بندی‌های لازم برای مرتب کردن مشاهدات در یک نمونه‌ی  $m$  تایی.

و همچنین، متوسط زمان چرخه  $(E(T))$  و متوسط هزینه چرخه  $(E(C))$  تحت رابطه‌ی (۱۶) در مدل لورنزن و ونس [۲۹] با مدل شوک نمایشی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\gamma_1 = \begin{cases} 1 & \text{تولید طی جستجو ادامه یابد} \\ 0 & \text{تولید طی جستجو متوقف شود} \end{cases}$$

$$\gamma_2 = \begin{cases} 1 & \text{تولید طی تعمیر ادامه یابد} \\ 0 & \text{تولید طی تعمیر متوقف شود} \end{cases}$$

$$E(T) = \frac{1}{\theta} + (1 - \gamma_1) \frac{ST}{ARL} - \tau + (mr)e + h(ARL_1) + T_1 + T_r \quad (18)$$

$$E(C) = \frac{C_0}{\theta} + C_1[-\tau h + (mr)e + h(ARL_1) + \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_r] + \left[ \frac{SY}{ARL} + W \right] + \left[ \frac{(C_{O(RSS)} + mr[mC_i + f(m)C_r + C_q])}{hE(T)} \right] \quad (19)$$

در این صورت با توجه به رابطه‌ی (۱۸) و (۱۹)، هزینه مورد انتظار بر واحد زمان تحت طرح RSS به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E(A) = \frac{E(C)}{E(T)} \quad (20)$$

که با انتخاب پارامترهای طراحی بهینه و پارامترهای هزینه بهینه می‌توانیم متوسط هزینه مورد انتظار در واحد زمان  $(E(A))$  را تحت طرح RSS کمینه کنیم که از اهداف اصلی طراحی اقتصادی است. قابل توجه است که برای طراحی آماری-اقتصادی، پارامترهای طراحی نمودار کنترلی چنان تعیین می‌شوند که رابطه‌ی (۲۰) تحت قیدهای  $ARL_U > ARL_L$  و  $ARL_U < ARL_L$  مقدارهایی معلوم هستند، کمینه شود.

#### ۴- نتیجه‌های عددی

در این بخش، به ارائه شبیه‌سازی مربوطه برای طراحی اقتصادی و آماری- اقتصادی نمودار کنترلی EWMA بر مبنای طرح RSS بر اساس مدل اقتصادی لورنزن و ونس می‌پردازیم. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد که میانگین و واریانس فرایند به ترتیب ۰ و ۱ است. مقدار عددی نمادهای مدل اقتصادی

و نمادهای دیگر در فرمول‌بندی مدل اقتصادی لورنزن و ونس طبق مرجع [۲۶] به صورت زیر است:  
 $h$ : فاصله‌ی نمونه‌گیری،  
 $L$ : ضریب حدود کنترلی،  
 $\tau$ : زمان مورد انتظار وقوع یک تغییر ناشی از علت اسنادپذیر است، وقتی که تغییر ناشی از علت اسنادپذیر بین دو نمونه‌ی متوالی در حالت تحت کنترل رخ دهد،  
 $S$ : متوسط تعداد نمونه‌های اخذ شده در زمان تحت کنترل بوده است،  
 $Y$ : هزینه‌ی هر هشدار نادرست،  
 $W$ : هزینه‌ی مکانیابی و تعمیر یک تغییر ناشی از علت اسنادپذیر،  
 $\delta$ : اندازه‌ی انتقال در میانگین فرایند،  
 $\theta$ : پارامتر شکل در توزیع نمایشی،  
 $C$ : هزینه‌ی تولید محصول‌های نامنطبق، زمانی که فرایند تحت کنترل است،  
 $C_1$ : هزینه‌ی تولید محصول‌های نامنطبق، زمانی که فرایند خارج از کنترل است ( $C_1 < C$ )،  
 $e$ : زمان مورد انتظار برای رسم نمودار یک نمونه،  
 $T$ : متوسط زمان صرف شده برای بررسی یک هشدار نادرست است،  
 $T_1$ : میانگین زمان برای جستجوی یک تغییر ناشی از علت اسنادپذیر است،  
 $T_2$ : میانگین زمان لازم برای اصلاح یک تغییر ناشی از علت اسنادپذیر است،  
 $ARL$ : میانگین طول اجرا در زمان تحت کنترل بر اساس طرح RSS.

$$f(m) = \begin{cases} m \log(m) \\ \binom{m}{r} \end{cases} \quad (17)$$

است.

