

طراحی آماری اقتصادی نمودار کنترلی برای مشاهدات انفرادی از توزیع نمایی

مسعود توکلی

استادیار، هیئت علمی گروه علوم پایه، دانشگاه صنعتی بیرجند، ایران tavakoli@birjandut.ac.ir

علی اکبر حیدری*

(نویسنده مسئول) استادیار، هیئت علمی گروه آمار، دانشگاه تبریز، ایران heydari@tabrizu.ac.ir

چکیده در این مقاله برای مشخصه‌های کیفی انفرادی که دارای توزیع نمایی هستند، یک نمودار کنترلی با طراحی آماری اقتصادی ارائه شده است. بدین منظور ابتدا با استفاده از تقریبی که توسط نلسون پیشنهاد شده است، توزیع نمایی مشاهدات انفرادی را به توزیع نرمال تبدیل کرده‌ایم. سپس با استفاده از مدل اقتصادی کاستا و رحیم یک طرح آماری اقتصادی را برای مشاهدات تبدیل یافته به دست آورده‌ایم. به منظور بهینه‌سازی پارامترهای مدل که بر اساس پارامترهای طرح محاسبه می‌شوند، مقادیر بهینه پارامترهای طرح را با استفاده از الگوریتم زنبور عسل بدست آورده‌ایم. در پایان، نتایج پارامترهای آماری اقتصادی نمودار کنترلی بیان شده با طرح اقتصادی مقایسه شده و عملکرد مثبت طرح آماری اقتصادی در مقایسه با طرح اقتصادی نشان داده شده است. همچنین به وسیله داده‌های شبیه‌سازی شده از توزیع نمایی، کارایی و عملکرد نمودار کنترلی معرفی شده در مقایسه با حالتی که توزیع مشخصه کیفی نرمال فرض می‌شود، بررسی شده است.

واژه‌های کلیدی: نمودار کنترلی، مشخصه کیفی، توزیع نمایی، طراحی آماری اقتصادی، مدل اقتصادی کاستا و رحیم

طرح به منظور بهینه کردن ویژگی‌های آماری یا اقتصادی است. با توجه به اهمیت هر یک از دو ویژگی آماری و اقتصادی، توجه و تمرکز تنها به یکی از این ویژگی‌ها بدون در نظر گرفتن ویژگی دیگر، موجب دور شدن از مفهوم کامل بهینه‌سازی و افزایش هزینه خواهد بود. به همین منظور طرح آماری-اقتصادی (ESD) که در آن بر بهینه نمودن هر دو جنبه آماری و اقتصادی توجه دارد مطرح شد [۶]. در این نوع طراحی، طراح فرایند با اعمال برخی محدودیت‌های آماری به دنبال کمینه کردن هزینه است. این مدل در تحقیقات بسیاری و برای نمودارهای مختلف کنترلی مانند خادم و بامنی مقدم [۷] مورد توجه قرار گرفته و عملکرد مطلوب آن به اثبات رسیده است. آنها طرح آماری اقتصادی را بر اساس مدل هزینه بنرجی و رحیم [۸] برای نمودار کنترلی \bar{X} مورد مطالعه قرار داده‌اند. برای مطالعه بیشتر می‌توان به [۹]، [۱۰] و [۱۱] مراجعه کرد. این محدودیت‌های آماری معمولاً بر روی برخی از پارامترهای آماری مانند خطای نوع اول، میانگین زمان از هنگام وقوع تغییر در میانگین تا زمانی که نمودار

۱- مقدمه

با توجه به رقابت شدید میان تولیدکنندگان در کسب رضایت مشتری و سود بیشتر، کیفیت به یکی از مقوله‌های مهم در صنعت تبدیل شده است. در میان ابزارهای مختلف کنترلی، کنترل آماری فرایند (SPC) از درجه اهمیت بالایی برخوردار بوده که بوسیله آن چگونگی عملکرد فرایند مورد پایش و کنترل قرار می‌گیرد و در جهت بهبود کیفیت استفاده بکار گرفته می‌شود. در میان روش‌های مختلف آماری، نمودارهای کنترلی یکی از مهمترین و در عین حال پر استفاده‌ترین روش‌ها است. معمولاً در صنعت با توجه به نوع تولیدات و استراتژی تعیین شده تنها بر جنبه‌های آماری یا اقتصادی فرایند توجه می‌شود و در واقع نمودار را بر اساس طرح‌های آماری (SD) [۱] و [۲] و یا طرح‌های اقتصادی (ED) [۳]، [۴] و [۵] بنا سازی می‌کنند. طراح فرایند در این طرح‌ها به ترتیب به دنبال یافتن پارامترهای

* (Corresponding author) heydari@tabrizu.ac.ir

علیرغم اهمیت مشخصه‌های کیفی با ویژگی ذکر شده، توجه کمی به نمودار کنترلی برای این مقادیر شده است و در نمونه‌های ذکر شده، تنها جنبه آماری نمودار کنترلی مورد نظر قرار گرفته و در واقع نمودار بر اساس طرح آماری طرح‌ریزی شده است. بر این اساس و با توجه به عملکرد خوب و مزایای در نظر گرفتن ویژگی‌های آماری و اقتصادی بصورت توأم، در این مقاله نمودار کنترلی تی (که در واقع نمودار کنترلی برای مشخصه‌های کیفی که دارای توزیع نمایی هستند و مدت زمان میان انحرافات بادلیل نیز دارای توزیع نمایی است) بر اساس طرح آماری اقتصادی بناسازی شده و مقادیر بهینه پارامترهای آماری و اقتصادی محاسبه شده است. معمولاً در مقالات مشابه، یافتن مقادیر بهینه با استفاده از الگوریتم ژنتیک محاسبه می‌شود اما در این مقاله از الگوریتم فرا ابتکاری زنبور عسل برای این منظور استفاده شده است که الگوریتمی جدیدتر، دقیق‌تر و سریع‌تر می‌باشد. در بخش بعد، نمودار تی به اختصار معرفی شده است. طرح آماری اقتصادی نمودار کنترلی بیان شده در بخش ۳ ارائه شده است. روش بهینه‌سازی در الگوریتم زنبور عسل در بخش ۴ ارائه و مقادیر بهینه طرح و ویژگی‌های آماری و اقتصادی در بخش ۵ محاسبه شده است. همچنین در بخش ۵ با توجه به نتایج حاصل، چگونگی عملکرد طرح آماری اقتصادی برای نمودار کنترلی مورد نظر با طرح اقتصادی، مورد مقایسه قرار گرفته است.

