

مطالعه از هم‌گسیختگی میکرو قطرات در فرآیند تولید پوشش‌های سطحی با استفاده از مدل قابلیت اطمینان در داده‌های سانسور شده

هانیه پناهی

استادیار، گروه ریاضی و آمار، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران. panahi@liau.ac.ir

سعید اسدی*

دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. s_asadi@pnu.ac.ir

چکیده میکرو پوشش‌ها کاربرد وسیعی در تولیدات صنعتی نوین دارند. از هم‌پاشیدگی میکرو قطرات در حین برخورد با سطح، باعث کاهش کیفیت پوشش ایجاد شده بر روی سطح می‌گردد. فشار دستگاه پاشش یکی از مهمترین عوامل از هم‌گسیختگی میکرو قطرات است. در این تحقیق با استفاده از مدل قابلیت اطمینان تحت نمونه سانسور شده، تأثیر فشار بر روی قطر از هم‌گسیختگی میکرو ذرات مطالعه گردیده است. برای محاسبه مدل قابلیت اطمینان از توزیع رایلی‌نمایی شده معکوس به عنوان توزیع برازنده داده‌ها، استفاده گردیده و برآوردگر درست‌نمایی ماکسیمم پارامترهای مدل، محاسبه شده است. همچنین بر اساس الگوریتم متروپلیس- هاستینگس پارامترهای مجهول برآورد شده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که مدل قابلیت اطمینان معرفی شده، عملکرد خوبی در برآورد احتمال از هم‌گسیختگی میکرو قطرات در فشارهای مختلف پاشش دارد. بر اساس مدل پیشنهادی، مشاهده شد که با افزایش فشار نازل، قطر از هم‌گسیختگی میکرو قطرات کاهش می‌یابد.

کلید واژگان: از هم‌گسیختگی میکرو قطره، الگوریتم متروپلیس- هاستینگس، برآورد درست‌نمایی ماکسیمم، داده سانسور شده، مدل قابلیت اطمینان، توزیع رایلی‌نمایی شده معکوس.

۱- مقدمه

پخش شدن یکنواخت میکرو قطرات بر روی سطح، باعث ایجاد پوششی با کیفیت و مرغوب، و از طرفی دیگر از هم‌گسیختگی یا از هم‌پاشیدگی قطرات در هنگام برخورد با سطح، باعث ایجاد پوششی نامرغوب می‌شود. فشار دستگاه پاشش یکی از مهمترین عوامل ایجاد از هم‌گسیختگی میکرو قطرات است. مطالعات زیادی توسط محققین بر روی از هم‌گسیختگی میکرو قطرات صورت گرفته است. ترودسن و همکاران [۱] توسط عکسبرداری فوق سریع، پدیده از هم‌پاشیدگی قطرات را هنگام برخورد با سطح صاف بررسی کردند. آن‌ها مشاهده کردند که شروع از هم‌گسیختگی توسط نوسانات سطحی است که باعث پارگی لبه قطره می‌شود و سپس موجب از هم‌پاشیدگی آن می‌گردد.

پوشش سطوح در ابعاد میکرو و نانو، کاربرد وسیعی در فرآیندهای نوین صنعتی دارد. از آن جمله می‌توان فرآیندهای تولید پوشش‌های فلزی و غیر فلزی (بصورت حرارتی و یا غیر حرارتی)، ساخت سلول‌های جدید خورشیدی، پوشش توسط جت پرنتر و اسپری پرنترها، سنتز داروهای جدید، سنتز دی‌ان‌ای، و بسیاری از موارد دیگر را به‌عنوان جدیدترین کاربرد ایجاد پوشش در این ابعاد نام برد. از مهمترین خواص یک پوشش خوب در ابعاد میکرو و نانو، مقاومت در برابر خوردگی و حرارت است.

*(Corresponding author): s_asadi@pnu.ac.ir

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۹/۱۱

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۲/۱۳

صفحه: ۸۶-۱۰۱

ایجاد شده تأثیر کمی در پخش قطعات و تأثیر زیادی در برگشت و جمع شدن قطره روی سطح دارد. آن‌ها اعداد بدون بعد رینولدز و وبر را در آستانه از هم گسیختگی قطره به دست آوردند. یانگ و همکاران [۱۱] از هم پاشیدگی قطره را بر روی سطوح فوق آبدوست و فوق آبگریز که توسط لیزر، طبق الگوی خاصی ساخته شده بودند را مطالعه کردند و مشاهده کردند که از هم پاشیدگی قطرات در سطوح ساخته شده بسیار محدودتر از سطوح فوق آبدوست و فوق آبگریز معمولی می باشد. پناهی و اسدی [۱۲] با استفاده از مدل رگرسیون چند متغیره نسبت به پیش‌بینی پخش شدن نانو قطره اقدام کردند. آن‌ها پنج مدل مختلف را بررسی کرده و نشان دادند که مدل رگرسیون غیرخطی پیشنهاد شده، دارای بیشترین بازده و کمترین خطا بوده و تطابق بالایی با خروجی مطلوب دارد. بررسی مطالعات انجام شده نشان می‌دهد که عوامل موثر بر از هم گسیختگی میکرو قطرات توسط مدل‌های احتمالی مطالعه نشده است. یکی از مهم‌ترین مدل‌های احتمالی، مدل قابلیت اطمینان (فشار- دوام) است که در علوم مهندسی و علوم مختلف دیگر کاربرد دارد و می‌توان از آن برای تعیین احتمال رخداد شرایطی که منجر به خرابی و عدم مرغوبیت یک سیستم مهندسی می‌شود، استفاده کرد. در سال‌های اخیر، پژوهشگران بسیاری در مورد کاربردهای مختلف مدل قابلیت اطمینان مطالعه کردند. از آن جمله، پوپو و آنجلو [۱۳] با استفاده از مدل قابلیت اطمینان، تأثیر تهدیدات پیچیده مختلف بر سبب سرمایه‌گذاری ناهمگن را بررسی کردند. دی و همکاران [۱۴] تأثیر دستگاه‌های تراشکاری در سایت تولید، بر تخریب صفحات آهنی را بر اساس مدل فشار- دوام مطالعه کردند. قیتانی و همکاران [۱۵] و رکب و کوندو [۱۶] تأثیر فشارهای مختلف بر شکست فیبرهای کربنی را مورد بررسی قرار دادند. همچنین در بسیاری از پدیده‌های مهندسی، امکان مشاهده تمامی داده‌ها به دلایل گوناگون از جمله هزینه و زمانبر بودن آزمایشات، وجود ندارد. بنابراین مطالعه مدل‌های قابلیت اطمینان بر اساس داده‌های ناقص (سانسور شده)، حائز اهمیت فراوان است. در این تحقیق، به دلیل اهمیت فشار نازل به عنوان یکی از مهمترین عوامل موثر بر قطر از هم گسیختگی میکرو قطرات، یک مدل قابلیت اطمینان ارائه شده است که با آن بتوان، احتمال تأثیر فشار دستگاه پاشش را بر قطر از هم گسیختگی

پلاسیوس و همکاران [۲] برخورد قطره و از هم پاشیدگی آن‌ها را در رینولدزها و وبرهای مختلف بررسی کردند. آن‌ها دیاگرام رینولدز- وبر را برای از هم گسیختگی قطرات ثبت کردند و مقادیر رینولدز بحرانی را که باعث عمل از هم گسیختگی قطره می‌شود را در محدوده‌های مختلف اعداد وبر به دست آورده‌اند. لیانگ و همکاران [۳] پخش و از هم پاشیدگی قطره را در برخورد با سطح مورب مطالعه کردند. آن‌ها توسط عکسبرداری فوق سریع نشان دادند که تنش سطحی و ویسکوزیته قطره تأثیر زیادی در از هم پاشیدگی آن دارد. پلانچ و همکاران [۴] خواص ذرات ایجاد شده در اثر پاشش از نازل را مطالعه کردند و مشاهده کردند که بسیاری از قطرات در حین برخورد با سطح متلاشی و از هم گسیخته می‌شوند. آن‌ها داده‌های از هم گسیختگی را در دو فشار مختلف از دستگاه پاشش به دست آوردند و تأثیرات افزایش فشار، در قطر و توزیع اندازه قطرات پخش شده روی سطح را مطالعه کردند. کیم و همکاران [۵] زمان شروع از هم گسیختگی قطعات آب را بر روی سطوح زبر بررسی کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که مورفولوژی سطح بر روی از هم پاشیدگی قطرات آب بسیار موثر است. لی و همکاران [۶] گردابه‌های ایجاد شده در حین از هم گسیختگی قطرات را بررسی کردند. اگرچه آن‌ها نتوانستند مبدا ایجاد گردابه‌ها را پیدا کنند ولی متوجه شدند که گردابه‌ها در اثر انتقال انرژی از اندازه حرکت قطره به امواج موینگی ایجاد می‌شود. جوده و همکاران [۷] تأثیر رطوبت‌پذیری و تنش سطحی را بر روی از هم گسیختگی قطرات مطالعه کردند و نشان دادند که سرعت از هم گسیختگی مستقل از خواص و رطوبت‌پذیری سطح بوده ولی به صورت خطی به تنش سطحی قطره وابسته می‌باشد. یانگ و همکاران [۸] تأثیر ویسکوزیته را بر روی تاج ایجاد شده هنگام از هم پاشیدگی قطره بررسی کردند و مشاهده کردند که تأثیرات ویسکوزیته در تاج ایجاد شده بسیار محدود و کم می‌باشد. در تحقیق دیگری لاتکا و همکاران [۹] از هم گسیختگی قطره در برخورد با سطح را مطالعه کردند. آن‌ها توسط عکسبرداری فوق سریع مشاهده کردند که خواص رطوبت‌پذیری سطح تأثیری در از هم گسیختگی قطرات ندارد. کیتل و همکاران [۱۰] از هم گسیختگی قطره نیوتنی را در برخورد با سطح پوشیده شده از لایه ویسکو الاستیک بررسی کردند و نشان دادند که خواص سطح

$$\delta = P[X > Y] = \int_0^{\infty} P[X > Y | Y = y] \cdot f_Y(y) dy = \int_0^{\infty} 2\alpha_2 \beta y^{-3} e^{-\beta/y^2} (1 - e^{-\beta/y^2})^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} dy = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

