

طراحی آماری - اقتصادی نمودارهای کنترلی برای پایش میانگین فرایند با انحراف معیار معلوم بر اساس چگالی پیش‌گوی بیزی

عاطفه مرادیان

کارشناسی ارشد، گروه آمار، دانشگاه علامه طباطبایی، تهران، ایران، atefemoradian72@gmail.com

محمد بامنی‌مقدم

(نویسنده مسئول) استادتمام، گروه آمار، دانشگاه علامه طباطبایی، تهران، ایران، bamenimoghdam@aut.ac.ir

سیدرحمت شجاعی علی‌آبادی

دانشجوی دکتری، گروه آمار، دانشگاه علامه طباطبایی، تهران، ایران، shojae_ut@yahoo.com

چکیده: در زمینه‌ی کنترل فرایند آماری تحقیقات گسترده‌ای انجام شده است. همچنین اخیراً در متون کنترل فرایند آماری، نمودارهای کنترلی پیشنهاد شده‌اند که مبتنی بر ایده چگالی پیش‌گوی بیزی هستند. این ایده اولین بار توسط منزفریخ مطرح و در آن نامعلومی پارامترها در نظر گرفته شد. در این مقاله برای اولین بار طراحی آماری - اقتصادی نمودارهای کنترلی برای پایش میانگین فرایند با انحراف معیار معلوم بر اساس چگالی پیش‌گوی بیزی ارائه شده است. با توجه به نتایج ارائه شده در مقاله، در خصوص برتری طراحی آماری - اقتصادی بر طراحی اقتصادی و همچنین برتری رویکرد بیزی بر رویکرد کلاسیک در طراحی نمودار کنترلی، پیشنهاد می‌شود که از نمودار کنترلی بیزی با طراحی آماری - اقتصادی در کنترل میانگین فرایند استفاده شود.

واژگان کلیدی: کنترل کیفیت، طراحی آماری - اقتصادی، نمودار کنترلی، رویکرد بیزی

۱- مقدمه

کنترل فرایند آماری، یک مجموعه‌ی مفید و قدرتمند در جهت به دست آوردن اهداف و کسب رضایت مشتری از طریق ایجاد ثبات در فرایند تولید و بهبود کارایی از طریق به حداقل رساندن تغییرات است. در نتیجه این مجموعه منجر به عرضه‌ی محصول باکیفیت، با کم‌ترین هزینه می‌شود. نمودارهای کنترلی یکی از ارزشمندترین ابزار کنترل فرایند آماری جهت اتخاذ تصمیم درباره‌ی تحت کنترل بودن و بهبود کیفیت فرایند در مرحله‌ی ساخت هستند که از طریق نمونه‌گیری‌های متناوب و مطالعه‌ی تغییرات مشاهده‌ها، تعیین می‌کنند که فرایند چه زمانی تحت کنترل آماری عمل می‌کند. استفاده از نمودارهای کنترلی استاندارد مستلزم آشنایی با فاز اول و فاز دوم نمودارهای کنترلی است که هر فاز، هدف کاملاً متفاوتی را دنبال می‌کند.

کیفیت و توجه به آن از همان ابتدای روزهای زندگی بشر با او همراه بوده و تا به حال ادامه داشته است. توجه به کیفیت فرآورده‌ها، موضوع تازه‌ای نیست. از صدها سال پیش از این، مشتریان هنگام خرید، کالاها را خوب برانداز و بررسی می‌کردند و همواره سعی در پیدا کردن محصولی داشتند که بیش‌ترین شباهت را با انتظارات آن‌ها داشته باشد. تطابق انتظار مصرف‌کنندگان از محصول نهایی و کیفیت آن، مسئله‌ی مهمی است که در تولید یک محصول از اهمیت بالایی برخوردار است. برای رسیدن به این هدف نیاز به طی سه مرحله‌ی طراحی، کنترل و بهبود کیفیت در تولید هر محصول است. یک روش مفید برای بهبود کیفیت، کنترل فرایند آماری است.

* (Corresponding author): bamenimoghdam@aut.ac.ir

اندازه‌ی تغییر در طراحی اقتصادی و آماری اقتصادی سنجیده می‌شود و در آخر، بخش پنجم نیز شامل نتیجه‌گیری است.

۲- پیشینه پژوهش

۲- مراحل ساخت و ارزیابی نمودارهای کنترلی بر مبنای چگالی پیش‌گوی بیزی

۲-۱ مرحله اول: ساختن نمودار کنترلی

فرض می‌کنیم در فاز اول، نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n_c از یک فرایند پایدار، فرایند تحت کنترل، در دسترس است که با x_1, x_2, \dots, x_{n_c} نشان داده می‌شوند. تابع درستی برای این نمونه به صورت زیر است:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n_c} | \theta) = \prod_{i=1}^{n_c} f(x_i | \theta)$$

مشاهده i ام در فاز اول را با x_i و توزیع آن را با $f(x_i | \theta)$ نمایش می‌دهیم، که در آن θ پارامتر فرایند است. اطلاعات پیشین در مورد θ در توزیع $p(\theta)$ خلاصه شده است. همچنین فرض می‌کنیم T_c ، آماره‌ی بسنده‌ی نمونه‌ی تصادفی x_1, x_2, \dots, x_{n_c} است. توزیع احتمال T_c به شرط θ را با نشان $f(T_c | \theta)$ می‌دهیم. اطلاعاتی که در مورد θ ، در داده‌ها وجود دارد در آماره‌ی بسنده‌ی T_c خلاصه شده است. توزیع پسین با $p(\theta | T_c)$ نمایش داده می‌شود و از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$p(\theta | T_c) \propto p(\theta) f(T_c | \theta)$$

فرض می‌کنیم y_1, y_2, \dots, y_n داده‌های فاز دوم باشند. تابع درست‌نمایی برای مشاهدات آینده به شکل زیر است:

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n | \theta) = \prod_{i=1}^n f(y_i | \theta)$$

