

# ساختار سازی طراحی اقتصادی نمودارهای کنترلی $\bar{X}$ در فرایندهای پویا (روان) تحت ساز و کار شکست بر ۱۲ با فواصل نمونه گیری نایکنواخت

آیتین سعادت ملی\*

(نویسنده مسئول)، دکتری تخصصی آمار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد نجف آباد، اصفهان، ایران. aitinsm@yahoo.com

محمد بامنی مقدم

استاد تمام، دانشکده علوم پایه، گروه آمار، دانشگاه علامه طباطبایی، تهران، ایران. bamenimoghadam@gmail.com

اصغر سیف

استادیار، دانشکده علوم پایه، گروه آمار، دانشگاه بوعلی سینا، همدان، ایران. erfane.seif@gmail.com

**چکیده:** فرایندهای تولیدی زیادی وجود دارند که محصولی که تولید می کنند روان یا مایع است، به صورتی که محصول های تولیدی قابل تفکیک نیستند. این گونه فرایندها را فرایند پویا می نامند. تاکنون طراحی اقتصادی روی کالاهای قطعه ای انجام شده است و همچنین برای فرایندهای پویا طراحی اقتصادی با نرخ شکست ثابت بررسی شده است. در این مقاله طراحی اقتصادی نمودارهای کنترلی  $\bar{X}$  را در شرایطی که نرخ شکست ثابت نیست، برای بازه های نمونه گیری نایکنواخت تحت ساز و کار شکست بر ۱۲ مورد بررسی قرار داده ایم. از سوی دیگر در این طراحی از مفهوم متوسط زمان تعدیل شده تا صدور هشدار (AATS) استفاده شده است.

**واژگان کلیدی:** طراحی اقتصادی - متوسط زمان تعدیل شده تا صدور هشدار - فرایندهای پویا - نمودارهای کنترلی

اغلب فرایندهای تولیدی در ابتدا در حالت تحت کنترل به سر می برند و این باعث می شود تا برای مدت طولانی محصول های قابل قبول تولید شود. با این حال در بعضی مواقع، علل اسناد پذیر به وجود می آیند و باعث می شوند تا فرایند به حالت خارج از کنترل تغییر پیدا کند. در چنین حالتی محصول خروجی فرایند در محدوده تعیین شده قرار ندارد و با مشخصه های مورد نظر انطباق نخواهد داشت. محصولات تولید شده توسط گروهی از فرایندهای تولیدی به صورت روان هستند و قابلیت جداسازی محصولات تولیدی در آنها وجود ندارد، برای تعیین تحت کنترل بودن یا نبودن آن واحد تولیدی نیاز به روش های دیگری است. زیرا با انتخاب قسمتی از آن، باعث می شود تمام آن مخلوط شود و لذا قابل تفکیک نیست.

## ۱- مقدمه

در دنیای صنعتی امروز، هدف اصلی سامانه های تولیدی، حفظ دستاوردهای مرحله های قبل از ساخت و بهبود سامانه در دامنه های مشخصی است که در زمان طرح ریزی تعیین شده و توسط نمودارهای کنترلی انجام می گیرد. در نمودارهای کنترلی، چنانچه تغییر پذیری متغیر یا متغیرهای خروجی در محدوده تعیین شده باشد و روند یا چرخه ای غیرطبیعی را نشان ندهد، بیان گر این است که فرایند تحت کنترل آماری قرار دارد، در غیر این صورت، نمودارهای کنترلی، هشدارهای لازم را دال بر خارج از کنترل بودن فرایند و عدم پایداری آن به کاربر ارائه می دهد.

Corresponding author: aitinsm@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۵/۲۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۰/۱۳

دوره ۱۱/ شماره ۲

صفحات ۱۵۴-۱۲۷

ولی تنها با این فرض که سامانه بعد از هر هشدار درست و یا غلط دوباره تنظیم می‌شود. لورنزن و ونس<sup>۸</sup> [۹] طی مقاله‌ای مدل اقتصادی متفاوتی از مدل‌های قبلی مطرح کردند که در آن به‌جای استفاده از خطای نوع اول و دوم، از متوسط طول اجرا (ARL) استفاده شد. آن‌ها فرض کردند که سازوکار شکست فرایند، تجدیدپذیر و دارای تابع توزیع زمان شکست نمایی است. مدل اقتصادی لورنزن و ونس به‌گونه‌ای طراحی شده است که در آن امکان تصمیم‌گیری در مورد ادامه یا توقف فرایند تولید به هنگام جستجوی عامل علت اسنادپذیر و تعمیر فرایند وجود دارد. بنا بر این، مدل لورنزن و ونس و مدل دانکن هر دو یک هدف یکسان یعنی کمینه کردن هزینه‌ی کل را دنبال می‌کنند.

بنرجی و رحیم<sup>۹</sup> [۱۰] یک طرح اقتصادی برای نمودار کنترلی با سازوکار شکست وایبول را تحت انتخاب فاصله‌ی نمونه‌گیری نایکنواخت مطرح کردند و نشان دادند که طرح آن‌ها از طرح اقتصادی هو [۱۱] تحت فاصله‌ی نمونه‌گیری یکنواخت، اقتصادی‌تر است.

سعادت ملی و همکاران [۱۲] یک طرح آماری-اقتصادی برای نمودار کنترلی  $\bar{X}$  با علل اسنادپذیر چندگانه با سازوکار شکست بر ۱۲ را تحت انتخاب فاصله‌ی نمونه‌گیری نایکنواخت مطرح کردند و نشان دادند که طرح آن‌ها از نظر آماری تحت فاصله‌ی نمونه‌گیری یکنواخت، مناسب‌تر است.

حیدری و همکاران [۱۳] یک طرح آماری-اقتصادی برای نمودار کنترلی  $\bar{X}$  و یک علت اسنادپذیر با سازوکار شکست بر ۱۲ مطرح کردند.

کو و کیس<sup>۱۰</sup> [۱۴] در مدل خود، بر اساس مدل هزینه دانکن [۱۵] طرح اقتصادی نمودارهای کنترلی را برای فرایندهای پویا تحت مدل شوک نمایی با در نظر گرفتن یک علت اسنادپذیر مطرح کردند. یانگ و همکاران<sup>۱۱</sup> [۱۶] بر اساس مدل کو و کیس طرح اقتصادی نمودارهای کنترلی را برای فرایندهای پویا تحت مدل شوک نمایی با در نظر گرفتن علل اسنادپذیر چندگانه مطرح کردند.

تاکنون در طراحی اقتصادی و آماری-اقتصادی برای فرایندهایی استفاده شده است که محصولات قابل تفکیک تولید می‌کنند، لذا روش نمونه‌گیری از آنها مشخص است. اما موضوع اصلی در فرایندهای روان نحوه نمونه‌گیری است. از طرفی برای فرایندهای روان، طراحی اقتصادی، تنها زمانی که ساز و کار شکست نمایی است انجام شده است. اما اغلب فرایندها دارای نرخ شکست غیر ثابت هستند که می‌تواند شرایط را به گونه دیگری رقم بزند. یکی از تغییراتی که نرخ شکست انعطاف پذیر ایجاد می‌کند، بازه‌های نمونه‌گیری نایکنواخت است. یکی از توزیع‌هایی که دارای نرخ شکست انعطاف‌پذیر می‌باشد، توزیع بر ۱۲ است. لذا در این مقاله با در نظر گرفتن این موضوع که ساز و کار شکست دارای توزیع بر ۱۲ است، طراحی اقتصادی انجام شده است.

## ۲- پیشینه پژوهش

کاربرد روش‌های آماری در مقوله‌ی مدرن کیفیت از دهه دوم قرن بیستم شروع شد. اولین بار در سال ۱۹۲۴ والتر شوهارت<sup>۱</sup> [۱] نمودار کنترلی را در آزمایشگاه‌های تلفن بل پایه‌گذاری کرد. این مقطع زمانی، به عنوان نقطه‌ی آغازین کنترل آماری فرایند شناخته می‌شود. بعدها نمودار کنترلی شوهارت توسعه یافته و به‌طور گسترده، به‌عنوان ابزار مهمی در کنترل آماری فرایند مد نظر قرار گرفت. به دنبال بیان مفهوم طراحی اقتصادی توسط گریشیک و روبین<sup>۲</sup> [۲]، دانکن<sup>۳</sup> [۳] از اولین پژوهش‌گرانی بود که از طرح‌های اقتصادی برای نمودارهای کنترلی استفاده کرد. دانکن، نمودار کنترلی را بر اساس اصول اقتصادی و با این فرض که تنها یک علت اسنادپذیر رخ می‌دهد و فرایند در آن حالت باقی می‌ماند تا زمانی که علت اسنادپذیر کشف شود، بسط داد. مقاله‌ی او اولین مقاله‌ای بود که یک مدل اقتصادی کامل برای یک نمودار کنترلی و روش بهینه‌سازی رسمی نیز جهت تعیین پارامترهای نمودار کنترلی ارائه داد. مطالعه بر روی مدل‌های مارکوفی به عنوان سازوکار شکست فرایند توسط افرادی مانند گیرا<sup>۴</sup> [۴] و مونتگومری<sup>۵</sup> [۵] به‌طور گسترده انجام گرفته است. بیکر<sup>۶</sup> [۶]، هیکس و همکاران<sup>۷</sup> [۷] و مونتگومری و هیکس [۸] به طراحی نمودار کنترلی تحت چند مدل غیر پواسونی پرداختند

<sup>1</sup> Shewhart

<sup>2</sup> Girshick. and Rubin

<sup>3</sup> Duncan

<sup>4</sup> Gibra

<sup>5</sup> Montgomery

<sup>6</sup> Baker

<sup>7</sup> Heikes

<sup>8</sup> Lorenzen, and Vance

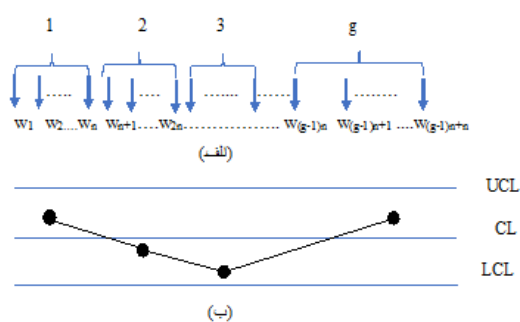
<sup>9</sup> Banerjee. and Rahim.

<sup>10</sup> Koo and Case

<sup>11</sup> Yang

## ۳- بیان مساله

نقطه‌ی محاسبه شده بر روی نمودار رسم می‌شود. می‌توان گفت زمان لازم برای محاسبه‌ی نقطه‌ی اول بر روی نمودار  $W_n$  است. برای زیرگروه‌های بعدی نیز به همین شکل نمونه‌گیری می‌شود و نقاط بر روی نمودار رسم می‌شوند. به عبارت دیگر، زمان لازم برای تکمیل  $g$ -امین زیرگروه،  $W_{ng}$  است. در این سامانه‌ها، حدود کنترلی به صورت  $(\bar{x} \pm L\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$  که در آن  $\bar{x}$  میانگین فرایند در حالت تحت کنترل و  $\sigma$  انحراف استاندارد واقعی فرایند است. در این حالت نیز مشخصه‌ی کیفیت نرمال با میانگین  $\mu_0$  و انحراف استاندارد  $\sigma$  است. شکل ۱ نمودار نمونه‌گیری از یک فرایند پویا و نمودار  $\bar{x}$  متناظر آن را نشان می‌دهد.