۲- نمودار کنترل تی (t-chart)

فرض می‌کنیم مشخصه کیفی تحت کنترل که با X نمایش می‌دهیم، دارای توزیع نمایی با تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f(x) = \frac{1}{\theta_0} e^{-\frac{x}{\theta_0}}, \quad x > 0$$

که در آن θ_0 پارامتر مقیاس است.

با توجه به [۱۵] اگر قرار دهیم $X^* = X^{\frac{1}{\beta}}$ ، آنگاه X^* دارای توزیع وایبل با پارامتر شکل β و پارامتر مقیاس $\theta_0^{\frac{1}{\beta}}$ خواهد بود. به عبارت دیگر $X^* \sim W(\theta_0^{\frac{1}{\beta}}, \beta)$ که در این صورت؛

$$E(X^*) = \theta_0^{\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

علامتی مبنی بر خروج فرایند از کنترل را صادر می‌کند (AATS) و یا تعداد هشدارهای اشتباه (ANF) اعمال می‌شوند معمولاً در بناسازی نمودارهای کنترلی، توزیع مشخصه کیفی نرمال در نظر گرفته می‌شود. این در حالی است که در بسیاری موارد، با توجه به ماهیت مشخصه کیفی این فرض برقرار نیست. مشخصه‌های کیفی که نمودار فراوانی آنها دارای چولگی زیادی می‌باشند از این جمله هستند. به‌عنوان مثال می‌توان به مشخصه‌های کیفی با ماهیت طول عمر، زمان و برخی مشخصه‌های شیمیایی اشاره کرد. در میان توزیع‌های معروف آماری، توزیع نمایی برازش خوبی را بر داده‌های چوله دارد. در میان پژوهشگرانی که به نمودارهای کنترلی برای این نوع از مشخصه‌های کیفی توجه داشته‌اند، می‌توان به بای و چوی^۱ [۱۲] اشاره نمود. بای و چوی [۱۲] نمودار کنترلی \bar{X} و R را در حالتی که مشخصه‌های کیفی دارای چولگی باشند مورد بررسی قرار داده‌اند. در [۱۳] نمودار کنترلی برای داده‌های چوله با استفاده از واریانس موزون مورد بررسی و توجه قرار گرفته است. سانتیاگو و اسمیت^۲ [۱۴] نمودار کنترلی را مورد بررسی قرار دادند که در آن فرض شده است مشخصه کیفی و مدت زمان تا وقوع اولین انحراف بادلیل دارای توزیع نمایی هستند. آنها نام این نمودار کنترلی را نمودار تی^۳ نامیده‌اند. آنها با استفاده از تقریبی که در [۱۵] ارائه شده است، توزیع مشخصه‌های کیفی را با نرمال تقریب زده‌اند و بر اساس توزیع نرمال برای مشخصه‌های کیفی مورد نظر، نمودار کنترلی مناسب را بناسازی کرده‌اند. این موضوع در مقاله [۱۶] نیز مورد نظر قرار گرفته است. یکی از موارد استفاده توزیع نمایی برای توزیع مشخصه فنی زمانی است که میزان نقص‌ها در فرآیندی بسار کم باشد (مثلاً کمتر از ۱۰۰۰ نقص در یک میلیون قطعه). در این صورت استفاده از C-chart و U-chart برای تعداد نقص‌ها، کارایی لازم را نخواهد داشت و به جای آن‌ها زمان‌های بین وقوع دو نقص متوالی را در نظر می‌گیرند و نمودار کنترلی را برای این زمان‌ها رسم می‌کنند. از آنجایی که نقص‌ها اغلب با فرآیند پواسن رخ می‌دهند، زمان بین رخ دادن آنها نمایی در نظر گرفته می‌شود. در صفحات ۳۲۳ و ۳۲۴ کتاب «مقدمه‌ای بر کنترل کیفیت آماری» تالیف مونتگومری ویرایش ۶ به این موضوع اشاره شده است. [۱۷]

¹Bai and Choi

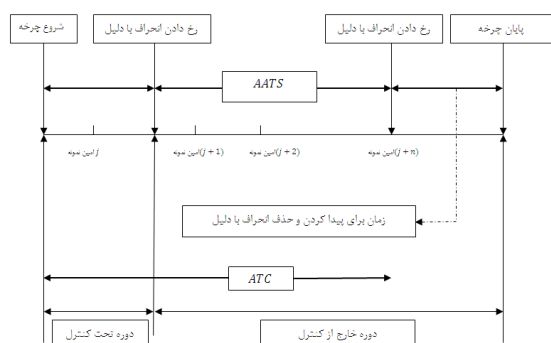
²Santiago and Smith

³t-chart

در طراحی آماری اقتصادی یک فرایند، پارامترهای فرایند را به گونه‌ای تعیین می‌کنند که ویژگی‌های آماری و اقتصادی که طراح در نظر دارد، به طور هم‌زمان بهینه شوند. برای این منظور معمولاً یک مدل اقتصادی را در نظر گرفته و ویژگی‌های آماری مورد نظر را بصورت محدودیت‌هایی بر فرایند اعمال می‌نمایند. در این مقاله از مدل کاستا و رحیم^۶ [۳] که یکی از کاربردی‌ترین مدل‌ها و در عین حال قابل استفاده در صنعت می‌باشد استفاده شده است.

در این مدل، طول فرایند به چهار زمان تقسیم می‌شود که عبارت‌اند از:

- دوره زمانی تحت کنترل بودن فرایند
 - دوره زمانی خارج از کنترل بودن فرایند
 - مدت زمان طی شده تا دریافت یک هشدار با دلیل
 - مدت زمان طی شده تا تعمیر فرایند.
- این چهار زمان در شکل (۱) به نمایش گذاشته شده است.



شکل ۱: چرخه کیفیت در مدل اقتصادی کاستا و رحیم

برخی مفاهیم و اصطلاحات مورد استفاده در مدل اقتصادی کاستا و رحیم در زیر به اختصار تعریف شده‌اند. متوسط مدت زمان فرایند (ATC^Y): عبارتست از متوسط زمان فرایند از لحظه شروع به کار تا دریافت اولین هشدار خروج از کنترل است. متوسط تعداد هشدارهای غلط (ANF^A): عبارتست از متوسط هشدارهای صادره مبنی بر خروج فرایند از کنترل در حالی که فرایند تحت کنترل است.

$$Var(X^*) = \theta_0^{\frac{2}{\beta}} \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right)^2 \right)$$

همانطور که در [۱۵] ارائه شده است، اگر قرار دهیم $\beta = 3.6$ نگاه خواهیم داشت؛

$$X^* \sim N\left(\theta_0^* \Gamma\left(1 + \frac{1}{3.6}\right), \theta_0^{*2} \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{3.6}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{3.6}\right)\right)^2\right)\right)$$

که در آن $\theta_0^* = \theta_0^{\frac{1}{3.6}}$ و $\Gamma(\cdot)$ تابع گاما می‌باشد.