استفاده از نمودارهای کنترلی انجام می‌شود. نمودارهای کنترلی در فاز اول کمک می‌کنند تا فرایند تحت کنترل آماری قرار گیرد. فاز دوم بعد از وجود مجموعه‌ای از داده‌های تمیز که تحت شرایط ایستا تهیه شده و بیان‌گر تحت کنترل بودن فرایند است، آغاز می‌شود. در فاز دوم، با مقایسه‌ی مقدار آماره‌ی هر یک از نمونه‌های متوالی انتخاب شده از فرایند با حدود کنترلی، عملکرد فرایند پایش می‌شود. در زمینه‌ی کنترلی فرایند آماری، تحقیقات گسترده‌ای انجام شده است. اما در این بین، مسئله‌ی برآورد پارامترهای مربوط به توزیع مشخصه‌ی کیفیت، که در فاز اول صورت می‌گیرد، توجه کم‌تری را به خود جلب کرده است. در هر دو رویکرد موجود در استنباط آماری، یعنی، کلاسیک و بیزی به دنبال برآورد این پارامتر(ها) هستیم. اما دلایلی وجود دارد که ما را به سمت استفاده از رویکرد بیزی سوق می‌دهد که در ادامه به آن‌ها اشاره می‌کنیم. در رویکرد کلاسیک پارامتر θ را یک مقدار ثابت نامعلوم در نظر گرفته و نمونه‌ی تصادفی x_1, x_2, \dots, x_n از جمعیتی که دارای توزیع $f_\theta(x)$ است گردآوری کرده و بر اساس در مورد پارامتر θ تصمیم‌گیری می‌شود. در روش بیزی θ را کمیتی در نظر می‌گیرند که متغیری تصادفی است و تغییرات آن توسط یک توزیع احتمال (توزیع پیشین) بیان می‌شود. این توزیع پیشین بر اساس اعتقادات و تجربه‌های قبلی آزمایش‌گر و به‌هنگام مشاهده‌ی داده‌ها تعیین می‌گردد. سپس از جمعیت یک نمونه گردآوری می‌شود. با تلفیق توزیع پیشین و اطلاعات نمونه، توزیع پسین حاصل می‌شود. اخیراً در متن‌های کنترلی فرایند آماری، نمودارهای کنترلی معرفی شده که در طراحی آن‌ها از توزیع پیش‌گوی بیزی استفاده می‌شود. دلیل اصلی استفاده از این نمودارها این است که عدم قطعیت در مورد پارامتر θ را شامل می‌شوند. ایده‌ی به‌کارگیری چگالی پیش‌گوی بیزی در طراحی آماری نمودارهای کنترلی، متعلق به منزفریخ [۱] است. در این مقاله، برای اولین بار به طراحی آماری - اقتصادی نمودار کنترلی با استفاده از رویکرد پیش‌گوی بیزی برای پایش میانگین فرایند با انحراف معیار معلوم می‌پردازیم و ساختار این مقاله به این صورت است که ابتدا در بخش دوم مراحل ساخت و ارزیابی نمودار کنترلی بر مبنای چگالی پیش‌گوی بیزی شرح داده می‌شود و سپس در بخش‌های سوم و چهارم به ترتیب این مراحل برای پیشین‌های مزدوج و جفریز ارائه می‌شود. در بخش پنجم نیز به طراحی آماری - اقتصادی نمودارهای مذکور بر اساس مدل لورنزن و ونس [۲] پرداخته می‌شود و اثر پارامتر λ و

فرایند را به درستی تشخیص داده است و در نتیجه هشدار نادرست کمتری خواهد داشت. همچنین ARL_1 نشانگر میانگین مشاهدات تا رسیدن به اولین هشدار خارج از کنترل است، زمانی که فرایند در حالت خارج از کنترل قرار دارد. بنا بر این، مقدار کمتر این معیار نشان می‌دهد که نمودار سریع‌تر متوجه خارج از کنترل بودن فرایند و تغییرات شده است و از ادامه‌ی تولید محصولات معیوب جلوگیری می‌شود.

توزیع طول اجرا، به شرط θ ، در حالت تحت کنترل هندسی با پارامتر زیر است:

$$\psi(\theta) = \int_{R(\alpha, T_c)} f(T | \theta) dT.$$

با توجه به هندسی بودن توزیع طول اجرا، میانگین و انحراف معیار طول اجرا به صورت زیر خواهند بود.

$$E(RL | \alpha, T_c) = \int \frac{1}{\psi(\theta)} p(\theta | T_c) d\theta.$$

9

$$E(RL^2 | \alpha, T_c) = \int \frac{2 - \psi(\theta)}{\psi(\theta)^2} p(\theta | T_c) d\theta.$$

بنا بر این، انحراف معیار طول اجرا برابر است با:

$$SD(RL | \alpha, T_c) = \sqrt{E(RL^2 | \alpha, T_c) - E^2(RL | \alpha, T_c)}$$

۲-۲ مرحله‌ی دوم: ارزیابی نمودار کنترلی

حال عملکرد ناحیه‌ی رد زمانی که فرایند خارج از کنترل قرار دارد و پارامتر θ به θ_α تغییر کرده است را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در واقع مشاهدات آینده دچار تغییرات شده‌اند و توزیع آن‌ها با توزیع اولیه که تحت کنترل قلمداد می‌شود متفاوت است. به طور مشخص، فرض می‌کنیم داده‌های $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ از مدل زیر تولید شده‌اند:

$$f(y | \theta_\alpha) = \prod_{i=1}^n f(y_i | \theta_\alpha)$$

آماره‌ی بسنده‌ی مشاهدات فاز دوم را با $T = T_y$ نمایش می‌دهیم. این آماره حاوی تمام اطلاعات حاصل از نمونه‌های فاز دوم است و آن را $f(T | \theta)$ با نمایش می‌دهیم.

برای پیش‌بینی یک مشاهده‌ی جدید بر مبنای مشاهدات گذشته، استفاده از چگالی پیش‌گوی بیزی معقول است. در مبحث کنترل فرایند آماری با رهیافت چگالی پیش‌گوی بیزی، T_y یا تابع مناسبی از آن به عنوان آماره کنترل مورد استفاده قرار می‌گیرد. مشاهدات آماره کنترلی در نمودار کنترل رسم می‌شود و حدود کنترلی آن با توجه به اندازه احتمال خطای نوع اول و با استفاده از صدک‌های چگالی پیش‌گوی آماره کنترل حاصل می‌شود. چگالی پیش‌گوی بیزی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} p(T | T_c) &= \int p(T, \theta | T_c) d\theta \\ &= \int p(T | \theta, T_c) p(\theta | T_c) d\theta \\ &= \int p(T | \theta) p(\theta | T_c) d\theta. \end{aligned}$$

حال می‌توان یک ناحیه‌ی رد مناسب به اندازه‌ی α برای نمودار کنترلی بر مبنای توزیع پیش‌گو برای T به صورت زیر به دست آورد:

$$\alpha = \int_{R(\alpha, T_c)} p(T | T_c) dT.$$

اگر $T \in R(\alpha, T_c)$ باشد، هشدار نمودار کنترلی را دریافت می‌کنیم و لازم است به دنبال دلیل آن باشیم. در غیر این صورت نتیجه می‌گیریم که فرایند تحت کنترل است.