است.

است.

لورنزن و ونس و مقدار عددی نمادهای مدل هزینه‌ی نمونه‌گیری طرح RSS از مراجع [۲۷] و [۲۵] در جدول ۱ ارائه شده است. توزیع نمایی، مدل شوک مورد استفاده در مدل اقتصادی لورنزن و ونس است. در نمودارهای کنترلی  $EWMA_{RSS}$  مبنای بررسی ویژگی‌های آماری نمودار کنترلی،  $ARL_1$  و  $ARL_0$  است. در طراحی آماری-اقتصادی، مدل هزینه‌ی اقتصادی تحت قیدهایی  $ARL_1 = 5$  و  $ARL_0 = 370$  کمیینه می‌شود. جدول‌های ۲، ۳ و ۴ طراحی اقتصادی نمودار کنترلی  $EWMA_{RSS}$  تحت تابع‌های  $f(m)$  بر اساس مقدارهای ۰/۰۵، ۰/۰۱، ۰/۰۰۲ برای پارامتر توزیع نمایی ( $\theta$ ) وقتی فرایند شروع به تغییر از حالت تحت کنترل به حالت خارج از کنترل می‌کند را نمایش می‌دهند. با بررسی سه جدول ذکر شده در می‌یابیم که با توجه به ثابت بودن مقدار  $\theta$  به‌ازای اندازه انتقال‌های مختلف به‌صورت صعودی، متوسط هزینه‌ی چرخه در واحد زمان کاهش می‌یابد. برای این که مطلب بیان شده قابل درک باشد، در جدول ۴ هنگامی که انتقال‌ها از ۰/۵ به ۳ تغییر می‌کند، متوسط هزینه‌ی مورد انتظار در واحد زمان به ازای هر نوع تابع  $f(m)$  کاهش می‌یابد. برای این که تعداد نمونه کاهش پیدا کرده است. اما متوسط طول اجرا تحت کنترل و خارج از کنترل برای انتقال‌های کوچک‌تر از ۲ در سطح مطلوبی قرار نگرفته‌اند. برای رفع این مشکل به بررسی طراحی آماری-اقتصادی در جدول‌های ۵، ۶ و ۷ می‌پردازیم. نکته قابل توجه در کلیه جدول‌ها این است که ثابت هموارساز برای انتقال‌های بزرگ مقداری نزدیک به یک دارد که در این صورت رفتار نمودار کنترلی  $EWMA_{RSS}$  مشابه با نمودار کنترلی  $\bar{X}_{RSS}$  است. جدول‌های ۵، ۶ و ۷ نسبت به جدول‌های ۲، ۳ و ۴ دارای ویژگی‌های آماری مطلوبی هستند که منجر به افزایش توان نمودارهای کنترلی می‌شود. لذا در انتقال‌های کم‌تر از ۲ باعث اندکی فزونی در متوسط هزینه‌ی مورد انتظار در واحد زمان می‌شود که ناشی از اعمال محدودیت‌های آماری به این‌صورت است که حد اقل مقدار برای  $ARL_1$  برابر ۳۷۰ و حد اکثر مقدار برای  $ARL_1$  برابر ۵ است.

جدول ۱. مقداردهی نمادها در مدل اقتصادی لورنزن و ونس و مدل هزینه‌ی RSS

$\gamma$	$\gamma_1$	$T_0$	$T_1$	$T_r$	$C_i$	$C_{O(RSS)}$	$C_q$	$C_r$	$C_c$	$C_1$	$Y$	$W$	$e$
۱	۱	۰	۲	۰	۰/۰۱	۰/۵	۰/۱	۰/۰۵	۱۰	۱۰۰	۵۰	۲۵	۰/۰۵
		ساعت	ساعت	ساعت	دلار	دلار	دلار	دلار	دلار	دلار	دلار	دلار	دلار

جدول ۲. طراحی اقتصادی نمودار کنترلی EWMA<sub>RSS</sub> برای پارامتر نمایی  $\theta = ۰.۰۵$