اما همانطور که بیان شد موقعیت‌های واقعی بسیاری وجود دارد که پژوهشگر قادر به مشاهده همه داده‌ها نیست. در این حالت‌ها، با داده‌های سانسور شده مواجه هستیم. دو تا از مهمترین انواع سانسور داده‌ها، سانسور نوع اول و دوم است. اگر آزمایش فقط تا زمان مشخص T ادامه یابد و واحدهای آزمایشی از زمان T به بعد کنار گذاشته شوند، در این صورت سانسور نوع اول رخ داده است. اگر پژوهشگر تصمیم بگیرد که آزمایش را تا زمان مشاهده m -امین واحد آزمایش ادامه دهد، در این صورت سانسور نوع دوم رخ داده است. از ایرادات وارد بر این دو نوع سانسور، این است که اجازه حذف واحدهای آزمایشی در زمان‌هایی غیر از زمان خاتمه آزمایش داده نمی‌شود. به دلیل این که در آزمایشات مربوط به داده‌های واقعی این امکان وجود دارد که داده‌ها در همه جای آزمایش (ابتدا، انتها و بین داده‌ها) مفقود شوند، بنابراین آگاروالا و بالاکریشن [۱۹] سانسوری را تحت عنوان سانسور فزاینده معرفی کردند که باعث ذخیره زمان و هزینه آزمایش می‌شود و پژوهشگر قادر به مطالعه نمونه‌ای، شامل سانسور داده‌ها از بین مقادیر نیز می‌باشد. همچنین وو و کاس [۲۰] سانسور فزاینده اولین شکست را در جهت کاهش زمان آزمایش و ذخیره منابع موجود، معرفی کردند، که به شرح زیر می‌باشد:

فرض کنید n گروه مستقل هر کدام شامل k آیتم در یک آزمون طول عمر قرار دارند. در زمان رخداد اولین شکست، گروه به طور تصادفی انتخاب و از آزمایش حذف می‌شوند. سپس در زمان رخداد دومین شکست، گروه R_2 به طور تصادفی انتخاب و از آزمایش حذف می‌شوند؛ به همین ترتیب آزمایش تا مشاهده m -امین گروه ادامه می‌یابد و R_{m+1} گروه باقیمانده حذف می‌شوند. در این حالت به مشاهدات $X_{1:m:n:k}, X_{2:m:n:k}, \dots, X_{m:m:n:k}$ یک نمونه سانسور شده فزاینده اولین شکست نوع دوم با طرح سانسور فزاینده $R = (R_1, \dots, R_m)$ گفته می‌شود. سانسور فزاینده اولین شکست نوع دوم، تعمیمی از برخی دیگر از انواع سانسورهای رایج است که در شکل ۱ نمایش داده شده است.

میکرو قطرات در داده‌های سانسور شده، مطالعه کرد. برای برآورد مدل قابلیت اطمینان از توزیع رایلی شده معکوس به عنوان توزیع برازنده داده‌ها استفاده شده است. با توجه به اهمیت انتخاب روش مناسب در برآورد پارامترهای مجهول، از هر دو روش کلاسیک و بیزی برای برآورد پارامترهای مدل قابلیت اطمینان، استفاده شده است. در ادامه مقاله، در بخش ۲، مدل قابلیت اطمینان بر اساس توزیع رایلی شده معکوس و داده‌های مشاهده شده (سانسور نشده) بیان گردیده است. در بخش ۳، برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم و بیزی پارامترهای مجهول مدل با استفاده از الگوریتم‌های مناسب، محاسبه شده است. مدل قابلیت اطمینان برای تعیین تأثیر فشار دستگاه پاشش در داده‌های مربوط به قطر از هم‌گسیختگی میکرو ذرات در حالت داده‌های کامل و سانسور شده، در بخش ۴ تحلیل و بررسی شده است و در بخش ۵، نتیجه‌گیری مقاله آورده شده است.

۲- توصیف مدل و نمونه سانسور شده

در این بخش، ابتدا، مدل قابلیت اطمینان با استفاده از توزیع رایلی نمایی شده معکوس (کایال و همکاران [۱۷] و پناهی و مرادی [۱۸]) و سپس داده‌های سانسور فزاینده اولین شکست به طور مختصر معرفی می‌شوند. فرض کنید X متغیری تصادفی از توزیع رایلی نمایی شده معکوس با تابع چگالی زیر باشد:

$$f(x; \alpha_1, \beta) = 2\alpha_1 \beta x^{-3} e^{-(\beta/x^2)} (1 - e^{-(\beta/x^2)})^{\alpha_1 - 1}; \quad (1)$$

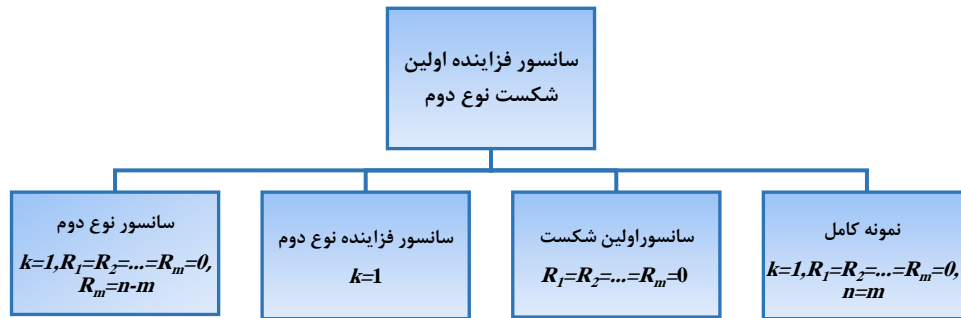
$$x > 0, \alpha_1 > 0, \beta > 0,$$

و همچنین Y مستقل از X ، متغیری تصادفی از توزیع رایلی نمایی شده معکوس با تابع چگالی به صورت زیر باشد:

$$f(y; \alpha_2, \beta) = 2\alpha_2 \beta y^{-3} e^{-(\beta/y^2)} (1 - e^{-(\beta/y^2)})^{\alpha_2 - 1}; \quad (2)$$

$$y > 0, \alpha_2 > 0, \beta > 0.$$

در این صورت مدل قابلیت اطمینان به صورت زیر تعریف می‌شود:



شکل ۱: سانسور فزاینده اولین شکست نوع دوم و سانسورهای زیر مجموعه.

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \beta) = C_1 C_2 k_1^{m_1} k_2^{m_2} 2^{m_1+m_2} \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \beta^{m_1+m_2} \times \left(\prod_{i=1}^{m_1} x_i^{-3} \right) \left(\prod_{j=1}^{m_2} y_j^{-3} \right) \exp \left\{ -\beta \left[\sum_{i=1}^{m_1} x_i^{-2} + \sum_{j=1}^{m_2} y_j^{-2} \right] \right\} \times \left[\prod_{i=1}^{m_1} (1 - e^{-\beta/x_i^2})^{\alpha_1 k_1 (R_{x,i} + 1) - 1} \right] \times \left[\prod_{j=1}^{m_2} (1 - e^{-\beta/y_j^2})^{\alpha_2 k_2 (R_{y,j} + 1) - 1} \right], \quad (3)$$

که در آن ثابت های C_1 و C_2 به صورت زیر می باشند.

$$C_1 = n_1(n_1 - R_{x,1} - 1)(n_1 - R_{x,1} - R_{x,2} - 2) \dots (n_1 - R_{x,1} - R_{x,2} - \dots - R_{x,m_1-1} - m_1 + 1),$$

$$C_2 = n_2(n_2 - R_{y,1} - 1)(n_2 - R_{y,1} - R_{y,2} - 2) \dots (n_2 - R_{y,1} - R_{y,2} - \dots - R_{y,m_2-1} - m_2 + 1).$$

بنابراین لگاریتم تابع درستنمایی عبارتست از:

برای مطالعه بیشتر سانسور فزاینده اولین شکست، می توان به سالیمان و همکاران [۲۱]، لیو و تسای [۲۲]، احمد [۲۳] و پناهی [۲۴] مراجعه کرد.