بطور معمول برای یک مشخصه کیفی نرمال حدود کنترل بالایی و پایینی که به ترتیب با UCL^* و LCL^* بیان می‌شوند برابر $\mu \pm k\sigma$ در نظر گرفته می‌شوند که در آن μ و σ به ترتیب میانگین و انحراف معیار مشخصه کیفی مورد نظر می‌باشد و k مقدار ثابت کنترل بوده و بر اساس نوع طراحی تعیین می‌شود. بر این اساس، حدود کنترل متغیر X^* بصورت زیر خواهد بود؛

$$UCL_{X^*} = \theta_0^* \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{3.6}\right) + k \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{3.6}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{3.6}\right)\right)^2} \right]$$

$$LCL_{X^*} = \theta_0^* \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{3.6}\right) - k \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{3.6}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{3.6}\right)\right)^2} \right]$$

بنابراین برای کنترل مشخصه کیفی، پس از نمونه‌گیری و اندازه‌گیری مقدار مشخصه کیفی (X) ، $X^* = X^{3.6}$ را محاسبه می‌کنیم. اگر X^* در بازه $[LCL_{X^*}, UCL_{X^*}]$ قرار بگیرد، فرایند تحت کنترل و در غیر اینصورت خارج از کنترل در نظر گرفته می‌شود.

همانطور که بیان شد، در نمودار تی فرض می‌شود مشخصه کیفی و همچنین مدت زمان تحت کنترل بودن فرایند دارای توزیع نمایی است. بر این اساس فرض می‌کنیم میانگین مدت زمان تحت کنترل بودن فرایند برابر $\frac{1}{\lambda}$ است که λ پارامتر توزیع مدت زمان رخدادها بوده که نمایی در نظر گرفته شده است. همچنین فرض می‌کنیم، به واسطه یک انحراف با دلیل، میانگین فرایند از θ_0 به $\theta_1 = \delta\theta_0$ (که $\delta > 0$) منتقل می‌شود. بعلاوه فرض کرده‌ایم در صورت خارج از کنترل شدن فرایند، تنها با انجام اقدامات اصلاحی می‌توان فرایند را به حالت تحت کنترل بازگرداند و تا انجام بررسی‌ها و تعمیر، فرایند در حالت خاموشی می‌ماند.

۳- طراحی آماری اقتصادی

⁶Costa and Rahim

⁷Average Time of Cycle

⁸ Average number of False alarm

⁴Upper Control Limit

⁵Lower Control Limit

است را محاسبه می‌نماییم. بر این اساس چهار حالت مختلف در خصوص فرایند قابل تصور است؛

حالت اول: آماره آزمون در بین حدود کنترل باشد ($LCL_{X^*} < X^* < UCL_{X^*}$) و فرایند هم تحت کنترل باشد.

حالت دوم: آماره آزمون خارج از حدود کنترل باشد ($X^* < LCL_{X^*}$ و یا $UCL_{X^*} < X^*$) و فرایند هم تحت کنترل باشد.

حالت سوم: آماره آزمون در بین حدود کنترل باشد ($LCL_{X^*} < X^* < UCL_{X^*}$) و فرایند خارج از کنترل باشد.

حالت چهارم: آماره آزمون خارج از حدود کنترل باشد ($X^* < LCL_{X^*}$ و یا $UCL_{X^*} < X^*$) و فرایند نیز خارج از کنترل باشد.

حالت ۲ نشان دهنده صدور هشدار غلط است و در حالت ۳ نمودار به اشتباه هشدار صادر نمی‌کند. حالت ۴ به حالت جاذب معروف است که وقتی فرایند به این حالت وارد می‌شود، در این حالت باقی می‌ماند تا علت‌های انحراف کشف و برطرف شوند. بر این اساس ماتریس احتمال انتقال بصورت زیر خواهد بود؛

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix}$$

که در آن p_{ij} بیانگر احتمال انتقال فرایند از موقعیت i به موقعیت j است. با توجه به تغییر متغیر استفاده شده و اینکه $\beta = 3.6$ دارای توزیع وایبل با پارامتر شکل $\beta = 3.6$

پارامتر مقیاس $\theta^* = \theta^{3.6}$ خواهد بود. بنابراین خواهیم داشت:

$$Pr(X^* < x) = F(x, \beta, \theta^*) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta^*}\right)^{3.6}\right\}$$

بر این اساس عناصر ماتریس احتمال انتقال بصورت زیر خواهد بود؛

$$p_{11} = Pr(LCL_{X^*} < X^* < UCL_{X^*} | \vartheta = \theta_0^*) \times e^{-\lambda h} \\ = [F(UCL_{X^*}, \theta_0^*) - F(LCL_{X^*}, \theta_0^*)] \times e^{-\lambda h}$$

که در آن اگر LCL_{X^*} کمتر از صفر محاسبه شود، با توجه به غیر منفی بودن توزیع نمایی آن را برابر صفر در نظر می‌گیریم.

اگر تعریف کنیم

$$L' = \frac{LCL_{X^*}}{\theta_0^*} \quad \text{و} \quad U' = \frac{UCL_{X^*}}{\theta_0^*}$$

متوسط تعداد بازرسی‌ها (ANI^9): عبارتست از متوسط تعداد نمونه‌هایی که از فرایند تولید برای انجام بازرسی اخذ می‌شود.

متوسط زمان خروج از حالت تحت کنترل تا صدور هشدار ($AATS^{10}$): عبارت است از میانگین زمان از هنگام وقوع تغییری در میانگین تا زمانی که نمودار علامتی مبنی بر خروج فرایند از کنترل صادر می‌کند.

بر این اساس متوسط زمان مورد انتظار چرخه تولید از رابطه زیر بدست می‌آید؛

$$E(T) = ATC + T_0 \cdot ANF + T_1 \quad (1)$$

که در آن T_0 و T_1 به ترتیب متوسط زمان تلف شده برای یک هشدار غلط و متوسط زمان برای یافتن و حذف یک هشدار با دلیل هستند.