در این جا فرض می‌کنیم مشاهدات آینده نیز از یک فرایند پایدار گرفته شده‌اند و تحت کنترل هستند. در ادامه از معیار طول اجرا جهت ارزیابی عملکرد این نمودار استفاده می‌کنیم. طول اجرا یا همان RL تعداد نقاط تا رسیدن به اولین هشدار خارج از کنترل است. متوسط طول اجرا در حالت تحت کنترل را با ARL_0 و متوسط طول اجرا در حالت خارج از کنترل را با ARL_1 نمایش می‌دهیم.

باید توجه داشت که ARL_0 ، میانگین مشاهدات تا رسیدن به اولین هشدار خارج از کنترل است، زمانی که فرایند ذاتاً در حالت تحت کنترل قرار دارد. بنا بر این، مقدار بیش‌تر این معیار نشان‌دهنده‌ی این است که نمودار حالت تحت کنترل بودن

در نظر گرفته شود. این توزیع به عنوان توزیع پیشین مزدوج برای μ شناخته می‌شود. میانگین پیشین m_0 ، برآورد پیشین درباره‌ی μ است و n_0 اندازه نمونه‌ی پیشین است. n_0 یک کمیت برای ارزیابی درباره‌ی دقت میانگین پیشین است، یعنی هر چه مقدار n_0 بیشتر باشد، دقت بالاتر می‌رود و منجر به افزایش اعتماد به برآورد می‌شود.

اگر داده‌های x_1, x_2, \dots, x_{n_c} از فرایند پایدار، فرایند تحت کنترل، به دست آمده باشند و آماره بسنده برای این داده‌ها در فاز اول، $T_c = \bar{X}$ باشد، داریم:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n_c}\right),$$

بنا بر این، توزیع پسین برای μ به صورت زیر است:

$$\mu | T_c \sim N\left(m_1, \frac{\sigma^2}{n_1}\right),$$

که $m_1 = \frac{n_0 m_0 + n_c \bar{x}}{n_1}$ و $n_1 = n_0 + n_c$ است.

تحت این فرض که فرایند پایدار باقی می‌ماند، می‌توانیم نمودار کنترلی برای مشاهدات آینده را به دست آوریم. آماره بسنده برای نمونه‌های آینده در فاز دوم، $T = \bar{Y}$ است. که توزیع آن به شرط μ ، $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ است. با توجه به اطلاعات داده شده، توزیع پیش‌گو برای \bar{Y} به صورت زیر است:

$$\bar{Y} | T_c \sim N\left(m_1, \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1}\right)\right).$$

در ادامه بر اساس این توزیع پیش‌گو، ناحیه‌ی پذیرش را تعیین می‌کنیم.

می‌دانیم:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{Y} - m_1}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1}}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \\ &= P\left(m_1 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1}} < \bar{Y} < m_1 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1}}\right) \end{aligned}$$

البته در عمل به ندرت مقدار واقعی θ_a را می‌دانیم و عدم قطعیت درباره‌ی θ با توزیع پسین $P(\theta | T_c)$ تعیین می‌شود. با فرض این‌که θ_a معلوم باشد، توزیع معادل برای آماره بسنده‌ی T را می‌توان با $f(T | \theta_a)$ نشان داد. توزیع طول اجرا نیز، به شرط پارامتر θ در حالت خارج از کنترل هندسی با پارامتر $\alpha(T_c, \theta_a)$ است، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha(T_c, \theta_a) = \int_{R(\alpha, T_c)} f(T | \theta_a) dT.$$

مقدار $\alpha(T_c, \theta_a)$ به مقدار θ_a تحت بررسی و همچنین توزیع پسینی که ناحیه‌ی رد $R(T_c, \theta_a)$ را طبق آن به دست آورده بودیم نیز، وابسته است. در نتیجه به پارامترهای توزیع پیشین و آماره‌ی بسنده‌ی T_c که بر مبنای نمونه‌ای که از فرایند پایدار به دست آمده بود نیز، وابسته است.

در ادامه به کارگیری چگالی پیش‌گوی بیزی برای کنترل میانگین فرایند در حالت‌های σ معلوم و نامعلوم ارائه شده است.

۳- نمودار کنترلی برای میانگین با انحراف معیار معلوم بر اساس چگالی پیش‌گوی بیزی

در این بخش، حالت ساده‌ی نمودار کنترلی بر اساس پیش‌گوی بیزی برای میانگین وقتی انحراف معیار معلوم است در صورت استفاده از پیشین مزدوج و جفریز ارائه می‌شود. در این حالت پارامتر مورد بررسی، میانگین فرایند، یعنی $\theta = \mu$ است.

۳-۱- نمودار کنترلی برای میانگین با انحراف معیار معلوم بر اساس پیشین مزدوج

مرحله اول: ساختن نمودار کنترلی

فرض می‌کنیم در فاز اول x_1, x_2, \dots, x_{n_c} یک نمونه‌ی تصادفی پایدار از $N(\mu, \sigma^2)$ باشد که در آن μ نامعلوم و واریانس معلوم است.

فرض می‌کنیم اطلاعات پیشین در مورد μ به صورت

$$\mu \sim N\left(m_0, \frac{\sigma^2}{n_0}\right),$$

$$= \int \frac{\phi(z)}{1 - \Phi(u_2 - z \sqrt{\frac{n}{n_1}}) + \Phi(u_1 - z \sqrt{\frac{n}{n_1}})} dz$$

و داریم:

$$u_1 = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{1 + \frac{n}{n_1}}, u_2 = z_{1 - \frac{\alpha}{2}} \sqrt{1 + \frac{n}{n_1}}$$

($n(z|m, S^2)$ نشان‌گر تابع چگالی نرمال با میانگین m و واریانس S^2 است

مرحله دوم: ارزیابی نمودار کنترلی

اکنون عملکرد ناحیه‌ی رد را زمانی که فرایند در حالت خارج از کنترل قرار دارد و مشاهدات آینده از توزیع دیگری مانند

$$y | \mu_0, a \sim N(\mu_0 + a, \sigma^2)$$

تولید شده‌اند را بررسی می‌کنیم. مقدار تغییر را با a نشان می‌دهیم. در این‌جا آماره‌ی بسند $T = \bar{Y}$ هست و توزیع آن $N(\mu_0 + a, \frac{\sigma^2}{n})$ است. به شرط μ ، توزیع طول اجرا در حالت خارج از کنترل هندسی با پارامتر $(T_c, \mu_0 + a)$ هست. به‌طوری‌که:

$$\begin{aligned} \alpha(T_c, \mu_0 + a) &= 1 - P_{\mu'}(t_1 < \bar{Y} < t_2 | \bar{x}, \mu) \\ &= 1 - P\left(\frac{t_1 - \mu'}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < Z < \frac{t_2 - \mu'}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{t_2 - (\mu + a)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) + \Phi\left(\frac{t_1 - (\mu + a)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{m_1 - (\mu + a)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1 - \frac{\alpha}{2}} \sqrt{1 + \frac{n}{n_1}}\right) \\ &\quad + \Phi\left(\frac{m_1 - (\mu + a)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{1 + \frac{n}{n_1}}\right). \end{aligned}$$