۳- برآورد پارامترهای مجهول مدل قابلیت اطمینان (فشار-دوام)

۳-۱- برآورد درستنمایی ماکسیمم مدل

فرض کنید $X_{1:m_1:n_1:k_1}, X_{2:m_1:n_1:k_1}, \dots, X_{m_1:m_1:n_1:k_1}$ یک نمونه سانسور فزاینده اولین شکست از توزیع $IER(\alpha_1, \beta)$ با طرح سانسور فزاینده $R_x = (R_{x,1}, \dots, R_{x,m_1})$ و $Y_{1:m_2:n_2:k_2}, Y_{2:m_2:n_2:k_2}, \dots, Y_{m_2:m_2:n_2:k_2}$ یک نمونه سانسور فزاینده اولین شکست از توزیع $IER(\alpha_2, \beta)$ با طرح سانسور فزاینده $R_y = (R_{y,1}, \dots, R_{y,m_2})$ باشد. برای سادگی نمادها به ترتیب از $(X_1, X_2, \dots, X_{m_1})$ و $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{m_2})$ به جای $(X_{1:m_1:n_1:k_1}, X_{2:m_1:n_1:k_1}, \dots, X_{m_1:m_1:n_1:k_1})$ و $(Y_{1:m_2:n_2:k_2}, Y_{2:m_2:n_2:k_2}, \dots, Y_{m_2:m_2:n_2:k_2})$ استفاده خواهد شد. بنابراین بر اساس روابط (۱) و (۲)، تابع درستنمایی عبارت است از:

$$\frac{\partial \ln L(\alpha_1, \alpha_2, \beta)}{\partial \beta} = \frac{m_1 + m_2}{\beta} -$$

$$\left[\sum_{i=1}^{m_1} x_i^{-2} + \sum_{j=1}^{m_2} y_j^{-2} \right] - \sum_{i=1}^{m_1} \frac{x_i^{-2} e^{-\beta/x_i^2}}{1 - e^{-\beta/x_i^2}} - \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^{m_2} \frac{y_j^{-2} e^{-\beta/y_j^2}}{1 - e^{-\beta/y_j^2}} + \alpha_1 k_1 \sum_{i=1}^{m_1} (R_{x,i} + 1) \frac{x_i^{-2} e^{-\beta/x_i^2}}{1 - e^{-\beta/x_i^2}} +$$

$$\alpha_2 k_2 \sum_{j=1}^{m_2} (R_{y,j} + 1) \frac{y_j^{-2} e^{-\beta/y_j^2}}{1 - e^{-\beta/y_j^2}}$$

با مساوی صفر قرار دادن روابط (۵)، (۶)، (۷) و حل معادلات، برآورد درستمایی ماکسیمم پارامترهای α_1 ، α_2 و β به دست می‌آیند. متاسفانه معادلات بیان شده فرم بسته‌ای ندارند و باید از روش‌های عددی مانند الگوریتم نیوتن-رافسن استفاده کرد. مراحل در حالت کلی الگوریتم، در شکل ۲ نمایش داده شده است.

$$\ln L(\alpha_1, \alpha_2, \beta) \propto m_1 \ln(\alpha_1) + m_2 \ln(\alpha_2) + (m_1 + m_2) \ln \beta$$

$$+ \sum_{i=1}^{m_1} \ln(x_i^{-3}) + \sum_{j=1}^{m_2} \ln(y_j^{-3}) - \beta \left[\sum_{i=1}^{m_1} x_i^{-2} + \sum_{j=1}^{m_2} y_j^{-2} \right]$$

$$- \sum_{i=1}^{m_1} \ln(1 - e^{-\beta/x_i^2}) - \sum_{j=1}^{m_2} \ln(1 - e^{-\beta/y_j^2})$$

$$+ \alpha_1 k_1 A_i(x; \beta) + \alpha_2 k_2 A_j(y; \beta). \quad (4)$$

$$A_i(x; \beta) = \sum_{i=1}^{m_1} (R_{x,i} + 1) \ln(1 - e^{-\beta/x_i^2}), \quad \text{که}$$

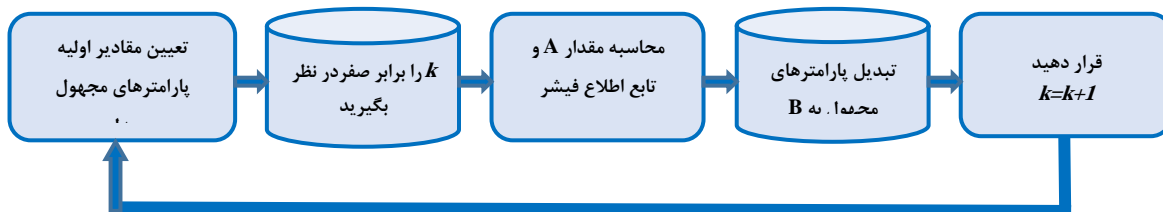
$$A_j(y; \beta) = \sum_{j=1}^{m_2} (R_{y,j} + 1) \ln(1 - e^{-\beta/y_j^2}). \quad \text{و}$$

از رابطه (۴) نسبت به پارامترهای مجهول مشتق می‌گیریم که در اینصورت داریم:

$$\frac{\partial \ln L(\alpha_1, \alpha_2, \beta)}{\partial \alpha_1} = \frac{m_1}{\alpha_1} + k_1 A_i(x; \beta) \quad (5)$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha_1, \alpha_2, \beta)}{\partial \alpha_2} = \frac{m_2}{\alpha_2} + k_2 A_j(y; \beta) \quad (6)$$

9



شکل ۲: مراحل الگوریتم نیوتن-رافسن در محاسبه برآوردهای درستمایی ماکسیمم.

$$\hat{I}_{33} = -\frac{(m_1 + m_2)}{\beta^2} + \sum_{i=1}^{m_1} \frac{x_i^{-4} e^{-\beta/x_i^2}}{(1 - e^{-\beta/x_i^2})^2} + \sum_{j=1}^{m_2} \frac{y_j^{-4} e^{-\beta/y_j^2}}{(1 - e^{-\beta/y_j^2})^2} - \alpha_1 k_1 \sum_{i=1}^{m_1} (R_{x,i} + 1) \frac{x_i^{-4} e^{-\beta/x_i^2}}{(1 - e^{-\beta/x_i^2})^2} - \alpha_2 k_2 \sum_{j=1}^{m_2} (R_{y,j} + 1) \frac{y_j^{-4} e^{-\beta/y_j^2}}{(1 - e^{-\beta/y_j^2})^2}.$$

این فرآیند تا زمان رسیدن به همگرایی مورد نظر، تکرار می‌شود. برآوردهای نهایی $(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta})$ ، همان برآوردهای درستنمایی ماکسیمم هستند. برای محاسبه این برآوردها از تابع $OPTIM$ در نرم‌افزار R می‌توان استفاده کرد. پس از برآورد پارامترهای α_1 ، α_2 و β ، برآورد درستنمایی ماکسیمم مدل فشار- دوام به صورت زیر است:

$$\hat{\delta} = \frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2} = \frac{m_2 k_1 \sum_{i=1}^{m_1} (R_{x,i} + 1) \ln(1 - e^{-\beta/x_i^2})}{m_1 k_2 \sum_{j=1}^{m_2} (R_{y,j} + 1) \ln(1 - e^{-\beta/y_j^2}) + m_2 k_1 \sum_{i=1}^{m_1} (R_{x,i} + 1) \ln(1 - e^{-\beta/x_i^2})}.$$

۳-۲- برآورد بیزی مدل

در این بخش برآورد بیزی δ تحت فرض اینکه پارامترهای شکل α_1 ، α_2 و مقیاس β ، متغیرهای تصادفی هستند، محاسبه خواهد شد. فرض کنید که پارامترهای α_1 ، α_2 و β ، دارای توزیع‌های مستقل گاما به صورت زیر باشند:

$$\pi(\alpha_1) \propto \alpha_1^{a_1-1} e^{-b_1 \alpha_1}; \alpha_1 > 0, a_1 > 0, b_1 > 0,$$

$$\pi(\alpha_2) \propto \alpha_2^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha_2}; \alpha_2 > 0, a_2 > 0, b_2 > 0,$$

$$\pi(\beta) \propto \beta^{a_3-1} e^{-b_3 \beta}; \beta > 0, a_3 > 0, b_3 > 0.$$

که $a_i = b_i = 0$ اگر پارامترهای معلومی هستند. اگر $a_i, b_i; i = 1, 2, 3$ باشد، آنگاه پیشین فوق تبدیل به پیشین فاقد اطلاع می‌شود. توزیع پیشین توام α_1 ، α_2 و β به صورت زیر می‌باشد:

$$\pi(\alpha_1, \alpha_2, \beta) \propto \alpha_1^{a_1-1} \alpha_2^{a_2-1} \beta^{a_3-1} e^{-b_1 \alpha_1 - b_2 \alpha_2 - b_3 \beta}.$$

که

$$A = \left(\frac{\partial L(\alpha_1, \alpha_2, \beta)}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial L(\alpha_1, \alpha_2, \beta)}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial L(\alpha_1, \alpha_2, \beta)}{\partial \beta} \right)_{(\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \beta_k)}$$