تعداد رتبه‌بندی لازم	انتقال	ثابت هموارساز	پارامترهای طراحی								$C_1 = \frac{E(C)}{E(T)}$
			$\delta$	$\lambda$	$m$	$r$	$n = mr$	$h$	$L$	ARL	
f(m)=m	۰/۵	۰/۸۳	۸	۱	۸	۱/۶۵	۲/۰۶	۲۵/۹۹	۱/۲۷	۲۹/۱۳۶	
	۰/۷۵	۰/۸۷	۶	۱	۶	۱/۳۰۵	۲/۳۶	۵۶/۴۵	۱/۲۱	۲۶/۶۸	
	۱	۰/۹۱	۵	۱	۵	۱/۱۵۴	۲/۵۹	۱۰۵/۱۴	۱/۱۴	۲۵/۳۴	
	۱/۵	۰/۸۷۵	۳	۱	۳	۰/۸۰۲	۲/۷۳	۱۵۷/۶۶	۱/۲۳	۲۳/۹۴	
	۲	۰/۹۶	۳	۱	۳	۰/۸۶	۳/۱۱	۵۴۱/۲۹	۱/۰۵	۲۳/۱۹	
	۲/۵	۰/۹۳	۲	۱	۲	۰/۶۹	۳/۰۲	۳۹۶/۷۳	۱/۱۱	۲۲/۷۲	
	۳	۰/۹۷	۲	۱	۲	۰/۷۲	۳/۳۱	۱۰۷۷/۵۷	۱/۰۳	۲۲/۴۲	
mlog(m)	۰/۵	۰/۵۵	۲	۵	۱۰	۰/۸۳	۲/۱۵	۳۶/۲۲	۲/۲۱	۳۰/۰۴	
	۰/۷۵	۰/۷۲	۲	۴	۸	۰/۸۷	۲/۳۵	۵۵/۸۵	۱/۶۲	۲۷/۲۶	
	۱	۰/۷۹	۲	۳	۶	۰/۸۳	۲/۵۱	۸۴/۹۸	۱/۴۴	۲۵/۶۷	
	۱/۵	۰/۸۷	۲	۲	۴	۰/۷۸	۲/۷۵	۱۷۱/۸۶	۱/۲۲	۲۳/۹۷	
	۲	۰/۹۱	۳	۱	۳	۰/۸۷	۲/۹۳	۲۹۹/۳۲	۱/۱۶	۲۳/۲۴	
	۲/۵	۰/۹۳	۲	۱	۲	۰/۶۷	۳/۰۴	۴۱۷/۶۳	۱/۱۱	۲۲/۶۳	
	۳	۰/۹۷	۲	۱	۲	۰/۶۹	۳/۳۲	۱۱۲۹/۶۸	۱/۰۳	۲۲/۳۴	
$\binom{m}{2}$	۰/۵	۰/۵۵	۲	۵	۱۰	۰/۷۷	۲/۱۹	۴۰/۷۱	۲/۲۷	۲۹/۷۹	
	۰/۷۵	۰/۷۱	۲	۴	۸	۰/۸۳	۲/۳۸	۶۱/۱۱	۱/۶۵	۲۷/۰۸	
	۱	۰/۷۸	۲	۳	۶	۰/۷۹	۲/۵۳	۹۱/۶۸	۱/۴۵	۲۵/۵۳	
	۱/۵	۰/۸۷	۲	۲	۴	۰/۷۵	۲/۷۷	۱۸۱/۵۶	۱/۲۳	۲۳/۸۷	
	۲	۰/۹۶	۲	۲	۳	۰/۸۱	۳/۱۵	۶۳۰/۹۴	۱/۰۵	۲۳/۱۶	
	۲/۵	۰/۹۳	۲	۱	۲	۰/۶۵	۳/۰۵	۴۳۳/۱۳	۱/۱۱	۲۲/۵۷	
	۳	۰/۹۷	۲	۱	۲	۰/۶۸	۳/۳۳	۱۱۶۵/۸	۱/۰۴	۲۲/۲۸	



جدول ۳. طراحی اقتصادی نمودار کنترلی EWMA<sub>RSS</sub> برای پارامتر نمایی  $\theta = 0.01$ 