و همچنین سود خالص مورد انتظار برای هر چرخه بصورت زیر محاسبه می‌شود؛

$$E(P) = V_0 \left(\frac{1}{\lambda}\right) + V_1 \cdot AATS - a_3 - a_3' \cdot ANF - a_2 \cdot ANI \quad (2)$$

که در آن V_0 و V_1 به ترتیب متوسط سود بدست آمده در هر ساعت زمانی که فرایند تحت و خارج از کنترل باشد، a_3 متوسط هزینه برای تشخیص و حذف یک عامل انحراف، a_3' متوسط هزینه مرتبط با هر هشدار غلط و a_2 متوسط هزینه هر بازرسی می‌باشد.

با توجه به مطالب فوق و فرضیات مربوط به مدل هزینه مورد نظر، تابع هزینه یا متوسط هزینه هر چرخه تولید در هر ساعت را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد؛

$$E(L) = V_0 - \frac{E(P)}{E(T)} \quad (3)$$

با توجه به روابط ۲ و ۳، برای محاسبه $E(L)$ کفایت مقادیر ATC ، ANF و ANI را بدست آوریم زیرا $AATS = ATC - \frac{1}{\lambda}$ برای به‌دست آوردن مقدار ATC ، از ویژگی‌های زنجیر مارکوف استفاده نموده و بر اساس حالت‌های موقعیت قرار گرفتن فرایند، ماتریس احتمال انتقال فرایند که حاوی احتمالات انتقال فرایند از یک موقعیت به موقعیتی دیگر

⁹ Average Number of Inspection

¹⁰ Adjusted Average Time to Signal

داریم:

۴- بهینه‌سازی و الگوریتم زنبور عسل

با توجه به آنکه به دنبال بنا سازی نمودار کنترلی بر اساس طرح آماری اقتصادی هستیم، لذا پارامترهای طرح که عبارت‌اند از اندازه نمونه، فاصله میان نمونه‌گیری و ضریب حدود کنترل را بایستی به‌گونه‌ای بدست آوریم که تابع هزینه تحت برخی محدودیت‌های آماری کمینه شود. بر این اساس، با توجه به رابطه (۳) مسئله بهینه‌سازی را بصورت زیر تعریف کرده‌ایم؛

در حالی که:

$$\begin{aligned} AATS &\leq AATS_0 \\ ANF &\leq ANF_0 \\ 0.1 &\leq h \leq 8 \\ 0 &< k < 4 \end{aligned}$$

که در آن همانند [۲۰]، $AATS_0 = 7$ و $ANF_0 = 0.5$ در نظر گرفته شده است.

همانطور که در بخش قبل و در قسمت محاسبه تابع هزینه بیان شد، برخی پارامترها مانند δ و λ ، T_0 ، T_1 ، V_0 ، V_1 ، a_2 ، a_3 ، a'_3 به‌عنوان پارامترهای ورودی هستند که توسط طراح تعیین می‌شوند. به منظور انجام فرایند بهینه‌سازی بایستی از الگوریتم‌های فراابتکاری استفاده نمود که معمولاً در مقاله‌های دیگر از الگوریتم ژنتیک برای این امر استفاده می‌شود. یکی از این الگوریتم‌های فرا ابتکاری، الگوریتم زنبور عسل است که در سال ۲۰۰۸ توسط کارابوگا و باشتورک [۱۸] ارائه شده است. الگوریتم زنبور عسل تقلید استراتژی جستجوی غذای زنبور عسل به دنبال بهترین راه حل برای حل یک مسئله بهینه‌سازی است. هر راه حل کاندید، به‌عنوان یک منبع غذایی (گل) است و جمعیت (کلنی) عوامل (زنبور) برای جستجوی فضای راه حل استفاده می‌شود. هر بار زنبور عسل مصنوعی به دیدار گل می‌رود و پاسخ مسئله را مطابق با آن مقدار ارزیابی می‌کند. در الگوریتم زنبور عسل یک چرخه جستجوی اصلی چندین بار تکرار می‌شود تا یک راه حل سازگار و قابل قبول پیدا شود. در این روش پارامترهایی وجود دارند که در ابتدای طراحی الگوریتم بایستی توسط کاربر تعیین شوند. این پارامترها عبارت‌اند از:

✓ تعداد متغیرهایی که به دنبال یافتن مقدار بهینه برای آن‌ها هستیم (nvar).

$$\begin{aligned} p_{11} &= [\exp\{-\frac{LCL_{X^*}}{\theta_0^*}\}^{3.6} - \exp\{-\frac{UCL_{X^*}}{\theta_0^*}\}^{3.6}] \times e^{-\lambda h} \\ &= [\exp\{-L^{3.6}\} - \exp\{-U^{3.6}\}] \times e^{-\lambda h} \end{aligned}$$

$$p_{12} = e^{-\lambda h} - p_{11}$$

$$\begin{aligned} p_{13} &= [\exp\{-\frac{LCL_{X^*}}{\theta_1^*}\}^{3.6} - \exp\{-\frac{UCL_{X^*}}{\theta_1^*}\}^{3.6}] \times (1 - e^{-\lambda h}) \\ &= [\exp\{-\frac{L^{3.6}}{\delta}\} - \exp\{-\frac{U^{3.6}}{\delta}\}] \times (1 - e^{-\lambda h}) \end{aligned}$$

$$p_{14} = (1 - [\exp\{-\frac{L^{3.6}}{\delta}\} - \exp\{-\frac{U^{3.6}}{\delta}\}]) \times (1 - e^{-\lambda h})$$

$$p_{21} = p_{11}$$

$$p_{22} = p_{12}$$

$$p_{23} = p_{13}$$

$$p_{24} = p_{14}$$

$$p_{31} = p_{32} = 0$$

$$p_{33} = \exp\{-\frac{L^{3.6}}{\delta}\} - \exp\{-\frac{U^{3.6}}{\delta}\}$$

$$p_{34} = 1 - p_{33}$$

$$p_{41} = p_{42} = p_{43} = 0$$

$$p_{44} = 1.$$

با توجه به مقادیر فوق اگر تعریف کنیم $h' = (h, h, h)$ که بردار فواصل زمانی بین نمونه‌گیری است و $b' = (p_1, p_2, p_3)$ که بردار احتمالات اولیه است و بایستی $\sum_{i=1}^3 p_i = 1$ باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$ATC = b'(I - Q)^{-1}h$$

که در آن Q ماتریس 3×3 بوده که از حذف چهارمین سطر و ستون ماتریس احتمال انتقال P حاصل می‌شود. همچنین I ماتریس همانی با اندازه ۳ می‌باشد. با توجه به آنکه فرض شده است فرایند در حالت تحت کنترل شروع به کار می‌کند، $b' = (1, 0, 0)$ در نظر گرفته شده است.