و B برابر است با

$$(\alpha_{1_{k+1}}, \alpha_{2_{k+1}}, \beta_{k+1}) = (\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \beta_k)$$

$$+ [\partial L(\alpha_1, \alpha_2, \beta) / \partial \alpha_1, \partial L(\alpha_1, \alpha_2, \beta) / \partial \alpha_2, \partial L(\alpha_1, \alpha_2, \beta) / \partial \beta]_{(\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \beta_k)}$$

$$\times \hat{\Sigma}_0(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta})$$

و تابع اطلاع فیشر $(\hat{\Sigma}_0(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}))$ عبارتست از:

$$\hat{\Sigma}_0(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}) =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 L(\alpha_1, \alpha_2, \beta)}{\partial \alpha_1^2} & -\frac{\partial^2 L(\alpha_1, \alpha_2, \beta)}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} & -\frac{\partial^2 L(\alpha_1, \alpha_2, \beta)}{\partial \alpha_1 \partial \beta} \\ -\frac{\partial^2 L(\alpha_1, \alpha_2, \beta)}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} & -\frac{\partial^2 L(\alpha_1, \alpha_2, \beta)}{\partial \alpha_2^2} & -\frac{\partial^2 L(\alpha_1, \alpha_2, \beta)}{\partial \alpha_2 \partial \beta} \\ -\frac{\partial^2 L(\alpha_1, \alpha_2, \beta)}{\partial \beta \partial \alpha_1} & -\frac{\partial^2 L(\alpha_1, \alpha_2, \beta)}{\partial \beta \partial \alpha_2} & -\frac{\partial^2 L(\alpha_1, \alpha_2, \beta)}{\partial \beta^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \hat{I}_{11} & \hat{I}_{12} & \hat{I}_{13} \\ \hat{I}_{21} & \hat{I}_{22} & \hat{I}_{23} \\ \hat{I}_{31} & \hat{I}_{32} & \hat{I}_{33} \end{pmatrix}$$

که در اینجا:

$$\hat{I}_{11} = -\frac{m_1}{\alpha_1^2} \Big|_{\alpha_1 = \hat{\alpha}_1}, \hat{I}_{12} = -\frac{m_2}{\alpha_2^2} \Big|_{\alpha_2 = \hat{\alpha}_2}, \hat{I}_{13} = \hat{I}_{21} = 0,$$

$$\hat{I}_{13} = \hat{I}_{31} = k_1 \sum_{i=1}^{m_1} (R_{x,i} + 1) \frac{x_i^{-2} e^{-\beta/x_i^2}}{1 - e^{-\beta/x_i^2}} \Big|_{\beta = \hat{\beta}},$$

$$\hat{I}_{23} = \hat{I}_{32} = k_2 \sum_{j=1}^{m_2} (R_{y,j} + 1) \frac{y_j^{-2} e^{-\beta/y_j^2}}{1 - e^{-\beta/y_j^2}} \Big|_{\beta = \hat{\beta}},$$

$$\pi(\beta) = \pi(\beta|\alpha_1, \alpha_2, data) \propto \beta^{m_1+m_2+a_3-1} \times \exp\left\{-\beta\left[\sum_{i=1}^{m_1} x_i^{-2} + \sum_{j=1}^{m_2} y_j^{-2} + b_3\right]\right\} \times \left[\prod_{i=1}^{m_1} (1 - e^{-\beta/x_i^2})^{\alpha_1 k_1 (R_{x,i}+1)-1}\right] \left[\prod_{j=1}^{m_2} (1 - e^{-\beta/y_j^2})^{\alpha_2 k_2 (R_{y,j}+1)-1}\right]$$

همانطور که مشاهده می‌کنید، توابع توزیع پسین حاشیه‌ای α_1 و α_2 معلوم (دارای توزیع گاما هستند) ولی توزیع پسینی β فرم بسته‌ای ندارد. بنابراین از روش نمونه‌گیری گیبز برای تولید نمونه از توزیع پسینی α_1 و α_2 و از الگوریتم متروپلیس- هاستینگس در تولید نمونه از توزیع پسینی β استفاده می‌شود. مراحل به شرح زیر است:

۱. مقادیر اولیه ($\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \beta^{(0)}$) برای پارامترهای

مجهول در نظر گرفته شود.

۲. h را برابر یک ($h=1$) قرار دهید.

۳. $\alpha_1^{(h)}$ را از توزیع گاما با پارامترهای $m_1 + a_1$ و

$$b_1 - k_1 \sum_{i=1}^{m_1} (R_{x,i} + 1) \ln(1 - e^{-\beta^{(h-1)}/x_i^2})$$

۴. $\alpha_2^{(h)}$ را از توزیع گاما با پارامترهای $m_2 + a_2$ و

$$b_2 - k_2 \sum_{j=1}^{m_2} (R_{y,j} + 1) \ln(1 - e^{-\beta^{(h-1)}/y_j^2})$$

۵. با استفاده از الگوریتم متروپلیس- هاستینگس، β از

توزیع نرمال با میانگین $\beta^{(h-1)}$ و واریانس یک تولید شود.

۶. مدل قابلیت اطمینان، به صورت $\delta^{(h)} = \frac{\alpha_2^{(h)}}{\alpha_1^{(h)} + \alpha_2^{(h)}}$

برآورد شود.

۷. h را برابر $h+1$ در نظر بگیرید.

۸. مراحل ۳ تا ۷، M بار تکرار شود.

۹. برآورد بیزی مدل قابلیت اطمینان تحت تابع زیان مربع

خطا، برابر است با

$$\hat{\delta}_{Bayes} = \frac{1}{M - M_0} \sum_{i=M_0+1}^M \delta^{(i)}$$

بنابراین بر اساس قضیه بیز، توزیع پسین پارامترهای مجهول عبارتست از:

$$\pi(\alpha_1, \alpha_2, \beta | data) = \frac{L(\alpha_1, \alpha_2, \beta) \pi(\alpha_1, \alpha_2, \beta)}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty L(\alpha_1, \alpha_2, \beta) \pi(\alpha_1, \alpha_2, \beta) d\alpha_1 d\alpha_2 d\beta}$$

$$\Rightarrow \pi(\alpha_1, \alpha_2, \beta | data) \propto k_1^{m_1} k_2^{m_2} \alpha_1^{m_1+a_1-1} \alpha_2^{m_2+a_2-1}$$

$$\times \beta^{m_1+m_2+a_3-1} e^{-b_1\alpha_1 - b_2\alpha_2 - b_3\beta} \left(\prod_{i=1}^{m_1} x_i^{-3}\right) \left(\prod_{j=1}^{m_2} y_j^{-3}\right)$$

$$\times \exp\left\{-\beta\left[\sum_{i=1}^{m_1} x_i^{-2} + \sum_{j=1}^{m_2} y_j^{-2}\right]\right\} \left[\prod_{i=1}^{m_1} (1 - e^{-\beta/x_i^2})^{\alpha_1 k_1 (R_{x,i}+1)-1}\right]$$

$$\times \left[\prod_{j=1}^{m_2} (1 - e^{-\beta/y_j^2})^{\alpha_2 k_2 (R_{y,j}+1)-1}\right]. \quad (8)$$

چون توزیع پسین بیان شده در رابطه (۸) به صورت تحلیلی قابل محاسبه نیست، بنابراین روش نمونه‌گیری گیبز و الگوریتم متروپلیس- هاستینگس، برای برآورد بیزی پارامترهای مجهول و مدل فشار- دوام استفاده شده است. توزیع‌های پسین حاشیه‌ای α_1 و α_2 به ترتیب عبارتند از:

$$\pi(\alpha_1 | \alpha_2, \beta, data) \propto \text{Gamma}(m_1 + a_1,$$

$$b_1 - k_1 \sum_{i=1}^{m_1} (R_{x,i} + 1) \ln(1 - e^{-\beta/x_i^2})),$$

9

$$\pi(\alpha_2 | \alpha_1, \beta, data) \propto \text{Gamma}(m_2 + a_2,$$

$$b_2 - k_2 \sum_{j=1}^{m_2} (R_{y,j} + 1) \ln(1 - e^{-\beta/y_j^2})),$$

همچنین توزیع پسین β به صورت زیر است:

گام دوم: به ازای $i=1,2,\dots,m$ ، V_i ها به صورت

$$V_i = T_i^{1/(i + \sum_{j=m-i+1}^m R_j)}$$

تعریف می‌شوند.

گام سوم: به ازای $i=1,2,\dots,m$ ، U_i ها به صورت

$$U_i = 1 - V_m V_{m-1} \dots V_{m-i+1}$$

در نظر گرفته می‌شوند.

گام چهارم: به ازای $i=1,2,\dots,m$ ، X_i ها به صورت

$$X_i = \left[-\beta / \ln(1 - (1 - U_i)^{1/\alpha}) \right]^{1/2}$$

توزیع رایلی نمایی شده معکوس خواهد بود.