تعداد رتبه بندی لازم	انتقال	ثابت هموارساز	پارامترهای طراحی							
			$m$	$r$	$n = mr$	$h$	$L$	ARL	ARL <sub>1</sub>	$C_1 = \frac{E(C)}{E(T)}$
f(m)=m	0/5	0/82	8	1	8	3/22	2/11	29/32	1/29	16/59
	0/75	0/86	6	1	6	2/58	2/41	62/45	1/22	15/41
	1	0/91	5	1	5	2/31	2/62	114/83	1/15	14/76
	1/5	0/95	4	1	4	2/05	2/99	362/97	1/06	14/12756
	2	0/96	3	1	3	1/74	3/13	579/7	1/05	13/77
	2/5	0/93	2	1	2	1/41	3/04	426/8	1/12	13/58
	3	0/97	2	1	2	1/46	3/33	1149/03	1/04	13/44
mlog(m)	0/5	0/72	2	8	16	2/4	2/13	32/21	1/57	16/91901
	0/75	0/84	2	6	12	2/32	2/41	64/62	1/28	15/57149
	1	0/86	2	4	8	1/99	2/59	106/04	1/24	14/8428
	1/5	0/87	2	2	4	1/56	2/78	187/93	1/23	14/1293
	2	0/96	2	2	4	1/69	3/16	646/63	1/05	13/761
	2/5	0/93	2	1	2	1/36	3/05	449/94	1/12	13/544
	3	0/97	2	1	2	1/41	3/34	1203/9	1/04	13/39
$\binom{m}{2}$	0/5	0/71	2	8	16	2/25	2/17	35/59	1/61	16/78
	0/75	0/84	2	6	12	2/21	2/44	69/89	1/3	15/47
	1	0/86	2	4	8	1/91	2/61	113/64	1/25	14/76
	1/5	0/95	2	3	6	1/84	2/98	354/71	1/07	14/07008
	2	0/96	2	2	4	1/63	3/17	676/06	1/05	13/71
	2/5	0/92	2	1	2	1/33	3/06	464/57	1/12	13/51
	3	0/97	2	1	2	1/38	3/35	1234/03	1/04	13/36

جدول ۴. طراحی اقتصادی نمودار کنترلی EWMA<sub>RSS</sub> برای پارامتر نمایی  $\theta = 0.002$

رتبه‌بندی تعداد لازم	انتقال	ثابت هموار ساز	پارامترهای طراحی							
			$m$	$r$	$n = mr$	$h$	$L$	ARL <sub>0</sub>	ARL <sub>1</sub>	$C_1 = \frac{E(C)}{E(T)}$
f(m)=m	۰/۵	۰/۸۷	۹	۱	۹	۷/۹۹	۲/۱۶	۳۳/۴۸	۱/۱۹	۱۲/۴۳
	۰/۷۵	۰/۸۶	۶	۱	۶	۵/۵۹	۲/۴۱	۶۴/۱۴	۱/۲۳	۱۱/۹۱
	۱	۰/۹۰۵	۵	۱	۵	۵/۰۳	۲/۶۳	۱۱۷/۴۸	۱/۱۵	۱۱/۶۲
	۱/۵	۰/۹۶	۴	۱	۴	۴/۴۹	۲/۹۹	۳۶۹/۶	۱/۰۶	۱۱/۳۳
	۲	۰/۹۶	۳	۱	۳	۳/۸۱	۳/۱۴	۵۸۹/۵	۱/۰۵	۱۱/۱۸
	۲/۵	۰/۹۲	۲	۱	۲	۳/۱	۳/۰۴	۴۳۴/۶	۱/۱۱	۱۱/۱۱
	۳	۰/۹۷	۲	۱	۲	۳/۲۱	۳/۳۳	۱۱۶۷/۲	۱/۰۴	۱۱/۰۴
mlog(m)	۰/۵	۰/۷۹	۲	۱۰	۲۰	۶/۱۳	۲/۱۵	۳۲/۸۳	۱/۳۸	۱۲/۴۸۳۵۳
	۰/۷۵	۰/۸۷	۲	۷	۱۴	۵/۵۶	۲/۴۶	۷۳/۰۲	۱/۲	۱۱/۹۱۳
	۱	۰/۹۱	۲	۵	۱۰	۴/۹۵	۲/۶۷	۱۳۴/۷۲	۱/۱۴	۱۱/۶۱۵
	۱/۵	۰/۹۵	۲	۳	۶	۴/۱۸	۲/۹۷	۳۴۲/۶۹	۱/۰۷	۱۱/۳۱۴۴
	۲	۰/۹۶	۲	۲	۴	۳/۷	۳/۱۷	۶۵۷/۸۳	۱/۰۵	۱۱/۱۶
	۲/۵	۰/۹۲۵	۲	۱	۲	۲/۹۸	۳/۰۶	۴۵۸/۱۴	۱/۱۲	۱۱/۰۸۷
$\binom{m}{2}$	۰/۵	۰/۶۹	۲	۸	۱۶	۳/۹۹	۲/۳۱	۵۰/۶۲	۱/۷۲	۱۲/۴۱۸۶۷
	۰/۷۵	۰/۸۷	۲	۷	۱۴	۵/۲۸	۲/۴۸	۷۸/۶۵	۱/۲۱	۱۱/۸۶۳۹۵
	۱	۰/۹۱	۲	۵	۱۰	۴/۷۳	۲/۶۹	۱۴۳/۸۶	۱/۱۴	۱۱/۵۷۵۵۶
	۱/۵	۰/۹۵	۲	۳	۶	۴/۰۳	۲/۹۹	۳۶۱/۵	۱/۰۷	۱۱/۲۸۶۲۶
	۲	۰/۹۶	۲	۲	۴	۳/۵۸	۳/۱۸	۶۸۸/۰۲	۱/۰۵	۱۱/۱۴۴۲
	۲/۵	۰/۹۲	۲	۱	۲	۲/۹۱	۳/۰۷	۴۷۴/۵	۱/۱۲	۱۱/۰۷۴۵
	۳	۰/۹۷	۲	۱	۲	۳/۰۳	۳/۳۵	۱۲۶۰/۷	۱/۰۴	۱۱/۰۰۶