بنا بر این، ناحیه‌ی پذیرش برابر با $A(\alpha, T_c) = (t_1, t_2)$ است،

$$t_1 = m_1 - z_{1 - \frac{\alpha}{2}} \sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1}}$$

و $t_2 = m_1 + z_{1 - \frac{\alpha}{2}} \sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1}}$ است. ناحیه‌ی رد به اندازه‌ی α برابر با $R(\alpha, T_c)$ ، که مکمل ناحیه‌ی پذیرش است. همان‌طور که گفته شد در این‌جا برای ارزیابی عملکرد نمودار از معیار طول اجرا استفاده می‌شود. در ادامه ARL_1 و ARL_0 ارائه شده است.

به شرط μ ، در حالت تحت کنترل طول اجرا دارای توزیع هندسی با پارامتر (\bar{x}, μ) هست.

$$\psi(\bar{x}, \mu) = 1 - P(t_1 < \bar{Y} < t_2 | \bar{x}, \mu)$$

$$\begin{aligned} &= 1 - P\left(\frac{t_1 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < Z < \frac{t_2 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{t_2 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) + \Phi\left(\frac{t_1 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{m_1 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1 - \frac{\alpha}{2}} \sqrt{1 + \frac{n}{n_1}}\right) \\ &\quad + \Phi\left(\frac{m_1 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{1 + \frac{n}{n_1}}\right) \end{aligned}$$

$\Phi(z)$ عملکرد تابع توزیع نرمال استاندارد را در Z نشان می‌دهد. بنا بر این خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} ARL_0 &= E(RL | \alpha, \bar{x}) \\ &= \int \frac{1}{\psi(\bar{x}, \mu)} n(\mu | m_1, \frac{\sigma^2}{n_1}) d\mu \end{aligned}$$

$$\bar{Y} | T_c \sim N(\bar{x}, \sigma^2(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_c}))$$

ناحیه‌ی پذیرش برابر با $A(\alpha, T_c) = (t_1, t_2)$ است، که در آن

$$t_1 = \bar{x} - z_{\frac{1-\alpha}{2}} \sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n_c}}$$

و $t_2 = \bar{x} + z_{\frac{1-\alpha}{2}} \sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n_c}}$ در ادامه ARL_0 و

ARL_1 محاسبه می‌شود.

با داشتن μ ، توزیع طول اجرا، هندسی با پارامتر $\omega(\bar{x}, \mu)$ است.

$$\omega(\bar{x}, \mu) = 1 - \Phi\left(\frac{t_2 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) + \Phi\left(\frac{t_1 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{\frac{1-\alpha}{2}} \sqrt{1 + \frac{n}{n_c}}\right)$$

$$+ \Phi\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{1 + \frac{n}{n_c}}\right)$$

بنا بر این داریم:

$$ARL_0 = E(RL | \alpha, \bar{x}) = \int \frac{1}{\omega(\bar{x}, \mu)} n(\mu | \bar{x}, \frac{\sigma^2}{n_c}) dz$$

$$= \int \frac{\phi(z)}{1 - \Phi(u_2 - z \sqrt{\frac{n}{n_c}}) + \Phi(u_1 - z \sqrt{\frac{n}{n_c}})} dz$$

به طوری که:

بنا بر این، به دنبال بررسی عملکرد ناحیه‌ی رد، در شرایطی هستیم که میانگین جمعیت برابر با $\mu' = \mu_0 + a$ است. بنا

بر این، در صورتی که $k = z \sqrt{\frac{n}{n_1}} - \frac{\sqrt{na}}{\sigma}$ خواهیم داشت:

$$ARL_1 = E(RL | \alpha, \bar{x})$$

$$= \int \frac{1}{\alpha(\bar{x}, \mu')} n(\mu | m_1, \frac{\sigma^2}{n_1}) d\mu$$

$$= \int \frac{\phi(z)}{1 - \Phi(u_2 - K) + \Phi(u_1 - K)} dz$$

۳-۲- نمودار کنترلی برای میانگین با انحراف معیار معلوم بر اساس چگالی پیش‌گو تحت پیشین جفریز

مرحله اول: ساختن نمودار کنترلی

در حالت خاص، اگر اطلاعات پیشین وجود نداشته باشد، پیشین ناآگاهی بخش می‌تواند انتخاب مناسبی باشد. پیشین جفریز برای μ عبارت است از $p(\mu) = 1$ برای توضیح در مورد انتخاب پیشین جفریز به مرجع‌های یانگ [۳] و مختاری [۴] مراجعه کنید.

فرض می‌کنیم مشاهدات x_1, x_2, \dots, x_{n_c} از فرایند پایدار (فرایند تحت کنترل) به دست آمده‌اند و آماره بسنده مشاهدات فاز اول، $T_c = \bar{X}$ باشد. در این صورت داریم:

$$\bar{X} | \mu \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n_c})$$

بنا بر این، توزیع پسین برای μ به صورت زیر است:

$$\mu | T_c \sim N(\bar{x}, \frac{\sigma^2}{n_c})$$

تحت این فرض که فرایند پایدار باقی می‌ماند، می‌توانیم نمودار کنترلی را برای مشاهدات آینده به دست آوریم. آماره بسنده برای نمونه‌های آینده در فاز دوم، $T = \bar{Y}$ است. به شرط μ توزیع \bar{Y} برابر با $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ و توزیع پیش‌گو برای \bar{Y} به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} ARL_1 &= E(RL | \alpha, \bar{x}) \\ &= \int \frac{1}{\gamma(\bar{x}, \mu')} n(\mu | \bar{x}, \frac{\sigma^2}{n_c}) d\mu \\ &= \int \frac{\phi(z)}{1 - \Phi(u_2 - K') + \Phi(u_1 - K')} dz \end{aligned}$$

در صورتی که:

$$u_1 = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{1 + \frac{n}{n_c}}, u_2 = z_{1 - \frac{\alpha}{2}} \sqrt{1 + \frac{n}{n_c}}$$

۴- طراحی آماری - اقتصادی نمودارهای کنترلی بر اساس چگالی پیش‌گوی بیزی

برای استفاده از هر نمودار کنترلی، پارامترهای تنظیمی طراحی یعنی، اندازه نمونه (n)، فاصله‌ی نمونه‌گیری (h) و ضریب حدود کنترلی (L) باید تعیین شود. به‌طور کلی، طراحی نمودارهای کنترلی به ۴ دسته (تجربی، آماری، اقتصادی و آماری - اقتصادی) تقسیم‌بندی می‌شوند.