در مقایسه برآوردگرهای بررسی شده، مقادیر اولیه پارامترهای $(\beta, \alpha_1, \alpha_2)$ به صورت $(2, 1.5, 1.5)$ در نظر گرفته شده است. همچنین برای مقایسه بهتر و جامع‌تر، در این شبیه‌سازی مقادیر مختلف k ($k_1 = k_2 = k = 1, 3$)، n ($n_1 = n_2 = n = 30, 40$)، m ($m_1 = m_2 = m = 10, 25$) و طرح‌های مختلف سانسور (راست، چپ و فزاینده) در نظر گرفته شده است. در برآورد بیزی، دو تابع توزیع پیشین برای پارامترها در نظر گرفته شده است:

- حالت ۱ (Prior 0): $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$.
- حالت ۲ (Prior 1):

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, b_1 = b_2 = b_3 = 2$$

که حالت ۱، پیشین فاقد اطلاع و حالت ۲، پیشین گاما حاوی اطلاع (آگاهی بخش) نامیده می‌شود. علاوه بر این در محاسبه برآوردهای بیزی بر اساس الگوریتم بیان شده در بخش ۳-۲، از برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم به عنوان مقادیر اولیه پارامترها در گام اول این الگوریتم، استفاده شده است و مقادیر M و M_0 به ترتیب ۵۰۰۰ و ۱۰۰۰ در نظر گرفته شده است. نتایج مربوط به شبیه‌سازی مونت کارلو برای $k=3$ و $k=5$ به ترتیب در جداول ۱ و ۲ آورده شده است. برای گرفتن نتایج بهتر تعداد تکرارها ۱۰۰۰۰ بار در نظر گرفته شده است. در این جداول ستون اول مقادیر مختلف n و m ، ستون دوم طرح‌های مختلف سانسور، ستون سوم میانگین مربع خطای (MSE) برآورد مدل قابلیت اطمینان با استفاده از روش درست‌نمایی ماکسیمم ($\hat{\delta}_{MLE}$)،

از آنجاییکه مقادیر ابتدایی دنباله تولید شده در الگوریتم بالا ممکن است از دنباله‌های همگرا دور باشد، بنابراین تعدادی از تکرارهای ابتدایی در الگوریتم بالا (M_0) حذف می‌شوند. به این تکرارهای حذف شده ابتدایی، مشاهدات سوخته (Burn-in) گویند. به عبارتی $\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \dots, \delta^{(M_0)}$ حذف می‌شوند.

۱۰. برای محاسبه بازه اطمینان بیزی، فرض کنید $\delta_{(1)} \leq \delta_{(2)} \leq \dots \leq \delta_{(M-M_0)}$ نشان‌دهنده شکل مرتب‌شده $\delta^{(M_0+1)} \leq \delta^{(M_0+2)} \leq \dots \leq \delta^{(M)}$ در این صورت بازه اطمینان بیزی $100(1-\gamma)\%$ برای δ عبارتست از:

$$\left(\delta_{(i)}, \delta_{(i+[1-\gamma]M)} \right),$$

که i به گونه‌ای انتخاب می‌شود که

$$\left(\delta_{(i+[1-\gamma](M-M_0))} - \delta_{(i)} \right) = \min_{1 \leq i \leq \gamma M} \left(\delta_{(i+[1-\gamma](M-M_0))} - \delta_{(i)} \right);$$

$$i = 1, 2, \dots, (M - M_0).$$

۴- نتایج تحلیل داده‌های از هم‌گسیختگی میکرو

قطرات و شبیه‌سازی مونت کارلو

در این بخش، یک مطالعه شبیه‌سازی مونت کارلو و یک مجموعه داده واقعی از هم‌گسیختگی میکرو قطرات، برای مشاهده نتایج تئوری محاسبه شده، آورده شده است. تمامی نتایج و شکل‌های این بخش، توسط نرم‌افزار R (3.4.0) محاسبه شده است.

۴-۱- نتایج شبیه‌سازی مونت کارلو

در این بخش با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو، کارایی برآوردهای مختلف را تحت داده‌های سانسور شده بررسی خواهیم کرد. برای تولید نمونه‌های سانسور فزاینده اولین شکست، از الگوریتم پیشنهادی بالا کریشنان و ساندهو [۲۹]، به صورت زیر استفاده شده است.

گام اول: ابتدا m عدد تصادفی مستقل از توزیع یکنواخت استاندارد، تولید شده و T_1, T_2, \dots, T_m نامیده می‌شوند.

۲. ملاحظه می‌شود که برای تمامی مقادیر m ، n و k طرح‌های سانسور مختلف، بهترین عملکرد برحسب MSE ، به برآوردهای بیزی بر اساس تابع چگالی پیشین حاوی اطلاع $(\hat{\delta}_{BayesPrior1})$ تعلق دارد.

۳. مشاهده می‌شود که در تمامی حالت‌ها، احتمال پوشش (CP) در بازه اطمینان بیزی به مقدار 0.95 نزدیک می‌باشد و درصد همگرایی مطلوبی را نشان می‌دهند.

۴. مقایسه احتمال پوشش فواصل بیزی تحت پیشین فاقد اطلاع و حاوی اطلاع، نشان می‌دهد که این فواصل تحت پیشین حاوی اطلاع عملکرد بهتری دارند.

۵. ملاحظه می‌شود که با افزایش مقادیر n و m برای مقدار k ثابت، مقادیر MSE برای تمامی برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم و بیزی کاهش می‌یابد.

۶. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار k برای مقادیر n و m ثابت، مقادیر MSE در تمام برآوردها افزایش می‌یابد.

ستون‌های چهارم و پنجم میانگین مربع خطای برآوردهای بیزی مدل قابلیت اطمینان به ترتیب تحت پیشین فاقد اطلاع $(\hat{\delta}_{BayesPrior0})$ و حاوی اطلاع $(\hat{\delta}_{BayesPrior1})$ و ستون‌های ششم و هفتم، به ترتیب احتمال‌های پوشش برای فواصل اطمینان 0.95 بیزی تحت پیشین فاقد اطلاع $(CP_{BayesPrior0})$ و حاوی اطلاع $(CP_{BayesPrior1})$ می‌باشند. در جداول ۱ و ۲، طرح‌های سانسور به صورت کوتاه نمایش داده شده است. به عنوان مثال، طرح سانسور فزاینده $(R_1 = \dots = R_{14} = 0, R_{15} = 5)$ به صورت $(\delta^{14}, 5)$ در نظر گرفته شده است. نتایج شبیه‌سازی ارائه شده در جداول ۱ و ۲، درباره برآوردهای مختلف مدل قابلیت اطمینان به صورت زیر است:

۱. برآورد بیزی بدست آمده به روش نمونه‌گیری گیبز و الگوریتم متروپلیس- هاستینگس نسبت به روش درست‌نمایی ماکسیمم، در حالت کلی دارای عملکرد بهتری است (مقدار MSE کوچکتر است).

جدول ۱: میانگین مربع خطا برای برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم و بیزی δ به ازای $k_1 = k_2 = k = 3$.

$CP_{BayesPrior1}$	$CP_{BayesPrior0}$	$\hat{\delta}_{BayesPrior1}$	$\hat{\delta}_{BayesPrior0}$	$\hat{\delta}_{MLE}$	C.S.	(n,m)
0.946	0.943	0.0588	0.0854	0.1242	(0.9, 20)	(30, 10)
0.946	0.945	0.0507	0.0713	0.0834	(20, 0.9)	(30, 10)
0.955	0.944	0.0528	0.0869	0.0928	(2 ¹⁰)	(30, 10)
0.950	0.945	0.0343	0.0523	0.0736	(0.24, 15)	(40, 25)
0.948	0.952	0.0367	0.0478	0.0523	(15, 0.24)	(40, 25)
0.949	0.953	0.0312	0.0515	0.0692	(2 ^{0.5} , 0.15, 1 ^{0.5})	(40, 25)

جدول ۲: میانگین مربع خطا برای برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم و بیزی δ به ازای $k_1 = k_2 = k = 5$.

$CP_{BayesPrior1}$	$CP_{BayesPrior0}$	$\hat{\delta}_{BayesPrior1}$	$\hat{\delta}_{BayesPrior0}$	$\hat{\delta}_{MLE}$	C.S.	(n,m)
0.944	0.941	0.0664	0.0925	0.1654	(0.9, 20)	(30, 10)
0.957	0.955	0.0534	0.0785	0.0926	(20, 0.9)	(30, 10)
0.947	0.945	0.0533	0.0874	0.0943	(2 ¹⁰)	(30, 10)
0.953	0.956	0.0379	0.0587	0.0852	(0.24, 15)	(40, 25)
0.949	0.948	0.0369	0.0481	0.0675	(15, 0.24)	(40, 25)
0.952	0.954	0.0337	0.0542	0.0711	(2 ^{0.5} , 0.15, 1 ^{0.5})	(40, 25)

۴-۲- تحلیل داده‌های از هم‌گسیختگی میکرو قطرات بر اساس دو سطح فشار مختلف

معکوس $(f_{IEP} = \alpha\beta x^{\beta-1}(1+x)^{-(\beta+1)}(1-(\frac{1+x}{x})^{-\beta})^{\alpha-1})$ و نمایی $(f_{IEE} = \alpha\beta x^{-2}e^{-\beta/x}(1-e^{-\beta/x})^{\alpha-1})$ که هر دو این توزیع‌ها نیز برازش خوبی بر هر دو سری داده داشته‌اند، مقایسه شده است. ابتدا با استفاده از روش درستمایی ماکسیمم، پارامترهای مجهول توزیع‌های مختلف، برآورد شده و سپس بر اساس معیارها و آزمون‌های انتخاب مدل (پیوست ملاحظه شود) مانند معیار اطلاع آکائیک (AIC)، معیار اطلاع آکائیک اصلاح شده ($AICc$)، معیار اطلاع بیزی (BIC) و آزمون کلموگروف-اسمیرنوف (KS)، مقایسه شده‌اند. نتایج برای داده‌های مربوط به فشار ۱ و ۱/۵ مگا پاسکال، به ترتیب در جداول ۳ و ۴ آورده شده است.