جدول ۵. طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترلی EWMA<sub>RSS</sub> برای پارامتر نمایی  $\theta = 0.05$ 

تعداد رتبه‌بندی لازم	انتقال	ثابت هموار ساز	پارامترهای طراحی							ARL	ARL <sub>1</sub>	$C_r = \frac{E(C)}{E(T)}$	$C_r - C_1$
			$\delta$	$\lambda$	m	r	n = mr	h	L				
f(m)=m	0.5	0.81	10	1	10	1/64	2/99	370/3	1/42	30/76	1/624		
	0.75	0.86	7	1	7	1/29	2/99	370/0.1	1/27	27/28	0/6		
	1	0.85	5	1	5	0/99	2/99	370/0.03	1/28	25/57	0/23		
	1/5	0/96	4	1	4	1/0.1	2/99	370/0.1	1/0.6	23/99	0/0.5		
	2	0/96	3	1	3	0/86	3/11	541/29	1/0.5	23/19782	0/0.0		
	2/5	0/93	2	1	2	0/69	3/0.2	396/6	1/11	22/72	0/0.0		
	3	0/97	2	1	2	0/72	3/31	1077/5	1/0.3	22/42	0/0.0		
mlog(m)	0.5	0/29	2	4	8	0/5003	2/93	370/83	4/25	31/13	1/0.9		
	0.75	0/46	2	3	6	0/5007	2/97	373/97	2/85	27/89	0/63		
	1	0/8	2	4	8	0/82	2/99	370/0.3	1/44	26/0.17	0/347		
	1/5	0/84	2	2	4	0/694	2/99	370/0.03	1/33	24/0.5	0/0.8		
	2	0/96	3	1	3	0/87	3/1	528/75	1/0.5	23/25	0/0.2		
	2/5	0/93	2	1	2	0/67	3/0.4	417/48	1/12	22/63	0/0.0		
	3	0/97	2	1	2	0/69	3/32	1129/96	1/0.3	22/34	0/0.0		
$\binom{m}{2}$	0.5	0/36	2	5	10	0/504	2/95	371/0.2	3/57	30/78	0/99		
	0.75	0/57	2	4	8	0/57	2/98	370/0.4	2/28	27/66	0/58		
	1	0/80.2	2	4	8	0/79	2/99	370/0.02	1/44	25/82	0/29		
	1/5	0/84	2	2	4	0/67	2/99	370/0.1	1/33	23/94	0/0.7		
	2	0/96	2	2	4	0/81	3/15	630/8	1/0.5	23/51	0/0.2		
	2/5	0/93	2	1	2	0/66	3/0.5	431/93	1/12	22/57	0/0.0		
	3	0/97	2	1	2	0/68	3/33	1165/0.1	1/0.3	22/28	0/0.0		

جدول ۶. طراحی آماری- اقتصادی نمودار کنترلی EWMA<sub>RSS</sub> برای پارامتر نمایی  $\theta = 0.01$