همچنین

$$ANF = b'(I - Q)^{-1}(0, 1, 0)'$$

و

$$ANI = b'(I - Q)^{-1}\mathbf{1}$$

که در آن $\mathbf{1}' = (1, 1, 1)$ است.

اقتصادی را بدون در نظر گرفتن هیچ‌گونه محدودیتی روی ANF , $AATS$ و h به‌دست آورده‌ایم.

جدول ۱. حالات مختلف از پارامترهای ورودی
($a_2, a'_3, a_3, V_0, V_1, T_0, T_1, \lambda$ and δ)

No.	a_2	a'_3	a_3	V_0	V_1	T_0	T_1	λ	δ
۱	۵	۵۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۰	۵	۱	۰.۰۱	۱۰۰
۲	۵	۵۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۰	۵	۱	۰.۰۱	۵۰
۳	۵	۵۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۰	۵	۱	۰.۰۱	۱۰
۴	۵	۵۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۰	۵	۱	۰.۰۱	۱
۵	۵	۲۵۰	۵۰۰	۵۰۰	۰	۵	۱	۰.۰۱	۰.۹
۶	۵	۵۰۰	۵۰۰	۲۵۰	۰	۵	۱	۰.۰۱	۰.۸
۷	۵	۵۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۰	۲.۵	۱	۰.۰۱	۰.۷
۸	۵	۵۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۰	۵	۱	۰.۰۱	۰.۶
۹	۵	۵۰۰	۵۰	۵۰۰	۰	۵	۱	۰.۰۱	۰.۵
۱۰	۵	۵۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۰	۵	۱۰	۰.۰۱	۰.۴
۱۱	۵	۵۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۰	۵	۱	۰.۰۱	۰.۳
۱۲	۵	۵۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۰	۵	۱	۰.۰۱	۰.۲
۱۳	۵	۵۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۰	۵	۱	۰.۰۵	۰.۱
۱۴	۵	۵۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۱۰۰	۲.۵	۱	۰.۰۱	۰.۱

جدول ۲. مقادیر هدف بر اساس طرح آماری اقتصادی

ROW	AATS	ANF	$E(L)$	K
۱	۲.۸۲	۰.۵۰	۴۸.۲۷	۲.۲۲
۲	۵.۰۱	۰.۴۹	۵۶.۲۷	۲.۰۷
۳	۶.۴۹	۰.۴۳	۱۰۳.۱۸	۱.۶۹
۴	۶.۶۷	۰.۵۰	۱۸۴.۴۶	۰.۵۸
۵	۶.۹۸	۰.۴۳	۱۶۹.۸۵	۰.۶۰
۶	۶.۳۳	۰.۵۰	۱۲۴.۲۲	۲.۶۳
۷	۶.۹۹	۰.۵۰	۱۲۸.۰۴	۲.۷۶
۸	۶.۹۲	۰.۴۵	۱۱۲.۳۵	۲.۹۵
۹	۶.۱۳	۰.۴۹	۷۴.۶۵	۲.۹۸
۱۰	۴.۶۷	۰.۲۸	۹۲.۲۰	۳.۰۱
۱۱	۲.۷۲	۰.۱۰	۴۵.۹۲	۳.۰۱
۱۲	۲.۳۹	۰.۰۸	۳۲.۵۶	۳.۱۰
۱۳	۰.۶۹	۰.۰۱	۷۶.۰۴	۳.۲۰
۱۴	۱.۴۹	۰.۰۲	۲۲.۹۱	۳.۱۲

- ✓ حدود هر یک از متغیرها که حد پایین و بالا را به ترتیب با lb و ub نمایش می‌دهیم.
- ✓ تعداد کل زنبورها (عوامل جستجو) که با NB نمایش داده می‌شود.
- ✓ تعداد دفعات تکرار الگوریتم (iter).
- ✓ تعداد تلاش‌های مجاز منجر به شکست (limit).

این روش توسط کارابوگا و آکای [۱۹] با سایر روش‌های فراابتکاری مقایسه شده و عنوان شده است الگوریتم زنبور عسل، دارای سرعت بالاتری در تشخیص مقادیر بهینه می‌باشد. لذا در این مقاله از الگوریتم زنبور عسل برای مسئله بهینه‌سازی استفاده شده است. برای مطالعه بیشتر در این خصوص می‌توان به [۱۹] و [۲۰] مراجعه نمود.

۵- نتیجه‌های عددی

۵-۱ محاسبه پارامترهای بهینه طرح به ازای مقادیر مختلف از پارامترهای ورودی

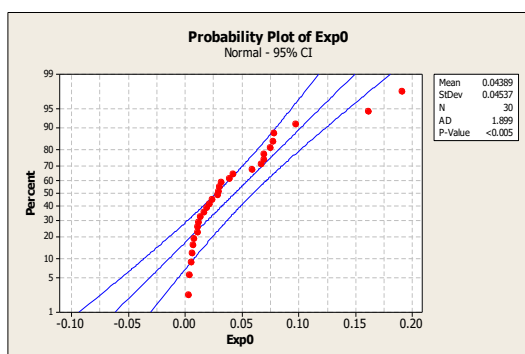
برای به‌دست آوردن پارامترهای بهینه طرح که در واقع پارامترهای هدف هستند، الگوریتم شبیه‌سازی فرایند و بهینه‌سازی را در نرم‌افزار متلب کدنویسی کرده و همانند [۳] برای ۱۴ حالت مختلف از پارامترهای ورودی که عبارت بودند از: $a_2, a'_3, a_3, V_0, V_1, T_0, T_1, \lambda, \delta$ که در جدول ۱ ارائه شده‌اند، پارامترهای هدف را تحت طرح آماری اقتصادی بدست آورده و در جدول ۲ ارائه کرده‌ایم. در مقالات قبل، تنها بر ویژگی‌های آماری و فارغ از محدودیت‌ها و ویژگی‌های اقتصادی توجه شده و نمودار کنترلی مورد نظر بر اساس طرح آماری بناسازی شده است و به‌عنوان نمونه برای مشاهده نتایج می‌توان به [۱۴] مراجعه نمود. به منظور بررسی و ارزیابی اعمال محدودیت‌های آماری و طراحی آماری اقتصادی در مقابل طراحی اقتصادی، پارامترهای هدف را تحت طرح اقتصادی نیز بدست آورده و در جدول ۳ ارائه کرده‌ایم. در طرح

و انحراف در تصمیم‌گیری می‌شود. در حالت کلی با توجه به آنکه در واقعیت داده‌ها نمایی بوده و بایستی نمودار کنترلی بر این اساس ترسیم شود، ممکن است نمونه‌هایی در نمودار کنترلی تحت فرض نرمال بودن خارج از کنترل باشند در حالی که در نمودار کنترلی نمایی تحت کنترل هستند و بالعکس. به منظور نشان دادن این موضوع، تعداد ۳۰ نمونه تصادفی از توزیع نمایی با پارامتر $\theta_0 = 0.0455$ تولید شده و داده‌های تولید شده در جدول ۴ ارائه شده‌اند.

