

پیش‌بینی بیزی برای نمونه سانسور شده از توزیع کوماراسوامی بر اساس مدل آزمون طول عمر سریع جزیی و بررسی کاربرد آن در مواد سرامیکی

سعید اسدی*

دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. s_asadi@pnu.ac.ir

هانیه پناهی

استادیار، گروه ریاضی و آمار، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران. panahi@liau.ac.ir

چکیده: مدل آزمون طول عمر سریع، یکی از مدل‌های بهینه در کسب اطلاعات مربوط به قابلیت اطمینان محصولات، بر اساس تسریع زمان شکست در مدت زمان کوتاه است. در این تحقیق، فاصله پیش‌بینی بیزی برای مقادیر سانسور شده در مدل آزمون طول عمر سریع جزیی با فشار یکسان بر اساس توزیع کوماراسوامی، مطالعه گردیده است. به دلیل عدم وجود فرم بسته در تابع پیش‌بینی بیزی، از الگوریتم زنجیره مارکوف مونت کارلو برای محاسبه تابع پیش‌بینی تقریبی و ساختن فواصل پیش‌بینی استفاده شده است. شبیه‌سازی و یک مجموعه داده واقعی برای مقایسه فواصل پیش‌بینی بیزی، آورده شده است. نتایج نشان می‌دهد که فواصل پیش‌بینی تحت تمامی حالات سانسور عملکرد خوبی دارند و مقادیر واقعی داده‌ها را در بر می‌گیرند. از نتایج به دست آمده می‌توان برای افزایش کیفیت و کاهش زمان و هزینه مربوط به آزمایش‌های کنترل کیفی محصولات استفاده کرد.

واژگان کلیدی: توزیع کوماراسوامی، سانسور هیبرید واحد شده، فاصله پیش‌بینی بیزی، آزمون طول عمر سریع جزیی

۱- مقدمه

می‌شود تا در مدت زمان کوتاهی شکست‌ها مشاهده شوند. یکی از مهمترین آزمون‌ها برای غلبه بر این وضعیت، آزمون‌های طول عمر سریع (ALT^1) است که با استفاده از فشاری بالاتر از نرمال، موجب ایجاد شکست‌ها در زمان کوتاه می‌شوند. فرض اصلی این آزمون، این است که ضریب تسریع معلوم است و یک مدل ریاضی برای توجیه رابطه بین طول عمر و فشار در نظر گرفته شده است. در بعضی شرایط، چنین مدلی وجود ندارد و یا به‌دست آوردن آن بسیار دشوار است. بنابراین در این شرایط از آزمون‌های طول عمر سریع جزئی ($PALT^3$) استفاده می‌شود. همچنین در این آزمایشات، انواع مختلفی از فشار مانند فشار یکسان (CS^4)، فشار مرحله‌ای (SS^5) و فشار فزاینده (PS^5) را می‌توان در نظر گرفت [۱]. بر اساس آزمون طول عمر سریع جزئی با فشار مرحله‌ای، ابتدا

بسیاری از تولیدات مهندسی و یا مواد به گونه‌ای طراحی شده‌اند که در شرایط نرمال از قابلیت اطمینان و طول عمر بالایی برخوردار هستند. در چنین شرایطی، آزمایشات مربوط به طول عمر، بسیار گران و وقت‌گیر می‌شوند. از این شرایط به عنوان فشار و یا تنش اعمالی بر روی مواد یا قطعات مهندسی یاد می‌شود که ممکن است به صورت دما، ولتاژ، نیرو، رطوبت، فشار، تنش، ارتعاشات و غیره باشد. برای به حداقل رساندن هزینه‌های مربوط به آزمایش، بدون کاهش کیفیت داده‌های به دست آمده، آزمایش تحت فشار و یا تحت تنش عوامل محیطی که بالاتر از حد نرمال هستند، اجرا

* (Corresponding author) s_asadi@pnu.ac.ir

³ Constant-Stress

⁴ Step-Stress

⁵ Progressive-Stress

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۲/۳۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۴/۳۰

دوره ۱۱/ شماره ۱

صفحات ۱۵-۳۲

^۱ Accelerated life test

^۲ Partially Accelerated life test

کلاسیک و بیزی را برای برآورد پارامترها در نظر گرفت و فواصل اطمینان مجانبی، بوت-استرپ و بیزی را به عنوان برآورد فاصله‌ای محاسبه کرد. عبدالباسط و همکاران [۷]، آزمون طول عمر سریع را برای توزیع وایبل نمایی شده تحت سانسور فزاینده بررسی و مشاهده کردند که برآوردگر بیزی تحت تقریب زنجیره مارکوف مونت کارلو در برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای پارامترهای مجهول نسبت به روش کلاسیک نتایج بهتری دارد.

لین و همکاران [۸]، با پیشنهاد خانواده‌ای از توزیع‌ها، برآورد پارامترهای آزمون طول عمر سریع و فاکتور تسریع را تحت سانسور هیبرید نوع اول مطالعه کردند و عبد الرحیم و همکاران [۹]، مدل نمایی کایز اصلاح شده را به عنوان رقیبی برای توزیع‌های معروف نمایی، وایبل و نمایی تعمیم‌یافته معرفی کردند و برآورد پارامترهای مجهول مدل طول عمر سریع را تحت سانسور فزاینده به دست آوردند.

در این پژوهش برای صرفه‌جویی در زمان و هزینه از داده‌های سانسور هیبرید واحد شده (بالاکریشن و همکاران [۱۰]) برای ساختن فواصل پیش‌بینی بیزی، بر اساس مدل آزمون شتاب-دهنده جزئی با فشار یکسان، استفاده شده است. این سانسور ترکیبی از سانسور هیبرید تعمیم یافته نوع اول و نوع دوم است. در این طرح سانسور مقادیر T_1, T_2, r و k ($k < r$) از قبل تعیین می‌شوند. اگر k -امین شکست قبل از زمان T_1 رخ دهد، آزمون در زمان $\min(\max(X_{r:n}, T_1), T_2)$ خاتمه می‌یابد. اگر k -امین شکست بین زمانهای T_1 و T_2 رخ دهد، آزمون در زمان $\min(X_{r:n}, T_2)$ و اگر بعد از زمان T_2 رخ دهد، آزمون در زمان $X_{k:n}$ پایان می‌پذیرد. بنابراین تحت این نوع سانسور ۶ حالت برای داده‌ها به صورت زیر قابل مشاهده است.

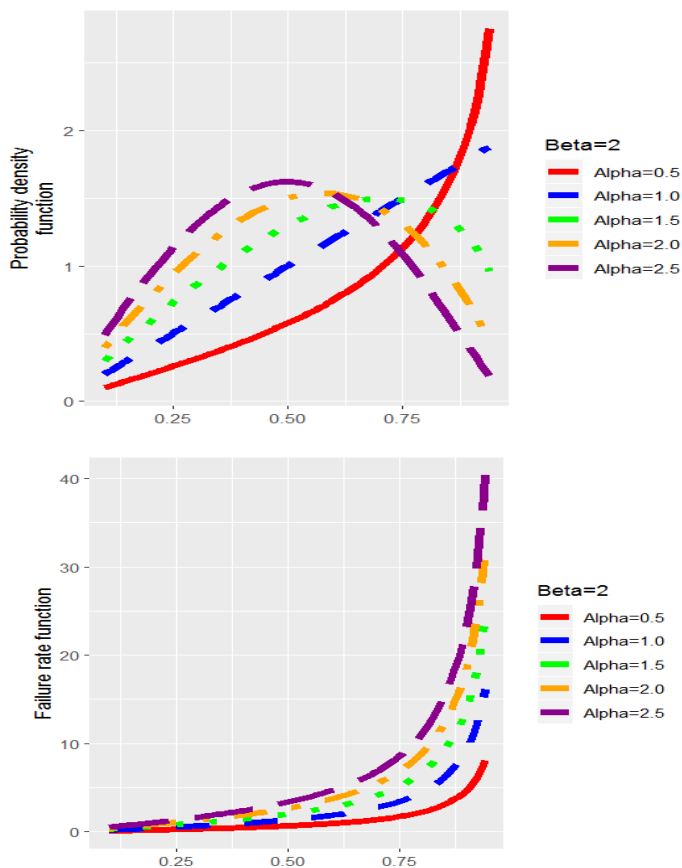
- **حالت ۱:** $0 < X_{k:n} < X_{r:n} < T_1 < T_2$ که آزمون در زمان T_1 خاتمه می‌یابد.
- **حالت ۲:** $0 < X_{k:n} < T_1 < X_{r:n} < T_2$ که آزمون در زمان $X_{r:n}$ خاتمه می‌یابد.
- **حالت ۳:** $0 < X_{k:n} < T_1 < T_2 < X_{r:n}$ که آزمون در زمان T_2 خاتمه می‌یابد.
- **حالت ۴:** $0 < T_1 < X_{k:n} < X_{r:n} < T_2$ که آزمون در زمان $X_{r:n}$ خاتمه می‌یابد.