تعداد رتبه‌بندی لازم	انتقال	ثابت هموار ساز	پارامترهای طراحی							ARL <sub>1</sub>	ARL <sub>0</sub>	$C_r = \frac{E(C)}{E(T)}$	$C_r - C_1$
			$\delta$	$\lambda$	m	r	n = mr	h	L				
f(m)=m	0.5	0.87	11	1	11	3/8	2/99	370/4	1/26	17/26	0/67		
	0.75	0.86	7	1	7	2/58	2/99	370/0.03	1/26	15/64	0/23		
	1	0.85	5	1	5	2/0.1	2/99	370/21	1/3	14/87	0/11		
	1.5	0.96	4	1	4	2/0.5	2/99	370	1/0.6	14/12757	0/0.001		
	2	0.96	3	1	3	1/74	3/13	579/8	1/0.5	13/77	0/0.00		
	2.5	0.93	2	1	2	1/42	3/0.4	426/3	1/12	13/58	0/0.00		
	3	0.97	2	1	2	1/46	3/33	1149/37	1/0.4	13/44	0/0.00		
mlog(m)	0.5	0.312	2	4	8	0/84	2/93	370/0.03	4/23	17/50611	0/5871		
	0.75	0.794	2	7	14	2/0.3	2/99	370/0.01	1/46	15/86027	0/28878		
	1	0.87	2	5	10	2/0.2	2/998	370	1/24	14/95186	0/10906		
	1.5	0.947	2	3	6	1/9	2/99	370	1/0.8	14/132	0/0.03		
	2	0.965	2	2	4	1/7	3/16	646/63	1/0.5	13/761	0/0.00		
	2.5	0.925	2	1	2	1/36	3/0.5	449/94	1/12	13/544	0/0.00		
	3	0.972	2	1	2	1/41	3/34	1204/57	1/0.3	13/396	0/0.00		
$\binom{m}{2}$	0.5	0.35	2	5	10	0/94	2/94	370/32	3/57	17/31	0/53		
	0.75	0.79	2	7	14	1/93	2/99	370/0.3	1/46	15/72	0/25		
	1	0.87	2	5	10	1/94	2/99	370/0.04	1/24	14/85	0/0.9		
	1.5	0.947	2	3	6	1/83	2/99	370	1/0.8	14/0.7016	0/0.0008		
	2	0.96	2	2	4	1/63	3/17	676/38	1/0.5	13/71	0/0.00		
	2.5	0.92	2	1	2	1/33	3/0.6	466/13	1/12	13/51	0/0.00		
	3	0.97	2	1	2	1/38	3/35	1243/0.3	1/0.4	13/36	0/0.00		

جدول ۷. طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترلی EWMA<sub>RSS</sub> برای پارامتر نمایی  $\theta = 0.002$

تعداد رتبه‌بندی لازم	انتقال	ثابت هموار ساز	پارامترهای طراحی									
			$\delta$	$\lambda$	m	r	n = mr	h	L	ARL <sub>0</sub>	ARL <sub>1</sub>	$C_r = \frac{E(C)}{E(T)}$
f(m)=m	0/5	0/646	8	1	8	3/99	2/99	37/0.15	1/96	12/8255	0/11867	
	0/75	0/768	6	1	6	3/99	2/996	3/0.01	1/55	12/0.5024	0/6	
	1	0/94	6	1	6	5/702	2/999	370	1/0.9	11/6552	0/23	
	1/5	0/96	4	1	4	4/49	2/99	370/32	1/0.6	11/32	0/0.5	
	2	0/96	3	1	3	3/81	3/13	589/95	1/0.5	11/18	0/0.0	
	2/5	0/92	2	1	2	3/1	3/0.5	440/14	1/12	11/11	0/0.0	
	3	0/97	2	1	2	3/21	3/33	1167/4	1/0.4	11/0.4	0/0.0	
mlog(m)	0/5	0/611	2	1	20	3/99	2/989	370/0.1	2/0.9	12/813	0/33	
	0/75	0/84	2	0	16	4/99	2/998	370	1/33	12/0.15	0/102	
	1	0/873	2	8	10	4/39	2/998	370	1/0.7	11/649	0/0.34	
	1/5	0/947	2	5	6	4/15	2/999	370	1/0.8	11/314	0/0.2	
	2	0/964	2	3	4	3/7	3/17	457/83	1/0.5	11/16542	0/0.0	
	2/5	0/925	2	2	4	3/0.67	2/98	458/14	1/12	11/0.87	0/0.0	
	3	0/971	2	2	4	3/102	3/346	1223/4	1/0.4	11/0.194	0/0.0	
$\binom{m}{2}$	0/5	0/611	2	1	20	3/81	2/98	370/0.1	2/0.9	12/71491	0/0.9	
	0/75	0/87	2	0	18	5/35	2/99	370	1/23	11/95131	0/29624	
	1	0/87	2	9	10	4/22	2/99	370	1/24	11/60501	0/0.7736	
	1/5	0/94	2	5	6	4/0.2	2/99	370/0.1	1/0.7	11/28627	0/0.2945	
	2	0/964	2	3	4	3/58	3/18	688/0.2	1/0.5	11/14420.4	0/0.0004	
	2/5	0/923	2	2	2	2/91	3/0.7	474/55	1/12	11/0.745	0/0.0	
	3	0/971	2	1	2	3/0.3	3/35	1260/7	1/0.4	11/0.06	0/0.0	

## ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله با توجه به نتیجه‌های عددی دریافتیم که طراحی آماری-اقتصادی EWMA<sub>RSS</sub> با اندک فزونی ناچیز هزینه با اعمال محدودیت بر متوسط طول اجرا تحت کنترل و خارج از کنترل دارای نتیجه‌های ارزنده‌ای است که در جدول‌ها مشهود است. نکته قابل توجه در نتیجه‌ها این است که با این که هر دو طراحی اقتصادی و آماری-اقتصادی طبق جدول‌های متوسط هزینه در واحد زمان ( $C_1$  و  $C_2$ ) با اندک اختلاف و یا مشابهی دارند، اما تفاوت عمده آن‌ها در این است که طراحی آماری-اقتصادی نسبت به طراحی اقتصادی معیارهای آماری معقولی را در بر دارد. زیرا شاخص ARL زمانی می‌تواند به‌درستی توان نمودار کنترلی را بسنجد، که تحت کنترل آن دارای مقدار بزرگ و خارج از کنترل آن دارای مقدار کوچک باشد. این مطلب در نتیجه‌های جدول‌ها به روشنی آشکار است و همسو با هدف‌های دیدگاه کنترلی است. پس نتیجه می‌گیریم با بهره‌گیری از طراحی آماری-اقتصادی در سامانه‌های مدیریتی فرایندهای صنعتی و تجاری می‌توان کالایی با کیفیت تولید کرد.

## مراجع

- [7] Mughal, M., Azam, M., & Aslam, M. (2018). An EWMA-DiD Control Chart to Capture Small Shifts in the Process Average Using Auxiliary Information. *Technologies*, 6(3), 69.
- [8] Khan, H., Farooq, S., Aslam, M., & Khan, M. A. (2018). Exponentially Weighted Moving Average Control Charts for the Process Mean Using Exponential Ratio Type Estimator. *Journal of Probability and Statistics*, 2018.
- [9] Naveed, M., Azam, M., Khan, N., & Aslam, M. (2018). Design of a Control Chart Using Extended EWMA Statistic. *Technologies*, 6(4), 108.
- [10] McIntyre, G. A. (1952). A method for unbiased selective sampling, using ranked sets. *Australian Journal of Agricultural Research*, 3(4), 385-390.
- [11] Halls, L. K., & Dell, T. R. (1966). Trial of ranked-set sampling for forage yields. *Forest Science*, 12(1), 22-26.
- [12] Takahasi, K., & Wakimoto, K. (1968). On unbiased estimates of the population mean based on the sample stratified by means of ordering. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 20(1), 1-31.
- [13] Dell, T. R., & Clutter, J. L. (1972). Ranked set sampling theory with order statistics background. *Biometrics*, 545-555.
- [14] Lynne Stokes, S. (1977). Ranked set sampling with concomitant variables. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 6(12), 1207-1211.
- [15] Sinha, B. K., Sinha, B. K., & Purkayastha, S. (1996). On some aspects of ranked set sampling for estimation of normal and exponential parameters. *Statistics & Risk Modeling*, 14(3), 223-240.
- [16] Lee, M. H. (2013, April). The three statistical control charts using ranked set sampling. In *2013 5th International Conference on Modeling, Simulation and Applied Optimization (ICMSAO)* (pp. 1-6). IEEE
- [17] Abujiya, M. A. R., Lee, M. H., & Riaz, M. (2014). Improving the performance of exponentially weighted moving average control charts. *Quality and Reliability Engineering International*, 30(4), 571-590.
- [18] Haq, A., Brown, J., Moltchanova, E., & Al-Omari, A. I. (2015). Improved exponentially weighted moving average control charts for monitoring process mean and dispersion. *Quality and Reliability Engineering International*, 31(2), 217-237.
- [1] Roberts, S. W. (1959). Control chart tests based on geometric moving averages. *Technometrics*, 1(3), 239-250.
- [2] Montgomery, D. C., Gardiner, J. S., & Pizzano, B. A. (1987). Statistical process control methods for detecting small process shifts. *Frontiers in Statistical Quality Control*, 3, 161-178.
- [3] Albin, S. L., Kang, L., & Shea, G. (1997). An X and EWMA chart for individual observations. *Journal of Quality Technology*, 29(1), 41-48.
- [4] Srivastava, M. S., & Wu, Y. (1993). Comparison of EWMA, CUSUM and Shirayev-Roberts procedures for detecting a shift in the mean. *The Annals of Statistics*, 21(2), 645-670.
- [5] Wu, Z., & Spedding, T. A. (2000). A synthetic control chart for detecting small shifts in the process mean. *Journal of Quality Technology*, 32(1), 32-38.
- [6] Abbas, N., Riaz, M., & Does, R. J. (2011). Enhancing the performance of EWMA charts. *Quality and Reliability Engineering International*, 27(6), 821-833.