طراحی اقتصادی که توسط دانکن [۵] معرفی شد، تنها روی هزینه متمرکز است و خواص آماری را در نظر نمی‌گیرد. در این روش پارامترها به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که مقدار مورد انتظار هزینه در واحد زمان چرخه تولید کمینه شود. سانیکا [۶] با تلفیق مزیت‌های اقتصادی با ملزومات آماری، طراحی آماری - اقتصادی را معرفی کرد. طراحی آماری - اقتصادی همان طراحی اقتصادی است که با اضافه کردن قیودی به مدل حاصل شده است. در این جا قیدها را به گونه‌ای در نظر گرفتیم که میانگین طول اجرا در حالت تحت کنترل بیش‌تر از ۳۷۵ و میانگین طول اجرا در حالت خارج از کنترل کم‌تر از ۵ باشد. در این مقاله، قصد داریم برای دو حالت پیشین مزدوج و جفریز، طراحی اقتصادی و آماری - اقتصادی بر اساس مدل لورنزن و ونس ارائه می‌کنیم. لورنزن و ونس مدلی اقتصادی را ارائه نمودند که برای طراحی آماری یا آماری - اقتصادی کلیه‌ی نمودارهای کنترلی شوهارتی و غیرشوهارتی قابل استفاده است و تقریباً از روش‌های دیگر متفاوت است. آن‌ها هیچ فرض مشخصی در مورد مدل فرایند تعیین نکردند بلکه در این مدل به‌جای استفاده از خطاهای α و β از ARL_1 و ARL_0 استفاده می‌شود.

$$u_1 = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{1 + \frac{n}{n_c}}, u_2 = z_{1 - \frac{\alpha}{2}} \sqrt{1 + \frac{n}{n_c}}$$

مرحله دوم: ارزیابی نمودار کنترلی

اکنون عملکرد ناحیه‌ی رد را زمانی که فرایند تحت کنترل نیست و مشاهدات آینده از توزیع

$$Y | \mu_0, a \sim N(\mu_0 + a, \sigma^2)$$

تولید شده‌اند را بررسی می‌کنیم. در این جا آماره‌ی بسنده $T = \bar{Y}$ هست و توزیع آن $N(\mu_0 + a, \frac{\sigma^2}{n})$ است. بنا بر این، به دنبال بررسی عملکرد ناحیه‌ی رد، در شرایط فرضی هستیم که میانگین جمعیت برابر با $\mu' = \mu_0 + a$ است. a نیز نشان دهنده‌ی میزان تغییر است. در این حالت، توزیع طول اجرا، هندسی با پارامتر $\gamma(\bar{x}, \mu')$ است.

$$\gamma(\bar{x}, \mu') = 1 - P_{\mu'}(t_1 < Y < t_2 | \bar{x}, \mu)$$

$$= 1 - P\left(\frac{t_1 - \mu'}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z < \frac{t_2 - \mu'}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{t_2 - (\mu + a)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) + \Phi\left(\frac{t_1 - (\mu + a)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\bar{x} - (\mu + a)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1 - \frac{\alpha}{2}} \sqrt{1 + \frac{n}{n_c}}\right)$$

$$+ \Phi\left(\frac{\bar{x} - (\mu + a)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{1 + \frac{n}{n_c}}\right)$$

بنا بر این در صورتی که $k' = z \sqrt{\frac{n}{n_c}} - \frac{\sqrt{na}}{\sigma}$ خواهیم داشت:

افزایش تغییرات، احتمال قرار گرفتن در ناحیه‌ی رد افزایش می‌یابد و به تبع آن مقدار ARL_1 کاهش می‌یابد. می‌دانیم همواره مقدار بیش‌تر ARL_0 و مقدار کم‌تر ARL_1 مطلوب خواهد بود. در جداول ۴ تا ۶ نیز نتایج مربوط به ARL در حالت σ معلوم تحت پیشین جفریز گزارش شده است. در جدول ۴ مشاهده می‌شود که با افزایش n/n_c و کاهش α ، افزایش می‌یابد. در جداول ۵ و ۶ نیز می‌توان تاثیر کاهش n/n_c و σ و افزایش n و α بر کاهش مقدار ARL_1 را مشاهده کرد. شکل ۲ نیز بیانگر کاهش ARL_1 در مقابل افزایش مقدار تغییرات است. اما در جدول ۷ مقایسه‌ای جالب بین عملکرد رهیافت‌های کلاسیک و بی‌زی در طراحی نمودار کنترلی انجام گرفته است. به‌عنوان نمونه حالت σ معلوم را انتخاب کردیم. زمانی که ARL_0 برابر با ۳۷۰ باشد، مقادیر ARL_1 را در هر دو رویکرد بی‌زی و کلاسیک مقایسه می‌کنیم. با توجه به جدول ۷، که در آن مقدار تغییر را برابر ۰/۵ فرض کرده‌ایم، می‌توان گفت عملکرد نمودار کنترلی طراحی شده بر اساس رویکرد بی‌زی برای زمانی که σ کوچک باشد، بسیار بهتر از رویکرد کلاسیک است. اما زمانی که σ بزرگ باشد، تفاوت چندانی بین این دو رویکرد وجود ندارد و چه بسا رویکرد کلاسیک در این گونه مواقع عملکرد بهتری داشته باشد. در مطالعات پیش از این نیز مطرح شده است که نمودارهای کنترلی شوهارتی در تشخیص تغییرات کوچک دچار ضعف هستند که این مورد در صنایعی که میزان کوچک تغییرات حائز اهمیت است می‌تواند اثرات مخرب و جبران ناپذیری داشته باشد و موجب اتلاف هزینه و زمان نیز خواهد شد. این در حالی است که نمودارهای کنترلی بی‌زی نسبت به تغییرات کوچک به مراتب حساسیت بیش‌تری دارند. جداول ۸ تا ۱۳ نیز به نتایج طراحی اقتصادی و آماری - اقتصادی نمودار کنترلی مذکور اشاره دارد. همان‌طور که مشاهده می‌شود در صورت استفاده از طراحی آماری - اقتصادی اندکی هزینه افزایش می‌یابد. اما این موضوع با توجه به عملکرد بهتر طراحی آماری - اقتصادی از لحاظ آماری قابل چشم‌پوشی است. در طراحی آماری - اقتصادی ARL در حالت تحت و خارج از کنترل نسبت به طراحی اقتصادی در سطح مطلوبی قرار دارد. همچنین تاثیر λ (پارامتر مدل شوک) و اندازه‌ی تغییر بر هزینه در طراحی اقتصادی و آماری - اقتصادی سنجیده می‌شود. مطابق نتایج ارائه شده درمی‌یابیم با افزایش λ ، زمان تحت کنترل بودن فرایند بیش‌تر خواهد بود که کاهش هزینه را در پی

همچنین امکان تصمیم درمورد توقف یا ادامه‌ی فرایند تولید در زمان جستجو برای علت اسنادپذیر و تعمیر فرایند در این مدل وجود دارد. هدف مدل لورنزن و ونس کمینه کردن هزینه‌های مورد انتظار در هر ساعت در طول چرخه بیان شده است. هزینه‌ی مورد انتظار در هر ساعت، با تقسیم کردن هزینه‌ی مورد انتظار هر چرخه، بر زمان مورد انتظار چرخه به‌دست آمده، که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E(A) = \left\{ \frac{C_0}{\lambda} + C_1(-\tau + nE + h(ARL_1)) + \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2 + \frac{sY}{ARL_0} + W \right\} \div \left\{ \frac{1}{\lambda} + (1 - \gamma_1) \frac{sT_0}{ARL_0} - \tau + nE + h(ARL_1) + T_1 + T_2 \right\} + \left\{ \frac{(a + bn) \left(\frac{1}{\lambda} - \tau + nE + h(ARL_1) + \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2 \right)}{h} \right\} \div \left\{ \frac{1}{\lambda} + (1 - \gamma_1) \frac{sT_0}{ARL_0} - \tau + nE + h(ARL_1) + T_1 + T_2 \right\}$$

همچنین این پژوهش، از مقادیر مقاله‌ی لیندرمن [۷] استفاده شده است، که به‌صورت زیر تشریح می‌شود:

$$C_0 = 10, T_2 = 2, T_1 = 2, T_0 = 0, \gamma_2 = 1, \gamma_1 = 1 \\ W = 50, Y = 25, E = 0.05, \lambda = 0.01, C_1 = 100$$

لازم به ذکر است برای مقایسه بین طراحی آماری و آماری اقتصادی مقدار تغییر را برابر با یک در نظر گرفتیم.

۴-۱ نتایج عددی

در این بخش به ارائه‌ی مثال عددی برای مقایسه مقادیر ARL_1 و ARL_0 و همچنین طراحی اقتصادی و آماری - اقتصادی نمودارهای کنترلی بر اساس چگالی پیش‌گوی بی‌زی تحت پیشین‌های مزدوج و جفریز می‌پردازیم. جداول ۱ تا ۳ بیانگر نتایج ARL در حالت σ معلوم تحت پیشین مزدوج است. جدول ۱ نشان می‌دهد که افزایش n/n_1 و کاهش α موجب افزایش ARL_0 می‌شود. همچنین در جداول ۲ و ۳ مشهود است که با کاهش n/n_1 و σ و افزایش n و α ، مقدار ARL_1 کاهش می‌یابد. در شکل ۱ نیز مشاهده می‌شود که با

جدول ۴: σ معلوم جفریز، تحت کنترل

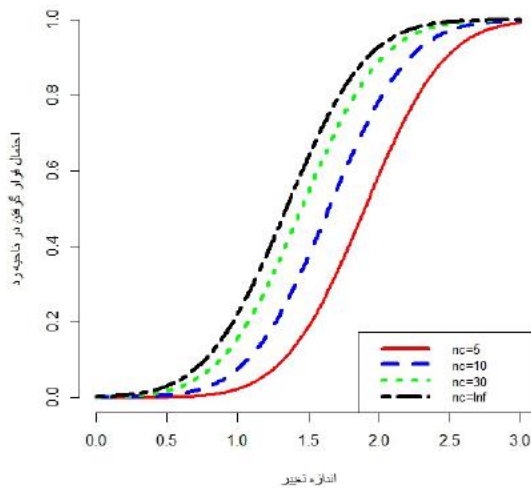
$\alpha = 0.0015$				$\alpha = 0.0027$				$\frac{n_1}{n_2}$
$SD(RL \alpha, \bar{x})$		$E(RL \alpha, \bar{x})$		$SD(RL \alpha, \bar{x})$		$E(RL \alpha, \bar{x})$		
۶۸۰	۶۷۴	۳۷۶	۳۷۴	۳۷۶	۳۷۴	۲۱۳	۲۱۳	۰/۰۱۶
۸۱۲	۷۵۸	۴۳۹	۴۳۹	۴۳۹	۴۳۹	۵۳۲	۵۳۲	۰/۰۷
۱۱۹۷	۱۰۱۳	۶۱۹	۶۱۹	۶۱۹	۶۱۹	۸۲۷	۸۲۷	۰/۱۶
۱۶۸۴۹	۹۹۱۳	۶۳۴۲	۶۳۴۲	۶۳۴۲	۶۳۴۲	۳۸۰۲	۳۸۰۲	۰/۷

جدول ۵: σ معلوم جفریز، خارج از کنترل، $\alpha = 0.0027$

$SD(RL \alpha, \bar{x})$				$E(RL \alpha, \bar{x})$				$\frac{n_1}{n_2}$	n_c	
$\sigma = 1/3$		$\sigma = 1$		$\sigma = 1/3$		$\sigma = 1$				
n=10	n=5	n=10	n=5	n=10	n=5	n=10	n=5			
۳۷	۷۵	۱۶	۳۹	۳۲	۶۸	۱۵	۳۷	۰/۰۳	۰/۰۱۶	۳۰۰
۱۳۴	۱۴۵	۵۳	۷۸	۷۰	۱۰۱	۲۸	۵۳	۰/۱۴	۰/۰۷	۷۰
۶۰۲	۳۱۸	۳۲۷	۲۰۴	۲۴۶	۱۸۲	۱۰۴	۱۰۱	۰/۳۳	۰/۱۶	۳۰

جدول ۶: σ معلوم جفریز، خارج از کنترل، $\alpha = 0.0015$

$SD(RL \alpha, \bar{x})$				$E(RL \alpha, \bar{x})$				$\frac{n_1}{n_2}$	n_c	
$\sigma = 1/3$		$\sigma = 1$		$\sigma = 1/3$		$\sigma = 1$				
n=10	n=5	n=10	n=5	n=10	n=5	n=10	n=5			
۵۸	۱۲۱	۲۴	۶۱	۴۹	۱۰۸	۲۱	۵۶	۰/۰۳	۰/۰۱۶	۳۰۰
۲۴۴	۲۵۴	۹۲	۱۲۹	۱۱۶	۱۶۷	۴۵	۸۵	۰/۱۴	۰/۰۷	۷۰
۱۱۹۷	۵۹۴	۶۷۲	۳۵۹	۴۵۶	۳۲۰	۱۹۹	۱۷۰	۰/۳۳	۰/۱۶	۳۰