آزمایش تحت شرایط نرمال اجرا می‌شود. اگر در مدت زمان از پیش تعیین شده، شکست مشاهده نشود، شرایط طول عمر سریع اعمال می‌گردد تا زمانی که شکست رخ دهد. همچنین آزمون طول عمر سریع جزئی با فشار فزاینده، امکان افزایش فشار را به طور پیوسته در واحدهای آزمایش فراهم می‌سازد. مهم‌ترین و کاربردی‌ترین آزمون، آزمون طول عمر سریع جزئی با فشار یکسان است ($CS-PALT$). بر اساس آزمون طول عمر سریع جزئی با فشار یکسان، واحدهای آزمایش به دو گروه تقسیم می‌شوند. گروه اول شامل واحدهایی که در شرایط نرمال استفاده قرار دارند با حجم نمونه (n_1) و گروه دوم واحدهایی که در شرایط تسریع طول عمر قرار دارند با حجم نمونه ($n_2 = n - n_1$) که n برابر حجم کل داده‌ها است. بر اساس این آزمایش، هر واحد در دو گروه در سطح فشار یکسان تا زمانی که از کار بیافتند، اجرا می‌شود. در سال‌های اخیر، پژوهشگران بسیاری در مورد مدل‌های مختلف آزمون طول عمر سریع مطالعه کرده‌اند. بالاکریشن [۲]، مدل آزمون طول عمر سریع را تحت طرح‌های سانسور مختلف، مطالعه کرد و بر اساس مثال‌های عددی، کارایی مدل پیشنهادی را بررسی کرد. نصر و دی [۳]، روش‌های مختلف برآورد، مانند روش درست‌نمایی ماکزیمم، حداقل مربعات، حداقل مربعات وزنی، چندکی و کرامر-ون-میس را برای برآورد پارامترها و تابع قابلیت اطمینان در توزیع رایلی نمایی شده تحت شرایط نرمال با استفاده از آزمون طول عمر سریع ثابت، مطالعه کردند. بر اساس نتایج شبیه‌سازی دریافتند که روش مبتنی بر چندک‌ها در برآورد پارامترهای مدل، بهترین عملکرد را دارد. همچنین برای اعتبارسنجی مدل و نتایج تئوری، داده‌های مربوط به زمان خرابی روغن عایق را مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. الام و همکاران [۴]، کاربرد مدل آزمون طول عمر سریع را در برآورد هزینه‌های سیاست خدمات تعمیر و نگهداری بر اساس توزیع نمایی معکوس تعمیم یافته تحت سانسور فزاینده بررسی کردند. چنگ و وانگ [۵]، به بررسی مدل آزمون طول عمر سریع در توزیع بر نوع ۱۲ پرداختند. آن‌ها دو روش برآورد درست‌نمایی ماکزیمم، بر اساس الگوریتم شبه نیوتن و امید ریاضی-ماکزیمم‌سازی ارائه کردند و با استفاده از شبیه‌سازی، مشاهده کردند که الگوریتم امید ریاضی-ماکزیمم‌سازی نسبت به الگوریتم شبه نیوتن عملکرد بهتری دارد. عبد الحمید [۶]، توزیع بر نوع ۱۲ را در آزمون طول عمر سریع بر اساس نمونه‌های سانسور فزاینده نوع دوم مطالعه کرد. او دیدگاه

¹ Constant-Stress Partially Accelerated life test

$$h(t) = \frac{\alpha\beta t^{\beta-1}}{1-t^\beta}; \quad 0 < t < 1, \alpha > 0, \beta > 0.$$

است. تابع چگالی احتمال و تابع نرخ شکست توزیع کوماراسوامی در شکل ۱ آورده شده است.



شکل ۱: تابع چگالی احتمال و نرخ شکست در توزیع کوماراسوامی.

بر اساس شکل ۱، مشاهده شده است که در صورت ثابت بودن t و β ، با افزایش α ، تابع نرخ شکست افزایش می‌یابد. مطالعات زیادی توسط محققین بر روی توزیع کوماراسوامی صورت گرفته است. از آن جمله می‌توان به میتنیک و بیک [۱۵]، دی و همکاران [۱۶]، کیزیلاسلان و ندر [۱۷]، وانگ [۱۸]، پناهی [۱۹] و مهتو و همکاران [۲۰] اشاره کرد.

• **حالت ۵:** $0 < T_1 < X_{k:n} < T_2 < X_{r:n}$ که آزمایش در زمان T_2 خاتمه می‌یابد.

• **حالت ۶:** $0 < T_1 < T_2 < X_{k:n} < X_{r:n}$ که آزمایش در زمان $X_{k:n}$ خاتمه می‌یابد.

محققان بسیاری در مورد سانسور هیبرید واحد شده بر اساس اهداف مختلف، مطالعه کرده‌اند پناهی [۱۱]، روش‌های مختلف برآورد پارامترهای مدل بر نوع سوم و همچنین کاربرد آن در داده‌های مربوط به مقاومت مواد در برابر شکستگی را بررسی کرد. آتیا [۱۲]، برآوردهای مختلف نقطه‌ای و فاصله‌ای را در برآورد پارامترهای مجهول مدل وایبل معکوس، مطالعه کرد. غزال و شیهاب [۱۳] به مطالعه روش زنجیره مارکوف مونت کارلو در برآورد پارامترهای مدل پارتو پرداختند. جئون و کانگ [۱۴]، استنباط‌های مختلف آماری بر اساس مدل رایلی را بررسی کردند. بر اساس مطالعه تحقیقات و مقالات منتشر شده، مشاهده گردیده است که آزمون شتاب‌دهنده جزئی با فشار یکسان در مدل کوماراسوامی^۲ تحت نمونه‌های سانسور هیبرید واحد شده، مورد بررسی قرار نگرفته است. همچنین پیش‌بینی بیزی مقادیر غیر قابل مشاهده یا سانسور شده بر اساس اطلاعات گذشته در جهت بهبود کارایی محصولات و کاهش هزینه و زمان، یکی از موضوعات حائز اهمیت در مهندسی قابلیت اطمینان است. بنابراین در این مقاله پیش‌بینی بیزی مقادیر سانسور شده، بر اساس آزمون شتاب‌دهنده جزئی با فشار یکسان در مدل کوماراسوامی بررسی شده و کاربرد آن در داده‌های مربوط به شکنندگی مواد سرامیکی مورد ارزیابی قرار گرفته است. توزیع کوماراسوامی با پارامترهای شکل α و β با نماد $KUD(\alpha, \beta)$ نمایش داده شده است. تابع چگالی احتمال (PDF)، این توزیع عبارت است از:

$$f(x; \alpha, \beta) = \alpha\beta x^{\beta-1}(1-x^\beta)^{\alpha-1}; \quad 0 < x < 1, \alpha, \beta > 0,$$

و تابع توزیع تجمعی (CDF) متناظر آن برابر است با:

$$F(x; \alpha, \beta) = 1 - (1-x^\beta)^\alpha; \quad 0 < x < 1, \alpha > 0, \beta > 0,$$

همچنین توابع قابلیت اطمینان و نرخ شکست توزیع کوماراسوامی عبارت از:

$$R(t; \alpha, \beta) = (1-t^\beta)^\alpha; \quad 0 < t < 1, \alpha > 0, \beta > 0,$$

۹

² Kumaraswamy

¹ Burr Type III

که γ پارامتر تسریع است. همچنین تابع درستنمایی توزیع کوماراسوامی تحت سانسور هیبرید واحد شده عبارت است از:

$$L(\theta|data) = \frac{n!}{(n-d)!} \prod_{j=1}^{d^*} f(x_{j:n}; \theta) (1 - F(s; \theta))^{n-d^*},$$

که

$$(d^*, s) = \begin{cases} (d_1, T_1); & \text{Case 1} \\ (r, X_{r:n}); & \text{Case 2} \\ (d_2, T_2); & \text{Case 3} \\ (r, X_{r:n}); & \text{Case 4} \\ (d_2, T_2); & \text{Case 5} \\ (k, X_{k:n}); & \text{Case 6} \end{cases}$$

بنابراین بر اساس ۶ حالت سانسور هیبرید واحد شده، تابع درستنمایی برای دو گروه ادغام شده بر اساس توزیع کوماراسوامی عبارت است از:

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta, \gamma|data) &= \prod_{i=1}^2 \frac{n_i!}{(n_i - d_i^*)!} \prod_{j=1}^{d_i^*} f_i(x_{ij:n_i}; \alpha, \beta) \\ &\quad \times (1 - F_i(s_i; \alpha, \beta))^{n_i - d_i^*} \\ &= \prod_{i=1}^2 \frac{n_i!}{(n_i - d_i^*)!} \prod_{j=1}^{d_i^*} \alpha \beta \gamma^{i-1} x_{ij:n_i}^{\beta-1} \\ &\quad \times (1 - x_{ij:n_i}^\beta)^{\gamma^{i-1} \alpha - 1} (1 - s_i^\beta)^{\gamma^{i-1} \alpha (n_i - d_i^*)}, \end{aligned} \quad (4)$$

که X_{1j} و X_{2j} به ترتیب نشان‌دهنده داده‌ها تحت شرایط نرمال و تسریع هستند. در ادامه مقاله، برای سادگی $X_{ij:n_i}$ به صورت X_{ij} نمایش داده شده است. نتایج مربوط به گروه اول و دوم تحت سانسور هیبرید واحد شده در جدول ۱ آورده شده است. بر اساس نتایج جدول ۱، در بخش بعد با استفاده از روش زنجیره مارکف مونت کارلو، داده‌های سانسور شده، پیش‌بینی شده است.

ادامه این مقاله به شرح زیر است. در بخش ۲، توصیف مدل شتاب‌دهنده جزئی با فشار یکسان و مفروضات آن بیان شده است. پیش‌بینی بیزی داده‌های سانسور شده بر اساس اطلاعات پیشین و با استفاده از روش زنجیره مارکف مونت کارلو، در فصل ۳ آورده شده است. در فصل ۴ محاسبات عددی برای نشان دادن کارایی پیش‌بینی‌های بدست آمده در مقاله، آورده شده است. فصل ۵ به تجزیه و تحلیل و فواصل پیش‌بینی بیزی برای داده‌های مربوط به شکنندگی مواد سرامیکی اختصاص یافته است. در نهایت نتیجه‌گیری در بخش ۶ آورده شده است.

۲- توصیف مدل شتاب‌دهنده جزئی با فشار یکسان بر اساس توزیع کوماراسوامی

بر اساس مدل شتاب‌دهنده جزئی با فشار یکسان، نمونه تحت آزمایش (n) به دو گروه n_1 و n_2 تقسیم می‌شود. فرض کنید $f_1(x; \alpha, \beta)$ و $F_2(x; \alpha, \beta)$ به ترتیب تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی برای گروه اول باشند که تحت شرایط نرمال به‌دست آمده‌اند. همچنین در گروه دوم به حجم n_2 که به طور تصادفی انتخاب شده و تحت شرایط تسریع اجرا شده‌اند، توابع چگالی احتمال و توزیع تجمعی، به ترتیب با $f_2(x; \alpha, \beta)$ و $F_2(x; \alpha, \beta)$ نمایش داده شده است. در این صورت بر اساس توزیع کوماراسوامی، توابع چگالی احتمال و توزیع تجمعی دو گروه، عبارت‌اند از:

$$f_1(x; \alpha, \beta) = \alpha \beta x^{\beta-1} (1 - x^\beta)^{\alpha-1}, \quad (1)$$

$$f_2(x; \alpha, \beta, \gamma) = \alpha \beta \gamma x^{\beta-1} (1 - x^\beta)^{\gamma \alpha - 1},$$

و

$$F_1(x; \alpha, \beta) = 1 - (1 - x^\beta)^\alpha, \quad (2)$$

$$F_2(x; \alpha, \beta) = 1 - (1 - x^\beta)^{\gamma \alpha}.$$

بنابراین توابع چگالی احتمال و توزیع تجمعی ادغام شده‌ی این دو گروه را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f_i(x; \alpha, \beta, \gamma) = \alpha \beta \gamma^{i-1} x^{\beta-1} (1 - x^\beta)^{\gamma^{i-1} \alpha - 1}, \quad (3)$$

$$F_i(x; \alpha, \beta) = 1 - (1 - x^\beta)^{\gamma^{i-1} \alpha}; \quad i = 1, 2.$$

$$\pi^*(\alpha|\beta, \gamma, data) \propto \alpha^{a_1+w-1} e^{-\alpha b_1}$$

$$\times \prod_{i=1}^2 \prod_{j=1}^{d_i^*} (1-x_{ij}^\beta)^{\gamma^{i-1}\alpha-1} (1-s_i^\beta)^{\gamma^{i-1}\alpha(n_i-d_i^*)}$$

$$\pi^*(\beta|\alpha, \gamma, data) \propto \beta^{a_2+w-1} e^{-\beta b_2}$$

$$\times \prod_{i=1}^2 \prod_{j=1}^{d_i^*} x_{ij}^{\beta-1} (1-x_{ij}^\beta)^{\gamma^{i-1}\alpha-1} (1-s_i^\beta)^{\gamma^{i-1}\alpha(n_i-d_i^*)}$$

۹

$$\pi^*(\gamma|\alpha, \beta, data) \propto \gamma^{d_2-1} \prod_{j=1}^{d_2} (1-x_j^\beta)^{\gamma^{i-1}\alpha-1}$$

$$\times (1-s_i^\beta)^{\gamma^{i-1}\alpha(n_2-d_2)}$$

که $w = d_1^* + d_2^*$ است. جدول ۲ برای پیش‌بینی مشاهدات سانسور شده $(X_{i\mathfrak{S}_i; n_i-d_i^*}; \mathfrak{S}_i = d_i^* + 1, d_i^* + 2, \dots, n_i - d_i^*, i = 1, 2)$ بر اساس داده‌های مشاهده شده (X_i^*) از توزیع $KUD(\alpha, \beta\gamma^{i-1})$ تحت سانسور هیبرید واحد شده، طراحی شده است.

بر اساس روش بیزی برای پیش‌بینی مقادیر سانسور شده، ابتدا باید توزیع شرطی $X_{i\mathfrak{S}_i; n_i-d_i^*}$ را با فرض معلوم بودن مقادیر X_i^* ، به‌دست آوریم. توزیع‌های شرطی برای حالات سانسور هیبرید واحد شده (جدول ۲) عبارت‌اند از (غزال و حسب اله [۲۱]):

• حالت ۱:

$$f_{i1}(X_{\mathfrak{S}_i; n_i-d_i^*} | X_i^*, \alpha, \beta, \gamma) =$$

$$\sum_{\mathfrak{P}=i}^{\mathfrak{S}_i-1} \sum_{\mathfrak{S}=0}^{\mathfrak{S}_i-\mathfrak{P}-1} \sum_{\mathfrak{M}=0}^{n_i-\mathfrak{S}_i} \frac{(-1)^{\mathfrak{A}} (n_i - \mathfrak{P})! n_i!}{\mathfrak{P}!(n_i - \mathfrak{P})! \mathfrak{S}! \mathfrak{M}! (n_i - \mathfrak{S}_i - \mathfrak{M})! (\mathfrak{S}_i - \mathfrak{P} - 1 - \mathfrak{S})!}$$

$$\times \frac{(1 - (1 - x_{\mathfrak{S}_i}^\beta)^{\gamma^{i-1}\alpha})^{\mathfrak{S}_i-w-1} (1 - (1 - T_{i1}^\beta)^{\gamma^{i-1}\alpha})^{\mathfrak{S}-\mathfrak{P}}}{\sum_{h=i}^{\mathfrak{S}_i-1} \binom{n_i}{h} (1 - (1 - T_{i1}^\beta)^{\gamma^{i-1}\alpha})^h (1 - T_{i1}^\beta)^{\gamma^{i-1}\alpha(n_i-h)}}$$

$$\times \alpha \beta \gamma^{i-1} x_{\mathfrak{S}_i}^{\beta-1} (1 - x_{\mathfrak{S}_i}^\beta)^{\gamma^{i-1}\alpha-1}; \mathfrak{A} = \mathfrak{M} + \mathfrak{S}, w = \mathfrak{P} + \mathfrak{M} - \mathfrak{S},$$

(۷)

جدول ۱: حالات مختلف مشاهدات برای گروه اول و دوم تحت هیبرید واحد شده			
حالات	طرح سانسور	s_i	d_i^*
۱	$0 < X_{k:n} < X_{r:n} < T_1 < T_2$	T_{i1}	d_{i1}
۲	$0 < X_{k:n} < T_1 < X_{r:n} < T_2$	$X_{i r_i}$	r_i
۳	$0 < X_{k:n} < T_1 < T_2 < X_{r:n}$	T_{i2}	d_{i2}
۴	$0 < T_1 < X_{k:n} < X_{r:n} < T_2$	$X_{i r_i}$	r_i
۵	$0 < T_1 < X_{k:n} < T_2 < X_{r:n}$	T_{i2}	T_{i2}
۶	$0 < T_1 < T_2 < X_{k:n} < X_{r:n}$	$X_{i k_i}$	k_i

۳- پیش‌بینی بیزی داده‌های سانسور شده

برای به‌دست آوردن فواصل پیش‌بینی بیزی، ابتدا باید توزیع پیشین پارامترهای مجهول، مشخص شوند. در این بخش، فرض شده است که α و β مستقل و هر یک دارای توزیع پیشین گاما با تابع چگالی به صورت

$$\pi_1(\alpha) \propto \alpha^{a_1-1} e^{-\alpha b_1}, \quad \pi_2(\beta) \propto \beta^{a_2-1} e^{-\beta b_2},$$

باشند که در آنها a_1, a_2, b_1, b_2 مقادیری ثابت و معلوم هستند. همچنین پیشین فاقد اطلاع $(\pi_3(\gamma) \propto 1/\gamma)$ برای پارامتر γ در نظر گرفته شده است. بنابراین تابع چگالی پیشین توام پارامترهای (α, β, γ) عبارت است از:

$$\pi(\alpha, \beta, \gamma) = \pi_1(\alpha) \pi_2(\beta) \pi_3(\gamma) \propto \alpha^{a_1-1} \beta^{a_2-1} e^{-\alpha b_1 - \beta b_2} \gamma^{-1}. \quad (۵)$$

با ادغام روابط (۴) و (۵)، تابع چگالی پسین توام پارامترهای (α, β, γ) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\pi(\alpha, \beta, \gamma | data) \propto \alpha^{a_1+d_1+d_2-1} \beta^{a_2+d_1+d_2-1} e^{-\alpha b_1 - \beta b_2} \gamma^{d_2-1} \times \prod_{i=1}^2 \prod_{j=1}^{d_i^*} x_{ij}^{\beta-1} (1-x_{ij}^\beta)^{\gamma^{i-1}\alpha-1} (1-s_i^\beta)^{\gamma^{i-1}\alpha(n_i-d_i)} \quad (۶)$$

بر اساس رابطه (۶)، توزیع پسین کناری پارامترهای α ، β و γ عبارت‌اند از:

جدول ۲: حالات مختلف داده‌های سانسور شده و مشاهده شده تحت سانسور هیبرید واحد شده.

حالات	X_i^*	$X_{i\mathfrak{T}_i:n_i-d_i^*}; \mathfrak{T}_i = d_i^* + 1, d_i^* + 2, \dots, n_i - d_i^*, i = 1, 2$
۱	$X_{i1:d_{i1}}, X_{i2:d_{i1}}, \dots, X_{id_{i1}:d_{i1}} = T_{i1}$	$X_{i(d_{i1}+1):n_i-d_{i1}}, X_{i(d_{i1}+2):n_i-d_{i1}}, \dots, X_{i(n_i-d_{i1}):n_i-d_{i1}}$
۲	$X_{i1:r_i}, X_{i2:r_i}, \dots, X_{ir_i:r_i}$	$X_{i(r_i+1):n_i-r_i}, X_{i(r_i+2):n_i-r_i}, \dots, X_{i(n_i-r_i):n_i-r_i}$
۳	$X_{i1:d_{i2}}, X_{i2:d_{i2}}, \dots, X_{id_{i2}:d_{i2}} = T_{i2}$	$X_{i(d_{i2}+1):n_i-d_{i2}}, X_{i(d_{i2}+2):n_i-d_{i2}}, \dots, X_{i(n_i-d_{i2}):n_i-d_{i2}}$
۴	$X_{i1:r_i}, X_{i2:r_i}, \dots, X_{ir_i:r_i}$	$X_{i(r_i+1):n_i-r_i}, X_{i(r_i+2):n_i-r_i}, \dots, X_{i(n_i-r_i):n_i-r_i}$
۵	$X_{i1:d_{i2}}, X_{i2:d_{i2}}, \dots, X_{id_{i2}:d_{i2}} = T_{i2}$	$X_{i(d_{i2}+1):n_i-d_{i2}}, X_{i(d_{i2}+2):n_i-d_{i2}}, \dots, X_{i(n_i-d_{i2}):n_i-d_{i2}}$
۶	$X_{i1:k_i}, X_{i2:k_i}, \dots, X_{ik_i:k_i}$	$X_{i(k_i+1):n_i-k_i}, X_{i(k_i+2):n_i-k_i}, \dots, X_{i(n_i-k_i):n_i-k_i}$

• حالت ۶:

$$f_{i3}(X_{\mathfrak{T}_i:n_i-d_i^*} | X_i^*, \alpha, \beta, \gamma) =$$

$$\sum_{s=0}^{\mathfrak{T}_i-k_i-1} \sum_{m=0}^{n_i-\mathfrak{T}_i} \frac{(-1)^{s+m} (n_i - k_i)!}{s! m! (n_i - \mathfrak{T}_i - m)! (\mathfrak{T}_i - k_i - s - 1)!} \times \frac{(1 - (1 - x_{\mathfrak{T}_i}^\beta)^{\gamma^{i-1} \alpha})^{\mathfrak{T}_i - k_i - s + m - 1} (1 - (1 - x_{k_i}^\beta)^{\gamma^{i-1} \alpha})^s}{(1 - x_{k_i}^\beta)^{\gamma^{i-1} \alpha (n_i - k_i)}} \times \alpha \beta \gamma^{i-1} x_{\mathfrak{T}_i}^{\beta-1} (1 - x_{\mathfrak{T}_i}^\beta)^{\gamma^{i-1} \alpha - 1}.$$

(۱۰)

۳-۱- فاصله پیش‌بینی بیزی

پیش‌بینی نمونه‌های آینده بر اساس اطلاعات پیشین، یکی از موضوعات اساسی در آمار است که کاربرد بسیاری در تجزیه و تحلیل قابلیت اطمینان دارد. برای مطالعه‌ی بیشتر در مورد روش‌های مختلف پیش‌بینی مقادیر سانسور شده به [۲۲-۲۵] مراجعه شود. در این بخش بر اساس نمونه‌های مشاهده شده، فاصله $100(1-\zeta)\%$ پیش‌بینی بیزی برای داده‌های سانسور

$$\text{شده } X_{i\mathfrak{T}_i:n_i-d_i^*};$$

• حالت ۲ و ۴:

$$f_{i2}(X_{\mathfrak{T}_i:n_i-d_i^*} | X_i^*, \alpha, \beta, \gamma) =$$

$$\sum_{s=0}^{\mathfrak{T}_i-r_i-1} \sum_{m=0}^{n_i-\mathfrak{T}_i} \frac{(-1)^{s+m} (n_i - r_i)!}{s! m! (n_i - \mathfrak{T}_i - m)! (\mathfrak{T}_i - r_i - s - 1)!} \times \frac{(1 - (1 - x_{\mathfrak{T}_i}^\beta)^{\gamma^{i-1} \alpha})^{\mathfrak{T}_i - r_i - s + m - 1} (1 - (1 - x_{r_i}^\beta)^{\gamma^{i-1} \alpha})^s}{(1 - x_{r_i}^\beta)^{\gamma^{i-1} \alpha (n_i - r_i)}} \times \alpha \beta \gamma^{i-1} x_{\mathfrak{T}_i}^{\beta-1} (1 - x_{\mathfrak{T}_i}^\beta)^{\gamma^{i-1} \alpha - 1},$$

(۸)

• حالت ۳ و ۵:

$$f_{i3}(X_{\mathfrak{T}_i:n_i-d_i^*} | X_i^*, \alpha, \beta, \gamma) =$$

$$\sum_{p=k_i}^{r_i-1} \sum_{s=0}^{\mathfrak{T}_i-p-1} \sum_{m=0}^{n_i-\mathfrak{T}_i} \frac{(-1)^s (n_i - p)! n_i!}{p! (n_i - p)! s! m! (n_i - \mathfrak{T}_i - m)! (\mathfrak{T}_i - p - 1 - s)!} \times \frac{(1 - (1 - x_{\mathfrak{T}_i}^\beta)^{\gamma^{i-1} \alpha})^{\mathfrak{T}_i - p - 1} (1 - (1 - T_{i2}^\beta)^{\gamma^{i-1} \alpha})^{s-p}}{\sum_{h=r_i}^{r_i-1} \binom{n_i}{h} (1 - (1 - T_{i2}^\beta)^{\gamma^{i-1} \alpha})^h (1 - T_{i2}^\beta)^{\gamma^{i-1} \alpha (n_i - h)}} \times \alpha \beta \gamma^{i-1} x_{\mathfrak{T}_i}^{\beta-1} (1 - x_{\mathfrak{T}_i}^\beta)^{\gamma^{i-1} \alpha - 1}; r_i^* = \min(r_i, \mathfrak{T}_i),$$

(۹)

۳-۲- پیش‌بینی بیزی با استفاده از روش زنجیره مارکف مونت کارلو

روش زنجیره مارکف مونت کارلو، یکی از روش‌های کارا برای برآورد پارامترها و پیش‌بینی مقادیر سانسور شده، بر اساس دیدگاه بیزی است و کاربرد بسیاری در علوم مختلف دارد. در این زیر بخش، بر اساس روش زنجیره مارکف مونت کارلو، یک فاصله برای پیش‌بینی مقادیر سانسور شده، محاسبه شده است. تابع چگالی پیش‌بینی‌کننده، از حاصلضرب چگالی پسین در روابط (۱۰-۶) و انتگرال‌گیری نسبت به پارامترهای (α, β, γ) تولید شده است که این تابع تحت ۶ حالت سانسور هیبرید واحد شده عبارت است از:

• حالت ۱:

$$f_{i1}(X_{\mathfrak{S}_i; n_i - d_i^*} | X_i^*, \alpha, \beta, \gamma) = \sum_{p=r_i}^{\mathfrak{S}_i-1} \sum_{s=0}^{\mathfrak{S}_i-p-1} \sum_{m=0}^{n_i-\mathfrak{S}_i} \mathfrak{R}_1^* \int_1^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha \beta \gamma^{i-1} x_{\mathfrak{S}_i}^{\beta-1} (1-x_{\mathfrak{S}_i}^\beta)^{\gamma^{i-1}\alpha-1} \times \frac{(1-(1-x_{\mathfrak{S}_i}^\beta)^{\gamma^{i-1}\alpha})^{\mathfrak{S}_i-w-1} (1-(1-T_{i1}^\beta)^{\gamma^{i-1}\alpha})^{s-p}}{\sum_{h=r_i}^{\mathfrak{S}_i-1} \binom{n_i}{h} (1-(1-T_{i1}^\beta)^{\gamma^{i-1}\alpha})^h (1-T_{i1}^\beta)^{\gamma^{i-1}\alpha(n_i-h)}} \times \pi(\alpha, \beta, \gamma | data) d\alpha d\beta d\gamma, \quad (13)$$

• حالت ۲ و ۴:

$$f_{i2}(X_{\mathfrak{S}_i; n_i - d_i^*} | X_i^*, \alpha, \beta, \gamma) = \sum_{s=0}^{\mathfrak{S}_i-r_i-1} \sum_{m=0}^{n_i-\mathfrak{S}_i} \mathfrak{R}_2^* \int_1^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha \beta \gamma^{i-1} x_{\mathfrak{S}_i}^{\beta-1} (1-x_{\mathfrak{S}_i}^\beta)^{\gamma^{i-1}\alpha-1} \times \frac{(1-(1-x_{\mathfrak{S}_i}^\beta)^{\gamma^{i-1}\alpha})^{\mathfrak{S}_i-r_i-s+m-1} (1-(1-x_{r_i}^\beta)^{\gamma^{i-1}\alpha})^s}{(1-x_{r_i}^\beta)^{\gamma^{i-1}\alpha(n_i-r_i)}} \times \pi(\alpha, \beta, \gamma | data) d\alpha d\beta d\gamma, \quad (14)$$

$\mathfrak{S}_i = d_i^* + 1, d_i^* + 2, \dots, n_i - d_i^*, i = 1, 2$ محاسبه شده است. فاصله پیش‌بینی بیزی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$P(L < X_{\mathfrak{S}_i} < U) = 1 - \zeta,$$

که L و U به ترتیب کران‌های پایین و بالا هستند و از رابطه زیر محاسبه می‌شوند:

$$P(X_{\mathfrak{S}_i} > L | X_i^*) = 1 - \frac{\zeta}{2}, \quad P(X_{\mathfrak{S}_i} > U | X_i^*) = \frac{\zeta}{2}. \quad (11)$$

بر اساس حالات ۱ تا ۶ سانسور هیبرید واحد شده و همچنین با استفاده از روابط (۱۰-۶) و دیدگاه بیزی می‌توان نوشت:

$$P(X_{\mathfrak{S}_i} > A | X_i^*) = \begin{cases} \int_A^\infty F_{i1}(x_{\mathfrak{S}_i} | X_i^*) dx_{\mathfrak{S}_i} & \text{Case 1} \\ \int_A^\infty F_{i2}(x_{\mathfrak{S}_i} | X_i^*) dx_{\mathfrak{S}_i} & \text{Cases 2\&4} \\ \int_A^\infty F_{i3}(x_{\mathfrak{S}_i} | X_i^*) dx_{\mathfrak{S}_i} & \text{Cases 3\&5} \\ \int_A^\infty F_{i4}(x_{\mathfrak{S}_i} | X_i^*) dx_{\mathfrak{S}_i} & \text{Case 6} \end{cases}$$

که

$$F_{ij}(x_{\mathfrak{S}_i} | X_i^*) = \int_\gamma \int_\beta \int_\alpha f_{ij}(X_{\mathfrak{S}_i; n_i - d_i} | X_i^*, \alpha, \beta, \gamma) \times \pi(\alpha, \beta, \gamma | data) d\alpha d\beta d\gamma, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (12)$$

همانطور که مشاهده می‌شود، رابطه (۱۱)، به طور مستقیم قابل محاسبه نیست. بنابراین برای محاسبه فواصل پیش‌بینی بیزی از روش زنجیره مارکف مونت کارلو استفاده شده است.

مشاهده می‌شود که معادلات (۱۶-۱۳)، به صورت صریح قابل حل نیستند. بنابراین برای بدست آوردن فاصله پیش‌بینی بیزی از نمونه‌های تولید شده از روش زنجیره مارکف مونت کارلوف استفاده شده است. بر اساس این روش، معادلات (۱۶-۱۳) به ترتیب به صورت زیر تقریب زده شده است:

• حالت ۱:

$$\frac{\sum_{k=1}^M f_{i1}(X_{\mathfrak{T}_i} | X_i^*, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k)}{\sum_{k=1}^M \int_{T_{i1}}^{\infty} f_{i1}(X_{\mathfrak{T}_i} | X_i^*, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k) dx_{\mathfrak{T}_i}}$$

• حالت ۲ و ۴:

$$\frac{\sum_{k=1}^M f_{i1}(X_{\mathfrak{T}_i} | X_i^*, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k)}{\sum_{k=1}^M \int_{x_{i\mathfrak{T}_i}}^{\infty} f_{i1}(X_{\mathfrak{T}_i} | X_i^*, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k) dx_{\mathfrak{T}_i}}$$

• حالت ۳ و ۵:

$$\frac{\sum_{k=1}^M f_{i1}(X_{\mathfrak{T}_i} | X_i^*, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k)}{\sum_{k=1}^M \int_{T_{i2}}^{\infty} f_{i1}(X_{\mathfrak{T}_i} | X_i^*, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k) dx_{\mathfrak{T}_i}}$$

• حالت ۶:

$$\frac{\sum_{k=1}^M f_{i1}(X_{\mathfrak{T}_i} | X_i^*, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k)}{\sum_{k=1}^M \int_{x_{ik_i}}^{\infty} f_{i1}(X_{\mathfrak{T}_i} | X_i^*, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k) dx_{\mathfrak{T}_i}}$$

که $k=1,2,\dots,M$ از تابع چگالی پسین توام (۶) تولید شده است (برای مطالعه بیشتر به آتیا [۱۲] و احمد و همکاران [۲۶] مراجعه شود). بنابراین کران پایین (L) و بالا (L) فاصله $100(1-\zeta)\%$ پیش‌بینی بیزی برای مقادیر سانسور

• حالت ۳ و ۵:

$$f_{i3}(X_{\mathfrak{T}_i; n_i - d_i^*} | X_i^*, \alpha, \beta, \gamma) = \sum_{\mathfrak{P}=k_i}^{r_i^* - 1} \sum_{\mathfrak{S}=0}^{\mathfrak{T}_i - \mathfrak{P} - 1} \sum_{\mathfrak{M}=0}^{n_i - \mathfrak{T}_i} \mathfrak{R}_3^* \int_1^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \alpha \beta \gamma^{i-1} x_{\mathfrak{T}_i}^{\beta-1} (1 - x_{\mathfrak{T}_i}^{\beta})^{\gamma^{i-1} \alpha - 1} \times \frac{(1 - (1 - x_{\mathfrak{T}_i}^{\beta})^{\gamma^{i-1} \alpha})^{\mathfrak{T}_i - \mathfrak{W} - 1} (1 - (1 - T_{i2}^{\beta})^{\gamma^{i-1} \alpha})^{\mathfrak{S} - \mathfrak{P}}}{\sum_{h=r_i}^{r_i^* - 1} \binom{n_i}{h} (1 - (1 - T_{i2}^{\beta})^{\gamma^{i-1} \alpha})^h (1 - T_{i2}^{\beta})^{\gamma^{i-1} \alpha (n_i - h)}} \times \pi(\alpha, \beta, \gamma | data) d\alpha d\beta d\gamma, \quad (15)$$

• حالت ۶:

$$f_{i3}(X_{\mathfrak{T}_i; n_i - d_i^*} | X_i^*, \alpha, \beta, \gamma) = \sum_{\mathfrak{S}=0}^{\mathfrak{T}_i - k_i - 1} \sum_{\mathfrak{M}=0}^{n_i - \mathfrak{T}_i} \mathfrak{R}_4^* \int_1^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \alpha \beta \gamma^{i-1} x_{\mathfrak{T}_i}^{\beta-1} (1 - x_{\mathfrak{T}_i}^{\beta})^{\gamma^{i-1} \alpha - 1} \times \frac{(1 - (1 - x_{\mathfrak{T}_i}^{\beta})^{\gamma^{i-1} \alpha})^{\mathfrak{T}_i - k_i - \mathfrak{S} + \mathfrak{M} - 1} (1 - (1 - x_{k_i}^{\beta})^{\gamma^{i-1} \alpha})^{\mathfrak{S}}}{(1 - x_{k_i}^{\beta})^{\gamma^{i-1} \alpha (n_i - k_i)}} \times \pi(\alpha, \beta, \gamma | data) d\alpha d\beta d\gamma. \quad (16)$$

که

$$\mathfrak{R}_1^* = \frac{(-1)^{\mathfrak{A}} (n_i - \mathfrak{P})! n_i!}{\mathfrak{P}! (n_i - \mathfrak{P})! \mathfrak{S}! \mathfrak{M}! (n_i - \mathfrak{T}_i - \mathfrak{M})! (\mathfrak{T}_i - \mathfrak{P} - 1 - \mathfrak{S})!},$$

$$\mathfrak{R}_2^* = \frac{(-1)^{\mathfrak{S} + \mathfrak{M}} (n_i - r_i)!}{\mathfrak{S}! \mathfrak{M}! (n_i - \mathfrak{T}_i - \mathfrak{M})! (\mathfrak{T}_i - r_i - \mathfrak{S} - 1)!},$$

$$\mathfrak{R}_3^* = \frac{(-1)^{\mathfrak{A}} (n_i - \mathfrak{P})! n_i!}{\mathfrak{P}! (n_i - \mathfrak{P})! \mathfrak{S}! \mathfrak{M}! (n_i - \mathfrak{T}_i - \mathfrak{M})! (\mathfrak{T}_i - \mathfrak{P} - 1 - \mathfrak{S})!},$$

$$\mathfrak{R}_4^* = \frac{(-1)^{\mathfrak{S} + \mathfrak{M}} (n_i - k_i)!}{\mathfrak{S}! \mathfrak{M}! (n_i - \mathfrak{T}_i - \mathfrak{M})! (\mathfrak{T}_i - k_i - \mathfrak{S} - 1)!}.$$

شده بر اساس روش زنجیره مارکف مونت کارلو برای حالات مختلف ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ به ترتیب عبارتند از:

• حالت ۶ \Leftarrow :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sum_{k=1}^M \int_L^\infty f_{i1}(X_{\mathfrak{T}_i} | X_i^*, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k) dx_{\mathfrak{T}_i}}{\sum_{k=1}^M \int_{x_{ik_i}}^\infty f_{i1}(X_{\mathfrak{T}_i} | X_i^*, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k) dx_{\mathfrak{T}_i}} &= 1 - \frac{\zeta}{2} \\ \frac{\sum_{k=1}^M \int_U^\infty f_{i1}(X_{\mathfrak{T}_i} | X_i^*, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k) dx_{\mathfrak{T}_i}}{\sum_{k=1}^M \int_{x_{ik_i}}^\infty f_{i1}(X_{\mathfrak{T}_i} | X_i^*, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k) dx_{\mathfrak{T}_i}} &= \frac{\zeta}{2} \end{aligned} \right\}$$

برای محاسبه کران‌های بالا و پایین فواصل پیش‌بینی بیزی باید از روش‌های عددی استفاده شود.

۴- نتایج محاسبات شبیه‌سازی

در این بخش، مطالعات شبیه‌سازی برای مقایسه فواصل پیش‌بینی ارائه شده در مقاله، آورده شده است. الگوریتم زیر برای تولید داده‌ها استفاده شده است [۲۶]:

مقادیر d_i^* ، δ_i و پارامترهای توزیع‌های پیشین، مشخص شود.

بر اساس مقادیر مشخص پارامترهای توابع پیشین، پارامترهای α و β به ترتیب از توزیع $\text{Gamma}(a_1, b_1)$ و $\text{Gamma}(a_2, b_2)$ تولید شود.

با استفاده از پارامترهای تولید شده، نمونه تصادفی به حجم n تولید شود.

n_1 آیتم از n آیتم به عنوان گروه اول (شرایط نرمال) انتخاب شود.

n_2 آیتم از $n - n_1$ آیتم به عنوان گروه اول (شرایط تسریع) انتخاب شود.

کران‌های بالا و پایین فواصل پیش‌بینی بیزی با استفاده از روش زنجیره مارکوف مونت کارلو، محاسبه شود.

بر اساس الگوریتم بیان شده، نمونه ۳۰ تایی از توزیع $KUD(\alpha, \beta)$ تحت مدل آزمون شتاب‌دهنده جزئی با فشار یکسان تولید شده و گروه اول به حجم $n_1 = 10$ و گروه دوم به حجم $n_2 = 20$ در نظر گرفته شده است. داده‌ها در جدول ۳ آورده شده است.

• حالت ۱ \Leftarrow :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sum_{k=1}^M \int_L^\infty f_{i1}(X_{\mathfrak{T}_i} | X_i^*, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k) dx_{\mathfrak{T}_i}}{\sum_{k=1}^M \int_{T_{i1}}^\infty f_{i1}(X_{\mathfrak{T}_i} | X_i^*, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k) dx_{\mathfrak{T}_i}} &= 1 - \frac{\zeta}{2} \\ \frac{\sum_{k=1}^M \int_U^\infty f_{i1}(X_{\mathfrak{T}_i} | X_i^*, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k) dx_{\mathfrak{T}_i}}{\sum_{k=1}^M \int_{T_{i1}}^\infty f_{i1}(X_{\mathfrak{T}_i} | X_i^*, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k) dx_{\mathfrak{T}_i}} &= \frac{\zeta}{2} \end{aligned} \right\}$$

• حالت ۲ و ۴ \Leftarrow :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sum_{k=1}^M \int_L^\infty f_{i1}(X_{\mathfrak{T}_i} | X_i^*, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k) dx_{\mathfrak{T}_i}}{\sum_{k=1}^M \int_{x_{i\eta}}^\infty f_{i1}(X_{\mathfrak{T}_i} | X_i^*, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k) dx_{\mathfrak{T}_i}} &= 1 - \frac{\zeta}{2} \\ \frac{\sum_{k=1}^M \int_L^\infty f_{i1}(X_{\mathfrak{T}_i} | X_i^*, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k) dx_{\mathfrak{T}_i}}{\sum_{k=1}^M \int_{x_{i\eta}}^\infty f_{i1}(X_{\mathfrak{T}_i} | X_i^*, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k) dx_{\mathfrak{T}_i}} &= \frac{\zeta}{2} \end{aligned} \right\}$$

• حالت ۳ و ۵ \Leftarrow :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sum_{k=1}^M \int_L^\infty f_{i1}(X_{\mathfrak{T}_i} | X_i^*, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k) dx_{\mathfrak{T}_i}}{\sum_{k=1}^M \int_{T_{i2}}^\infty f_{i1}(X_{\mathfrak{T}_i} | X_i^*, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k) dx_{\mathfrak{T}_i}} &= 1 - \frac{\zeta}{2} \\ \frac{\sum_{k=1}^M \int_U^\infty f_{i1}(X_{\mathfrak{T}_i} | X_i^*, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k) dx_{\mathfrak{T}_i}}{\sum_{k=1}^M \int_{T_{i2}}^\infty f_{i1}(X_{\mathfrak{T}_i} | X_i^*, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k) dx_{\mathfrak{T}_i}} &= \frac{\zeta}{2} \end{aligned} \right\}$$

در این طرح سانسور، مقادیر

$X_{\mathfrak{S}}$ ؛ $\mathfrak{S} = 25, 26, 27, 28, 29, 30$ ، سانسور شده است.

● حالت ۴:

$$k_1 = 3, r_1 = 7, T_{11} = 0.27, T_{12} = 0.50,$$

$$k_2 = 9, r_2 = 15, T_{21} = 0.60, T_{22} = 0.95,$$

در این طرح سانسور، مقادیر $X_{\mathfrak{S}}$ ؛ $\mathfrak{S} = 26, 27, 28, 29, 30$ ، سانسور شده است.

● حالت ۵:

$$k_1 = 3, r_1 = 9, T_{11} = 0.27, T_{12} = 0.50,$$

$$k_2 = 10, r_2 = 17, T_{21} = 0.60, T_{22} = 0.95,$$

در این طرح سانسور، مقادیر $X_{\mathfrak{S}}$ ؛ $\mathfrak{S} = 28, 29, 30$ ، سانسور شده است.

● حالت ۶:

$$k_1 = 5, r_1 = 8, T_{11} = 0.27, T_{12} = 0.30,$$

$$k_2 = 18, r_2 = 19, T_{21} = 0.60, T_{22} = 0.85,$$

در این طرح سانسور، مقادیر $X_{\mathfrak{S}}$ ؛ $\mathfrak{S} = 29, 30$ ، سانسور شده است.

زمان‌های شکست مشاهده شده برای هر دو گروه (n_1 و n_2) و زمان‌های شکست آینده (قابل پیش‌بینی) برای n_2 ، تحت طرح‌های مختلف سانسور، در جدول ۴ آورده شده است. بر اساس روش زنجیره مارکف مونت کارلو، کران پایین (L) و بالا (L) فاصله $100(1-0.05)\%$ پیش‌بینی بیزی برای اولین و آخرین مشاهده سانسور شده، در جدول ۵ آورده شده است. مقادیر واقعی و کران‌های فاصله پیش‌بینی بیزی تا چهار رقم اعشار گرد شده‌اند.

جدول ۳: نمونه داده‌های تولید شده در دو گروه اول (n_1) و دوم (n_2).	
گروه	داده‌های مشاهده شده
n_1	0.1554241 0.2582278 0.2888903 0.2951700 0.3988082 0.4157292 0.4547438 0.4954568 0.5146057 0.5248793
n_2	0.5650312 0.5909768 0.6167626 0.6398747 0.6602381 0.7037865 0.7523008 0.7712625 0.7833484 0.7901035 0.8127414 0.8310118 0.8537389 0.8688231 0.9070814 0.9537676 0.9562762 0.9586333 0.9589447 0.9669413

سپس ۶ حالت زیر برای سانسور هیبرید واحد شده در نظر گرفته شده است:

● حالت ۱:

$$k_1 = 3, r_1 = 5, T_{11} = 0.45, T_{12} = 0.50,$$

$$k_2 = 6, r_2 = 10, T_{21} = 0.84, T_{22} = 0.90,$$

در این طرح سانسور، مقادیر $X_{\mathfrak{S}}$ ؛ $\mathfrak{S} = 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30$ ، سانسور شده است.

● حالت ۲:

$$k_1 = 3, r_1 = 7, T_{11} = 0.42, T_{12} = 0.50,$$

$$k_2 = 6, r_2 = 13, T_{21} = 0.82, T_{22} = 0.90,$$

در این طرح سانسور، مقادیر $X_{\mathfrak{S}}$ ؛ $\mathfrak{S} = 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30$ ، سانسور شده است.

● حالت ۳:

$$k_1 = 3, r_1 = 9, T_{11} = 0.42, T_{12} = 0.50,$$

$$k_2 = 6, r_2 = 17, T_{21} = 0.82, T_{22} = 0.90,$$

جدول ۴: داده‌های مشاهده شده و آینده برای طرح‌های مختلف سانسور بر اساس نمونه شبیه سازی شده.		
داده‌های مشاهده شده برای هر دو گروه	داده‌های آینده (قابل پیش‌بینی)	
n_1 : 0.1554241 0.2582278 0.2888903 0.2951700 0.3988082 0.4157292 n_2 : 0.5650312 0.5909768 0.6167626 0.6398747 0.6602381 0.7037865 0.7523008 0.7712625 0.7833484 0.7901035 0.8127414 0.8310118	0.8537389 0.8688231 0.9070814 0.9537676 0.9562762 0.95863330.9589447 0.9669413	۱
n_1 : 0.1554241 0.2582278 0.2888903 0.2951700 0.3988082 0.4157292 0.4547438 n_2 : 0.5650312 0.5909768 0.6167626 0.6398747 0.6602381 0.7037865 0.7523008 0.7712625 0.7833484 0.7901035 0.8127414 0.8310118 0.8537389	0.8688231 0.9070814 0.9537676 0.9562762 0.95863330.9589447 0.9669413	۲
n_1 : 0.1554241 0.2582278 0.2888903 0.2951700 0.3988082 0.4157292 0.4547438 0.4954568 n_2 : 0.5650312 0.5909768 0.6167626 0.6398747 0.6602381 0.7037865 0.7523008 0.7712625 0.7833484 0.7901035 0.8127414 0.8310118 0.8537389 0.8688231	0.8537389 0.8688231 0.9070814 0.9537676 0.9562762 0.95863330.9589447 0.9669413	۳
n_1 : 0.1554241 0.2582278 0.2888903 0.2951700 0.3988082 0.4157292 0.4547438 n_2 : 0.5650312 0.5909768 0.6167626 0.6398747 0.6602381 0.7037865 0.7523008 0.7712625 0.7833484 0.7901035 0.8127414 0.8310118 0.8537389 0.8688231 0.9070814	0.8537389 0.8688231 0.9070814 0.9537676 0.9562762 0.95863330.9589447 0.9669413	۴
n_1 : 0.1554241 0.2582278 0.2888903 0.2951700 0.3988082 0.4157292 0.4547438 0.4954568 n_2 : 0.5650312 0.5909768 0.6167626 0.6398747 0.6602381 0.7037865 0.7523008 0.7712625 0.7833484 0.7901035 0.8127414 0.8310118 0.8537389 0.8688231 0.9070814	0.8537389 0.8688231 0.9070814 0.9537676 0.9562762 0.95863330.9589447 0.9669413	۵
n_1 : 0.1554241 0.2582278 0.2888903 0.2951700 0.3988082 0.4157292 n_2 : 0.5650312 0.5909768 0.6167626 0.6398747 0.6602381 0.7037865 0.7523008 0.7712625 0.7833484 0.7901035 0.8127414 0.8310118	0.8537389 0.8688231 0.9070814 0.9537676 0.9562762 0.95863330.9589447 0.9669413	۶

جدول ۵: فاصله پیش‌بینی ۰/۹۵ بیزی برای اولین و آخرین داده سانسور شده هیبرید واحد شده				
حالات	X_{3_3}	مقادیر واقعی	L	U
۱	X_{23}	0.8537	0.8245	0.9895
	X_{30}	0.9669	0.8976	1.3421
۲	X_{24}	0.8688	0.8402	0.9975
	X_{30}	0.9669	0.9176	1.2910
۳	X_{25}	0.9071	0.8739	1.2548
	X_{30}	0.9669	0.9233	1.2874
۴	X_{26}	0.9538	0.9156	1.1987
	X_{30}	0.9669	0.9221	1.2899
۵	X_{28}	0.9586	0.9174	1.2098
	X_{30}	0.9669	0.9189	1.2781
۶	X_{29}	0.9589	0.9206	1.2111
	X_{30}	0.9669	0.9287	1.2088

۵- تجزیه و تحلیل داده‌های واقعی

داده‌ها بررسی شده است. مقدار آماره کولموگروف-اسمیرنوف و p -مقدار مربوطه به ترتیب برابر ۰/۱۱۲۵ و ۰/۷۰۶۵ شده است. برای آزمون‌های مختلف انتخاب مدل در توزیع‌های مختلف. جدول ۶: آزمون‌های مختلف انتخاب مدل در توزیع‌های مختلف. برای داده‌ها به ترتیب در شکل‌های ۲ و ۳ نمایش داده شده است. برای بررسی بیشتر، چهار توزیع کاربردی دیگر که در مهندسی قابلیت اطمینان کاربرد بسیاری دارد، با توزیع کوماراسوامی مقایسه شده است. برای مقایسه از آزمون‌های کولموگروف-اسمیرنوف، کرامر-ون میس و اندرسن-دارلینگ استفاده شده است و نتایج با استفاده از پکیج "fitdistrplus" در نرم‌افزار R، در جدول ۶ آورده شده است. جداول و شکل‌های ۲ و ۳ نشان می‌دهد که توزیع کوماراسوامی را می‌توان به خوبی برای استنباط

توزیع‌ها	کولموگروف-اسمیرنوف	کرامر-ون میس	اندرسن-دارلینگ
کوماراسوامی	0.1125445	0.0789614	0.4915093
وایبل	0.1131612	0.0801996	0.4976868
بر	0.1136398	0.0813271	0.5032101
گاما	0.1416401	0.1511388	0.8233298
بتا	0.1284722	0.1184271	0.6577585

مواد شکننده، مانند سرامیک‌ها دارای ویژگی‌های مفید بسیاری مانند سختی بالا، مدول ارتجاعی، مقاوم در برابر سایش، مقاوم در برابر خوردگی، حفظ مقاومت در دماهای بالا و غیره هستند. پیشرفت علم سرامیک در چند دهه اخیر باعث شده است که استفاده از این دسته از مواد کاربردهای فراوانی در فناوری‌های پیشرفته مانند نازل موتور موشک، قطعات موتور، مواد ایمپلنت برای پزشکی، کاشی‌های مقاوم در برابر حرارت برای شاتل فضایی، مواد هسته‌ای، تجهیزات ذخیره‌سازی و انرژی‌های تجدید پذیر، فیبر نوری برای ارتباطات با سرعت بالا و سیستم‌های میکرو الکترو مکانیکی داشته باشد. شکنندگی مواد سرامیکی در علوم مهندسی حائز اهمیت فراوانی است. لو و همکاران [۲۷]، شکنندگی این مواد را با استفاده از توزیع وایبل و نرمال مدل‌سازی کردند. پناهی [۱۹]، داده‌های مقاومت مربوط به مواد بسیار شکننده مانند شیشه را مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. در این قسمت داده‌های شیشه که سرامیک بسیار شکننده است، استفاده شده است. ابتدا با استفاده از آزمون کولموگروف-اسمیرنوف، برازندگی توزیع کوماراسوامی بر

↩ حالت ۱:

$$k_1 = 9, r_1 = 11, T_{11} = 0.570, T_{12} = 0.580,$$

$$k_2 = 14, r_2 = 16, T_{21} = 0.678, T_{22} = 0.710,$$

در این حالت

$$X_{\mathfrak{S}} = \{X_{33}, X_{34}, X_{35}, X_{36}, X_{37}, X_{38}, X_{39}\}$$

↩ حالت ۲:

$$k_1 = 9, r_1 = 14, T_{11} = 0.57, T_{12} = 0.60,$$

$$k_2 = 14, r_2 = 18, T_{21} = 0.677, T_{22} = 0.710,$$

در این حالت

$$X_{\mathfrak{S}} = \{X_{34}, X_{35}, X_{36}, X_{37}, X_{38}, X_{39}\}$$

↩ حالت ۳:

$$k_1 = 9, r_1 = 15, T_{11} = 0.57, T_{12} = 0.59,$$

$$k_2 = 14, r_2 = 23, T_{21} = 0.68, T_{22} = 0.700,$$

$$X_{\mathfrak{S}} = \{X_{36}, X_{37}, X_{38}, X_{39}\}$$

↩ حالت ۴:

$$k_1 = 9, r_1 = 14, T_{11} = 0.53, T_{12} = 0.60,$$

$$k_2 = 14, r_2 = 21, T_{21} = 0.65, T_{22} = 0.710,$$

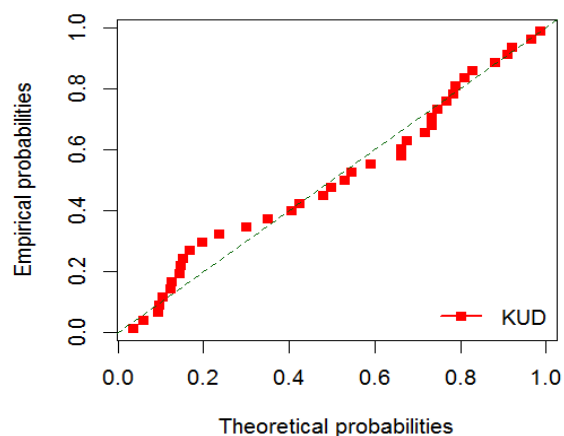
$$X_{\mathfrak{S}} = \{X_{37}, X_{38}, X_{39}\}$$

↩ حالت ۵:

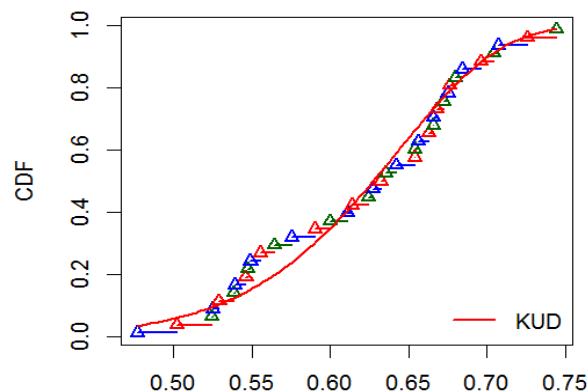
$$k_1 = 9, r_1 = 15, T_{11} = 0.53, T_{12} = 0.59,$$

$$k_2 = 14, r_2 = 23, T_{21} = 0.65, T_{22} = 0.710,$$

$$X_{\mathfrak{S}} = \{X_{38}, X_{39}\}$$



شکل ۲: نمودار احتمال-احتمال. توزیع کوماراسوامی ($KUD(\alpha, 2)$).



شکل ۳: نمودار تابع توزیع و توزیع تجربی توزیع کوماراسوامی ($KUD(\alpha, 2)$).

روی داده‌های مقاومت مربوط به مواد بسیار شکننده استفاده کرد. حال داده‌ها را در دو گروه اول و دوم قرار می‌دهیم. مقدار آماره کولموگروف-اسمیرنوف و p -مقدار مربوطه (داخل پرانتز) برای دو گروه n_1 و n_2 عبارت از 0.1528 و (0.1824) و 0.1397 و (0.737) است. p -مقدارهای بدست آمده نمایانگر این است که توزیع کوماراسوامی، مدل مطلوبی بر هر دو گروه داده‌ها است. بنابراین برای داده‌های دو گروه، ۶ طرح سانسور هیبرید واحد شده را در نظر گرفته شده است و داده‌ها را در گروه دوم پیش‌بینی شده است.

◀ حالت ۶:

- با افزایش تعداد داده سانسور شده، طول فواصل پیش‌بینی بیزی افزایش می‌یابد.
- با افزایش α ، طول فواصل پیش‌بینی بیزی X_{39} ، افزایش می‌یابد.
- با افزایش تعداد داده مشاهده شده، طول فواصل پیش‌بینی بیزی کاهش می‌یابد. همچنین مشاهده می‌شود که حالت ۶، کمترین طول فاصله پیش‌بینی بیزی را دارد.

$$k_1 = 14, r_1 = 15, T_{11} = 0.53, T_{12} = 0.55,$$

$$k_2 = 23, r_2 = 24, T_{21} = 0.65, T_{22} = 0.70,$$

$$X_{39} = \{X_{39}\}.$$

داده‌های مرتب مشاهده شده برای دو گروه n_1 و n_2 و همچنین داده‌های قابل پیش‌بینی برای ۶ حالت مختلف سانسور هیبرید واحد شده در جدول ۷ آورده شده است. همچنین نتایج فاصله پیش‌بینی 0.95 بیزی برای داده‌های آینده در جدول ۸ آورده شده است. نتایج نشان‌دهنده عملکرد خوب فواصل بیزی محاسبه شده، در پیش‌بینی مقادیر سانسور شده است.

۶- بحث و نتیجه‌گیری

آزمایش‌های طول عمر سریع به پژوهشگران این امکان را می‌دهد تا در آزمایشگاه، قطعات یا مواد را در معرض افزایش سطوح فشار و تنش عوامل محیطی قرار دهند تا اطلاعات مربوط به پارامترهای توزیع طول عمر را با سرعت بیشتری نسبت به شرایط عملیاتی نرمال به‌دست آورند. در این مقاله، فواصل پیش‌بینی بیزی برای طول عمر واحدهای توزیع کوماراسوامی با پارامترهای شکل α و β ، بر اساس مدل آزمون طول عمر سریع جزئی با فشار یکسان تحت سانسور هیبرید واحد شده، مطالعه بررسی شده است. به دلیل این‌که توابع بیزی محاسبه شده، فرم صریحی ندارند، از الگوریتم زنجیره مارکوف مونت کارلو برای ساختن فواصل پیش‌بینی، استفاده شده است. برای مقایسه و نشان دادن عملکرد الگوریتم زنجیره مارکوف مونت کارلو از مطالعات شبیه سازی و همچنین داده‌های واقعی مربوط به مقاومت مواد بسیار شکننده (شیشه)، استفاده شده است. بر اساس نتایج بدست آمده، مشاهده می‌شود که:

- تمامی فاصله‌های پیش‌بینی 0.95 بیزی، مقادیر واقعی را در برمی‌گیرد و بنابراین به خوبی مقادیر سانسور شده را پیش‌بینی می‌کند.

۷- مراجع

- [1] Nelson, W. B. (2009) *Accelerated testing: statistical models, test plans, and data analysis* (John Wiley & Sons).
- [2] Balakrishnan, N. (2009). *A synthesis of exact inferential results for exponential step-stress models and associated optimal accelerated life-tests*. *Metrika*, 69(2), 351-396.
- [3] Nassar, M. & Dey, S. (2018). *Different estimation methods for exponentiated Rayleigh distribution under constant-stress accelerated life test*. *Quality and Reliability Engineering*, 34(1), 1-13.
- [4] Alam, I. Intezar, M.A. & Ahmed, A. (2009). *Costs of Maintenance Service Policy: a New Approach on Constant Stress Partially Accelerated Life Test for Generalized Inverted Exponential Distribution*. *Reliability: Theory & Applications*, 2(62), 45-57.
- [5] Cheng, Y.-F. & Wang, F.-K. (2012). *Estimating the Burr XII parameters in constant-stress partially accelerated life tests under multiple censored data*. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 41(9), 1711-1727.
- [6] Abdel-Hamid, A.H. (2009). *Constant-partially accelerated life tests for Burr type-XII distribution with progressive type-II censoring*. *Computational Statistics and Data Analysis*, 53, 2511-2523.
- [7] Abd EL-Baset, A. A., Soliman, A. A., & Yousef, M. M. (2016). *Bayesian estimation of exponentiated Weibull distribution under partially acceleration life tests*. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 39(1), 227-244.
- [8] Lin, C.-T., Hsu, Y.-Y., Lee, S.-Y., & Balakrishnan, N. (2019). *Inference on constant stress accelerated life tests for log-location-scale*

- Kumaraswamy distributions*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 343, 719-736.
- [19] Panahi, H. (2020). *Interval estimation of Kumaraswamy parameters based on progressively type II censored sample and record values*. Miskolc Mathematical Notes, 21(1), 319-334.
- [20] Mahto, A. K., Lodhi, C., Tripathi, Y. M., & Wang, L. (2021). *Inference for partially observed competing risks model for Kumaraswamy distribution under generalized progressive hybrid censoring*. Journal of Applied Statistics, 1-29.
- [21] Ghazal, M. & Hasaballah, H. (2018). *Bayesian prediction based on unified hybrid censored data from the exponentiated Rayleigh distribution*. J Stat Appl Probab Lett, 5, 103-118.
- [22] Jaheen, Z. F. (2003). *Prediction of progressive censored data from the Gompertz model*. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 32(3), 663-676.
- [23] Hyun, N., Cheung, L. C., Pan, Q., Schiffman, M., & Katki, H. A. (2017). *Flexible risk prediction models for left or interval-censored data from electronic health records*. The annals of applied statistics, 11(2), 1063.
- [24] Panahi, H. & Asadi, S. (2019). *Point and interval evaluation of nanoparticles censored sample in the spray process*. Journal of Particle Science & Technology, 5(2), 91-99.
- [25] Basak, I. & Balakrishnan, N. (2018). *A Note on the Prediction of Censored Exponential Lifetimes in a Simple Step-stress Model with Type-II Censoring*. Calcutta Statistical Association Bulletin, 70(1), 57-73.
- [26] Ahmad, A. E.-B. A., Fawzy, M. A., & Ouda, H. (2019). *Bayesian prediction of future observations from weighted exponential distribution constant-stress model based on Type-II hybrid censored data*. Communications in Statistics-Theory and Methods, 1-15.
- [27] Lu, C., Danzer, R., & Fischer, F. D. (2002). *Fracture statistics of brittle materials: Weibull or normal distribution*. Physical Review E, 65(6), 067102.
- lifetime distributions with type-I hybrid censoring*. Journal of Statistical Computation and Simulation, 89(4), 720-749.
- [9] Abd El-Raheem, A., Almetwally, E. M., Mohamed, M., & Hafez, E. (2021). *Accelerated life tests for modified Kies exponential lifetime distribution: binomial removal, transformers turn insulation application and numerical results*. AIMS Mathematics, 6(5), 5222-5255.
- [10] Balakrishnan, N., Rasouli, A., & Sanjari Farsipour, N. (2008). *Exact likelihood inference based on an unified hybrid censored sample from the exponential distribution*. Journal of Statistical Computation and Simulation, 78(5), 475-488.
- [11] Panahi, H. (2017). *Estimation of the Burr type III distribution with application in unified hybrid censored sample of fracture toughness*. Journal of applied Statistics, 44(14), 2575-2592.
- [12] Ateya, S. F. (2017). *Estimation under inverse Weibull distribution based on Balakrishnan's unified hybrid censored scheme*. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 46(5), 3645-3666.
- [13] Ghazal, M. & Shihab, Q. (2018). *Exponentiated Pareto Distribution: A Bayes Study Utilizing Mcmc Technique Under Unified Hybrid Censoring Scheme*. Journal of the Egyptian Mathematical Society, 26(2), 376-394.
- [14] Jeon, Y. E. & Kang, S.-B. (2021). *Estimation of the Rayleigh Distribution under Unified Hybrid Censoring*. Austrian Journal of Statistics, 50(1), 59-73.
- [15] Mitnik, P. A. & Baek, S. (2013). *The Kumaraswamy distribution: median-dispersion re-parameterizations for regression modeling and simulation-based estimation*. Statistical Papers, 54(1), 177-192.
- [16] Dey, S., Mazucheli, J., & Nadarajah, S. (2018). *Kumaraswamy distribution: different methods of estimation*. Computational and Applied Mathematics, 37(2), 2094-2111.
- [17] Kızılaslan, F. & Nadar, M. (2018). *Estimation of reliability in a multicomponent stress-strength model based on a bivariate Kumaraswamy distribution*. Statistical Papers, 59(1), 307-340.
- [18] Wang, L. (2018). *Inference of progressively censored competing risks data from*

جدول ۷: داده‌های مشاهده شده و آینده برای دو گروه n_1 و n_2 در داده‌های واقعی.

داده‌های آینده (قابل پیش‌بینی)	داده‌های مرتب مشاهده شده برای دو گروه	
0.680, 0.684, 0.696, 0.704, 0.707, 0.726, 0.744.	0.477, 0.502, 0.524, 0.525, 0.529, 0.538, 0.539, 0.546, 0.547, 0.549, 0.555, 0.564, 0.611, 0.614, 0.624, 0.627, 0.632, 0.635, 0.642, 0.654, 0.654, 0.656, 0.663, 0.666, 0.666, 0.668, 0.672, 0.675, 0.676	۱
0.684, 0.696, 0.704, 0.707, 0.726, 0.744.	0.477, 0.502, 0.524, 0.525, 0.529, 0.538, 0.539, 0.546, 0.547, 0.549, 0.555, 0.564, 0.575, 0.590, 0.611, 0.614, 0.624, 0.627, 0.632, 0.635, 0.642, 0.654, 0.654, 0.656, 0.663, 0.666, 0.666, 0.668, 0.672, 0.675, 0.676, 0.680	۲
0.704, 0.707, 0.726, 0.744.	0.477, 0.502, 0.524, 0.525, 0.529, 0.538, 0.539, 0.546, 0.547, 0.549, 0.555, 0.564, 0.575, 0.590, 0.611, 0.614, 0.624, 0.627, 0.632, 0.635, 0.642, 0.654, 0.654, 0.656, 0.663, 0.666, 0.666, 0.668, 0.672, 0.675, 0.676, 0.680, 0.686, 0.696	۳
0.707, 0.726, 0.744.	0.477, 0.502, 0.524, 0.525, 0.529, 0.538, 0.539, 0.546, 0.547, 0.549, 0.555, 0.564, 0.575, 0.590, 0.611, 0.614, 0.624, 0.627, 0.632, 0.635, 0.642, 0.654, 0.654, 0.656, 0.663, 0.666, 0.666, 0.668, 0.672, 0.675, 0.676, 0.680, 0.686, 0.696, 0.704	۴
0.726, 0.744.	0.477, 0.502, 0.524, 0.525, 0.529, 0.538, 0.539, 0.546, 0.547, 0.549, 0.555, 0.564, 0.575, 0.590, 0.611, 0.614, 0.624, 0.627, 0.632, 0.635, 0.642, 0.654, 0.654, 0.656, 0.663, 0.666, 0.666, 0.668, 0.672, 0.675, 0.676, 0.680, 0.686, 0.696, 0.704, 0.707	۵
0.744.	0.477, 0.502, 0.524, 0.525, 0.529, 0.538, 0.539, 0.546, 0.547, 0.549, 0.555, 0.564, 0.575, 0.590, 0.611, 0.614, 0.624, 0.627, 0.632, 0.635, 0.642, 0.654, 0.654, 0.656, 0.663, 0.666, 0.666, 0.668, 0.672, 0.675, 0.676, 0.680, 0.686, 0.696, 0.704, 0.707, 0.726	۶

جدول ۸: فاصله پیش‌بینی ۰/۹۵ بیزی برای مجموعه داده واقعی سانسور شده

<i>Length</i>	<i>U</i>	<i>L</i>	مقادیر واقعی	مقادیر آینده	حالات
0.064	0.717	0.653	0.680	X_{33}	1
0.060	0.735	0.675	0.684	X_{34}	
0.056	0.739	0.683	0.696	X_{35}	
0.064	0.752	0.688	0.704	X_{36}	
0.065	0.759	0.694	0.707	X_{37}	
0.055	0.768	0.713	0.726	X_{38}	
0.069	0.795	0.726	0.744	X_{39}	
0.051	0.729	0.678	0.684	X_{34}	2
0.052	0.738	0.686	0.696	X_{35}	
0.059	0.751	0.692	0.704	X_{36}	
0.061	0.756	0.695	0.707	X_{37}	
0.037	0.754	0.717	0.726	X_{38}	
0.059	0.788	0.729	0.744	X_{39}	
0.048	0.744	0.696	0.704	X_{36}	3
0.057	0.755	0.698	0.707	X_{37}	
0.030	0.753	0.723	0.726	X_{38}	
0.047	0.781	0.734	0.744	X_{39}	
0.051	0.748	0.697	0.707	X_{37}	4
0.024	0.752	0.724	0.726	X_{38}	
0.031	0.770	0.739	0.744	X_{39}	
0.023	0.747	0.724	0.726	X_{38}	5
0.029	0.770	0.741	0.744	X_{39}	
0.023	0.765	0.742	0.744	X_{39}	6