- chart. *Journal of Quality Technology*, 27(3), 250-256.
- [28] Linderman, K., & Love, T. E. (2000). Economic and economic statistical designs for MEWMA control charts. *Journal of Quality Technology*, 32(4), 410-417.
- [29] Lorenzen, T. J., & Vance, L. C. (1986). The economic design of control charts: a unified approach. *Technometrics*, 28(1), 3-10.
- [30] Muttlak, H. A., & Abu-Dayyeh, W. (1998). Testing some hypotheses about the normal distribution using ranked set sample: a more powerful test. *Journal of Information and Optimization Sciences*, 19(1), 1-11.
- [31] Patil, G. P., Sinha, A. K., & Taillie, C. (1994). 5 Ranked set sampling. *Handbook of statistics*, 12, 167-200.
- [32] Brook, D. A. E. D., & Evans, D. A. (1972). An approach to the probability distribution of CUSUM run length. *Biometrika*, 59(3), 539-549.
- [33] Saccucci, M. S., & Lucas, J. M. (1990). Average run lengths for exponentially weighted moving average control schemes using the Markov chain approach. *Journal of Quality Technology*, 22(2), 154-162.
- [34] Testik, M. C., McCullough, B. D., & Borrar, C. M. (2006). The effect of estimated parameters on Poisson EWMA control charts. *Quality Technology & Quantitative Management*, 3(4), 513-527.
- [19] Haq, A., Brown, J., & Moltchanova, E. (2015). New exponentially weighted moving average control charts for monitoring process mean and process dispersion. *Quality and Reliability Engineering International*, 31(5), 877-901.
- [20] Haq, A., Brown, J., Moltchanova, E., & Al-Omari, A. I. (2015). Effect of measurement error on exponentially weighted moving average control charts under ranked set sampling schemes. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 85(6), 1224-1246.
- [21] Tayyab, M., Noor-ul-Amin, M., & Hanif, M. (2018). Exponential Weighted Moving Average Control Charts for Monitoring the Process Mean Using Pair Ranked Set Sampling Schemes. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 1-10.
- [22] Awais, M., & Haq, A. (2018). An EWMA chart for monitoring process mean. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 88(5), 1003-1025.
- [۲۳] رستمی، ع.، شجاعی علی آبادی، س.ر. و بامنی مقدم، م. (۱۳۹۷). طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترلی  $\bar{X}$  برای پایش میانگین فرایند تحت نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای، مجله‌ی مهندسی و مدیریت کیفیت، پاییز، جلد ۸، شماره ۳.
- [24] Kaur, A., Patil, G. P., Shirk, S. J., & Taillie, C. (1996). Environmental sampling with a concomitant variable: a comparison between ranked set sampling and stratified simple random sampling. *Journal of Applied Statistics*, 23(2-3), 231-256.
- [25] Nahhas, R. W., Wolfe, D. A., & Chen, H. (2002). Ranked set sampling: cost and optimal set size. *Biometrics*, 58(4), 964-971.
- [26] Wang, Y. G., Chen, Z., & Liu, J. (2004). General ranked set sampling with cost considerations. *Biometrics*, 60(2), 556-561.
- [27] Montgomery, D. C., Torng, J. C. C., Cochran, J. K., & Lawrence, F. P. (1995). Statistically constrained economic design of the EWMA control