شکل ۲: σ معلوم تحت پیشین جفریز

جدول ۷: مقایسه عملکرد رویکردهای کلاسیک و بیزی در حالت

σ معلوم، مزدوج

بیزی						کلاسیک					
$\sigma = 1$			$\sigma = 0.5$			$\sigma = 1$			$\sigma = 0.5$		
ARL ₁	ARL ₀	L	ARL ₁	ARL ₀	L	ARL ₁	ARL ₀	L	ARL ₁	ARL ₀	L
۳۳/۴۲	۳۷۰	۲/۹۲۸۱	۴/۳۵	۳۷۰	۲/۹۰۵۱	۳۳/۴۴	۳۷۰	۲/۹۹	۳۳/۴۴	۳۷۰	۲/۹۹
۱۲/۸۲	۳۷۰	۲/۸۶۱۰	۱/۷	۳۷۰	۲/۸۶۰۴	۱۲/۸۲	۳۷۰	۲/۹۹	۱۲/۸۲	۳۷۰	۲/۹۹

خواهد داشت. طبیعتاً به دنبال افزایش تغییرات نیز، زمان خارج از کنترل بودن فرایند بیشتر خواهد بود که باعث افزایش هزینه می‌شود.

جدول ۱: σ معلوم مزدوج، تحت کنترل

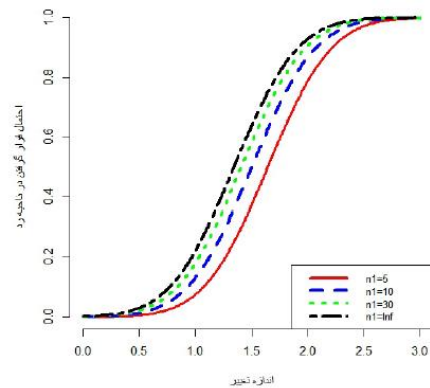
$\alpha = 0.0015$				$\alpha = 0.0027$				$\frac{n_1}{n_2}$
$SD(RL \alpha, \bar{x})$		$E(RL \alpha, \bar{x})$		$SD(RL \alpha, \bar{x})$		$E(RL \alpha, \bar{x})$		
۶۷۲	۶۶۹	۳۷۲	۳۷۱	۳۷۲	۳۷۱	۲۱۳	۲۱۳	۰/۰۱
۷۵۳	۷۱۹	۴۱۱	۴۱۱	۴۱۱	۴۱۱	۲۹۴	۲۹۴	۰/۰۵
۹۱۸	۸۲۷	۴۹۰	۴۹۰	۴۹۰	۴۹۰	۳۸۰	۳۸۰	۰/۱
۶۱۳۰	۳۹۷۵	۲۶۶۹	۲۶۶۹	۲۶۶۹	۲۶۶۹	۱۷۴۵	۱۷۴۵	۰/۵

جدول ۲: σ معلوم مزدوج، خارج از کنترل، $\alpha = 0.0027$

$SD(RL \alpha, \bar{x})$				$E(RL \alpha, \bar{x})$				$\frac{n_1}{n_2}$	n_1	
$\sigma = 1/3$		$\sigma = 1$		$\sigma = 1/3$		$\sigma = 1$				
n=10	n=5	n=10	n=5	n=10	n=5	n=10	n=5			
۲۹	۶۹	۱۳	۳۶	۲۸	۶۵	۱۳	۳۵	۰/۰۲	۰/۰۱	۵۰۰
۴۹	۱۱۲	۱۹	۵۷	۳۷	۸۶	۱۶	۴۷	۰/۱	۰/۰۵	۱۰۰
۹۲	۱۹۱	۳۲	۹۹	۵۳	۱۲۲	۲۱	۶۸	۰/۲	۰/۱	۵۰
۱۵۷۳	۲۰۸۳	۱۰۳۳	۱۶۷۲	۶۲۰	۱۰۲۶	۳۰۳	۷۴۶	۱	۰/۵	۱۰

جدول ۳: σ معلوم مزدوج، خارج از کنترل، $\alpha = 0.0015$

$SD(RL \alpha, \bar{x})$				$E(RL \alpha, \bar{x})$				$\frac{n_1}{n_2}$	n_1	
$\sigma = 1/3$		$\sigma = 1$		$\sigma = 1/3$		$\sigma = 1$				
n=10	n=5	n=10	n=5	n=10	n=5	n=10	n=5			
۵۱	۱۱۱	۲۱	۵۶	۴۶	۱۰۵	۲۰	۵۳	۰/۰۲	۰/۰۱	۵۰۰
۴۳۲	۱۹۸	۷۱	۹۸	۸۵	۱۴۵	۳۵	۷۲	۰/۱	۰/۰۵	۱۰۰
۴۳۲	۳۵۲	۲۳۲	۱۹۱	۱۸۲	۲۱۶	۷۵	۱۰۸	۰/۲	۰/۱	۵۰
۵۷۳۹۸	۴۷۳۵	۴۳۸۵۹	۳۸۸۹	۲۰۲۳۷	۱۳۱۲	۱۲۷۸۱	۱۵۷۷	۱	۰/۵	۱۰



شکل ۱: σ معلوم تحت پیشین مزدوج

می‌کند به مراتب بهتر است. در طراحی اقتصادی به علت بی‌توجهی به معیارهای آماری، ARL_0 و ARL_1 نسبت به طراحی آماری - اقتصادی در سطح مطلوبی قرار نگرفته‌اند که این موضوع زمانی که فرایند در حالت تحت کنترل قرار دارد، باعث افزایش هزینه برای اصلاح هشدارهای نادرست می‌شود و زمانی که فرایند در حالت خارج از کنترل قرار دارد، باعث تولید بیش‌تر محصولات معیوب می‌شود. در نهایت، با توجه به نتایج حاصل از این مقاله پیشنهاد می‌شود که از نمودار کنترلی بر اساس چگالی پیش‌گویی بیزی با طراحی آماری - اقتصادی برای کنترل میانگین فرایند زمانی که σ کوچک است، استفاده شود.

مرجع‌ها

[1] Menzefricke, U. (2002). On the evaluation of control chart limits based on predictive distributions. Communications in statistics-theory and methods, 31, 1423-1440.

[2] Yang, R., and Berger, J. O. (1996). A catalog of noninformative priors. Institute of Statistics and Decision Sciences, Duke University.

[3] مختاری، ع.، خردمندنی، م. (۱۳۹۲). یک نمودار کنترل همزمان میانگین و واریانس با رهیافت چگالی پیش‌بین بیزی. نشریه علوم دانشگاه خوارزمی، جلد ۱۳.

[4] Duncan, A. J. (1956). The economic design of \bar{X} charts used to maintain current control of a process. Journal of the American Statistical Association, 51(274), 228-242.

[5] Saniga, E. M. (1989). Economic statistical control-chart designs with an application to X and R charts. Technometrics, 31, 313-320.

[6] Lorenzen, T. J., & Vance, L. C. (1986). The economic design of control charts: a unified approach. Technometrics, 28(1), 3-10.

[7] Linderman, k., & Love, T.E. (2000). Economic and Economic Statistical Designs for MEWMA control charts. Journal of Quality Technology, 32, 410_417

جدول ۸: طراحی اقتصادی و آماری - اقتصادی در حالت σ معلوم، مزدوج

اقتصادی		آماری - اقتصادی	
n	۱۵.۱۳	۱۵.۶۴۴۱۴	
L	۱.۶۹۱۱۶	۱.۷۰۶۵۱	
cost	۵۰.۳۶۸۴۸	۵۰.۳۹۸۲	
ARL_0	۱۱.۷۵	۱۲.۲۸	
ARL_1	۲.۰۰۵	۱.۹۶	

جدول ۹: تأثیر λ بر هزینه در حالت σ معلوم، مزدوج

اقتصادی				آماری - اقتصادی			
هزینه	L	h	n	هزینه	L	h	n
۱۹.۲۰۳۸	۱.۸۷۹۱۴	۲.۳۶۵۲۲	۲۴.۰۹۸۰۶	۱۹.۲۰۳۸	۱.۸۵۱۰۵	۲.۵۰۶۱۱	۲۶.۸۵۰۴۱
۱۶.۵۴۴۰۸	۱.۹۳۷۸۷	۲.۵۳۰۴۸	۱۲.۴۲۸۶۸	۱۶.۵۴۴۰۸	۲.۵۱۴	۱.۹۲۹۵	۱۱.۸۵۳۹۲
۱۵.۱۵۰۵۴	۲.۳۳۰۱	۱.۵۱۵۴۴	۴.۹۵۲۸۹	۱۵.۳۸۱۶۲	۳.۰۱۷۴۸	۱.۵۳۶۰۵	۵.۰۱۷۴۸

جدول ۱۰: تأثیر اندازه تغییر بر هزینه در حالت σ معلوم، مزدوج

اقتصادی				آماری - اقتصادی			
اندازه تغییر	L	h	n	هزینه	L	h	n
۱۰.۱	۲.۳۶۵۲۲	۲.۵۳۰۴۸	۱۲.۴۲۸۶۸	۱۹.۲۰۳۸	۱.۸۷۹۱۴	۲.۳۶۵۲۲	۲۴.۰۹۸۰۶
۱	۱.۱۳۴۴	۱.۸۱۴۱۷	۱۷.۲۷۳۹۹	۲۷.۲۱۸۵۸	۱.۸۱۴۱۷	۱.۱۳۴۴	۱۷.۲۷۳۹۹
۲	۱.۰۱۴۰۶	۱.۶۹۱۱۶	۱۵.۱۳	۵۰.۳۶۸۴۸	۱.۶۹۱۱۶	۱.۰۱۴۰۶	۱۵.۱۳

جدول ۱۱: طراحی اقتصادی و آماری - اقتصادی در حالت σ معلوم، جفریز

اقتصادی		آماری - اقتصادی	
n	۱۳.۶۱۴۸۸	۱۶.۱۸۴۱۶	
L	۱.۵۸۱۶۷	۱.۶۳۷۴۵	
cost	۵۰.۷۰۳	۵۰.۷۶۵۱۸	
ARL_0	۹.۴۷	۱۱.۱۹	
ARL_1	۲.۱۰	۱.۹۱	

جدول ۱۲: تأثیر λ بر هزینه در حالت σ معلوم، جفریز

اقتصادی				آماری - اقتصادی			
هزینه	L	h	n	هزینه	L	h	n
۱۹.۳۳۲۷۱	۱.۷۲۱۷	۲.۶۰۱۸۱	۲۶.۳۸۹۷۷	۱۹.۳۳۲۷۱	۱.۷۲۱۷	۲.۶۰۱۸۱	۲۶.۳۸۹۷۷
۱۶.۵۹۸۲۷	۲.۵۲۱۳۸	۱.۹۲۴۰۷	۱۸.۱۰۴۶۰	۱۶.۵۹۸۲۷	۲.۵۲۱۳۸	۱.۹۲۴۰۷	۱۸.۱۰۴۶۰
۱۵.۰۹۹۹۶	۳.۰۱۴۴۴	۱.۴۹۲۴۹	۵.۰۰۷۷۱	۱۵.۰۹۹۹۶	۳.۰۱۴۴۴	۱.۴۹۲۴۹	۵.۰۰۷۷۱

جدول ۱۳: تأثیر اندازه تغییر بر هزینه در حالت σ معلوم، جفریز

اقتصادی				آماری - اقتصادی			
اندازه تغییر	L	h	n	هزینه	L	h	n
۱۰.۵	۲.۶۰۱۸۱	۲.۵۲۱۳۸	۱۸.۱۰۴۶۰	۱۹.۳۳۲۷۱	۱.۷۲۱۷	۲.۶۰۱۸۱	۲۶.۳۸۹۷۷
۱	۱.۹۲۴۰۷	۱.۸۱۴۱۷	۱۷.۲۷۳۹۹	۲۷.۲۱۸۵۸	۱.۸۱۴۱۷	۱.۹۲۴۰۷	۱۷.۲۷۳۹۹
۲	۱.۰۱۴۰۶	۱.۶۹۱۱۶	۱۵.۱۳	۵۰.۳۶۸۴۸	۱.۶۹۱۱۶	۱.۰۱۴۰۶	۱۵.۱۳

۵- نتیجه گیری

در این مقاله طراحی اقتصادی و آماری - اقتصادی نمودار کنترلی برای پایش میانگین فرایند بر اساس چگالی پیش‌گویی بیزی با استفاده از پیشین مزدوج و جفریز ارائه شد. بر اساس نتایج ارائه شده دریافتیم که عملکرد رویکرد بیزی نسبت به رویکرد کلاسیک در مواقعی که σ مقادیر کوچکی را اختیار