شکل ۱: نمونه‌گیری از یک فرایند پویا و تعیین نقاط بر روی نمودار

## ۴- روش پژوهش:

برای سامانه‌های پویا نیز می‌توان از طراحی‌های اقتصادی و آماری-اقتصادی با مدل‌های هزینه متعارف استفاده نمود. زمانی که طراحی اقتصادی یا آماری-اقتصادی را برای چنین سامانه‌هایی استفاده می‌کنیم، هدف محاسبه‌ی بهینه پارامترهای تنظیمی طراحی و تابع هزینه است. انتخاب یک توزیع مناسب به‌عنوان توزیع سازوکار شکست فرایند در طراحی نمودار کنترلی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، به طوری که این موضوع در سال‌های اخیر توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است. در ابتدا اغلب پژوهش‌گران از توزیع نمایی به‌عنوان توزیع سازوکار شکست استفاده می‌کردند. این توزیع دارای نرخ شکست ثابت بود. اما بررسی دقیق‌تر فرایندها نشان داد که همیشه نرخ شکست ثابت نیست، لذا توزیع‌هایی که دارای نرخ شکست صعودی نیز باشند مورد توجه قرار گرفتند. در این خصوص می‌توان به توزیع‌های طول عمر مانند وایبول، گاما و نمایی تعمیم‌یافته اشاره کرد. این توزیع‌ها به دلیل انعطاف‌پذیری بالا در

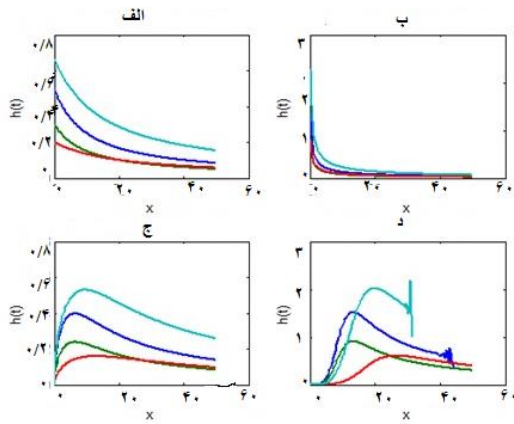
فرایندهای تولیدی زیادی وجود دارند که محصولی که تولید می‌کنند روان یا مایع است، به صورتی که محصول‌های تولیدی قابل تفکیک نیستند. این‌گونه فرایندها را فرایند پویا می‌نامند. چنین سامانه‌هایی، در فرایندهای شیمیایی، تولید سیمان، استخراج معادن و ... دیده می‌شود. در این فرایندها، محصول‌ها به صورت قطعه‌های مشخص و قابل تفکیک دیده نمی‌شود. پس نمی‌توان یک نمونه‌ی تصادفی  $n$  تایی همزمان از سامانه استخراج نمود، زیرا باعث وابستگی نمونه‌ها به یکدیگر می‌شود. در سال ۱۹۹۰، کو و کیس با استفاده از مدل اقتصادی دانکن برای محاسبه تابع هزینه بهینه، نمودار کنترلی  $\bar{x}$  را برای فرایندهای پویا پایه‌ریزی کردند چن و یانگ [۱۶] از مدل اقتصادی کو و کیس استفاده نمودند و نمودار کنترلی میانگین متحرک (MA) را برای فرایندهای پویا، با فرض این که توزیع سازوکار شکست وایبول است، به دست آوردند یانگ و همکاران (۲۰۱۰) مدل اقتصادی کو و کیس را برای حالتی که چند علل اسنادپذیر وجود داشته باشد، بسط دادند. یانگ و همکارانش برای مدل اقتصادی که مورد بررسی قرار داده بودند، فرض کردند که توزیع سازوکار شکست نمایی است. یو و وو [۱۷] و همچنین یانگ و همکاران، مدل اقتصادی کو و کیس را برای بازه‌های نمونه‌گیری متغیر (VSI) به‌کار بردند.

بروکس و کیس [۱۸] نشان دادند که اگر از چنین سامانه‌هایی نمونه‌گیری همزمان انجام شود، دامنه‌ی تغییرات نمونه‌های گرفته شده نزدیک به صفر است. لذا در سامانه‌های پویا از روش دیگر نمونه‌گیری استفاده می‌شود. در این سامانه‌ها هر  $n$  عضو نمونه را یک زیرگروه در نظر گرفته می‌شود. برای نمونه‌گیری از فرایند، نمونه‌های تکی از فرایند گرفته می‌شود تا زیرگروه کامل شود. اولین نمونه در زمان  $w_1 = h_1$  و دومین نمونه در زمان  $w_2 = h_1 + h_2$  و ... و  $n$  امین نمونه در زمان  $w_n = h_1 + h_2 + \dots + h_n$  از فرایند گرفته می‌شود، به طوری که در زمان  $w_n$  اولین زیرگروه تکمیل می‌شود. سپس میانگین و انحراف معیار برای این زیرگروه محاسبه می‌شود. در این مرحله، برای زیرگروه اول میانگین محاسبه می‌شود که عبارت است از

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

<sup>12</sup>Chen. and Yang

<sup>13</sup>Yu and Wu



شکل ۲: الف) نرخ شکست نزولی، ب) وانی شکل، ج) و د) نرخ شکست صعودی و سپس نزولی

برای طراحی مدل، از علائم زیر مانند بنرجی و رحیم (۱۹۸۷) استفاده می‌کنیم:  
 $n$ : اندازه‌ی نمونه.

$h_j$ : طول ژامین بازه‌ی نمونه‌گیری ( $j = 1, 2, \dots$ ) و همچنین

$$h_0 = 0$$

$L$ : ضریب حدود کنترلی

$w_j$ : زمان لازم تا رسیدن به ژامین نمونه‌ی انتخابی است.

$j = 1, 2, \dots$  که از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود

$$w_j = \sum_{i=1}^j h_i$$

پذیره‌های مدل عبارتست از:

(۱) فرایند از حالت تحت کنترل شروع می‌شود و زمانی که

علت اسنادپذیری رخ می‌دهد، فرایند در حالت خارج از کنترل

قرار می‌گیرد. در این صورت میانگین فرایند به  $\mu = \mu_0 +$

$\delta\sigma$  تغییر پیدا می‌کند، که در آن  $\mu_0$  میانگین فرایند در حالت

تحت کنترل،  $\sigma$  انحراف استاندارد فرایند و  $\delta$  پارامتر انتقال است.

در این حالت برآورد  $\mu_0$  میانگین میانگین‌ها ( $\bar{x}$ ) و انحراف

استاندارد آن  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  است.

(۲) زمان تحت کنترل بودن فرایند از توزیع بر ۱۲ پیروی

می‌کند.

(۳) بازه‌ی نمونه‌گیری را ناپکناخت فرض می‌کنیم لذا

برای این‌که سطح زیر منحنی در بازه‌ها برابر باشد رابطه ۴ را

داریم:

سامانه‌های تولیدی از کاربرد بالایی برخوردار هستند. اخیراً مجموعه‌ای از توزیع‌های جدیدی به‌عنوان توزیع سازوکار شکست استفاده می‌شوند، که به‌عنوان توزیع پر شناخته می‌شوند. در این مقاله از توزیع بر ۱۲ استفاده می‌شود. این توزیع قابلیت انعطاف‌پذیری نرخ شکست را دارد که به‌صورت نزولی، صعودی یا ثابت است. تابع نرخ شکست، یک آماره مهم در کنترل کیفیت است. اگر توزیع سازوکار شکست فرایند، توزیع نمایی باشد، نرخ شکست ثابت است. اگر توزیع سازوکار شکست فرایند وایبول باشد، آن‌گاه تابع نرخ شکست آن تابعی از پارامتر توزیع است که می‌تواند صعودی یا نزولی باشد. بسته به این‌که پارامتر شکل توزیع وایبول بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از یک باشد، تابع نرخ شکست آن، افزایشی یا کاهش‌ی است.

توزیع بر در حالت کلی دارای تابع نرخ شکست انعطاف‌پذیر است که می‌تواند در یک فرایند حالت‌های صعودی، نزولی، ثابت، دارای یک مد یا وانی شکل را داشته باشد و همچنین می‌تواند برای تمام توزیع‌های سازوکارهای شکست مورد استفاده قرار گیرد.

در این مقاله، فرض کرده ایم که یک علت اسنادپذیر وجود دارد، که زمان رخ دادن آن از توزیع بر ۱۲ پیروی می‌کند که تابع چگالی احتمال و تابع توزیع و تابع نرخ شکست آن را به صورت زیر است.

$$F(x) = 1 - \left(1 + \left(\frac{x}{s}\right)^c\right)^{-k} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{kc\left(\frac{x}{s}\right)^{c-1}}{s\left(1 + \left(\frac{x}{s}\right)^c\right)^{k+1}} \quad (2)$$

$$r(x) = \frac{kc\left(\frac{x}{s}\right)^{c-1}}{s\left(1 + \left(\frac{x}{s}\right)^c\right)} \quad (3)$$

در شکل ۲، انواع مختلف تابع‌های نرخ شکست توزیع بر ۱۲ به‌صورت جداگانه نشان داده شده است.

کنترل قرار بگیرد، باید روی تمام زیرگروه‌ها جمع بسته شود. در این صورت داریم:

$$p_j = \sum_{g=0}^{\infty} P(w_{(ng+j)} < T < w_{(ng+j+1)}) \quad (9)$$

$$= \frac{q^j(1-q)}{1-q^n}$$

فرض می‌کنیم  $\tau$  متوسط دوره‌ی تحت کنترل بودن فرایند در  $1-g$  امین زیرگروه است، با توجه به اینکه در پایان  $g$  امین زیرگروه فرایند تحت کنترل بوده است لذا تا زمان  $w_{ng}$  فرایند تحت کنترل است و حالت خارج از کنترل بین  $w_{ng}$  و  $w_{n(g+1)}$  رخ می‌دهد. پس داریم:

$$\tau = \sum_{g=0}^{\infty} \int_{w_{ng}}^{w_{n(g+1)}} (t - w_{ng}) f(t) dt \quad (10)$$

$$= sk \frac{\Gamma(k - \frac{1}{c}) \Gamma(1 + \frac{1}{c})}{\Gamma(k + 1)} - s(1 - q^n) A(q)$$

که در آن

$$A(q) = \sum_{g=1}^{\infty} x^{ng} \left( q^{\frac{-ng}{k}} - 1 \right)^{\frac{1}{c}} \quad |x| < 1 \quad (11)$$

#### ۴-۱- متوسط زمان و هزینه چرخه

در این بخش فرض می‌کنیم که فرایند از حالت تحت کنترل شروع می‌شود و با وقوع علت اسنادپذیر فرایند به حالت خارج از کنترل تغییر حالت می‌دهد و بعد از این که علت اسنادپذیر مشخص و تعمیر انجام شد، فرایند دوباره به حالت تحت کنترل بازمی‌گردد. سپس چرخه جدید که مستقل از چرخه قبلی است آغاز می‌شود. این چرخه را، چرخه‌ی کیفیت می‌نامند. برای محاسبه متوسط هزینه چرخه کیفیت از فرایند تجدید پاداش استفاده می‌کنیم. فرایند تجدید پاداش باعث می‌شود که بتوان متوسط هزینه‌ی تولید در هر واحد زمان را به صورت نسبت هزینه‌ی کل مورد انتظار در طول یک چرخه به متوسط زمان مورد انتظار یک چرخه در نظر گرفت

$$ECT = \frac{E(C)}{E(T)} \quad (12)$$

احتمال خطای نوع اول و دوم، که به ترتیب  $\alpha$  و  $\beta$  می‌نامیم از رابطه‌های زیر محاسبه می‌شوند:

$$\int_{w_j}^{w_{j+1}} r_i(t) dt = \int_0^{h_1} r_i(t) dt \quad (4)$$

$$j = 1, 2, \dots$$

که معادل است با

$$1 - F_i(w_j) = (1 - F_i(w_1))^j \quad (5)$$

$$j = 1, 2, \dots$$

با استفاده از این دو رابطه و فرض ثابت بودن نرخ خطر بر روی هر بازه‌ی نمونه‌گیری و استفاده از توزیع بر  $W_i$ ،  $12$ ، به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$w_j = s \left( \left( 1 + \left( h_1/s \right)^c \right)^j - 1 \right)^{1/c} \quad (6)$$

$$j = 1, 2, \dots$$

زمان‌های اخذ نمونه‌گیری و رسم نمودار ناچیز فرض می‌شود.  $(4)$

تولید هنگام بازرسی و تعمیر فرایند متوقف می‌شود.  $(5)$

طول بازه‌های نمونه‌گیری  $h_j$  به گونه‌ای تعیین شده که احتمال خارج شدن فرایند از حالت تحت کنترل زمانی که ابتدای بازه تحت کنترل بوده، برای تمام بازه‌ها مقدار ثابتی است. فرایند می‌تواند در هر زمانی در بین هر بازه‌ای از حالت تحت کنترل خارج شود. احتمال این که فرایند در  $j$  امین بازه‌ی نمونه‌گیری از حالت تحت کنترل خارج شود، عبارت است از:

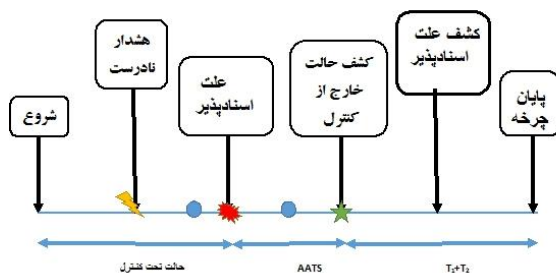
$$P(\text{انتقال بین } w_j \text{ و } w_{j+1} \text{ رخ دهد}) = (1 - q)q^j \quad (7)$$

$$j = 1, 2, \dots$$

که در آن  $q$  عبارت است از:

$$q = \left( 1 + \left( h_1/s \right)^c \right)^{-k} \quad (8)$$

$p_j$  را احتمال قرار گرفتن فرایند در حالت خارج از کنترل بین  $j$ -امین و  $(j+1)$ -امین بازه‌ی نمونه‌گیری در  $g$  امین زیرگروه، تعریف می‌کنیم. با توجه به این که در هر زیرگروه  $n$  نمونه داریم، در پایان زیرگروه اول  $n$  نمونه، در پایان زیر گروه دوم  $2n$  نمونه و در پایان زیرگروه  $g$  ام،  $ng$  نمونه از فرایند اخذ شده است. در هر زیرگروه نیز  $n$  بازه‌ی نمونه‌گیری وجود دارد. لذا اگر فرایند بین  $j$  امین و  $(j+1)$  امین بازه‌ی نمونه‌گیری در حالت خارج از



شکل ۲- چرخه کیفیت

با استفاده از شکل ۲ حالت‌های زیر را داریم:

- متوسط زمان تحت کنترل بودن فرایند، همان میانگین توزیع بر ۱۲ است

$$\mu_t = sk \frac{\Gamma(k - 1/c) \Gamma(1 + 1/c)}{\Gamma(k + 1)} \quad (17)$$

- احتمال این که در اولین زیرگروه گرفته شده، تغییر میانگین فرایند کشف شود را با  $p'$  نشان می‌دهیم که عبارت است از احتمال این که فرایند بین  $j$ -امین و  $(j+1)$ -امین بازه نمونه‌گیری در  $g$ -امین زیرگروه در حالت خارج از کنترل قرار بگیرد و در همین زیرگروه هشدار داده شود. این احتمال از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$p' = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{q^j (1-q)}{(1-q^n)} \gamma \quad (18)$$

- احتمال این که در  $r$ -امین زیرگروه گرفته شده، تغییر میانگین فرایند کشف شود عبارت است از:

$$\begin{matrix} p' & r = 1 \\ (1-p')(1-\beta)\beta^{r-2} & r \geq 2 \end{matrix} \quad (19)$$

- متوسط زمان بین زمانی که در زیر گروهی فرایند در حالت خارج از کنترل قرار می‌گیرد تا زمانی که زیرگروه کامل شده یا علت اسنادپذیر کشف شود با  $A$  نشان می‌دهیم. همان‌گونه که در بالا بیان شد، در پایان  $g$ -امین زیرگروه فرایند تحت کنترل بوده است لذا تا زمان  $W_{ng}$  فرایند تحت کنترل است و حالت خارج از کنترل بین زمان  $W_{ng}$  و  $W_{n(g+1)}$  رخ می‌دهد و با توجه به این که برای تمام زیرگروه‌ها برقرار است، پس یا در همان زیرگروهی که انحراف رخ داده است هشدار داده می‌شود (اولین مجموع) یا در زیرگروه‌های بعدی هشدار داده می‌شود (مجموع دوم) پس روی  $g$  جمع بسته می‌شود.

$$\alpha = P(\text{فرایند تحت کنترل باشد} \mid \text{خروج از حدود کنترلی}) \quad (13)$$

$$= 2 \Phi(-L)$$

و

$$\beta = P(\text{فرایند خارج از کنترل باشد} \mid \text{خارج نشدن از حدود کنترلی}) \quad (14)$$

$$= \Phi(L - \delta\sqrt{n}) - \Phi(-L - \delta\sqrt{n})$$

وقتی علت اسنادپذیر در  $g$ -امین زیرگروه و  $j$ -امین بازه نمونه‌گیری رخ می‌دهد، آنگاه در زیرگروه  $g$ -ام،  $j$  تا از نمونه‌ها دارای میانگین  $\mu_0$  و  $j$ - تا دارای میانگین  $\mu_0 + \delta\sigma$  است. همچنین میانگین نمونه در این زیرگروه می‌شود

$$\mu = \mu_0 + \frac{(n-j)\delta\sigma}{n} \quad (15)$$

احتمال این که حالت خارج از کنترل بودن دقیقاً در همین زیرگروه کشف شود، عبارت است از

$$\gamma = 1 - \Phi\left(L - \frac{(n-j)\delta}{\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(-L - \frac{(n-j)\delta}{\sqrt{n}}\right) \quad (16)$$

برای به دست آوردن متوسط هزینه و متوسط زمان چرخه، ابتدا پارامترهای هزینه و زمان را همانند دانکن به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

### پارامترهای زمان:

$T_0$ : متوسط زمان برای جستجوی یک هشدار اشتباه

$T_1$ : متوسط زمان برای جستجوی یک هشدار درست

$T_2$ : متوسط زمان برای تعمیر علت اسنادپذیر

### پارامترهای هزینه:

$a$ : هزینه ثابت نمونه‌گیری

$b$ : هزینه هر واحد نمونه‌گیری

$Y$ : هزینه هر هشدار اشتباه

$W$ : هزینه مکان‌یابی علت اسنادپذیر، تشخیص و تعمیر این انحراف

$C_0$ : هزینه چرخه‌ی کیفیت در هر ساعتی که تولید تحت کنترل است

$C_1$ : هزینه چرخه‌ی کیفیت در هر ساعتی که تولیدهای خارج از کنترل توسط علت اسنادپذیر ایجاد می‌شود.

برای محاسبه  $E(T)$  و  $E(C)$  شکل زیر می‌تواند مفید باشد

$$C_0 sk \frac{\Gamma(k - 1/c)\Gamma(1 + 1/c)}{\Gamma(k + 1)} \quad (24)$$

✓ متوسط هزینه در حالت خارج از کنترل بودن فرایند عبارت است از

$$C_1 AATS + W \quad (25)$$

✓ متوسط هزینه‌ی نمونه‌گیری شامل هزینه‌ی نمونه‌گیری در حالت تحت کنترل و در حالت خارج از کنترل که عبارت است از

$$(a + bn)(r_1 + r_2) \quad (26)$$

که در آن  $r_2$  متوسط تعداد نمونه‌ی گرفته شده در حالتی که فرایند خارج از کنترل است و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$r_2 = 1 + \frac{1 - p'}{1 - \beta} \quad (27)$$

✓ متوسط زمان بررسی هشدار نادرست می‌شود  $Y\alpha r_1$ . در این صورت، متوسط هزینه‌ی چرخه کیفیت برابر است با:

$$E(C) = C_0 sk \frac{\Gamma(k - 1/c)\Gamma(1 + 1/c)}{\Gamma(k + 1)} + C_1 AATS + W + (a + bn)(r_1 + r_2) + Y\alpha r_1 \quad (28)$$

لذا با استفاده از فرمول (۱۲) و فرایند تجدید پاداش بیان شده در این فرمول، تابع هزینه به صورت فرمول (۲۹) است.

در این مقاله برای یافتن جواب بهینه تابع هزینه از روش‌های بهینه‌سازی استفاده شده است. هدف از بهینه‌سازی یافتن بهترین جواب قابل قبول، با توجه به محدودیت‌ها و نیازهای مسأله است. روش بهینه‌سازی مورد استفاده در این مقاله روش رقابت استعماری است. این روش با استفاده از مدل‌سازی ریاضی، تابع هزینه پیچیده در این مقاله را به بهترین شکل بهینه می‌کند.

## ۵ - مثال:

در این قسمت می‌خواهیم با یک مثال مقادیر بهینه‌ی پارامترهای تنظیمی طراحی را با کمینه کردن تابع هزینه به دست آوریم.

$$\begin{aligned} A &= \sum_{g=0}^{\infty} \left( \int_{w_{ng}}^{w_{n(g+1)}} f(t) dt \right) \\ &\quad \times p'(w_{n(g+1)} - w_{ng}) \\ &+ \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{r=2}^{\infty} \left( \int_{w_{ng}}^{w_{n(g+r)}} f(t) dt \right) \\ &\quad \times (1 - p')(1 - \beta) \beta^{r-2} \\ &\quad \times (w_{n(g+r)} - w_{ng}) \\ &= (sp' \frac{(1 - q^n)^2}{q^n} A(q) - \frac{\beta}{q^n} A(q) \\ &+ \frac{s(1 - q^n)(1 - p')(1 - \beta)}{\beta(\beta - q^n)} A(\beta^{1/n})) \\ &\quad - s(1 - p')(1 - q^n)A(q) \end{aligned} \quad (20)$$

• متوسط زمان از زمانی که فرایند خارج از کنترل قرار می‌گیرد تا زمانی که علت اسنادپذیر کشف شود را متوسط زمان تعدیل شده تا صدور هشدار می‌نامیم که عبارت است از:

$$\begin{aligned} AATS &= A - \tau \\ &= \frac{s(1 - q^n)}{\beta(\beta - q^n)} (p'(1 - q^n) \\ &\quad - (1 - \beta)A(q) \\ &\quad + \frac{s(1 - q^n)(1 - p')(1 - \beta)}{\beta(\beta - q^n)} \\ &\quad \times A(\beta^{1/n}) - \mu_t \end{aligned} \quad (21)$$

• متوسط تعداد نمونه‌ی گرفته شده وقتی که فرایند در حالت تحت کنترل قرار دارد

$$r_1 = \frac{q^n}{1 - q^n} \quad (22)$$

• متوسط تعداد نمونه‌ی گرفته شده برای بررسی هشدار نادرست می‌شود:  $\alpha r_1$ . از این رو متوسط زمان بررسی هشدار نادرست می‌شود:  $T_0 \alpha r_1$  لذا متوسط طول چرخه عبارت است از:

$$E(T) = sk \frac{\Gamma(k - 1/c)\Gamma(1 + 1/c)}{\Gamma(k + 1)} + AATS + T_0 \alpha r_1 + T_1 + T_2 \quad (23)$$

برای محاسبه‌ی متوسط هزینه‌ی چرخه در هر ساعت ( $E(C)$ ) داریم:

✓ متوسط هزینه در حالت تحت کنترل بودن فرایند :

یکی از مهم‌ترین نکات در بهینه‌سازی، بررسی تأثیر پارامترهای ورودی بر روی مقادیر بهینه است. برای این منظور از روش تاگوچی استفاده می‌کنیم. با استفاده از روش تاگوچی، ۱۸ آزمون مختلف را مورد بررسی قرار داده‌ایم. در جدول ۳، حدود پارامترها و در جدول ۴، مقادیر بهینه پارامترهای تنظیمی طراحی و تابع هزینه نشان داده شده است. در این جدول مقادیر بهینه پارامتر هزینه برای بازه نمونه‌گیری یکنواخت و نایکنواخت مورد بررسی قرار گرفته است. همان‌گونه که مشخص است، زمانی که از بازه نمونه‌گیری یکنواخت استفاده می‌شود، هزینه سیستم به شدت زیاد می‌شود و حدود کنترلی نیز عریض‌تر می‌شود. با پهن‌تر شدن حدود کنترلی تشخیص صحیح و به موقع حالت خارج از کنترل سخت‌تر می‌شود، که این مورد اصلاً مناسب نیست. از طرفی با توجه به اینکه بازه‌های نمونه‌گیری کوچک‌تر شده است لذا هزینه نمونه‌گیری به شدت زیاد می‌شود. لذا با توجه به تابع نرخ شکست انعطاف‌پذیر و هزینه کمتر، بازه نمونه‌گیری نایکنواخت برای ساز و کار شکست بر ۱۲ ترجیح داده می‌شود.

همان‌گونه که در بالا بیان شد، پارامترهای مدل شامل پارامترهای هزینه، پارامترهای زمان، پارامتر انتقال ( $\delta$ ) و پارامترهای توزیع بر ۱۲، ( $S, C, K$ ) است. در یک فرایند شیمیایی تولید سم کشاورزی، مواد باهم ترکیب می‌شوند و سم حاصل، یک مایع روان است. اگر قسمتی از سم دچار انحراف از مقادیر تعیین شده باشد، کل پاتیل تولیدی، نامناسب است. برای تعیین تابع هزینه ابتدا مقادیر زمان و هزینه‌های تولیدی در جدول ۱ بیان شده است:

جدول ۱: پارامترهای هزینه و زمان

|          |                |              |
|----------|----------------|--------------|
| $W=1100$ | $C_0 = 50$     | $T_0 = 0.75$ |
| $Y=1100$ | $C_1 = 400$    | $T_1 = 1.25$ |
| $a=7$    | $\delta = 0.5$ | $T_2 = 0.75$ |
| $b=10$   | $k=15$         |              |

$$ECT = \frac{E(C)}{E(T)}$$

$$= \frac{C_0 sk \frac{\Gamma(k-1/c)\Gamma(1+1/c)}{\Gamma(k+1)} + C_1 AATS + W + (a+bn)(r_1+r_2) + Y\alpha_1}{sk \frac{\Gamma(k-1/c)\Gamma(1+1/c)}{\Gamma(k+1)} + AATS + T_0\alpha_1 + T_1 + T_2}$$

## ۶- یافته‌ها و نتایج

با توجه به مقادیر جدول ۱، در جدول ۲، مقادیر بهینه پارامترهای تنظیمی طراحی و تابع هزینه تحت متغیر بودن C برای آزمون‌های مختلف به دست آمده است.



جدول ۲: مقادیر بهینه تحت متغیر بودن C

| تکرار | c    | s     | n  | $h_1$ | L    | ECT     |
|-------|------|-------|----|-------|------|---------|
| ۱     | ۶/۰۰ | ۹۰/۰۰ | ۴  | ۳۳/۶۵ | ۱/۴۷ | ۱۱۹/۸   |
| ۲     | ۶/۰۰ | ۷۶/۷۸ | ۴  | ۳۰/۰۸ | ۱/۳۳ | ۱۲۵/۰۶۲ |
| ۳     | ۶/۰۰ | ۷۱/۲۵ | ۸  | ۲۵/۳۲ | ۱/۴۳ | ۱۲۷/۲۶  |
| ۴     | ۶/۲۵ | ۸۳/۲۸ | ۸  | ۲۹/۳۸ | ۱/۵۷ | ۱۱۹/۹۱  |
| ۵     | ۶/۵۴ | ۷۰/۰۰ | ۴  | ۲۷/۴۴ | ۱/۷۵ | ۱۲۶/۰۸  |
| ۶     | ۷/۱۱ | ۸۱/۵۰ | ۱۵ | ۳۲/۰۶ | ۱/۴۲ | ۱۱۶/۶۹  |
| ۷     | ۷/۲۵ | ۷۰/۰۰ | ۱۳ | ۲۸/۷۴ | ۱/۴۳ | ۱۲۰/۹۳  |
| ۸     | ۷/۵۰ | ۷۵/۴۰ | ۱۶ | ۳۱/۰۹ | ۱/۴۸ | ۱۱۷/۷۸  |
| ۹     | ۸/۰۰ | ۷۰/۰۰ | ۱۴ | ۳۱/۲۰ | ۱/۴۳ | ۱۱۷/۵۴  |
| ۱۰    | ۸/۰۰ | ۸۱/۸۵ | ۱۳ | ۳۶/۱۳ | ۱/۴۵ | ۱۱۱/۹۲  |
| ۱۱    | ۸/۰۰ | ۹۰/۰۰ | ۱۴ | ۳۹/۱۴ | ۱/۴۷ | ۱۰۹/۱۰  |

جدول ۳: حدود پارامترهای ثابت

| پارامتر        | حد پایین | حد بالا |
|----------------|----------|---------|
| c              | ۴        | ۶       |
| s              | ۷۰       | ۹۰      |
| a              | ۷        | ۱۱      |
| b              | ۱۰       | ۱۵      |
| C <sub>۰</sub> | ۳۰       | ۷۰      |
| γ              | ۱۰۰۰     | ۱۵۰۰    |
| T <sub>۰</sub> | ۰/۷۵     | ۱/۲۵    |
| T <sub>۱</sub> | ۰/۷۵     | ۱/۲۵    |

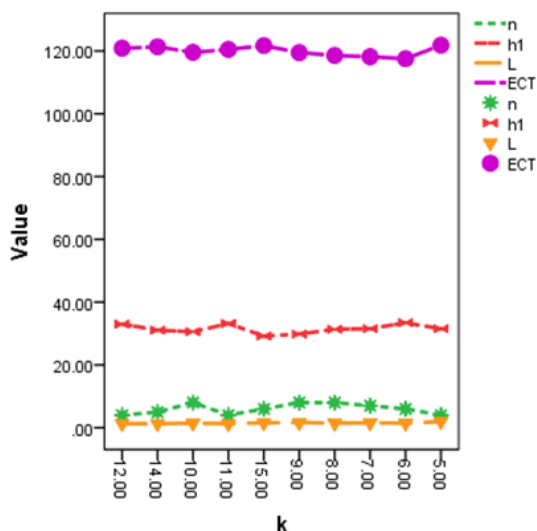
جدول ۴: مقادیر بهینه در طراحی اقتصادی با فاصله نمونه‌گیری یکنواخت و نایکنواخت

| فاصله نمونه‌گیری یکنواخت |    |    |    |      |                |                |                |   |                |      |        |   |      | فاصله نمونه‌گیری نایکنواخت |        |  |  |
|--------------------------|----|----|----|------|----------------|----------------|----------------|---|----------------|------|--------|---|------|----------------------------|--------|--|--|
| C                        | s  | a  | b  | Y    | C <sub>0</sub> | T <sub>0</sub> | T <sub>1</sub> | n | h <sub>1</sub> | L    | ECT    | n | h    | L                          | ECT    |  |  |
| ۶                        | ۹۰ | ۱۱ | ۱۰ | ۱۵۰۰ | ۲۰             | ۱              | ۱/۲۵           | ۴ | ۳۶/۰۷          | ۱/۵۲ | ۱۰۵/۲۲ | ۳ | ۱/۵۶ | ۴/۳۸                       | ۴۷۷/۲۳ |  |  |
| ۶                        | ۹۰ | ۷  | ۱۲ | ۱۲۰۰ | ۵۰             | ۱/۲۵           | ۰/۷۵           | ۶ | ۳۱/۴۲          | ۱/۸۱ | ۱۲۱/۶  | ۳ | ۱/۶۲ | ۴/۵۳                       | ۴۸۱/۸۴ |  |  |
| ۶                        | ۹۰ | ۹  | ۱۵ | ۱۰۰۰ | ۷۰             | ۰/۷۵           | ۱              | ۷ | ۳۴/۵۶          | ۱/۲۹ | ۱۳۷/۱۱ | ۳ | ۱/۴۵ | ۴/۴۷                       | ۵۱۸/۴۷ |  |  |
| ۶                        | ۷۰ | ۷  | ۱۰ | ۱۰۰۰ | ۲۰             | ۰/۷۵           | ۰/۷۵           | ۷ | ۲۵/۶۲          | ۱/۶۹ | ۱۰۹/۰۸ | ۴ | ۱/۱۲ | ۴/۵۷                       | ۴۸۱/۱۱ |  |  |
| ۶                        | ۷۰ | ۱۱ | ۱۵ | ۱۲۰۰ | ۷۰             | ۱/۲۵           | ۱/۲۵           | ۵ | ۲۹/۵۶          | ۱/۴۳ | ۱۷۴/۸۳ | ۳ | ۱/۳۱ | ۴/۵۴                       | ۵۲۹/۲۲ |  |  |
| ۶                        | ۹۰ | ۷  | ۱۵ | ۱۵۰۰ | ۵۰             | ۰/۷۵           | ۱/۲۵           | ۶ | ۳۴/۸           | ۱/۴۸ | ۱۲۴/۳۳ | ۳ | ۱/۵۵ | ۴/۶۶                       | ۴۷۹/۲۸ |  |  |
| ۶                        | ۹۰ | ۱۱ | ۱۲ | ۱۰۰۰ | ۲۰             | ۱/۲۵           | ۱              | ۸ | ۳۳/۷۱          | ۱/۲۷ | ۹۹/۸   | ۴ | ۱/۸۳ | ۴/۵۲                       | ۴۵۱/۵۹ |  |  |
| ۶                        | ۹۰ | ۹  | ۰  | ۱۲۰۰ | ۷۰             | ۱              | ۰/۷۵           | ۶ | ۳۴/۳۲          | ۱/۶۷ | ۱۳۶/۲۲ | ۴ | ۲/۱۱ | ۴/۷۱                       | ۵۱۰/۲۷ |  |  |
| ۶                        | ۷۰ | ۹  | ۱۲ | ۱۵۰۰ | ۵۰             | ۱              | ۱              | ۶ | ۲۷/۰۲          | ۱/۴۸ | ۱۳۲/۷۳ | ۴ | ۱/۲۵ | ۴/۶۳                       | ۵۰۷/۶۳ |  |  |
| ۴                        | ۹۰ | ۷  | ۱۲ | ۱۰۰۰ | ۷۰             | ۱              | ۱/۲۵           | ۴ | ۲۳/۲۷          | ۱/۲۲ | ۱۵۰/۸۹ | ۲ | ۱/۳۱ | ۴/۱۱                       | ۵۱۸/۹۶ |  |  |
| ۴                        | ۷۰ | ۷  | ۱۵ | ۱۲۰۰ | ۲۰             | ۱              | ۱              | ۵ | ۱۹/۴۳          | ۱/۰۶ | ۱۳۴/۹  | ۳ | ۰/۹۶ | ۳/۹۶                       | ۵۰۹/۴۵ |  |  |
| ۴                        | ۷۰ | ۹  | ۱۰ | ۱۰۰۰ | ۷۰             | ۱/۲۵           | ۱/۲۵           | ۳ | ۲۱/۱۳          | ۱/۱۳ | ۱۴۳/۴۱ | ۲ | ۱/۲۷ | ۴/۰۶                       | ۵۱۵/۷۵ |  |  |
| ۴                        | ۹۰ | ۹  | ۱۲ | ۱۲۰۰ | ۲۰             | ۰/۷۵           | ۱/۲۵           | ۵ | ۱۸/۲۸          | ۱/۸۶ | ۱۲۵/۰۹ | ۴ | ۱/۱۱ | ۴/۶۷                       | ۴۸۴/۸۴ |  |  |
| ۴                        | ۹۰ | ۷  | ۱۰ | ۱۵۰۰ | ۷۰             | ۱/۲۵           | ۱              | ۶ | ۲۱/۱۳          | ۱/۴۹ | ۱۵۶/۲۹ | ۴ | ۱/۱۸ | ۴/۶۳                       | ۵۲۳/۷۳ |  |  |
| ۴                        | ۹۰ | ۱۱ | ۱۰ | ۱۲۰۰ | ۵۰             | ۰/۷۵           | ۱              | ۴ | ۲۴/۶۶          | ۱/۲۲ | ۱۳۸/۸۵ | ۳ | ۱/۲۸ | ۴/۱۲                       | ۵۰۸/۸۶ |  |  |
| ۴                        | ۹۰ | ۱۱ | ۱۵ | ۱۰۰۰ | ۵۰             | ۱              | ۰/۷۵           | ۸ | ۲۱/۹           | ۱/۰۲ | ۱۳۸/۴  | ۵ | ۱/۱۸ | ۳/۸۷                       | ۵۰۹/۱۲ |  |  |
| ۴                        | ۷۰ | ۱۱ | ۱۲ | ۱۵۰۰ | ۷۰             | ۰/۷۵           | ۰/۷۵           | ۸ | ۱۶/۵۸          | ۱/۴۸ | ۱۷۱/۰۱ | ۵ | ۰/۹۲ | ۴/۶۱                       | ۵۲۰/۹۱ |  |  |
| ۴                        | ۹۰ | ۹  | ۱۵ | ۱۵۰۰ | ۲۰             | ۱/۲۵           | ۰/۷۵           | ۲ | ۲۹/۷۴          | ۱/۰۸ | ۱۲۸/۹۷ | ۲ | ۱/۰۱ | ۳/۹۱                       | ۴۹۰/۶۳ |  |  |

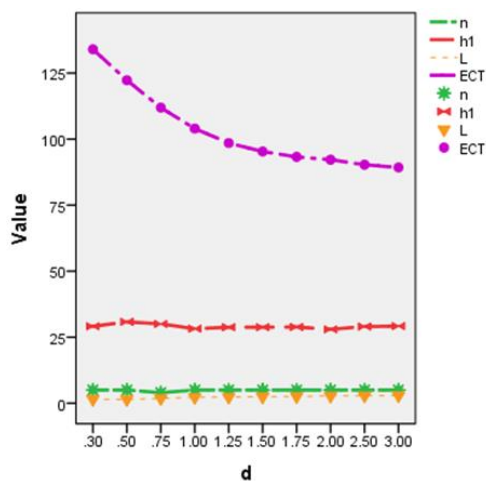
جدول ۵: سطح معنی داری پارامترهای ورودی

| پارامتر        | مقدار پی (h <sub>1</sub> ) | مقدار پی (ECT) |
|----------------|----------------------------|----------------|
| c              | ≤۰/۰۰۰۱                    | ≤۰/۰۰۰۱        |
| s              | ≤۰/۰۰۰۱                    | ۰/۰۰۰۳         |
| a              | ۰/۷۸۰۲                     | ۰/۳۱۸۹         |
| b              | ۰/۱۱۹۳                     | ۰/۰۱۷۸         |
| C.             | ۰/۰۷۹۰                     | ≤۰/۰۰۰۱        |
| Y              | ۰/۸۱۰۶                     | ۰/۰۰۳۳         |
| T.             | ۰/۶۲۱۸                     | ۰/۱۹۷۶         |
| T <sub>1</sub> | ۰/۷۰۷۰                     | ۰/۱۸۹۷         |

در شکل ۵ نمودار متناظر با مقادیر جدول ۷ نشان داده شده است. همانگونه که در شکل ۵ مشخص است زمانی که  $k$  افزایش پیدا می‌کند، تابع هزینه و پارامترهای تنظیمی طراحی (اندازه نمونه، اولین بازه‌ی نمونه‌گیری، ضریب حدود کنترلی) تغییر مشخصی را نشان نمی‌دهند. لذا این پارامتر مدل تأثیری بر روی تابع هزینه و بهینه‌سازی ندارد و تنها برای تعیین نرخ ساز و کار شکست مناسب است.



شکل ۵: بررسی تغییر مقادیر بهینه با تغییر پارامتر  $k$ .



شکل ۶: بررسی تغییر مقادیر بهینه با تغییر پارامتر انتقال

در جدول ۵ سطح معنی داری پارامترهای ورودی برای آزمون وجود اثر پارامترهای مدل بر پارامترهای تنظیمی طراحی و تابع هزینه بررسی شده است. با بررسی این جدول مشخص است که در سطح معنی داری ۰/۰۱، مقدار بهینه‌ی اولین بازه‌ی نمونه‌گیری ( $h_1$ ) به  $C_0$  و  $S$  بستگی دارد. مقدار بهینه  $ECT$  وابسته به  $C_0$ ،  $S$  و  $\gamma$  است.

در جدول ۵ پارامترهای طراحی اندازه نمونه ( $n$ ) و ضریب حدود کنترلی ( $L$ ) ذکر نشده است، لذا این پارامترهای تنظیمی طراحی تابعی از پارامترهای ورودی نیستند. همان‌گونه که از معادلات بالا مشخص است، اولین بازه‌ی نمونه‌گیری ( $h_1$ ) تنها تابعی از  $C$  و متوسط هزینه  $(ECT)$  تابعی از  $C_0$ ،  $S$ ،  $C$ ،  $\gamma$  و  $b$  هستند. متوسط تابع هزینه نسبت به  $C$  و  $\gamma$  افزایشی و نسبت به  $C_0$ ،  $b$  و  $S$  کاهش‌ی می‌یابد. به عبارت دیگر تابع هزینه با افزایش مقادیر  $C$  و  $\gamma$  افزایش می‌یابد. از طرفی با افزایش مقادیر  $b$  و  $S$  و  $C_0$  کاهش پیدا می‌کند که از نظر منطقی قابل قبول است. به عنوان مثال، هزینه هشدار نادرست است، زمانی که هشدارهای نادرست افزایش پیدا کند، سیستم هزینه بیشتری برای بررسی به سازمان تحمیل می‌کند.

جدول‌های ۶ تا ۸ تأثیر پارامترهای توزیع بر ۱۲ پارامتر انتقال را بر روی مقادیر بهینه پارامترهای تنظیمی طراحی و متوسط تابع هزینه، نشان می‌دهند. برای بررسی بهتر این مقادیر از نمودار استفاده شده است.

شکل ۴ نمودار متناظر با مقادیر داده شده در جدول ۶ را نشان می‌دهد. همانگونه که در شکل ۳ مشخص است، زمانی که  $C$  افزایش پیدا می‌کند، تابع هزینه کاهش پیدا می‌کند اما پارامترهای تنظیمی طراحی (اندازه نمونه، اولین بازه‌ی نمونه‌گیری، حدود کنترلی) تغییر مشخصی را نشان نمی‌دهند لذا یکی از راه‌های کاهش هزینه، تا حد امکان، بالابردن مقدار پارامتر  $C$  که یکی از پارامترهای مدل است، می‌باشد.

شکل ۶ مقادیر جدول ۸ را ترسیم می‌کند. در این قسمت مقدار  $\delta$  (پارامتر انتقال) تغییر کرده است. این نمودار نشان می‌دهد زمانی که پارامتر انتقال افزایش پیدا می‌کند، تابع هزینه کاهش پیدا می‌کند اما پارامترهای تنظیمی طراحی تغییر مشخصی را نشان نمی‌دهند. لذا واضح است که زمانی که فرایند در حالت خارج از کنترل با کم‌ترین مقدار انتقال در میانگین باشد، هزینه مقدار کم‌تری می‌شود.

جدول ۶: بررسی تغییر مقادیر بهینه با تغییر پارامتر C.

| <i>c</i> | <i>s</i> | <i>k</i> | <i>n</i> | <i>h</i> <sub>1</sub> | <i>L</i> | <i>ECT</i> |
|----------|----------|----------|----------|-----------------------|----------|------------|
| ۴        | ۷۰       | ۱۰       | ۴        | ۱۸/۵۶                 | ۱/۳۳     | ۱۴۶/۱۶۴    |
| ۴/۳۷     | ۷۰       | ۱۰       | ۲        | ۲۳/۱۴                 | ۱/۴۶     | ۱۴۲/۸۷۴    |
| ۴/۶۸     | ۷۰       | ۱۰       | ۴        | ۲۱/۸۸                 | ۱/۴۸     | ۱۳۷/۸۳۵    |
| ۵/۲۵     | ۷۰       | ۱۰       | ۹        | ۲۲/۴                  | ۱/۴۵     | ۱۳۱/۳۰۵    |
| ۴/۹      | ۷۰       | ۱۰       | ۵        | ۲۲/۶۷                 | ۱/۴۰     | ۱۳۴/۹۹۶    |
| ۴/۵      | ۷۰       | ۱۰       | ۵        | ۱۹/۲                  | ۱/۵۶     | ۱۳۹/۶۱۶    |
| ۶        | ۷۰       | ۱۰       | ۲        | ۳۲/۴۱                 | ۱/۲۸     | ۱۲۶/۹۲     |
| ۵/۱۵     | ۷۰       | ۱۰       | ۶        | ۲۳/۲۷                 | ۱/۴۲     | ۱۳۲/۳۶     |
| ۴/۷۴     | ۷۰       | ۱۰       | ۸        | ۲۰/۰۶                 | ۱/۴۵     | ۱۳۶/۰۹۱    |
| ۶/۵      | ۷۰       | ۱۰       | ۷        | ۲۸/۹۹                 | ۱/۴۳     | ۱۲۲/۳۵۷    |

جدول ۷: بررسی تغییر مقادیر بهینه با تغییر پارامتر k

| <i>k</i> | <i>s</i> | <i>c</i> | <i>n</i> | <i>h</i> <sub>1</sub> | <i>L</i> | <i>ECT</i> |
|----------|----------|----------|----------|-----------------------|----------|------------|
| ۱۲       | ۷۰       | ۷        | ۴        | ۳۲/۹۸                 | ۱/۲۹     | ۱۲۰/۸۶۴    |
| ۱۴       | ۷۰       | ۷        | ۵        | ۳۱/۰۵                 | ۱/۳۸     | ۱۲۱/۳۳۳    |
| ۱۰       | ۷۰       | ۷        | ۸        | ۳۰/۵۶                 | ۱/۴۳     | ۱۱۹/۵۵۸    |
| ۱۱       | ۷۰       | ۷        | ۴        | ۳۳/۳۱                 | ۱/۲۹     | ۱۲۰/۴۹     |
| ۱۵       | ۷۰       | ۷        | ۶        | ۲۹/۱۹                 | ۱/۵۷     | ۱۲۱/۷۲۵    |
| ۹        | ۷۰       | ۷        | ۸        | ۲۹/۸۳                 | ۱/۶۵     | ۱۱۹/۴۶۹    |
| ۸        | ۷۰       | ۷        | ۸        | ۳۱/۳۷                 | ۱/۴۴     | ۱۱۸/۵۶۸    |
| ۷        | ۷۰       | ۷        | ۷        | ۳۱/۵۲                 | ۱/۵۵     | ۱۱۸/۱۶۹    |
| ۶        | ۷۰       | ۷        | ۶        | ۳۳/۴۴                 | ۱/۴۳     | ۱۱۷/۵۳۴    |
| ۵        | ۷۰       | ۷        | ۴        | ۳۱/۵۲                 | ۱/۹۷     | ۱۲۱/۱۸۴    |

جدول ۸: بررسی تغییر مقادیر بهینه با تغییر پارامتر انتقال .

| $\delta$ | <i>n</i> | <i>h</i> <sub>1</sub> | <i>L</i> | <i>ECT</i> |
|----------|----------|-----------------------|----------|------------|
| ۰/۳      | ۵        | ۲۹/۱۲                 | ۱/۴۸     | ۱۳۴/۰۰۲    |
| ۰/۵      | ۵        | ۳۰/۸                  | ۱/۴۲     | ۱۲۲/۳۰۱    |
| ۰/۷۵     | ۴        | ۳۰/۰۳                 | ۱/۸۳     | ۱۱۱/۹۱۹    |
| ۱        | ۵        | ۲۸/۲                  | ۲/۲۹     | ۱۰۳/۹۷۹    |
| ۱/۲۵     | ۵        | ۲۸/۷۷                 | ۲/۳۱     | ۹۸/۵۱۴     |
| ۱/۵      | ۵        | ۲۸/۷۹                 | ۲/۴۷     | ۹۵/۲۹۲     |
| ۱/۷۵     | ۵        | ۲۸/۸۶                 | ۲/۵۶     | ۹۳/۲۷۲     |
| ۲        | ۵        | ۲۷/۹۸                 | ۲/۷۶     | ۹۲/۱۹۴     |
| ۲/۵      | ۵        | ۲۹/۰۴                 | ۲/۸۳     | ۹۰/۲۹۸     |
| ۳        | ۵        | ۲۹/۱۸                 | ۲/۹      | ۸۹/۲۶۸     |

## ۷- منابع

- [1] Shewhart, W. A. (1931), *Economic Control of Quality of Manufactured Product*, New York: Van Nostrand.
- [2] Girshick, M. A., & Rubin, H. (1952). A Bayes approach to a quality control model. *The Annals of mathematical statistics*, 114-125.
- [3] Duncan, A. J. (1956). The economic design of X charts used to maintain current control of a process. *Journal of the American Statistical Association*, 51(274), 228-242.
- [4] Gibra, I. N. (1978). Economically optimal determination of the parameters of np-control charts. *Journal of Quality Technology*, 10(1), 12-19.
- [5] Montgomery, D. C. (1980). The economic design of control charts: a review and literature survey. *Journal of Quality Technology*, 12(2), 75-87.
- [6] Baker, K. R. (1971). Two process models in the economic design of an X chart. *AIIE Transactions*, 3(4), 257-263.
- [7] Heikes, R. G., Montgomery, D. C., & Yeung, J. Y. (1974). Alternative Process Models in the Economic Design of  $T^2$  Control Charts. *AIIE Transactions*, 6(1), 55-61.
- [8] Montgomery, D. C., Heikes, R. G., and Mance, J. F. (1975). Economic design of fraction defective control charts. *Management Science*, 21(11), 1272-1284
- [9] Lorenzen, T. J., & Vance, L. C. (1986). The economic design of control charts: a unified approach. *Technometrics*, 28(1), 3-10.
- [10] Banerjee, P. K., & Rahim, M.A. (1988). Economic design of  $\bar{X}$  control charts under Weibull shock models, *Technometrics*, 30(4), 407-414.
- [11] Hu, P. W. (1984, May). Economic design of an X-control chart under non-poisson process shift. In Abstract, TIMS/ORSA joint national meeting, San Francisco (Vol. 87).
- [12] Saadatmeli, A., Moghadam, M. B., Seif, A., & Faraz, A. (2018). Constrained optimal design of  $\bar{X}$  control chart with multiple assignable causes under Burr XII failure mechanism. *International Journal of Quality & Reliability Management*, 35(9), 1809-1834
- [13] Heydari, A. A., Moghadam, M. B., & Eskandari, F. (2017). An extension of Banerjee and Rahim model in economic and economic statistical designs for multivariate quality characteristics under Burr XII distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 46(16), 7855-7871.
- [14] KOO, T. Y., & CASE, K. E. (1990). Economic design of X-bar control charts for use in monitoring continuous flow processes. *THE INTERNATIONAL JOURNAL OF PRODUCTION RESEARCH*, 28(11), 2001-2011.
- [15] Duncan, A. J. (1971). The economic design of  $\bar{X}$  charts when there is a multiplicity of assignable causes. *Journal of the American Statistical Association*, 66(333), 107-121.
- [16] Yang YM, Su CY, Pearn WL. (2010). Economic design of  $\bar{X}$  control charts for continuous flow process with multiple assignable causes. *International Journal of Production Economics*. 128(1):110-117.
- [17] Chen, Y. S., & Yang, Y. M. (2002). An extension of Banerjee and Rahim's model for economic design of moving average control chart for a continuous flow process. *European Journal of Operational Research*, 143(3), 600-610.
- [18] Yu, F. J., & Wu, H. H. (2004). An economic design for variable sampling interval MA control charts. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 24(1-2), 41-47.

# Economic Design of $\bar{X}$ Control Charts for continuous flow processes under Burr XII shock model

**Aitin Saadatmeli<sup>1</sup>**

Faculty of Computer Engineering, Najafabad Branch, Islamic Azad University, Najafabad, Esfahan, Iran.  
aitinsm@yahoo.com

**Mohammad bamanimoghadam**

Professor, Allameh Tabatabaei University, Department of Statistics, Tehran, Iran. bamenimoghadam@gmail.com

**Asqhar Sayf**

Assistant Professor, Bu Ali Sina University, Faculty of Basic Sciences, Department of Statistics, Hamedan, Iran.  
erfan.seif@gmail.com

## 1- Introduction

One of the main tools in statistical process control is quality control chart. The purpose of using quality control chart is to monitor the production process and find the situations that process is out of control. Shewhart [1] was the first person who proposed the idea of  $\bar{X}$  control chart for monitoring the process mean. For constructing the control charts, one needs the sample size (n), sampling interval (h) and control limit coefficient (L) to be specified. These parameters are name design parameters. Doing of obtainment, the optimal values for design parameters due to conception four strategies: heuristic, statistical, economic and economic-statistical designs. Decision parameters affect the false alarm rate, power, cost, and ultimately user confidence. In economic and economic statistical design, decision variables are calculated by minimizing the expected cost per unit time.

The first study of the economic design of control charts was created by Grishik and Robin [2] and Duncan[3]. they developed an economic design model of the  $\bar{X}$  control chart. Duncan formulated a mathematical model of the  $\bar{X}$  chart as a function of the design parameters that land to minimize the average cost of a process. In 1971, Duncan generalized his cost model to situation there were multiple assignable causes. He assumed that the time of occurrence of the assignable causes were independent and he assumed shock model had negative exponential distribution. Gibra [4] and Montgomery et al [5] used Markovian distribution as a shock model. baker [6], Heikes et al [7], Montgomery and Heikes [8] presented an economic design. They used non-Poisson distribution as a shock model and they assumed after true or false alarm, system renewed and worked in control situation.

---

<sup>1</sup>Corresponding author: aitinsm@yahoo.com

Lorenzen and Vance [9] expanded Duncan's economic model, they proposed a unified approach to economic control chart design. For obtained a suitable loss cost, they used type I and II probability of error and average run length (ARL). In 1993, Rahim and Banerjee[10] developed a generalized model for achieving optimal design parameters in any high risk distribution. They used Weibull distribution as a shock model also for first time they used non-uniform sampling interval. In other hand, they show that, their model has less cost than Hou [11] economic design with uniform sampling interval.

saadatmelli et al [12] used economical-statistical design for  $\bar{X}$  control chart under Burr XII as a shock model and non-uniform sampling interval. they demonstrate that their model is more suitable than uniform sampling interval.

Heydari et al. [13] used Burr XII as shock model for economics statistical design when exist only one assignable cause.

In 1990, Koo and Case [14] used Duncan model for the  $\bar{X}$  control charts. In 2010, Yang et.al [15] extended Koo and Case's model for multiple assignable causes under the exponential shock model. Chen and Yung [16] used Koo and Case's economic design for Moving Average (MA) control chart to monitor quality characteristics of raw material or products in a continuous process when the process-failure mechanism follows a Weibull model. Yu and Wu [17] modified Koo and Case's economic design to the Variable Sampling Intervals (VSI) type. These studies assumed that the probability of the assignable cause exponential distribution and the process-failure mechanism had a fixed hazard rate.

This paper, however, focuses entirely on continuous flow processes. We will study the economic design of  $\bar{X}$  control charts for a continuous flow process under Burr XII shock model with one assignable cause by using Rahim and Banerjee's model. Burr XII has a flexible hazard rate. However, we assume that design sampling is not uniform.

In Section 2, we will provide some basic information about continuous flow processes and the assumptions surrounding the model under study. In section 3, we will analyze these assumptions in order to use them in the section for the purpose of driving E(C) and E(T) formulas. In section 5 we study matched case and compare this model with economic design. In section 6 and 7 we will present a numerical example and sensitive analysis. Conclusions are drawn in the last section.

## 2- Continuous flow processes

Continuous flow processes are used in batch processes such as those encountered in refining, chemical processing, cement processing, and mining. These processes are different from discrete processes because in continuous processes, there is no well-defined production unit. In continuous flow processes,  $\bar{X}$  control charts show a different meaning of  $g$  subgroup in which the  $n$  samples are not pulled all at one time. The  $n$  samples

were not taken all at once because the output would not be relatively homogeneous. If  $n$  samples had been taken differently, this would have resulted in subgroup ranges of near zero (Brooks and Case, 1986). Rather, the samples are taken from the process at intervals of  $h_i$  hours, and their analytical results are combined with the subgroups of size  $n$ , so that they can be measured in average and match into the  $\bar{X}$  chart. Figure 1 shows sampling and plotting the  $\bar{X}$  control chart from a continuous flow process.

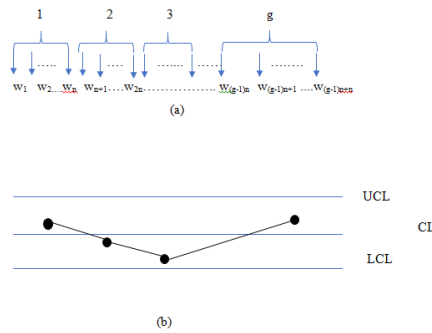


Figure 1: (a) sampling from a continuous flow process, (b) plotting  $\bar{X}$  chart

### 3- Definitions

In this section, we will introduce the following assumptions and definitions to achieve the expected cycle length and the expected cost cycle.

In this model, we assumed that an assignable cause affected the process and the occurrence time of the assignable cause follows Burr XII distribution with cumulative distribution function, density function and hazard rate as below:

$$F(x) = 1 - \left(1 + \left(\frac{x}{s}\right)^c\right)^{-k} \tag{1}$$

$$f(x) = \frac{kc\left(\frac{x}{s}\right)^{c-1}}{s\left(1 + \left(\frac{x}{s}\right)^c\right)^{k+1}} \tag{2}$$

and

$$r(x) = \frac{ck}{s} * \frac{\left(\frac{x}{s}\right)^{c-1}}{1 + \left(\frac{x}{s}\right)^c} \tag{3}$$

If  $C > 1$  the Burr hazard rate function is increasing, also, if  $C = 1$  the Burr hazard rate function is bathtub and for  $C < 1$ , the Burr hazard rate function is decreasing. The kind of Burr hazard rate shows in Figure 2.



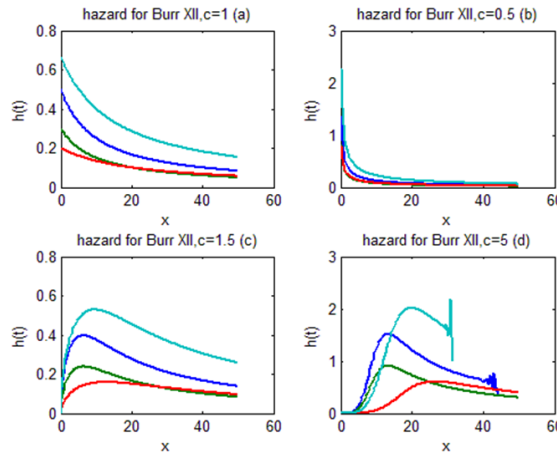


Figure2: Plots of the hazard rate function; (a) Decreasing, (b) Upside-down bathtub, (c)&(d) Increasing

Also, the process begins by the in-control state until the mean process shifts to  $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$ , where  $\mu_0$  is the mean,  $\sigma_0$  is the standard deviation and  $\delta$  is a shift parameter. The process is being monitored with simple random samples each of size (n) at times  $h_1, h_1 + h_2, h_1 + h_2 + h_3, \dots$ , where  $h_j$  is the  $j^{th}$  sampling interval and  $w_j = \sum_{i=1}^j h_i, j=1,2,\dots$  and  $w_0 = 0$ . The Purpose of a non-uniform sampling interval is maintaining a constant integrated hazard rate over each sampling interval for the Burr XII distribution. This means that the  $h_j$ 's are selected so that at any intervals:

$$\int_{w_j}^{w_{j+1}} r(t)dt = \int_0^{h_1} r(t)dt, \quad j=1,2,\dots; \tag{4}$$

Equivalent

$$1 - F(w_j) = (1 - F_i(w_1))^j, \quad j=1, 2, \dots; \tag{5}$$

Then  $w_j$  can be obtained as follows:

$$w_j = s((1 + (\frac{h_1}{s})^c)^j - 1)^{1/c}, \quad j=1, 2, \dots; \tag{6}$$

Indeed, the time to analyze the sample and chart is negligible and the process stops during the research and repairs. At any time between each interval, the process has a chance of shifting to the out-of-control state. The probability of a shift to the out-of-control state in the  $m^{th}$  interval is:

$$\begin{aligned} P(\text{shift between } w_m \& w_{m+1}) &= \int_{w_m}^{w_{m+1}} f(t)dt = F(w_{m+1}) - F(w_m) \\ &= q^m(1 - q) \end{aligned} \tag{7}$$

Where

$$q = (1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k} \tag{8}$$

Furthermore,  $p_j(j = 1,2, \dots)$  is defined as the probability of shifting to the out-of-control state between the  $j^{th}$  and  $(j + 1)^{th}$  sample within a subgroup:

$$p_j = P(w_j < T < w_{j+1}) + P(w_{n+j} < T < w_{n+j+1}) + P(w_{2n+j} < T < w_{2n+j+1}) = \frac{q^j(1-q)}{1-q^n} \quad (9)$$

Let  $\tau$  be the expectation duration of the in-control period within the  $j^{\text{th}}$  sampling interval, then we have:

$$\begin{aligned} \tau &= \sum_{g=0}^{\infty} \int_{w_{ng}}^{w_{n(g+1)}} (t - w_{ng}) f(t) dt \\ &= sk \frac{\Gamma(k - \frac{1}{c}) \Gamma(1 + \frac{1}{c})}{\Gamma(k + 1)} - s(1 - q^n)A(q) \end{aligned} \quad (10)$$

where

$$A(x) = \sum_{g=1}^{\infty} x^{ng} (q^{-\frac{ng}{k_i}} - 1)^{1/c}, |x| < 1 \quad (11)$$

#### 4. Cost function in the case of non-uniform sampling

Each process starts from the in-control state and when the assignable cause occurs, it goes to the out-of-control state and after repairing the assignable cause, the process returns to the initial state. This cycle is called the quality cycle and its model follows the form of a Renewal Reward Process where the average cost per unit time for the cycle  $E(A)$  is calculated by the average cost per cycle  $E(C)$  divided by the average time per cycle  $E(T)$ . Then average loss cost per cycle is

$$ECT = \frac{E(C)}{E(T)} \quad (12)$$

To compute  $E(C)$  and  $E(T)$ , we need the probability error type I and probability error type II.

The probability of error type I,  $\alpha$ , is:

$$\alpha = P(\text{exceeding in control limit} | \text{process is in - control}) = 2\Phi(-L) \quad (13)$$

And the probability of error type II,  $\beta_i$ , is:

$$\beta_i = P(\text{not exceeding control limit} | \text{process is out of control}) = \Phi(L - \delta\sqrt{n}) - \Phi(-L - \delta\sqrt{n}) \quad (14)$$

Also, when a shift occurs immediately after the  $g^{\text{th}}$  subgroup and the  $j^{\text{th}}$  samples have been taken, the  $g+1^{\text{st}}$  subgroup will have the  $j^{\text{th}}$  samples taken from a process operating at mean  $X$  and  $n-j$  samples from the process operating at  $\bar{x} + \delta\sigma$ .

$$\mu = \mu_0 + \frac{(n-j)\delta\sigma}{n} \quad (15)$$

The probability of an out-of-control state being detected in this case is:

$$\gamma = 1 - \Phi\left(L - \frac{(n-j)\delta}{\sqrt{n}}\right) + \Phi\left(-L - \frac{(n-j)\delta}{\sqrt{n}}\right) \quad (16)$$

where  $\Phi(\cdot)$  is the cumulative standard normal distribution.

**Notation**

Time and cost are two important factors in the model.

**Time parameters**

$T_0$ : Average time to search for the false alarm.

$T_1$ : Average time to discover assignable cause once it is detected by control chart.

$T_2$ : Average time to repair assignable cause after it has been discovered.

Cost parameters

$C_0$  : Average cost per unit of time while the process in control.

$C_1$  : Average cost per unit of time while the process is out of control owing to occurrence the assignable cause.

$Y$  : The average cost per false alarm when the process is under control.

$w$ : Cost to locate and repair assignable cause.

$a$  : Fixed sample cost.

$b$  : Unit sample cost.

For calculating  $E(C)$  and  $E(T)$  we have the cycle in Figure 3.

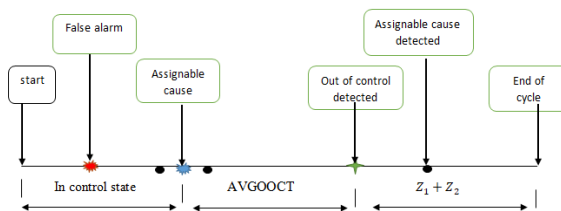


Figure3: cycle process

**Figure3:** cycle process

We have following situation:

- a. The expected time for in-control state, where it is mean distribution

$$\mu_t = sk \frac{\Gamma(k - \frac{1}{c})\Gamma(1 + \frac{1}{c})}{\Gamma(k + 1)} \tag{17}$$

- b. The probability that the first subgroup following a shift will detect a process change is:

$$\dot{p} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{q^j(1 - q)}{1 - q^n} \gamma \tag{18}$$

- c. The probability that the first subgroup following a shift detect the process change is  $\dot{p}$ . After the occurrence of the assignable cause, the probability that it will be detected on exactly the  $r^{th}$  subgroup taken after the shift is

$$\begin{matrix} \dot{p} & r = 1 \\ (1 - \dot{p})(1 - \beta)\beta^{r-2} & r \geq 2 \end{matrix} \tag{19}$$

- d. The expected time of subgroups taken between the time the process shifts out-of-control and the subgroup is completed which will detect the shift in the process

$$A = \sum_{g=0}^{\infty} \dot{p} \left( \int_{w_{ng}}^{w_{n(g+1)}} f(t) dt \right) (w_{n(g+1)} - w_{ng}) + \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{r=2}^{\infty} \left( \int_{w_{ng}}^{w_{n(g+1)}} f(t) dt \right) (w_{n(g+1)} - w_{ng}) (1 - \dot{p}) (1 - \beta) \beta^{r-2} = \frac{s\dot{p}(1-q^n)^2}{q^n} A(q) + \frac{s(1-q^n)(1-\dot{p})(1-\beta)}{\beta(\beta-q^n)} \left( A \left( \beta^{\frac{1}{n}} \right) - \frac{\beta}{q^n} A(q) \right) - s(1-\dot{p})(1-q^n)A(q) \quad (20)$$

- e. The expected time for out of control state and remove the assignable cause is

$$AATS = A - \tau = \frac{s(1-q^n)}{q^n(\beta-q^n)} (\dot{p}(1-q^n) - (1-\beta))A(q) + \frac{s(1-q^n)(1-\dot{p})(1-\beta)}{\beta(\beta-q^n)} A \left( \beta^{\frac{1}{n}} \right) - \mu_t \quad (21)$$

- f. Let  $r_1$  is the expected sampling number when the process is in-control:

$$r_1 = (1 - q^n) \sum_{g=0}^{\infty} g q^{ng} = \frac{q^n}{1 - q^n} \quad (22)$$

- g. The expected sampling number to find the false alarm is  $\alpha r_1$ , then the expected time of finding false alarm is  $T_0 \alpha r_1$ .

- h. Therefore the expected of cycle length is

$$E(T) = sk \frac{\Gamma(k - \frac{1}{c}) \Gamma(1 + \frac{1}{c})}{\Gamma(k + 1)} + AATS + T_0 \alpha r_1 + T_1 + T_2 \quad (23)$$

- i. To compute the expected cycle cost per hour (E(C)), we have

The expected cycle cost in-control state is

$$C_0 sk \frac{\Gamma(k - \frac{1}{c}) \Gamma(1 + \frac{1}{c})}{\Gamma(k + 1)} \quad (24)$$

- ii. The expected cycle cost in out of control state is

$$C_1 AATS + w \quad (25)$$

- iii. The expected sampling cost is

$$(a + bn)(r_1 + r_2) \quad (26)$$

Where  $r_2$  is the expected sampling number when the process is out-of-control.

$$r_2 = \sum_{g=0}^{\infty} \left( \int_{w_{ng}}^{w_{n(g+1)}} f(t) dt \right) (w_{n(g+1)} - w_{ng}) (\dot{p} + \sum_{r=2}^{\infty} r (1 - \dot{p})(1 - \beta) \beta^{r-2}) = 1 + \frac{1 - \dot{p}}{1 - \beta} \quad (27)$$

- iv. The expected cost for finding false alarm is  $Y \alpha r_1$

Therefore the expected cost cycle is

$$E(C) = C_0 sk \frac{\Gamma(k - \frac{1}{c}) \Gamma(1 + \frac{1}{c})}{\Gamma(k + 1)} + C_1 AATS + w + (a + bn)(r_1 + r_2) + Y \alpha r_1 \quad (28)$$

Then we use (12) and we have

$$E(A) = \frac{E(C)}{E(T)} = \frac{D_0 sk \frac{\Gamma(k - \frac{1}{c}) \Gamma(1 + \frac{1}{c})}{\Gamma(k + 1)} + D_1 AATS + w + (a + bn)(r_1 + r_2) + Y ar_1}{sk \frac{\Gamma(k - \frac{1}{c}) \Gamma(1 + \frac{1}{c})}{\Gamma(k + 1)} + AATS + Z_0 ar_1 + Z_1 + Z_2} \quad (29)$$

### 5. Numerical example

In this section, we will find the optimal design parameters  $n$ ;  $h_1$  and  $L$  by minimized cost function. As mentioned in the previous section, the parameters involving the expected loss-cost model can be classified into cost parameters, time parameters, Burr XII distribution parameters ( $c, s, k$ ) and design parameters ( $n, h_1, L$ ).

The parameters involving the expected loss-cost function ( $E(C)$ ) can be classified into cost parameters ( $C_0, C_1, w, a, b, y$ ), time parameters ( $T_0, T_1, T_2$ ), shift parameters ( $\delta$ ), Burr XII distribution parameters ( $c, s, k$ ) and design parameters ( $n, h_1, L$ ). We used following values for parameters. Table 1, illustrate fixed parameters.

Table 1: fixed parameters.

|          |                |              |
|----------|----------------|--------------|
| $W=1100$ | $C_0 = 50$     | $T_0 = 0.75$ |
| $Y=1100$ | $C_1 = 400$    | $T_1 = 1.25$ |
| $a=7$    | $\delta = 0.5$ | $T_2 = 1.75$ |
| $b=10$   | $K=15$         |              |

### 6- Sensitive analysis

For a more accurate study, we make use of the sensitive analysis. By using table 1, Table 2, presents the optimal values for the design parameters with loss cost.

**Table2:** Optimum design parameters (C and S changed)

| <i>run</i> | <i>c</i> | <i>s</i> | <i>n</i> | $h_1$ | <i>L</i> | <i>ECT</i> |
|------------|----------|----------|----------|-------|----------|------------|
| 1          | 6.00     | 90.00    | 4        | 33.65 | 1.47     | 119.58     |
| 2          | 6.00     | 76.78    | 4        | 30.08 | 1.33     | 125.06     |
| 3          | 6.00     | 71.25    | 8        | 25.32 | 1.43     | 127.26     |
| 4          | 6.25     | 83.28    | 8        | 29.38 | 1.57     | 119.91     |
| 5          | 6.54     | 70.00    | 4        | 27.44 | 1.75     | 126.08     |
| 6          | 7.11     | 81.50    | 15       | 32.06 | 1.42     | 116.69     |
| 7          | 7.25     | 70.00    | 13       | 28.74 | 1.43     | 120.93     |
| 8          | 7.50     | 75.40    | 16       | 31.09 | 1.48     | 117.78     |
| 9          | 8.00     | 70.00    | 14       | 31.20 | 1.43     | 117.54     |
| 10         | 8.00     | 81.85    | 13       | 36.13 | 1.45     | 111.92     |
| 11         | 8.00     | 90.00    | 14       | 39.14 | 1.47     | 109.10     |

Table 3 shows that the range of fixed parameters in table1.

**Table 3.** Fixed parameters range

| <i>Name</i> | <i>Type</i>    | <i>Low Actual</i> | <i>High Actual</i> |
|-------------|----------------|-------------------|--------------------|
| <i>C</i>    | <i>Numeric</i> | 4                 | 6                  |
| <i>S</i>    | <i>Numeric</i> | 70                | 90                 |
| <i>a</i>    | <i>Numeric</i> | 7                 | 11                 |
| <i>b</i>    | <i>Numeric</i> | 10                | 15                 |
| $D_0$       | <i>Numeric</i> | 30                | 70                 |
| <i>Y</i>    | <i>Numeric</i> | 1000              | 1500               |
| $Z_0$       | <i>Numeric</i> | 0.75              | 1.25               |
| $Z_1$       | <i>Numeric</i> | 0.75              | 1.25               |

Using values in Table 1, the impact of the fixed parameters on the design parameters and loss cost will be discussed. We use Taguchi OA methodology design here. Table 4 presents the optimal values for design parameters when loss cost for negative exponential is selected as prior distribution. This table present that when we used uniform sampling interval, the loss cost function (ECT) and L increased. In another hand, n and h decreased.

**Table 4.** The optimal parameters obtained by Negative Exponential dist.

| c | s  | a  | b  | y    | C <sub>0</sub> | T0   | T1   | n | Non-uniform    |      |        | uniform |      |      |        |
|---|----|----|----|------|----------------|------|------|---|----------------|------|--------|---------|------|------|--------|
|   |    |    |    |      |                |      |      |   | h <sub>1</sub> | L    | ECT    | n       | h    | L    | ECT    |
| 6 | 90 | 11 | 10 | 1500 | 30             | 1    | 1.25 | 4 | 36.07          | 1.52 | 105.22 | 3       | 1.56 | 4.38 | 477.23 |
| 6 | 90 | 7  | 12 | 1200 | 50             | 1.25 | 0.75 | 6 | 31.42          | 1.81 | 121.6  | 3       | 1.62 | 4.53 | 481.84 |
| 6 | 90 | 9  | 15 | 1000 | 70             | 0.75 | 1    | 7 | 34.56          | 1.29 | 137.11 | 3       | 1.45 | 4.47 | 518.47 |
| 6 | 70 | 7  | 10 | 1000 | 30             | 0.75 | 0.75 | 7 | 25.62          | 1.69 | 109.08 | 4       | 1.12 | 4.57 | 481.11 |
| 6 | 70 | 11 | 15 | 1200 | 70             | 1.25 | 1.25 | 5 | 29.56          | 1.43 | 147.83 | 3       | 1.31 | 4.54 | 529.22 |
| 6 | 90 | 7  | 15 | 1500 | 50             | 0.75 | 1.25 | 6 | 34.8           | 1.48 | 124.33 | 3       | 1.55 | 4.66 | 479.28 |
| 6 | 90 | 11 | 12 | 1000 | 30             | 1.25 | 1    | 8 | 33.71          | 1.27 | 99.8   | 4       | 1.83 | 4.52 | 451.59 |
| 6 | 90 | 9  | 10 | 1200 | 70             | 1    | 0.75 | 6 | 34.32          | 1.47 | 136.22 | 4       | 2.11 | 4.71 | 510.27 |
| 6 | 70 | 9  | 12 | 1500 | 50             | 1    | 1    | 6 | 27.02          | 1.68 | 132.73 | 4       | 1.25 | 4.63 | 507.63 |
| 4 | 90 | 7  | 12 | 1000 | 70             | 1    | 1.25 | 4 | 23.27          | 1.22 | 150.89 | 2       | 1.31 | 4.11 | 518.96 |
| 4 | 70 | 7  | 15 | 1200 | 30             | 1    | 1    | 5 | 19.43          | 1.06 | 134.9  | 3       | 0.96 | 3.96 | 509.45 |
| 4 | 70 | 9  | 10 | 1000 | 50             | 1.25 | 1.25 | 3 | 21.13          | 1.13 | 143.41 | 2       | 1.27 | 4.06 | 512.75 |
| 4 | 90 | 9  | 12 | 1200 | 30             | 0.75 | 1.25 | 5 | 18.28          | 1.86 | 125.09 | 4       | 1.11 | 4.67 | 84/484 |
| 4 | 90 | 7  | 10 | 1500 | 70             | 1.25 | 1    | 6 | 21.13          | 1.49 | 156.29 | 4       | 1.18 | 4.63 | 523.73 |
| 4 | 90 | 11 | 10 | 1200 | 50             | 0.75 | 1    | 4 | 24.66          | 1.22 | 138.85 | 3       | 1.28 | 4.12 | 508.86 |
| 4 | 90 | 11 | 15 | 1000 | 50             | 1    | 0.75 | 8 | 21.9           | 1.02 | 138.4  | 5       | 1.18 | 3.87 | 509.12 |
| 4 | 70 | 11 | 12 | 1500 | 70             | 0.75 | 0.75 | 8 | 16.58          | 1.48 | 171.01 | 5       | 0.92 | 4.61 | 520.91 |
| 4 | 90 | 9  | 15 | 1500 | 30             | 1.25 | 0.75 | 2 | 29.74          | 1.08 | 128.97 | 2       | 1.01 | 3.91 | 490.63 |

Table 5 presented the significance of design parameters. In table 5, sample size (n) and control limit coefficient (L) are not mentioned. The above equations and Table 4 show that the optimal value of  $h_1$  is dependent on c; also the optimal value of E(A) is dependent on c, s,  $D_0$ , Y and b. This equation shows that E(A) increases by c and Y and decreases by b,  $D_0$  & s.

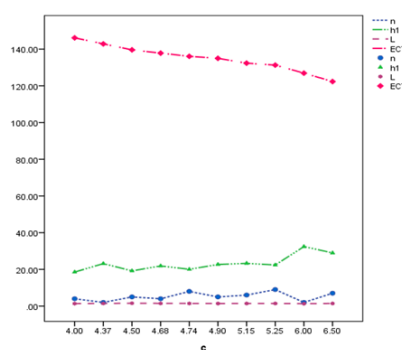
For enhancing the effect of the parameters, we study the sensitivity of the designs and corresponding optimal values of the Burr XII distribution parameters. At first, we investigated the influence of changes in each of the Burr parameters on the optimized values and design parameters. Table 6, 7 and 8 show the effect of changing the parameters k, c and s on the optimal values of the designs, respectively.

**Table 5.** Fixed parameters significant

| Source | p-value( $h_1$ ) | p-value(E(A)) |
|--------|------------------|---------------|
| C      | < 0.0001         | < 0.0001      |
| S      | < 0.0001         | 0.0003        |
| a      | 0.7802           | 0.3189        |
| b      | 0.1193           | 0.0178        |
| $D_0$  | 0.0790           | < 0.0001      |
| Y      | 0.8106           | 0.0033        |
| $Z_0$  | 0.6218           | 0.1976        |
| Z1     | 0.7070           | 0.1897        |

**Table 6:** Optimum design parameters when  $c$  is changed

| $c$  | $s$ | $k$ | $n$ | $h_1$ | $L$  | $ECT$   |
|------|-----|-----|-----|-------|------|---------|
| 4    | 70  | 10  | 4   | 18.56 | 1.33 | 146.164 |
| 4.37 | 70  | 10  | 2   | 23.14 | 1.46 | 142.874 |
| 4.68 | 70  | 10  | 4   | 21.88 | 1.48 | 137.835 |
| 5.25 | 70  | 10  | 9   | 22.4  | 1.45 | 131.305 |
| 4.9  | 70  | 10  | 5   | 22.67 | 1.4  | 134.996 |
| 4.5  | 70  | 10  | 5   | 19.2  | 1.56 | 139.616 |
| 6    | 70  | 10  | 2   | 32.41 | 1.28 | 126.92  |
| 5.15 | 70  | 10  | 6   | 23.27 | 1.42 | 132.36  |
| 4.74 | 70  | 10  | 8   | 20.06 | 1.45 | 136.091 |
| 6.5  | 70  | 10  | 7   | 28.99 | 1.43 | 122.357 |



**Figure 4:** Optimum design parameters when  $c$  is changed

Table 6 and Figure 4 illustrates that with the increase in  $c$ , cost function decreases but design parameters do not change significantly.

Table 7 and Figure 5 shows that with the increase in  $k$ , cost function and design parameters do not change significantly.

Table 8 and Figure 6 illustrates that, when  $\delta$  increases, cost function decreases but design parameters do not change significantly. In each table, one of the Burr distribution parameters has been changed. The results illustrate all design parameters. Also, in order to avoid the influence

**Table7:** Optimum design parameters when  $k$  is changed

| $k$ | $s$ | $c$ | $n$ | $h_1$ | $L$  | $ECT$   |
|-----|-----|-----|-----|-------|------|---------|
| 12  | 70  | 7   | 4   | 32.98 | 1.29 | 120.864 |
| 14  | 70  | 7   | 5   | 31.05 | 1.38 | 121.333 |
| 10  | 70  | 7   | 8   | 30.56 | 1.43 | 119.558 |
| 11  | 70  | 7   | 4   | 33.31 | 1.29 | 120.49  |
| 15  | 70  | 7   | 6   | 29.19 | 1.57 | 121.725 |
| 9   | 70  | 7   | 8   | 29.83 | 1.65 | 119.469 |
| 8   | 70  | 7   | 8   | 31.37 | 1.44 | 118.568 |
| 7   | 70  | 7   | 7   | 31.52 | 1.55 | 118.169 |
| 6   | 70  | 7   | 6   | 33.44 | 1.43 | 117.534 |
| 5   | 70  | 7   | 4   | 31.52 | 1.97 | 121.184 |



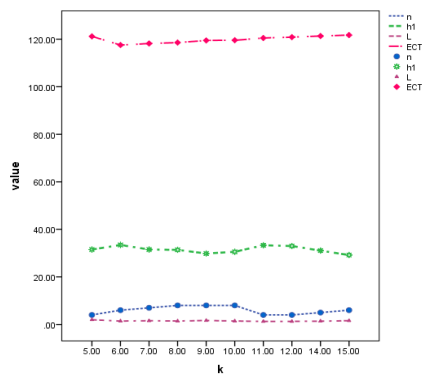


Figure 5: Optimum design parameters when k is changed

Table 8: Optimum design parameters when  $\delta$  is changed

| $\delta$ | $n$ | $h_1$ | $L$  | $ECT$   |
|----------|-----|-------|------|---------|
| 0.3      | 5   | 29.12 | 1.48 | 134.002 |
| 0.5      | 5   | 30.8  | 1.42 | 122.301 |
| 0.75     | 4   | 30.03 | 1.83 | 111.919 |
| 1        | 5   | 28.2  | 2.29 | 103.979 |
| 1.25     | 5   | 28.77 | 2.31 | 98.514  |
| 1.5      | 5   | 28.79 | 2.47 | 95.292  |
| 1.75     | 5   | 28.86 | 2.56 | 93.272  |
| 2        | 5   | 27.98 | 2.76 | 92.194  |
| 2.5      | 5   | 29.04 | 2.83 | 90.298  |
| 3        | 5   | 29.18 | 2.9  | 89.268  |

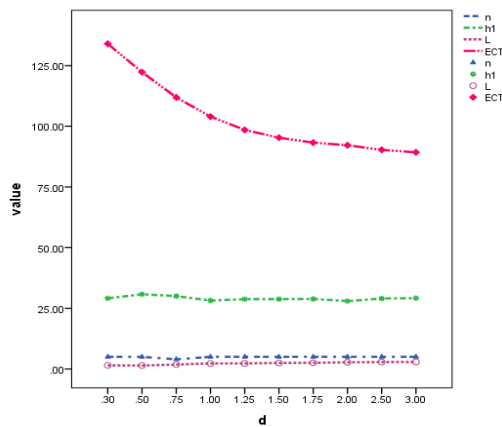


Figure 6: Optimum design parameters when  $\delta$  is changed

7- Conclusions:

In this paper, we used Banerjee and Rahim’s economic model for  $\bar{X}$  control charts for continuous flow process under Burr XII shock model.

We chose this distribution because its hazard rate is not constant and this distribution is the most important distribution in terms of reliability. Also, distributions like Normal, Weibull and many others can be approximated by Burr distribution.

The numerical results show that if the Burr distribution is adjusted to fit into the failure times of a process, our proposed designs under non-uniform sampling scheme performs better than the designs under uniform sampling scheme. Finally, the results of sensitivity analysis show that the increase in each parameter of the Burr XII distribution as a shock model leads to a slight reduction of the optimum amount of the expected cost per unit, decreasing the first sampling interval and not having a significant effect on the sample size and the width coefficient of control limits.

By comparison between different sampling interval scheme, this research shows that, the non-normal sampling interval better than non-uniform sampling interval.

### 8- References

- [1] Shewhart, W. A. (1931), *Economic Control of Quality of Manufactured Product*, New York: Van Nostrand.
- [2] Girshick, M. A., & Rubin, H. (1952). A Bayes approach to a quality control model. *The Annals of mathematical statistics*, 114-125.
- [3] Duncan, A. J. (1956). The economic design of X charts used to maintain current control of a process. *Journal of the American Statistical Association*, 51(274), 228-242.
- [4] Gibra, I. N. (1978). Economically optimal determination of the parameters of np-control charts. *Journal of Quality Technology*, 10(1), 12-19.
- [5] Montgomery, D. C. (1980). The economic design of control charts: a review and literature survey. *Journal of Quality Technology*, 12(2), 75-87.
- [6] Baker, K. R. (1971). Two process models in the economic design of an X chart. *AIIE Transactions*, 3(4), 257-263.
- [7] Heikes, R. G., Montgomery, D. C., & Yeung, J. Y. (1974). Alternative Process Models in the Economic Design of T<sup>2</sup> Control Charts. *AIIE Transactions*, 6(1), 55-61.
- [8] Montgomery, D. C., Heikes, R. G., and Mance, J. F. (1975). Economic design of fraction defective control charts. *Management Science*, 21(11), 1272-1284
- [9] Lorenzen, T. J., & Vance, L. C. (1986). The economic design of control charts: a unified approach. *Technometrics*, 28(1), 3-10.
- [10] Banerjee, P. K., & Rahim, M.A. (1988). Economic design of  $\bar{X}$  control charts under Weibull shock models, *Technometrics*, 30(4), 407-414.
- [11] Hu, P. W. (1984, May). Economic design of an X-control chart under non-poisson process shift. In *Abstract, TIMS/ORSA joint national meeting, San Francisco (Vol. 87)*.

- [12] Saadatmeli, A., Moghadam, M. B., Seif, A., & Faraz, A. (2018). Constrained optimal design of  $\bar{X}$  control chart with multiple assignable causes under Burr XII failure mechanism. *International Journal of Quality & Reliability Management*, 35(9), 1809-1834
- [13] Heydari, A. A., Moghadam, M. B., & Eskandari, F. (2017). An extension of Banerjee and Rahim model in economic and economic statistical designs for multivariate quality characteristics under Burr XII distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 46(16), 7855-7871.
- [14] KOO, T. Y., & CASE, K. E. (1990). Economic design of X-bar control charts for use in monitoring continuous flow processes. *THE INTERNATIONAL JOURNAL OF PRODUCTION RESEARCH*, 28(11), 2001-2011.
- [15] Duncan, A. J. (1971). The economic design of  $\bar{X}$  charts when there is a multiplicity of assignable causes. *Journal of the American Statistical Association*, 66(333), 107-121.
- [16] Yang YM, Su CY, Pearn WL. (2010). Economic design of  $\bar{X}$  control charts for continuous flow process with multiple assignable causes. *International Journal of Production Economics*. 128(1):110-117.
- [17] Chen, Y. S., & Yang, Y. M. (2002). An extension of Banerjee and Rahim's model for economic design of moving average control chart for a continuous flow process. *European Journal of Operational Research*, 143(3), 600-610.
- [18] Yu, F. J., & Wu, H. H. (2004). An economic design for variable sampling interval MA control charts. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 24(1-2), 41-47.
- [19] Brooks, D. H., & Case, K. E. (1987). The application of statistical process control to the continuous flow process: the effects of autocorrelated data. Unpublished Paper.