در این قسمت از داده‌های مربوط به قطرهای از هم‌گسیختگی میکرو قطرات در دو فشار مختلف، برای برآورد مدل قابلیت اطمینان استفاده شده است. متغیرهای X و Y نشان دهنده قطر میکرو قطرات از هم‌گسیخته شده در دو فشار ۱ و ۱/۵ مگا پاسکال می‌باشند که توسط آزمایشات پلانچ و همکاران [۴] به دست آمده‌اند. مجموعه داده‌های شماره ۱ مربوط به فشار ۱ مگا پاسکال و مجموعه داده‌های شماره ۲ مربوط به فشار ۱/۵ مگا پاسکال با حجم نمونه به ترتیب ۶۶ و ۸۰ هستند. ابتدا برازندگی توزیع رایلی نمایی شده معکوس $(f_{IER} = 2\alpha\beta x^{-3}e^{-\beta/x^2}(1-e^{-\beta/x^2})^{\alpha-1})$ بر داده‌های بیان شده، برای استفاده در مدل قابلیت اطمینان بررسی شده است. برای این منظور این توزیع، با دو توزیع پارتو نمایی شده

جدول ۳: برآورد معیارها و آزمون انتخاب مدل برای داده‌های از هم‌گسیختگی در فشار یک مگا پاسکال.

توزیع	برآورد پارامترها	$AICc$	AIC	BIC	KS
IER	$\alpha = 10.22918, \beta = 64451.4$	۶۴۷/۷۴۷۹	۶۴۷/۵۵۷۴	۶۵۱/۹۳۶۷	۰/۰۷۷۰۰۴۰
IEP	$\alpha = 162.7164, \beta = 855.5638$	۶۴۸/۹۰۶۳	۶۴۸/۷۱۵۸	۶۵۳/۰۹۵۱	۰/۱۰۴۴۰۷
IEE	$\alpha = 160.2427, \beta = 850.4265$	۶۴۸/۸۸۱۵	۶۴۸/۶۹۱۰	۶۵۳/۰۷۰۳	۰/۱۰۴۰۵۱

جدول ۴: برآورد معیارها و آزمون انتخاب مدل برای داده‌های از هم‌گسیختگی در فشار یک و نیم مگا پاسکال.

توزیع	توابع چگالی	$AICc$	AIC	BIC	KS
IER	$\alpha = 14.26449, \beta = 33322.63$	۶۹۹/۶۴۸۲	۶۹۹/۴۹۲۴	۷۰۴/۲۵۶۵	۰/۰۷۷۹۲۶
IEP	$\alpha = 197.1414, \beta = 598.5504$	۷۰۹/۷۰۸۹	۷۰۹/۵۵۳۱	۷۱۴/۳۱۷۱	۰/۰۹۵۱۴۶
IEE	$\alpha = 193.2435, \beta = 593.5977$	۷۰۹/۵۷۲۰	۷۰۹/۴۱۶۲	۷۱۴/۱۸۰۲	۰/۰۹۴۶۲۵

$$\Delta_{IER} = AIC_{IER} - AIC_{min} = 0,$$

$$\Delta_{IEP} = AIC_{IEP} - AIC_{min} = 1.1584,$$

$$\Delta_{IEE} = AIC_{IEE} - AIC_{min} = 1.1336$$

• در سری داده ۲:

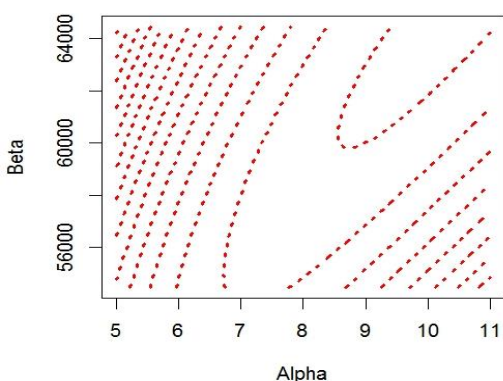
برای مقایسه نتایج معیارهای اطلاع آکائیک و اطلاع بیزی از جداول ۵ و ۶ استفاده شده است. بر اساس جدول ۵، داریم:

$$\Delta_i = AIC_i - AIC_{min}$$

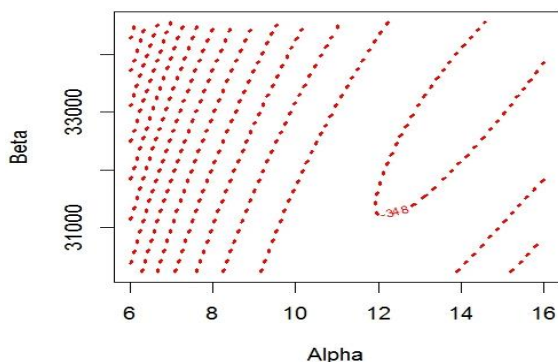
که در اینجا AIC_{min} ، برای سری داده ۱ و ۲ به ترتیب ۶۴۷/۵۵۷۴ و ۶۹۹/۴۹۲۴ است. بنابراین:

• در سری داده ۱:

بدست آمده برای توزیع رایلی نمای شده معکوس در سری داده ۱ و ۲ به ترتیب برابر ۰/۸۲۸۷ و ۰/۷۱۶۲ می‌باشند که مقادیری نزدیک یک هستند. بنابراین به طور کلی می‌توان نتیجه گرفت که توزیع رایلی نمای شده معکوس بهترین توزیع برازنده داده‌ها در هر دو فشار ۱ و ۱/۵ مگا پاسکال است. برای بررسی بیشتر نتایج برآوردها در توزیع رایلی نمای شده معکوس، نمودارهای کانتور (Contour Plot) برای فشارهای ۱ و ۱/۵ مگا پاسکال به ترتیب در شکل‌های ۳ و ۴ آورده شده است.



شکل ۳: نمودار کانتور مربوط به برآورد پارامترها در داده‌های فشار یک مگا پاسکال



شکل ۴: نمودار کانتور مربوط به برآورد پارامترها در داده‌های فشار یک و نیم مگا پاسکال

$$\Delta_{IER} = AIC_{IER} - AIC_{min} = 0,$$

$$\Delta_{IEP} = AIC_{IEP} - AIC_{min} = 10.0607,$$

$$\Delta_{IEE} = AIC_{IEE} - AIC_{min} = 9.9238.$$

بنابراین واضح است که چون Δ_{IER} برابر صفر شده است، پس بهترین مدل برازنده داده‌ها در دو سری داده ۱ و ۲ است. اما بر اساس جدول ۵، مدل‌های دیگر به صورت زیر مقایسه و تفسیر می‌شوند.

- در سری داده ۱، چون $0 < \Delta_{IEP} \leq 2$ و $0 < \Delta_{IEE} \leq 2$ هستند، پس می‌توان نتیجه گرفت که این دو توزیع نیز، برازندگی قابل توجهی بر داده‌ها دارند (بر اساس جدول ۵ در پیوست ۱).
- در سری داده ۲، چون Δ_{IEE} و Δ_{IEP} اعدادی بزرگتر از ۷ هستند، پس می‌توان نتیجه گرفت که این توزیع‌ها برازندگی حائز اهمیتی بر داده‌ها ندارند (بر اساس جدول ۵ در پیوست ۱).
- بر اساس جدول ۶ (پیوست ۲)، نتایج مشابهی برای معیار اطلاع بیزی به صورت زیر برقرار است.
- در سری داده ۱، داریم:

$$\check{\Delta}_{IER} = BIC_{IER} - BIC_{min} = 0$$

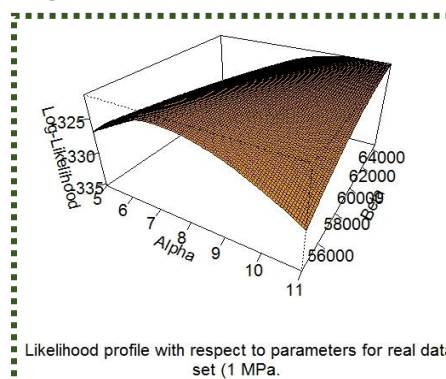
$$0 < \check{\Delta}_{IEE} = BIC_{IEE} - BIC_{min} \leq 2$$

$$0 < \check{\Delta}_{IEP} = BIC_{IEP} - BIC_{min} \leq 2$$

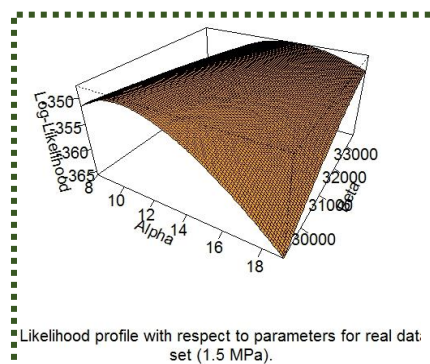
پس می‌توان نتیجه گرفت که توزیع رایلی نمای شده معکوس، بهترین توزیع و توزیع‌های پارتو نمای شده معکوس و نمای شده معکوس نیز برازندگی قابل توجهی بر داده‌ها دارند (بر اساس جدول ۶ در پیوست ۲).