جدول ۴. داده‌های شبیه‌سازی شده از توزیع نمایی (X)

۰.۰۰۸۲	۰.۰۷۵۳	۰.۰۵۹۶	۰.۰۱۱۹	۰.۰۷۷۵
۰.۰۲۹۹	۰.۰۱۹۱	۰.۰۱۴۱	۰.۰۰۵۸	۰.۱۹۱۱
۰.۰۳۹۰	۰.۰۷۸۷	۰.۰۲۴۲	۰.۰۱۱۰	۰.۰۶۹۵
۰.۰۶۹۷	۰.۰۹۷۷	۰.۰۱۱۲	۰.۰۰۳۴	۰.۰۱۷۰
۰.۰۰۶۵	۰.۱۶۲۱	۰.۰۶۷۲	۰.۰۰۴۰	۰.۰۲۹۰
۰.۰۰۷۵	۰.۰۳۰۵	۰.۰۴۲۲	۰.۰۳۲۰	۰.۰۲۱۸

نمودارهای احتمال تحت دو توزیع نرمال و نمایی برای مقادیر فوق در نرم‌افزار Minitab رسم شده است که این نمودارها در شکل‌های ۲ و ۳ ارائه شده است.



شکل ۲. نمودار احتمال توزیع نرمال برای داده‌های جدول ۴

جدول ۳. مقادیر هدف بر اساس طرح اقتصادی

ROW	AATS	ANF	E(L)	K
۱	۳.۸۷	۰.۵۷	۴۴.۲۸	۲.۲۱
۲	۵.۱۹	۰.۷۹	۵۵.۲۸	۲.۰۸
۳	۱۱.۱۰	۲.۷۰	۹۷.۲۸	۱.۵۷
۴	۲۱.۲۳	۴.۸۲	۱۶۴.۳۹	۱.۰۳
۵	۱۹.۹۳	۶.۸۲	۱۵۳.۹۱	۱.۰۳
۶	۲۵.۰۴	۵.۴۹	۸۵.۸۴	۲.۱۲
۷	۱۳.۰۱	۲.۳۸	۱۱۱.۲۵	۲.۵۰
۸	۱۴.۰۱	۰.۹۸	۱۰۲.۶۵	۲.۶۶
۹	۸.۵۴	۱.۳۹	۷۴.۳۱	۲.۴۷
۱۰	۵.۵۰	۰.۳۰	۹۱.۳۶	۲.۹۴
۱۱	۳.۶۷	۰.۱۵	۴۲.۹۳	۳.۰۴
۱۲	۲.۵۷	۰.۰۹	۳۲.۲۱	۳.۰۴
۱۳	۰.۷۲	۰.۰۲	۷۵.۹۸	۳.۱۷
۱۴	۱.۶۱	۰.۰۵	۲۱.۹۱	۳.۱۰

با مقایسه جداول ۲ و ۳ ملاحظه می‌شود، AATS و ANF طرح آماری-اقتصادی در هر ۱۴ سطر بسیار کمتر از طرح اقتصادی است پس طرح آماری اقتصادی در مقایسه با طرح اقتصادی از نظر ویژگی‌های آماری دارای عملکرد بهتری می‌باشد. از نظر ویژگی‌های اقتصادی، طرح اقتصادی منجر به هزینه کمتری در طراحی فرایند می‌شود و همان‌طور که ملاحظه می‌شود این اختلاف (اختلاف پارامتر میانگین هزینه در طرح اقتصادی و آماری اقتصادی) زیاد چشمگیر نیست، اما در مقابل اختلاف پارامترهای آماری در دو طرح مورد بررسی قابل ملاحظه می‌باشد. این اختلاف در ردیف‌های ۳ الی ۸ بسیار بیشتر می‌باشد. که می‌توان نتیجه گرفت این نمودار در زمانی که در معرض تغییرات متوسط قرار می‌گیرد انحرافات آماری بیشتری را به دنبال دارد. بنابراین در استفاده از طرح آماری-اقتصادی به جای طرح اقتصادی اگرچه اندکی میانگین هزینه در واحد زمان چرخه کیفیت افزایش می‌یابد، اما خواص آماری مطلوب ما (کم بودن AATS و ANF) را تضمین می‌کند.

۵-۲ یک مثال شبیه‌سازی

همان‌طور که بیان شد بسیاری از مشخصه‌های کیفی دارای توزیع نمایی هستند که می‌توان به متغیرهایی مانند طول عمر یک قطعه، مشخصه‌های مربوط به حوزه پزشکی و ... اشاره کرد. در این‌گونه موارد در نظر گرفتن توزیع نرمال و بناسازی فرایند کنترلی با این فرض، باعث بناسازی یک نمودار کنترلی نامناسب

$$CL_{X^*} = \theta_0^* \left[\Gamma \left(1 + \frac{1}{3.6} \right) \right] = 0.3820$$

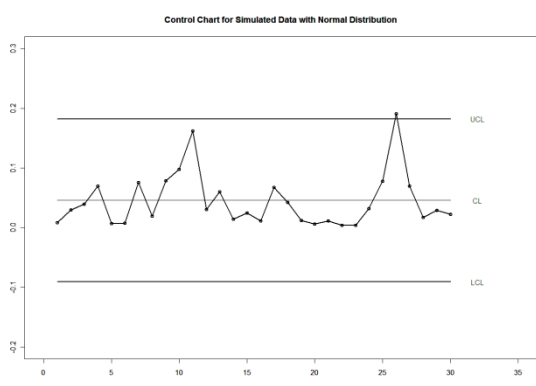
اما با فرض نرمال بودن توزیع داده‌ها، با استفاده از داده‌های اصلی داریم:

$$LCL = \mu - 3\sigma = 0.0455 - 3 \times 0.0455 = -0.091$$

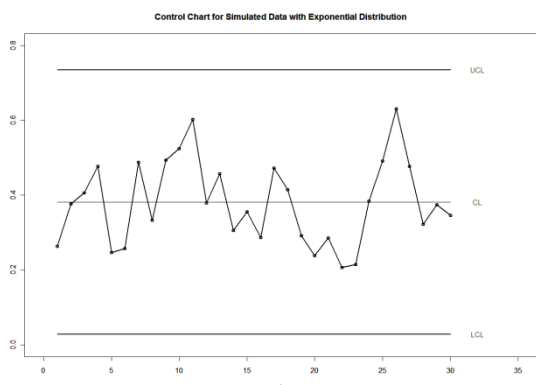
$$UCL = \mu + 3\sigma = 0.0455 + 3 \times 0.0455 = 0.182$$

$$CL = \mu = 0.0455$$

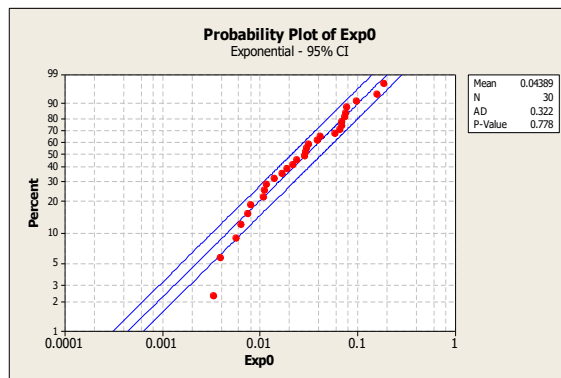
با توجه به محاسبات فوق، دو نمودار کنترلی یکی با فرض نرمال بودن توزیع مقادیر و دیگری با فرض نمایی بودن توزیع مقادیر بناسازی شده و به ترتیب در شکل‌های ۴ و ۵ رسم شده‌اند.



شکل ۴: نمودار کنترلی برای داده‌های X با فرض نرمال بودن توزیع



شکل ۵: نمودار کنترلی برای داده‌های X^* (با فرض توزیع نمایی)



شکل ۳. نمودار احتمال توزیع نمایی برای داده‌های جدول ۴

همانطور که از شکل‌های ۲ و ۳ و مقادیر آماره آزمون آندرسون-دارلینگ آنها برمی‌آید فرض نرمال بودن داده‌ها رد شده ($P\text{-value} < 0.005$) و فرض نمایی بودن توزیع داده‌ها پذیرفته می‌شود ($P\text{-value} = 0.778$). حال بر اساس داده‌های جدول ۴ حدود کنترل را با فرض نمایی بودن و بنا بر آنچه در بخش‌های قبل بیان شد، و همچنین با فرض نرمال بودن که بصورت $[LCL, UCL] = [\mu \mp 3\sigma]$ است، بدست می‌آوریم. برای یافتن حدود کنترل نمایی، ابتدا داده‌ها را بر اساس تبدیل بیان شده در بخش ۲ ($X^* = X^{\frac{1}{3.6}}$) تبدیل می‌کنیم. داده‌های تبدیل‌یافته در جدول ۵ ارائه شده‌اند.

جدول ۵. داده‌های تبدیل‌یافته (X^*)

۰.۲۶۳۰	۰.۴۸۷۶	۰.۴۵۶۹	۰.۲۹۲۰	۰.۴۹۱۴
۰.۳۷۷۱	۰.۳۳۳۲	۰.۳۰۶۲	۰.۲۳۸۷	۰.۶۳۱۵
۰.۴۰۶۱	۰.۴۹۳۵	۰.۳۵۵۶	۰.۲۸۶۰	۰.۴۷۶۸
۰.۴۷۷۳	۰.۵۲۴۲	۰.۲۸۷۱	۰.۲۰۶۳	۰.۳۲۲۴
۰.۲۴۶۵	۰.۶۰۳۲	۰.۴۷۲۴	۰.۲۱۵۳	۰.۳۷۴۰
۰.۲۵۷۱	۰.۳۷۹۲	۰.۴۱۵۲	۰.۳۸۴۴	۰.۳۴۵۷

با توجه مقادیر در نظر گرفته شده برای پارامتر توزیع نمایی در تولید داده‌ها، $\theta_0 = 0.0455$ و در نتیجه $\theta_0^* = 0.4239$ و همچنین با در نظر گرفتن $k = 3$ خواهیم داشت:

$$LCL_{X^*} = \theta_0^* \left[\Gamma \left(1 + \frac{1}{3.6} \right) - k \sqrt{\Gamma \left(1 + \frac{2}{3.6} \right) - \Gamma \left(1 + \frac{1}{3.6} \right)^2} \right] = 0.4239 \times 0.067045 = 0.02842$$

$$UCL_{X^*} = \theta_0^* \left[\Gamma \left(1 + \frac{1}{3.6} \right) + k \sqrt{\Gamma \left(1 + \frac{2}{3.6} \right) - \Gamma \left(1 + \frac{1}{3.6} \right)^2} \right] = 1.7352 \times 0.4239 = 0.73555$$

فرایند از کنترل را صادر می‌کند، میانگین طول دنباله و میانگین هزینه در واحد زمان، طرح‌های اقتصادی و آماری اقتصادی را برای مشاهدات انفرادی تبدیل یافته به دست آوردیم. مقادیر بهینه پارامترهای طرح‌های اقتصادی و آماری-اقتصادی را با استفاده از الگوریتم زنبور عسل بدست آورده و با هم مقایسه کردیم که نشان‌دهنده عملکرد مثبت طرح آماری-اقتصادی بود. همچنین به وسیله داده‌های شبیه‌سازی شده از توزیع نمایی، کارایی و عملکرد نمودار کنترلی معرفی شده در مقایسه با حالتی که توزیع مشخصه کیفی نرمال فرض می‌شود، بررسی شده و نشان دادیم در این گونه موارد استفاده مستقیم از نمودارهای کنترلی با فرض نرمال بودن توزیع مشخصه فنی بسیار گمراه‌کننده است و بهتر است از نمودارهای معرفی شده در این مقاله استفاده کرد.

همانطور که ملاحظه می‌شود، با در نظر گرفتن حدود کنترل با فرض نرمال بودن داده‌ها (شکل ۴)، یکی از مقادیر جدول ۴ در محدوده خارج از کنترل قرار گرفته است در حالی که بر اساس حدود کنترل مقاله حاضر (شکل ۵)، تمامی داده‌ها تحت کنترل قرار دارند و این دقیقاً مطابق با فرض ما از تولید داده‌ها از توزیع نمایی در حالت تحت کنترل است. همچنین حد پایین نمودار کنترلی با فرض نرمال بودن توزیع مشخصه فنی منفی است و با ساختار داده‌های ما ناسازگار است (داده‌ها از توزیع نمایی تولید شده‌اند و هیچگاه منفی نمی‌شوند). بنابراین استفاده از نمودار کنترلی با فرض نرمال بودن توزیع مشخصه فنی در این مثال گمراه‌کننده است اما کارایی نمودار معرفی شده در این مقاله مشهود است.

مراجع

۶- نتیجه‌گیری

[1] Lingyun Zhang, Mark Bebbington, Chin-Diew Lai and Kondaswamy Govindaraju. (2005). *On Statistical Design of the S2 Control Chart. Communication in Statistics- Theory and Methods*, 34, 229-244..

[2] Erwin M. Saniga, Darwin J. Davis and James M. Lucas. (2004). *Statistical Design of Attribute Charts for Monitoring and Continuous Improvement When Count Levels Are Low. Frontiers in Statistical Quality Control*. 7, 119-129.

[3] Costa, A. F. B. and Rahim, M. A. (2001). *Economic design of X-bar charts with variable parameters: the Markov chain approach. Journal of Applied Statistics*, 28, 875-885.

[4] Lorenzen, T. J. and Vance, L. C. (1986). *The economic design of control charts: a unified approach. Technometrics*, 28, 3-10.

[5] Torabian, M., Moghadam, M. B. and Faraz, A. (2010). *Economically Designed Hotelling's T2 control chart using VSICL scheme. The Arabian Journal for Science and Engineering*, 35, 251-263.

[6] Saniga, E. M. (1989). *Economic statistical control chart designs with an application to X-bar and R charts. Technometrics*, 31, 313-320.

در بناسازی نمودارهای کنترلی، توزیع مشخصه کیفی معمولاً نرمال در نظر گرفته می‌شود. اما در بسیاری موارد، به ویژه هنگامی که نمودار توزیع فراوانی داده‌ها دارای چولگی زیادی می‌باشد این فرض برقرار نیست. در میان توزیع‌های معروف آماری، توزیع نمایی تقریباً بهترین برازش را بر این گونه داده‌ها دارد. در این گونه موارد معمولاً ابتدا با استفاده از یک تقریب مناسب، داده‌های غیر نرمال را به توزیع نرمال تبدیل کرده سپس از نمودارهای کنترلی با فرض نرمال بودن توزیع مشخصه فنی برای داده‌های تبدیل یافته استفاده می‌کنند. یکی از بهترین تقریب‌هایی که برای تبدیل توزیع نمایی به توزیع نرمال به کار می‌رود، توسط نلسون [۱۵] ارائه شده است. سانتیاگو و اسمیت [۱۴] با استفاده از تقریب نلسون نمودار کنترلی تی را مورد بررسی قرار دادند که در آن فرض شده است مشخصه کیفی و مدت زمان تا وقوع اولین انحراف با دلیل دارای توزیع نمایی هستند. در مقالات متعاقب در این زمینه، تاکنون تنها جنبه آماری نمودارهای کنترلی تی مورد نظر قرار گرفته است. بر این اساس و با توجه به عملکرد خوب و مزایای در نظر گرفتن ویژگی‌های آماری و اقتصادی بصورت توأم، در این مقاله نمودار کنترلی تی با استفاده از مدل اقتصادی کاستا و رحیم [۳] و محاسبه ماتریس احتمال انتقال، میانگین زمان از هنگام وقوع تغییر در میانگین تا زمانی که نمودار علامتی مبنی بر خروج

- [14] Santiago, E. and Smith, J. (2013). *Control charts based on the exponential distribution: Adapting runs rules for the t chart*, *Quality Engineering*, 25(2), 85-96.
- [15] Nelson, L. S. (1994). *A control chart for parts-per-million nonconforming items*. *Journal of Quality Technology*, 26, 239–240.
- [16] Aslam, M., Azam, M., Khan, N. and Chi-Hyuck, J. (2015). *control chart for an exponential distribution using multiple dependent state sampling*. *Qual Quant*, 49, 455–462.
- [17] Montgomeri, D. C. (2009). *Introduction to Statistical Quality Control, sixth edition*. John Wiley & Sons. New York.
- [18] Karaboga, D. and Basturk, B. (2007). *A powerful and efficient algorithm for numerical function optimization: artificial bee colony (ABC) algorithm*. *J Glob Optim*, 39, 459–471.
- [19] Karaboga, D. and Akay, B. (2009). *A comparative study of Artificial Bee Colony algorithm*. *Applied Mathematics and Computation*, 214, 108–132.
- [20] Tavakoli, M., Pourtaheri, R., Moghadam, M. B., (2016). *Economic and economic-statistical designs of VSI Bayesian control chart using Monte Carlo method and ABC algorithm*. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Vol. 87, NO. 4, 766-776.
- [7] Khadem and Bamenimoghadam (2019). *Economic statistical design of -control charts: Modified version of Rahim and Banerjee (1993) model*. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*. 48, 684-703.
- [8] Banerjee, P. K. and Rahim, M. A. (1988). *Economic design of X-bar control charts under Weibull shock models*. *Technometrics*, 30, 407-414.
- [9] Fong-Jung Yu, Ching-Shih Tsou, Kai-I Huang and Zhang Wu. (2010). *An Economic-Statistical Design of x Control Charts with Multiple Assignable Causes*. *Journal of Quality*, 17, 327-337.
- [10] Mohammadian, F and Amiri, A. (2012). *Economic-Statistical Design of Acceptance Control Chart*. *Quality and Reliability Engineering International*. 29, DOI: 10.1002/qre.1291.
- [11] Zhang, G. and Berardi, V. (1997). *Economic statistical design of X-bar control charts for systems with Weibull in-control times*. *Computers and Industrial Engineering*, 32, 575–586.
- [12] Bai, D. and Choi, I. (1995). *\bar{X} and R-control charts for skewed populations*, *Journal of Quality Technology*, 27(2), 120-131.
- [13] Choobineh, F. and Ballard, J. (1987). *Control-limits of QC Charts for skewed distributions using weighted-variance*, *Reliability, IEEE Transactions*, 36(4), 473-477.