- در سری داده ۲، چون $\check{\Delta}_{IEE} < 10$ و $\check{\Delta}_{IEP} > 10$ هستند، پس می‌توان نتیجه گرفت که برازندگی خوبی بر داده‌ها ندارند (بر اساس جدول ۶ در پیوست ۲).
- همچنین مشاهده می‌شود که بر اساس آزمون کلموگروف-اسمیرن $D_{IER} < D_{IEP} < D_{IEE}$ است. همچنین p -مقدارهای

پاسکال به ترتیب در شکل‌های ۵ و ۶ نمایش داده شده است
 همچنین نمودار سه-بعدی مربوط به برآورد پارامترها در داده‌های
 از هم‌گسیختگی میکرو قطرات در فشارهای یک و یک و نیم مگا



شکل ۵: نمودار سه-بعدی مربوط به برآورد پارامترها در داده‌های فشار یک مگا پاسکال.



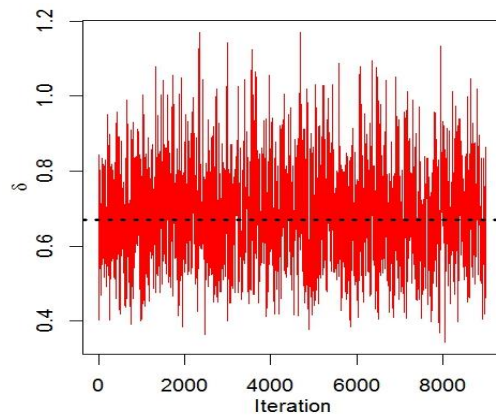
شکل ۶: نمودار سه-بعدی مربوط به برآورد پارامترها در داده‌های فشار یک و نیم مگا پاسکال.

برآورد درست‌نمایی ماکسیمم و بیزی مدل قابلیت اطمینان (δ) عبارتند از:

$$\hat{\delta}_{MLE} \cong 0.6708, \quad \hat{\delta}_{Bayes} \cong 0.6694.$$

در محاسبه برآورد بیزی بر اساس الگوریتم متروپلیس-هاستینگس که در بخش ۳-۲ آورده شده است، از برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم به عنوان مقادیر اولیه پارامترها استفاده شده است. همچنین برای تعیین M_0 از نمودار اثر (Trace Plot) استفاده شده است. این نمودار در شکل ۷ نمایش داده شده است. خط بریده شده نمایش داده شده در نمودار، نمایانگر برآورد بیزی مدل قابلیت اطمینان در داده‌های کامل است.

بر اساس شکل‌های رسم شده، مشاهده می‌گردد که مقدار برآورد درست‌نمایی ماکسیمم برای (β, α_1) بر اساس فشار یک مگاپاسکال برابر با $(0.10/22)$ ، $(64451/4)$ و همچنین برآورد (α_2, β) بر اساس فشار یک و نیم مگاپاسکال برابر $(14/26)$ ، $(33322/6)$ است. همچنین در شکل‌های ۵ و ۶ نشان داده شده است که سطح درست‌نمایی برای هر دو پارامتر (β, α_1) در شکل ۵ و (β, α_2) در شکل ۶، خمیدگی دارد که این بیانگر این است که برآورد درست‌نمایی ماکسیمم پارامترها وجود دارد و یکتاست. بنابراین برآورد درست‌نمایی ماکسیمم مدل قابلیت اطمینان (δ)، یکتا است. بر اساس مقادیر برآورد شده پارامترها در داده‌های کامل



شکل ۷: نمودار اثر مربوط به مدل قابلیت اطمینان (δ)، خط (- -) نشان دهنده برآورد بیزی δ است.

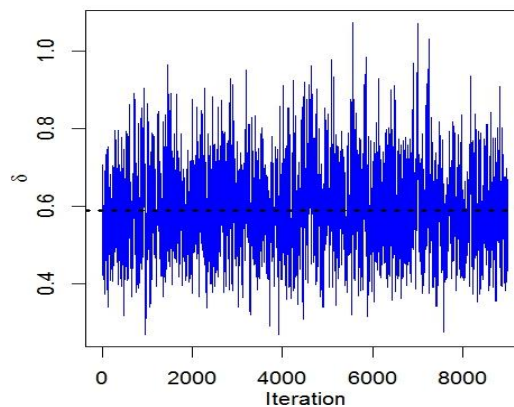
صورت زیر محاسبه گردیده است:

بیزی، از الگوریتم متروپلیس- هاستینگس برای تولید نمونه به حجم ۱۰۰۰۰ استفاده شده است. در این الگوریتم، برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم سانسور شده، به عنوان مقادیر اولیه در گام اول الگوریتم، استفاده شده است و ۲۰۰۰ نمونه اولیه به عنوان مشاهدات سوخته حذف گردیده است. همچنین از توابع چگالی پیشین فاقد اطلاع ($a_i = b_i = 0; i = 1, 2$) در برآوردهای بیزی پارامترهای مجهول استفاده شده است. نمودار اثر مربوط به داده‌های سانسور شده در شکل ۸ نمایش داده شده است.

حال برای بررسی مدل قابلیت اطمینان تحت نمونه سانسور فزاینده اولین شکست، تعدادی از اعداد نمونه را سانسور می‌کنیم برای این کار از نرم‌افزار R استفاده شده است [۲۵، ۲۶].

- $n_1 = 22, k_1 = 3, m_1 = 15, R_{x^*} = (7, 0^{*14})$.
- $n_2 = 20, k_2 = 4, m_2 = 15, R_{y^*} = (5, 0^{*14})$.

توجه نمایید که در نمادهای بالا، مثلاً $(7, 0^{*14})$ به این مفهوم است که بعد از مشاهده اولین گروه، هفت گروه به تصادف حذف می‌شوند و سپس بقیه گروه‌ها باقی می‌مانند. بر اساس داده‌های مشاهده شده، ابتدا برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم و بیزی پارامترهای مجهول محاسبه شده و سپس مدل قابلیت اطمینان به



شکل ۸: نمودار اثر مربوط به مدل قابلیت اطمینان سانسور شده، خط (- -) نشان دهنده برآورد بیزی $\delta_{Censored}$ است.

مراجع

[1] Thoroddsen, S. T., Takehara, K., & Etoh, T. G. (2012). *Micro-splashing by drop impacts*. *Journal of Fluid Mechanics*, 706, 560-570

[2] Palacios, J., Hernández, J., Gómez, P., Zanzi, C., & López, J. (2013). *Experimental study of splashing patterns and the splashing/deposition threshold in drop impacts onto dry smooth solid surfaces*. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 44, 571-582.

[3] Liang, G. Guo, Y. Yang, Y. Zhen, N. & Shen, S. (2013). *Spreading and splashing during a single drop impact on an inclined wetted surface*. *Acta Mechanica*, 224, 2993-30.

[4] Planche, M.-P. Khatim, O. Dembinski, L. Bailly, Y. & Coddet, C. (2013). *Evaluation of the splats properties and relation with droplets diameters in atomization process using a de laval nozzle*. *Materials Chemistry and Physics*, 137, 681-688.

[5] Kim, H., Park, U., Lee, C., Kim, H., Hwan Kim, M., & Kim, J. (2014). *Drop splashing on a rough surface: How surface morphology affects splashing threshold*. *Applied Physics Letters*, 104(16), 161608.

[6] San Lee, J., Park, S. J., Lee, J. H., Weon, B. M., Fezzaa, K., & Je, J. H. (2015). *Origin and dynamics of vortex rings in drop splashing*. *Nature communications*, 6(1), 1-8.

[7] De Goede, T. C., Laan, N., De Bruin, K. G., & Bonn, D. (2017). *Effect of wetting on drop splashing of Newtonian fluids and blood*. *Langmuir*, 34(18), 5163-5168.

[8] Yang, S., An, Y., & Liu, Q. (2017). *Effect of viscosity on motion of splashing crown in high speed drop impact*. *Applied Mathematics and Mechanics*, 38(12), 1709-1720.

[9] Latka, A., Boelens, A. M., Nagel, S. R., & de Pablo, J. J. (2018). *Drop splashing is*

همچنین برای بررسی بیشتر، طرح دیگری برای سانسور فزاینده اولین شکست، به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$. n_1 = 22, k_1 = 3, m_1 = 18, R_x = (0^{*6}, 1^{*4}, 0^{*6}) \quad \blacksquare$$

$$. n_2 = 20, k_2 = 4, m_2 = 17, R_y = (0^{*6}, 1^{*3}, 0^{*8}) \quad \blacksquare$$

بر اساس معادلات بدست آمده در بخش ۳، برآورد درستنمایی ماکسیمم و بیزی مدل قابلیت اطمینان به صورت زیر می باشند:

$$\hat{\delta}_{MLE} \cong 0.6243, \hat{\delta}_{Bayes} \cong 0.6098.$$

بر اساس مقادیر بدست آمده برای مدل قابلیت اطمینان در هر دو حالت داده‌های کامل و سانسور شده، مشاهده می‌گردد که احتمال قطر ذرات از هم‌گسیختگی شده در فشار یک و نیم مگا پاسکال کمتر از فشار یک مگا پاسکال است. همچنین مشاهده می‌شود که این طرح سانسور، به مقدار برآورد مدل قابلیت اطمینان تحت داده‌های کامل، نزدیک‌تر است.

۵- نتیجه‌گیری:

بسیاری از پوشش‌های میکرو و نانو بدلیل مقاومت بالا در برابر خوردگی و حرارت، کاربرد وسیعی در فناوری‌های نوین دارند. از هم‌گسیختگی میکرو قطره در حین برخورد با سطح در فرآیند ایجاد پوشش، باعث کاهش کیفیت پوشش به وجود آمده می‌شود که در نهایت مقاومت آن را در برابر خوردگی و حرارت کاهش می‌دهد. یکی از عوامل مهم ایجاد از هم‌گسیختگی میکرو قطرات فشار نازل پاشش می‌باشد. همچنین به دلیل عدم امکان سنجش و هزینه بر بودن بسیاری از آزمایشات در ابعاد نانو و میکرو، برخی از داده‌های از هم‌گسیختگی میکرو قطرات قابل دسترسی نیستند (سانسور می‌شوند). در این تحقیق با استفاده از مدل قابلیت اطمینان در داده‌های سانسور شده، تأثیر فشار بر قطر از هم‌گسیختگی میکرو قطرات برآورد شده است. نتایج نشان می‌دهد که در هر دو حالت داده‌های کامل و سانسور شده، با افزایش فشار نازل، قطر از هم‌گسیختگی میکرو قطرات کاهش می‌یابد.

exponentiated Rayleigh distribution under hybrid censoring. Communications in Statistics-Theory and Methods, 47(7), 1615-1640.

[18] Panahi, H., & Moradi, N. (2020). *Estimation of the inverted exponentiated Rayleigh distribution based on adaptive type II progressive hybrid censored sample. Journal of Computational and Applied Mathematics*, 364, 112345.

[19] Balakrishnan, N., Balakrishnan, N., & Aggarwala, R. (2000). *Progressive censoring: theory, methods, and applications*. Springer Science & Business Media.

[20] Wu, S. J., & Kuş, C. (2009). *On estimation based on progressive first-failure-censored sampling. Computational Statistics & Data Analysis*, 53(10), 3659-3670.

[21] Soliman, A. A., Abd-Allah, A. H., Abou-Elheggag, N. A., & Abd-Elmougod, G. A. (2012). *Estimation of the parameters of life for Gompertz distribution using progressive first-failure censored data. Computational Statistics & Data Analysis*, 56(8), 2471-2485.

[22] Lio, Y. L., & Tsai, T. R. (2012). *Estimation of $\delta = P(X < Y)$ for Burr XII distribution based on the progressively first failure-censored samples. Journal of Applied Statistics*, 39(2), 309-322.

[23] Ahmed, E. A. (2017). *Estimation and prediction for the generalized inverted exponential distribution based on progressively first-failure-censored data with application. Journal of Applied Statistics*, 44(9), 1576-1608.

[24] Panahi, H. (2018). *Inference for exponentiated Pareto distribution based on progressive first-failure censored data with application to cumin essential oil data. Journal of Statistics and Management Systems*, 21(8), 1433-1457.

[25] Dube, M., Krishna, H., & Garg, R. (2016). *Generalized inverted exponential distribution under progressive first-failure censoring. Journal*

independent of substrate wetting. Physics of Fluids, 30(2), 022105.

[10] Kittel, H. M., Alam, E., Roisman, I. V., Tropea, C., & Gambaryan-Roisman, T. (2018). *Splashing of a Newtonian drop impacted onto a solid substrate coated by a thin soft layer. Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 553, 89-96.

[11] Yang, H., Sun, K., Xue, Y., Xu, C., Fan, D., Cao, Y., & Xue, W. (2019). *Controllable drop splashing on picosecond laser patterned hybrid superhydrophobic/-philic surfaces. Applied Surface Science*, 481, 184-191.

[۱۲]. پناهی، ه.، و اسدی، س. (۱۳۹۷). پیش‌بینی پخش شدن نانو قطرات بر روی سطح با استفاده از مدل رگرسیون غیر خطی چند متغیره. مواد پیشرفته و پوشش‌های نوین، ۷، ۱۸۸۱-۱۸۸۶.

[13] Popov, G., & Anguelov, K. (2018). *Application of stress strength analysis for investigation of investments in heterogeneous assets. In AIP Conference Proceedings (Vol. 2048, No. 1, p. 060033)*. AIP Publishing LLC.

[14] Dey, S., Mazucheli, J., & Anis, M. Z. (2017). *Estimation of reliability of multicomponent stress-strength for a Kumaraswamy distribution. Communications in Statistics-Theory and Methods*, 46(4), 1560-1572.

[15] Ghitany, M. E., Al-Mutairi, D. K., & Aboukhamseen, S. M. (2015). *Estimation of the reliability of a stress-strength system from power Lindley distributions. Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 44(1), 118-136.

[16] Raqab, M. Z., & Kundu, D. (2005). *Comparison of different estimators of $P[Y < X]$ for a scaled Burr type X distribution. Communications in Statistics—Simulation and Computation*, 34(2), 465-483.

[17] Kayal, T., Tripathi, Y. M., & Rastogi, M. K. (2018). *Estimation and prediction for an inverted*

[28] Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. The annals of statistics, 6(2), 461-464.

[29] Balakrishnan, N., & Sandhu, R. A. (1995). A simple simulational algorithm for generating progressive Type-II censored samples. The American Statistician, 49(2), 229-230.

of Statistical Computation and Simulation, 86(6), 1095-1114.

[26] Team, R. C. (2014). R: A Language and Environment for Statistical Computing <http://www.R-project.org>.

[27] Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. IEEE Transactions on Automatic Control, 19(6), 716-723.

مدل برآورد شود، سپس بر اساس فرمول زیر معیار اطلاع آکائیک محاسبه می‌شود:

$$AIC = 2k - 2\ln(\hat{L})$$

که k تعداد پارامترهای مدل آماری است و \hat{L} مقدار حداکثر تابع درستنمایی برای مدل برآورد شده است. مدلی با کوچکترین مقدار AIC ، بهترین مدل برازنده داده‌ها است. برای مقایسه مدل‌ها می‌توان از جدول زیر استفاده کرد.

جدول ۵: مقایسه مدل‌ها بر اساس $\Delta_i = AIC_i - AIC_{min}$.

$0 < \Delta_i < 2$	اگر	هر دو مدل (مدلی با کمترین AIC و مدل در نظر گرفته شده i) برازندگی قابل توجهی بر داده‌ها دارند،
$2 < \Delta_i < 7$	اگر	مدل در نظر گرفته شده i برازش کمی بر داده‌ها دارد،
$\Delta_i > 7$	اگر	مدل در نظر گرفته شده i نسبت به برازندگی بر داده‌ها فاصله دارد،

پیوست‌ها:

پیوست ۱:

معیار اطلاع آکائیک یکی از معیارهای مهم در انتخاب مدل است که توسط آکائیک [۲۷] معرفی شده است. برای بدست آوردن این معیار، ابتدا باید پارامترهای مجهول

$$BIC = k \ln(N) - 2\ln(\hat{L})$$

که k تعداد پارامترهای مدل آماری است و \hat{L} مقدار حداکثر تابع درستنمایی برای مدل برآورد شده و N تعداد داده‌ها است. جدول ۵ برای مقایسه مدل‌ها آورده شده است.

جدول ۶: مقایسه مدل‌ها بر اساس $\tilde{\Delta}_i = BIC_i - BIC_{min}$.

$0 < \tilde{\Delta}_i < 2$	اگر	هر دو مدل (مدلی با کمترین BIC و مدل در نظر گرفته شده i) برازندگی قابل توجهی بر داده‌ها دارند
$2 < \tilde{\Delta}_i < 6$	اگر	مدلی با کمترین BIC از مدل i بهتر است،
$6 < \tilde{\Delta}_i < 10$	اگر	مدلی با کمترین BIC از مدل i به طور قوی بهتر است،
$\tilde{\Delta}_i > 10$	اگر	مدلی با کمترین BIC از مدل i به طور بسیار قوی بهتر است،

پیوست ۲:

معیار اطلاعات بیزی (BIC)، توسط شوارتز [۲۸] معرفی گردید و از این رو به عنوان معیار اطلاع شوارتز نیز بیان می‌شود. این معیار به صورت زیر تعریف می‌شود:

