مقاله پژوهشی

تعیین طرح بهینه در سانسور هیبرید نوع اول از توزیع بر نوع دوازده براساس تابع هزینه

الهام بصیری*

استادیار گروه ریاضیات و کاربردها دانشکده علوم پایه، دانشگاه کوثر بجنورد، خراسان شمالی، ایران. elham_basiri2000@yahoo.com

چکیده: سانسور هیبرید ترکیبی از طرح سانسور نوع اول و دوم است که خود بر حسب تعیین معیار پایان دادن به آزمایش به دو سانسور هیبرید نوع اول و دوم تقسیم می‌شود. یکی از مسایلی که در بحث سانسورها وجود دارد انتخاب بهترین طرح سانسور است. معیارهای مختلفی را برای تعیین طرح بهینه سانسور می‌توان در نظر گرفت که هر کدام ممکن است منجر به طرح متفاوتی شود. یکی از مهم‌ترین معیارها، معیار هزینه آزمایش است. در این مقاله با در نظر گرفتن هزینه آزمایش به‌عنوان معیار بهینه‌سازی در سانسور هیبرید نوع اول، به تعیین طرح بهینه سانسور پرداخته شده است، هرگاه طول عمر داده‌ها توزیع بر نوع ۱۲ باشد. برای ارزیابی نتایج مقاله محاسبات عددی و یک مثال ارائه شده است. در انتها هم جمع‌بندی از نتایج مقاله بیان شده است.

واژگان کلیدی: سانسور هیبرید نوع اول، طرح بهینه سانسور، تابع هزینه، توزیع بر نوع ۱۲

۱-مقدمه

بر[1] در سال ۱۹۴۲ توزیع بر نوع ۱۲ را به‌عنوان یکی از اعضای خانواده توزیع بر، معرفی کرد. این توزیع کاربردهای وسیعی به‌ویژه در کنترل کیفیت، تحلیل داده‌های نقص فنی، کارایی مسکن‌ها در آزمایشات پزشکی و مدل‌های قابلیت اطمینان در سیستم‌های مهندسی، مدل‌بندی توزیع درآمد و آزمون فرض دارد.

گویند متغیر طول عمر X دارای توزیع بر نوع ۱۲ با پارامترهای β و θ است، هرگاه تابع توزیع تجمعی آن به‌صورت زیر باشد.

$$F_{\theta,\beta}(x)=۱-(۱+x^{\theta})^{-\beta}, x>۰, \theta,\beta>۰. \quad (۱)$$

بسیاری از اوقات در مباحث قابلیت اعتماد، آزمون‌های طول عمر، تحلیل بقا و دیگر زمینه‌های کاربردی بنا به دلایلی از جمله زمان محدود، عدم دسترسی به همه قطعات یا گران بودن واحدهای تحت آزمایش، آزمایش‌گر نمی‌تواند زمان دقیق از کارافتادگی واحدهای تحت آزمایش را مشاهده کند. در چنین حالتی در اصطلاح گویند سانسور رخ داده است. سانسور به شیوه‌های مختلفی قابل اجرا است که از معروف‌ترین آن‌ها، سانسورهای نوع اول و نوع دو هستند.

اگر در آزمایشی با n واحد تمام واحدها در زمان $t=0$ شروع به فعالیت کنند و آزمایش در زمان مشخص و از قبل تعیین شده T خاتمه یابد، آنگاه سانسور نوع یک رخ داده است. همچنین، اگر در آزمایشی با n واحد، هدف ثبت دقیق زمان از کارافتادگی r $(r\leq n)$، باشد، در این‌صورت، آزمایش تا مشاهده r-امین شکست ادامه می‌یابد و بعد از آن متوقف می‌شود. در چنین حالتی طول عمر $(n-r)$ واحد باقیمانده سانسور می‌شود. در این‌صورت، سانسور نوع دو اتفاق افتاده است.

ترکیبی از طرح‌های سانسور نوع یک و دو به طرح دیگری به‌عنوان سانسور هیبرید[2] معروف است که خود به دو نوع یک و دو تقسیم می‌شود. فرض کنید n قطعه مورد آزمایش قرار گرفته‌اند. همچنین فرض کنید واحدها دارای طول عمر مستقل و هم توزیع با تابع چگالی $f(x)$ و تابع توزیع $F(x)$ باشند. اولین بار اپستین[3] [1] طرحی را در یک آزمایش بقا بررسی کرد که در آن آزمایش در زمان $T^*=\min(X_{r:n}, T)$ خاتمه می‌یابد، که T و r مقادیر از قبل تعیین شده هستند. چیلدز[4] و همکاران [2] این طرح سانسور را سانسور هیبرید نوع اول نامیدند. در این طرح ممکن است تا زمان T تعداد بسیار کمی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۳/۲۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۳/۳۰
دوره ۱۱/ شماره ۲
صفحات: ۲۰۳-۱۹۱

[1] Burr

*Corresponding author (elham_basiri2000@yahoo.com)
[2] Hybrid censoring
[3] Epstein
[4] Childs

شکست رخ دهد. برای حل این مشکل چیلدز و همکاران [۲] آزمایش دیگری را طراحی کردند که در آن آزمایش در زمان $T^*=\max(X_{r:n}, T)$ خاتمه می‌یابد، که T و r مقادیر از قبل تعیین شده هستند. این طرح که به سانسور هیبرید نوع دو معروف است مشکل طرح قبل را ندارد حتی ممکن است قبل از زمان T تمام واحدها با شکست مواجه شوند، اما زمان لازم برای آزمایش قابل پیش‌بینی نیست.

تاکنون پژوهش‌گران زیادی مطالعاتی درخصوص توزیع بر نوع ۱۲ و سانسور هیبرید انجام داده‌اند. به‌عنوان مثال می‌توان به کارهای اصغرزاده و عزیزپور[۱] [۳]، کایال[۲] و همکاران [۴] و یا اصغرزاده و همکاران [۵] اشاره کرد.

یکی از مسائلی که در بحث سانسورها اهمیت بسیاری دارد، مسأله تعیین طرح بهینه سانسور است. برای تعیین طرح بهینه می‌توان معیارهای متفاوتی را در نظر گرفت که هرکدام ممکن است منجر به طرح بهینه متفاوتی شوند. این مسأله تاکنون توسط پژوهش‌گران زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است. به‌عنوان مثال، بروسکات[۳] و همکاران [۶ و ۷]، طرح بهینه سانسور فزاینده را با مینیمم کردن واریانس بهترین برآوردگرهای خطی نااریب یافتند. والترمن[۴] و همکاران [۸] با در نظر گرفتن معیار پیتمن، طرح بهینه سانسور فزاینده را به‌دست آوردند. باتاچاریا[۵] و همکاران [۹] با تعریف یک تابع هزینه در سانسور هیبرید به تعیین طرح بهینه سانسور پرداختند. توزیع طول عمر داده‌ها وایبل در نظر گرفته شد. میشرا[۶] [۱۰] طرح بهینه سانسور فزاینده نوع دو را با در نظر گرفتن معیار آنتروپی به‌دست آورد. مسأله تعیین اندازه نمونه و طرح بهینه در سانسور فزاینده نوع دو بر اساس معیار اطلاع فیشر در توزیع پارتو توسط بصیری [۱۱] مورد بررسی قرار گرفت. طرح بهینه در سانسور فزاینده نوع دو از توزیع رایلی با برداشت‌های دوجمله‌ای براساس پیش‌بینی دونمونه‌ای بیزی و تابع هزینه نیز توسط بصیری و بیگی [۱۲] تعیین شد.

در این مقاله، هدف تعیین طرح بهینه در سانسور هیبرید نوع اول است طوری‌که هزینه کل آزمایش به حداقل برسد. برای این منظور، ابتدا یک تابع هزینه معرفی می‌شود و سپس با حداقل کردن تابع هزینه معرفی شده به تعیین طرح بهینه سانسور، یعنی مقدار بهینه برای (r,n,T)، پرداخته می‌شود.

[1] Asgharzadeh and Azizpour
[2] Kayal
[3] Burkschat
[4] Volterman
[5] Bhattacharya
[6] Mishra

ساختار مقاله به این شرح است. ابتدا به معرفی یک تابع هزینه در مدل سانسور هیبرید نوع یک پرداخته می‌شود. سپس با هدف به حداقل رساندن تابع هزینه طرح بهینه سانسور هیبرید تعیین می‌شود. برای دستیابی به این هدف، برای طرح سانسور سه حالت مختلف در نظر گرفته می‌شود. در حالت اول، مقدار n نامعلوم و مقادیر r و T معلوم فرض می‌شوند. بنابراین مقدار n به‌گونه‌ای تعیین می‌شود که تابع هزینه به‌ازای آن به حداقل برسد. در حالت دوم، مقدار r را نامعلوم و مقادیر n و T معلوم در نظر گرفته می‌شوند. در ادامه مقدار r طوری تعیین می‌شود که به‌ازای آن تابع هزینه حداقل شود. در حالت سوم، مقادیر r و n معلوم و مقدار T نامعلوم فرض می‌شود و با به حداقل رساندن تابع هزینه، مقدار بهینه برای T تعیین می‌شود. برای هر حالت محاسبات عددی و مثال عددی نیز ارائه می‌شود. در انتها، نتیجه‌گیری بیان می‌شود.

۲-نتایج اصلی

فرض کنید یک نمونه تصادفی متشکل از n واحد از توزیع بر نوع ۱۲ با پارامترهای β و θ، تحت آزمایش قرار گرفته‌اند. به منظور تعیین اندازه نمونه بهینه در سانسور هیبرید نوع یک، ابتدا تابع هزینه زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$C(r,n,T)=c_{\cdot}+c_u n+c_t Min(X_{r:n},T),$$

هرگاه c_0 هزینه راه‌اندازی اولیه آزمایش، c_u هزینه هر واحد تحت آزمایش و c_t هزینه زمان آزمایش هستند. لازم به ذکر است که این تابع هزینه توسط ابراهیمی[۷] [۱۳] برای تعیین اندازه نمونه بهینه در سانسور هیبرید از توزیع نمایی مورد استفاده قرار گرفت.

متوسط تابع هزینه را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$EC(r,n,T)=c_{\cdot}+c_u n+c_t E\left(Min(X_{r:n},T)\right). \quad (۲)$$

از طرفی داریم

$$Min(X_{r:n},T)=\begin{cases} T & T<X_{r:n} \\ X_{r:n} & T\geq X_{r:n} \end{cases}.$$

بنابراین

[7] Ebrahimi

$$E\left(Min(X_{r:n},T)\right)=T.P(X_{r:n}>T)+\int_0^T xf_{X_{r:n}}(x)dx$$

$$=T.\bar{F}_{X_{r:n}}(T)+\int_0^T xf_{X_{r:n}}(x)dx.$$

به‌کارگیری روش انتگرال‌گیری جزء به جزء نتیجه می‌دهد

$$\int_0^T xf_{X_{r:n}}(x)dx=T.F_{X_{r:n}}(T)-\int_0^T F_{X_{r:n}}(x)dx.$$

با جایگذاری مقدار فوق نتیجه می‌شود

(۳)

$$E\left(Min(X_{r:n},T)\right)=T.\bar{F}_{X_{r:n}}(T)+T.F_{X_{r:n}}(T)-\int_0^T F_{X_{r:n}}(x)dx$$

$$=T-\int_0^T F_{X_{r:n}}(x)dx.$$

از روابط (۲) و (۳) نتیجه می‌شود

$$EC(r,n,T)=c_0+c_u n+c_t T-c_t\int_0^T F_{X_{r:n}}(x)dx.$$

(۴)

از طرفی با توجه به دیوید و ناگاراجا[1] [۱۴] داریم

$$F_{X_{r:n}}(x)=\sum_{i=r}^{n}\binom{n}{i}F^i(x)\bar{F}^{n-i}(x).$$

بنابراین

$$EC(r,n,T)$$
$$=c_0+c_u n+c_t T-c_t\sum_{i=r}^{n}\binom{n}{i}\int_0^T F^i(x)\bar{F}^{n-i}(x)dx.$$

واضح است که $F(x)=1-\bar{F}(x)$، بنابراین به‌کارگیری بسط دوجمله‌ای برای عبارت $F^i(x)=\left(1-\bar{F}(x)\right)^i$ نتیجه می‌دهد

$$EC(r,n,T)$$
$$=c_0+c_u n+c_t T$$
$$-c_t\sum_{i=r}^{n}\sum_{l=0}^{i}\binom{n}{i}\binom{i}{l}(-1)^l\int_0^T \bar{F}^{n-i+l}(x)dx.$$

(۵)

در صورتی‌که داده‌ها از توزیع بر نوع ۱۲ تبعیت کنند، از روابط (۱) و (۵) داریم

$$EC(r,n,T)=c_0+c_u n+c_t T$$
$$-c_t\sum_{i=r}^{n}\sum_{l=0}^{i}\binom{n}{i}\binom{i}{l}(-1)^l\int_0^T (1+x^{\theta})^{-\beta(n-i+l)}dx.$$

با فرض θ=۱، رابطه فوق را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$EC(r,n,T)$$
$$=c_0+c_u n+c_t T$$
$$-c_t\sum_{i=r}^{n}\sum_{l=0}^{i}\binom{n}{i}\binom{i}{l}(-1)^l\int_0^T (1+x)^{-\beta(n-i+l)}dx$$
$$=c_0+c_u n+c_t T$$
$$-c_t\sum_{i=r}^{n}\sum_{l=0}^{i}\binom{n}{i}\binom{i}{l}(-1)^l\left\{\frac{(1+T)^{1-\beta(n-i+l)}-1}{1-\beta(n-i+l)}\right\}.$$

همان‌طور که از رابطه فوق مشاهده می‌شود، متوسط تابع هزینه به پارامترهای توزیع وابسته است. بنابراین چنانچه این پارامترها نامعلوم باشند نیاز است تا برآورد آن‌ها براساس اطلاعات قبلی جایگزین شوند.

در ادامه، در ابتدا فرض می‌شود که مقادیر r و T از قبل تعیین شده‌اند و باید مقدار بهینه برای n، یعنی nopt، به‌دست آید. برای تعیین nopt قرار دهید

$$\Delta EC(n)=EC(r,n,T)-EC(r,n-1,T).$$

در این‌صورت، nopt کوچک‌ترین مقدار n است که n≥r و $\Delta EC(n)\le 0$. از طرفی از رابطه (۴) می‌توان نوشت

$$\Delta EC(n)=c_u-c_t\int_0^T\left\{F_{X_{r:n}}(x)-F_{X_{r:n-1}}(x)\right\}dx$$

$$=c_u-c_t\binom{n-1}{r-1}\int_0^T F^{r-1}(x)\bar{F}^{n-r}(x)dx,$$

زیرا با توجه به دیوید و ناگاراجا [۱۴] داریم

$$F_{X_{r:n}}(x)=F_{X_{r:n-1}}(x)+\binom{n-1}{r-1}F^{r-1}(x)\bar{F}^{n-r}(x).$$

1 David and Nagaraja

بنابراین $\Delta EC(n) \le ۰$ معادل با این است که $G(n) \ge \frac{c_u}{c_t}$، هرگاه

$$G(n) = \binom{n-۱}{r-۱}\int_۰^T F^{r-۱}(x)\bar{F}^{n-r}(x)dx = \sum_{l=۰}^{r-۱}\binom{n-۱}{r-۱}\binom{r-۱}{l}(-۱)^l\int_۰^T \bar{F}^{n-r+l}(x)dx, \quad (۶)$$

که تساوی دوم از نوشتن بسط دوجمله‌ای برای $F^{r-۱}(x) = \left(۱-\bar{F}(x)\right)^{r-۱}$ حاصل شده است.

از روابط (۱) و (۶) می‌توان نوشت

$$G(n)=\sum_{l=0}^{r-1}\binom{n-1}{r-1}\binom{r-1}{l}(-1)^l\int_0^T(1+x^\theta)^{-\beta(n-r+l)}dx.$$

با فرض ۱=θ، رابطه فوق را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی نمود

$$G(n) = \sum_{l=۰}^{r-۱}\binom{n-۱}{r-۱}\binom{r-۱}{l}(-۱)^l\int_۰^T(۱+x)^{-\beta(n-r+l)}dx = \sum_{l=۰}^{r-۱}\binom{n-۱}{r-۱}\binom{r-۱}{l}(-۱)^l\left\{\frac{(۱+T)^{۱-\beta(n-r+l)}-۱}{۱-\beta(n-r+l)}\right\}.$$

با توجه به نتایج کسب شده، n_{opt} کوچک‌ترین مقدار n است که n≥r و $G(n) \ge \frac{c_u}{c_t}$ که به‌ازای آن تابع هزینه به حداقل می‌رسد. به عبارت دیگر

$$n_{opt} = \inf\left\{n;\quad n \ge r,\quad G(n) \ge \frac{c_u}{c_t}\right\}.$$

حال فرض کنید مقادیر n و T از قبل تعیین شده باشند و هدف تعیین مقدار بهینه برای r، یعنی r_{opt}، باشد. برای این منظور، قرار دهید

$$\Delta EC(r) = EC(r+۱,n,T) - EC(r,n,T).$$

در این‌صورت، r_{opt} کوچک‌ترین مقدار r است که n≥r و $\Delta EC(r) \ge ۰$. از طرفی از رابطه (۳) می‌توان نوشت

$$\Delta EC(r) = c_t\int_۰^T\left\{F_{X_{r:n}}(x) - F_{X_{r+۱:n}}(x)\right\}dx = c_t\binom{n}{r}\int_۰^T F^{r-۱}(x)\bar{F}^{n-r}(x)dx,$$

زیرا از دیوید و ناگاراجا [۱۴] داریم

$$F_{X_{r+۱:n}}(x) = F_{X_{r:n}}(x) + \binom{n}{r}F^{r-۱}(x)\bar{F}^{n-r}(x).$$

بنابراین $\Delta EC(r) \ge ۰$ معادل با این است که $K(r) \ge ۰$، هرگاه

$$K(r) = \int_۰^T F^{r-۱}(x)\bar{F}^{n-r}(x)dx = \sum_{l=۰}^{r-۱}\binom{r-۱}{l}(-۱)^l\int_۰^T\bar{F}^{n-r+l}(x)dx. \quad (۷)$$

از روابط (۱) و (۷) می‌توان نوشت

$$K(r) = \sum_{l=۰}^{r-۱}\binom{r-۱}{l}(-۱)^l\int_۰^T(۱+x^\theta)^{-\beta(n-r+l)}dx.$$

با فرض ۱=θ، رابطه فوق به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$K(r) = \sum_{l=۰}^{r-۱}\binom{r-۱}{l}(-۱)^l\int_۰^T(۱+x)^{-\beta(n-r+l)}dx = \sum_{l=۰}^{r-۱}\binom{r-۱}{l}(-۱)^l\left\{\frac{(۱+T)^{۱-\beta(n-r+l)}-۱}{۱-\beta(n-r+l)}\right\}.$$

با توجه به نتایج کسب شده، r_{opt} کوچک‌ترین مقدار r است که n≥r و $K(r) \ge ۰$ که به‌ازای آن تابع هزینه به حداقل می‌رسد. به عبارت دیگر

$$r_{opt} = \inf\{r;\quad r \le n,\quad K(r) \ge ۰\}.$$

برای ارزیابی نتایج به‌دست آمده، در ادامه به محاسبات عددی پرداخته می‌شود. فرض کنید ۱۰=T، ۲۰=c_0، ۲۵=c_t، ۵۰=c_u، ۲=β و ۱= θ. با توجه به اینکه $\frac{c_u}{c_t} = ۲$، بنابراین n_{opt} کوچک‌ترین مقدار n است که n≥r و $G(n) \ge ۲$. همچنین، r_{opt} کوچک‌ترین مقدار r است که n≥r و $K(r) \ge ۰$. در جدول ۱ مقادیر $EC(r,n,T)$، $G(n)$ و $K(r)$ به‌ازای مقادیر مختلف r و n گزارش شده است. با توجه به جدول ۱، مشاهده می‌شود که در تمامی حالات، n=r منجر به بهترین حالت، یعنی کمترین هزینه، می‌شود. به عبارت دیگر، کوچکترین مقدار n که $G(n) \ge ۲$ حالت n=r است. بنابراین n_{opt}=r. علاوه براین، کمترین مقدار برای r نیز کمترین تابع هزینه را نتیجه می‌دهد. به عبارت دیگر، ۱=r_{opt}. شکل ۱ نمودار $EC(r,n,T)$ را به‌ازای انتخاب‌های متفاوت r نمایش می‌دهد. از شکل ۱ می‌توان نتیجه گرفت که $EC(r,n,T)$ برای تمام مقادیر r، تابعی صعودی از n است. شکل ۲ نیز نمودار $G(n)$ را به‌ازای مقادیر مختلف r نشان می‌دهد. با

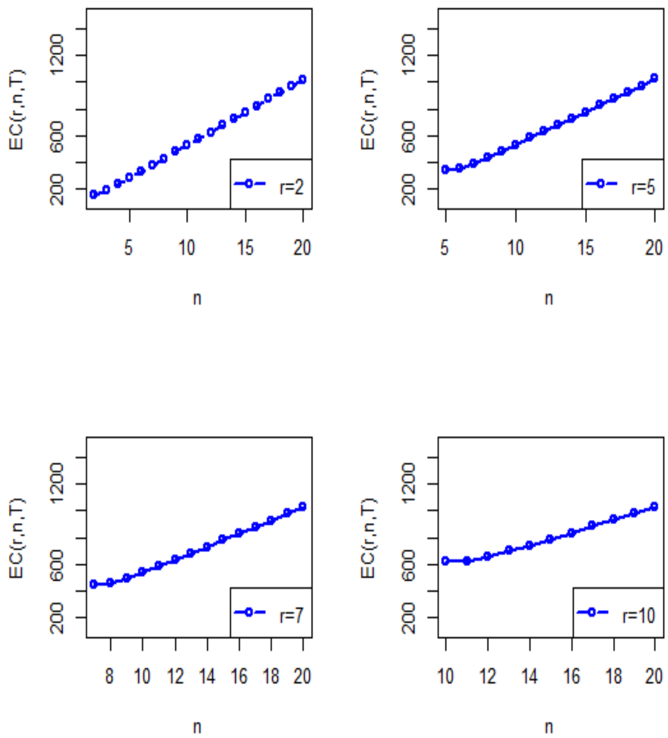
توجه به شکل ۲، $G(n)$ تابعی نزولی از n است. علاوه‌براین، کوچکترین مقدار n که شرط $G(n) \geq ۲$ برقرار است مقدار n=r است. شکل ۳ نیز نمودار $EC(r,n,T)$ به‌ازای مقادیر مختلف n است. از شکل ۳ ملاحظه می‌شود که $EC(r,n,T)$ تابعی صعودی از r است. در شکل ۴، نمودار $K(r)$ به‌ازای مقادیر مختلف n ارائه شده است. با توجه به شکل ۴، به‌ازای تمام مقادیر r شرط $K(r) \geq ۰$ برقرار است. به عبارت دیگر، شکل‌های ۱-۴ نتایج جدول ۱ را تایید می‌کنند. حال فرض کنید مقادیر r و n از قبل تعیین شده هستند و لازم است تا مقدار بهینه برای T، یعنی T_{opt} ، تعیین شود. برای این منظور با مشتق‌گیری از تابع رابطه (۴) نسبت به T می‌توان نوشت

$$\frac{\partial}{\partial T} EC(r,n,T) = c_t - c_t F_{X_{r:n}}(T).$$

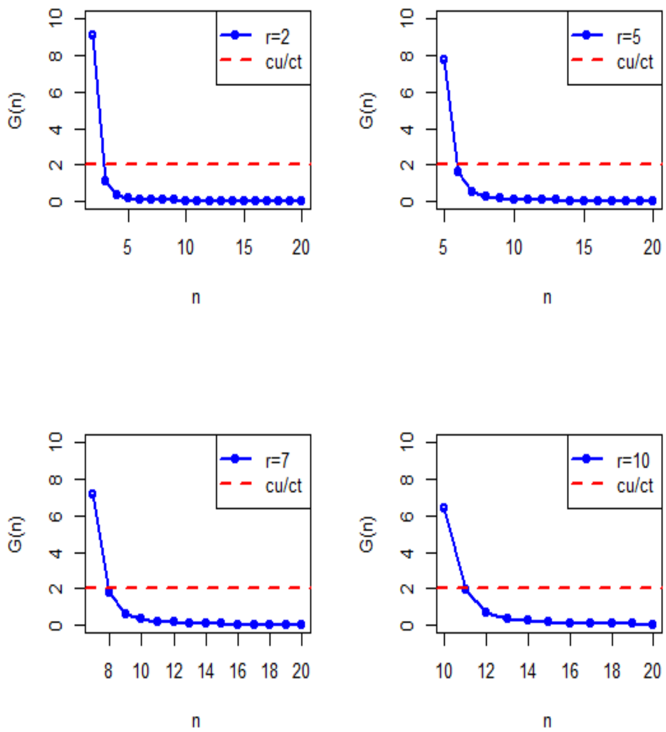
با توجه به اینکه همواره $۰ \leq F_{X_{r:n}}(T) \leq ۱$، بنابراین رابطه فوق همواره مثبت است. به عبارت دیگر تابع $EC(r,n,T)$ تابعی صعودی برحسب T است. بنابراین، کمترین مقدار T منجر به کمترین مقدار تابع هزینه می‌شود. شکل ۵، نمودار $EC(r,n,T)$ را به‌ازای انتخاب‌های متفاوت r و n نشان می‌دهد. شکل ۵ نیز این مطلب را تایید می‌کند که $EC(r,n,T)$ تابعی صعودی از T است.

جدول ۱. مقادیر $EC(r,n,T)$، $G(n)$ و $K(r)$ به‌ازای مقادیر مختلف r و n

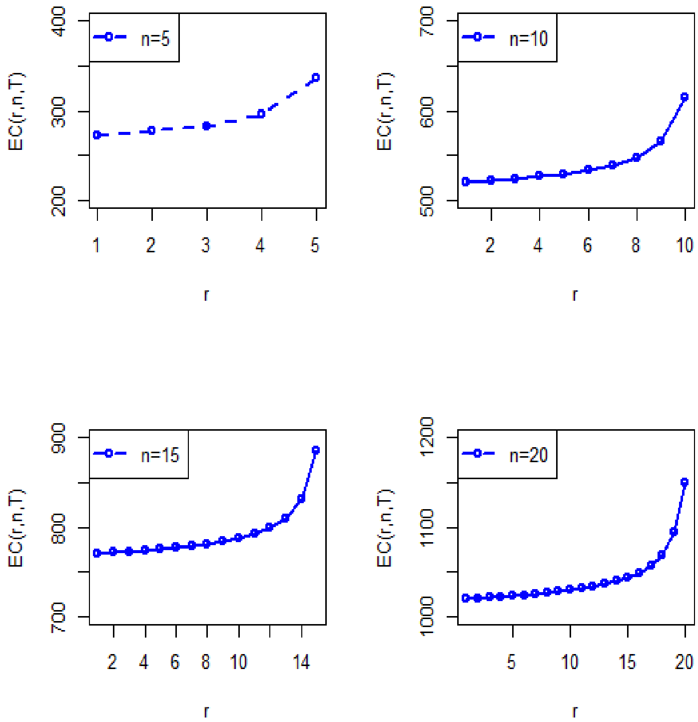
r	n	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	$EC(r,n,T)$	۱۲۸/۳۲	۱۷۴/۹۹	۲۲۳/۵۷	۲۷۲/۷۷	۳۲۲/۲۷	۳۷۱/۹۲	۴۲۱/۶۶	۴۷۱/۴۷	۵۲۱/۳۱
	$G(n)$	۰/۹۰	۰/۳۳	۰/۱۹	۰/۱۴	۰/۱۱	۰/۰۹	۰/۰۷	۰/۰۶	۰/۰۵
	$K(r)$	۱/۸۱	۰/۹۹	۰/۷۹	۰/۷۱	۰/۶۶	۰/۶۳	۰/۶۱	۰/۶۰	۰/۵۸
۲	$EC(r,n,T)$	۱۵۷/۱۲	۱۸۴/۹۸	۲۲۹/۲۸	۲۷۶/۷۴	۳۲۵/۳۰	۳۷۴/۳۷	۴۲۳/۷۱	۴۷۳/۲۳	۵۲۲/۸۶
	$G(n)$	۹/۰۹	۱/۱۵	۰/۳۹	۰/۲۲	۰/۱۵	۰/۱۲	۰/۰۹	۰/۰۸	۰/۰۷
	$K(r)$	۹/۰۹	۱/۷۲	۰/۷۹	۰/۵۷	۰/۴۷	۰/۴۲	۰/۳۹	۰/۳۶	۰/۳۵
۳	$EC(r,n,T)$	–	۲۱۸/۲۰	۲۴۰/۶۷	۲۸۳/۰۹	۳۲۹/۶۳	۳۷۷/۶۳	۴۲۶/۳۲	۴۷۵/۴۰	۵۲۴/۷۲
	$G(n)$	–	۸/۵۱	۱/۳۲	۰/۴۵	۰/۲۵	۰/۱۷	۰/۱۳	۰/۱۰	۰/۰۸
	$K(r)$	–	۸/۵۱	۱/۷۷	۰/۷۵	۰/۵۰	۰/۴۰	۰/۳۴	۰/۳۱	۰/۲۸
۴	$EC(r,n,T)$	–	–	۲۷۷/۳۷	۲۹۵/۷۳	۳۳۶/۵۵	۳۸۲/۲۹	۴۲۹/۸۰	۴۷۸/۱۷	۵۲۷/۰۰
	$G(n)$	–	–	۸/۰۷	۱/۴۶	۰/۵۰	۰/۲۷	۰/۱۸	۰/۱۳	۰/۱۱
	$K(r)$	–	–	۸/۰۷	۱/۸۳	۰/۷۵	۰/۴۸	۰/۳۷	۰/۳۱	۰/۲۷
۵	$EC(r,n,T)$	–	–	–	۳۳۵/۲۸	۳۵۰/۳۱	۳۸۹/۷۵	۴۳۴/۷۸	۴۸۱/۸۵	۵۲۹/۹۱
	$G(n)$	–	–	–	۷/۷۰	۱/۵۸	۰/۵۵	۰/۲۹	۰/۱۹	۰/۱۴
	$K(r)$	–	–	–	۷/۷۰	۱/۸۹	۰/۷۷	۰/۴۷	۰/۳۵	۰/۲۹
۶	$EC(r,n,T)$	–	–	–	–	۳۹۲/۲۷	۴۰۴/۵۴	۴۴۲/۷۳	۴۸۷/۲	۵۳۳/۷۹
	$G(n)$	–	–	–	–	۷/۳۸	۱/۶۷	۰/۵۹	۰/۳۱	۰/۲۱
	$K(r)$	–	–	–	–	۷/۳۸	۱/۹۵	۰/۷۸	۰/۴۷	۰/۳۵
۷	$EC(r,n,T)$	–	–	–	–	–	۴۴۸/۵۶	۴۵۸/۴۸	۴۹۵/۵۴	۵۳۹/۳۳
	$G(n)$	–	–	–	–	–	۷/۱۰	۱/۷۶	۰/۶۲	۰/۳۳
	$K(r)$	–	–	–	–	–	۷/۱۰	۲/۰۱	۰/۸۰	۰/۴۸
۸	$EC(r,n,T)$	–	–	–	–	–	–	۵۰۴/۲۹	۵۱۲/۱۷	۵۴۸/۲۰
	$G(n)$	–	–	–	–	–	–	۶/۸۵	۱/۸۳	۰/۶۶
	$K(r)$	–	–	–	–	–	–	۶/۸۵	۲/۰۶	۰/۸۳



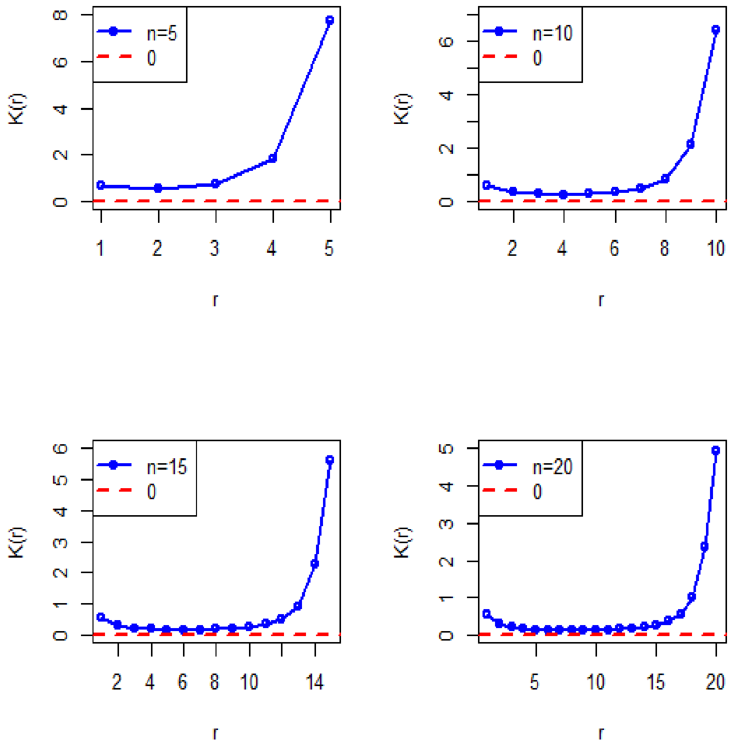
شکل ۱. نمودار $EC(r,n,T)$ به‌ازای انتخاب‌های مختلف r



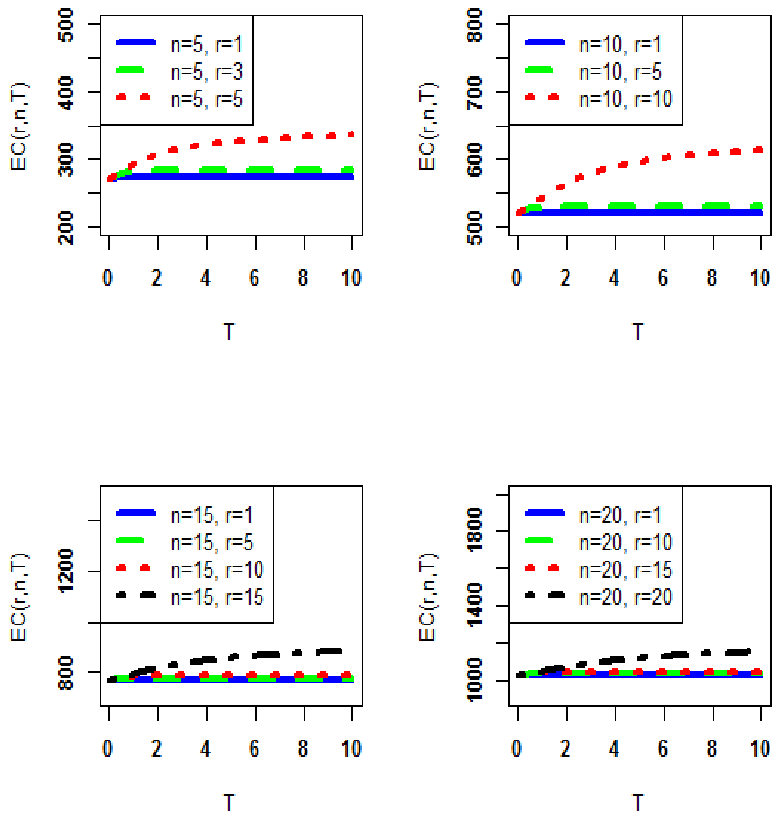
شکل ۲. نمودار $G(n)$ به‌ازای انتخاب‌های مختلف r



شکل ۳- نمودار $EC(r,n,T)$ به‌ازای انتخاب‌های مختلف n



شکل ۴. نمودار $K(r)$ به‌ازای انتخاب‌های مختلف n



شکل ۵- نمودار $EC(r,n,T)$ به‌ازای انتخاب‌های مختلف r و n، مثال عددی

در این بخش برای مطالعه بیشتر یک مثال عددی ارائه شده است. در این مثال، داده‌های جدول ۲ که توسط رستوگی و تریپاتی [۱۵] به‌عنوان داده‌هایی از توزیع بر نوع ۱۲ در نظر گرفته شده بودند، را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. این داده‌ها زمان‌های تسکین درد را برحسب ساعت برای ۲۰ بیمار نشان می‌دهند. با توجه به نتایج بخش قبل، کمترین مقدار برای r و T منجر به کمترین هزینه خواهد شد.

جدول ۲. زمان تسکین درد (برحسب ساعت) برای ۲۰ بیمار تحت آزمایش

۰/۹۱۷	۰/۶۶۵	۰/۵۶۶	۰/۶۹۸	۰/۶۵۳	۰/۵۵۴	۰/۸۷۹	۱/۱۳۸	۰/۸۸۱	۰/۸۲۸
۰/۸۲۹	۰/۶۸۳	۰/۸۹۹	۱/۰۵۰	۰/۷۸۸	۱/۰۳۷	۰/۸۶۶	۱/۱۱۰	۰/۷۸۶	۰/۵۲۹

۳- جمع‌بندی

در این مقاله، مسأله تعیین طرح بهینه در سانسور هیبرید نوع اول مورد مطالعه قرار گرفت. در ادامه با فرض اینکه داده‌های مورد بررسی از توزیع بر نوع ۱۲ پیروی کنند، با در نظر گرفتن تابع هزینه به تعیین طرح بهینه سانسور هیبرید پرداخته شد. نتایج نشان داد که انتخاب مقادیر کوچکتر برای r، n و T منجر به مقادیر کوچکتری برای تابع هزینه می‌شود. واضح است که انتخاب مقادیر کوچکتر برای r، n و T باعث می‌شود مشاهدات کمتری از آزمایش حاصل شود. برای این منظور، بسته به هدف مطالعه و با در نظر گرفتن معیارهای دیگری نظیر اطلاع فیشر و به‌عنوان معیار دوم بهینه‌سازی، می‌توان این مقادیر را تا حدی بزرگتر در نظر گرفت.

۴- تقدیر و تشکر

در اینجا لازم است از سردبیر، هیئت تحریریه، داوران و ویراستار محترم مجله به‌خاطر صرف وقت در مطالعه مقاله و ارائه پیشنهادات ارزنده، تقدیر و تشکر شود.

۵- منابع

[1] Epstein, B. (1954). Truncated life tests in the exponential case. The Annals of Mathematical Statistics, 555-564.

[2] Childs, A., Chandrasekar, B., Balakrishnan, N., & Kundu, D. (2003). Exact likelihood inference based on Type-I and Type-II hybrid censored samples from the exponential distribution. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 55(2), 319-330.

[3] Asgharzadeh, A., & Azizpour, M. (2016). Bayesian inference for Rayleigh distribution under hybrid censoring. International Journal of System Assurance Engineering and Management, 7(3), 239-249.

[4] Kayal, T., Tripathi, Y. M., Rastogi, M. K., & Asgharzadeh, A. (2017). Inference for Burr XII distribution under Type I progressive hybrid censoring. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 46(9), 7447-7465.

[5] Asgharzadeh, A., Kazemi, M., & Kundu, D. (2017). Estimation of P(X>Y) for Weibull distribution based on hybrid censored samples. International Journal of System Assurance Engineering and Management, 8(1), 489-498.

[6] Burkschat M, Cramer E, and Kamps U (2006), On Optimal Schemes in Progressive Censoring, Statistics and Probability letters, 76,1032-1036.

[7] Burkschat M, Cramer E, and Kamps U (2007), Optimality Criteria and Optimal Schemes in Progressive Censoring, Communications in Statistics-Theory and Methods, 36, 1419-1431.

[8] Volterman, W., Davies, F.K. and Balakrishnan, N. (2012), Pitman Closeness as a Criterion for the Determination of the Optimal Progressive Censoring Scheme, Statistical Methodology, 9, 563-572.

[9] Bhattacharya, R., Pradhan, B., & Dewanji, A. (2014). Optimum life testing plans in

presence of hybrid censoring: a cost function approach. Applied Stochastic Models in Business and Industry, 30(5), 519-528.

[10] Mishra, N. (2018), Optimal One-Step Censoring Schemes Under Entropy Criterion, Communications in Statistics-Simulation and Computation, 1-14.

[۱۱]بصیری، الهام. (۲۰۲۰). اندازه نمونه و طرح بهینه در سانسور فزاینده نوع دو بر اساس معیار اطلاع فیشر در توزیع پارتو. مجله اندیشه آماری, ۲۴(۲), ۲۵-۳۵.

[۱۲]بصیری، الهام و بیگی، سکینه (۲۰۲۰). طرح بهینه در در سانسور فزاینده نوع دو با برداشت‌های دوجمله‌ای از توزیع رایلی براساس پیش‌بینی دونمونه‌ای بیزی و تابع هزینه. مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی, ۱۰(۱), ۱۳۵-۱۵۷.

[13] Ebrahimi, N. (1988). Determining the sample size for a hybrid life test based on the cost function. Naval Research Logistics (NRL), 35(1), 63-72.

[14] David, H.A., Nagaraja, H.N. (2003). Order Statistics. 3rd ed. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.

[15] Rastogi, M. K., and Tripathi, Y. M. (2013). Inference on unknown parameters of a Burr distribution under hybrid censoring. Statistical Papers, 54(3), 619-643.

Determining optimal scheme in type I Hybrid censoring from Burr type XII distribution based on cost function

Elham Basiri[1]

Department of Statistics, Kosar University of Bojnord, Bojnord, Iran

Introduction

A combination of of type I and type II censoring schemes is known as hybrid censoring, which is divided into two types I and II. Suppose n items are tested. If the test is terminated at the time $T^*=min(X_{r:n}, T)$, then type I hybrid censoring is obtained, when r and T are pre-fixed values. One of issues that is very important in the discussion of censoring is the problem of optimal censoring scheme. To study this problem, different criteria can be considered, which may lead to a different optimal censoring scheme.

In this paper, we study the problem of finding the optimal censoring scheme for type I hybrid censoring. It means values of (r,n,T) are obtained so that the total cost of experiment is minimized, when the baseline distribution is the Burr XII distribution with cumulative distribution function as

$$F_{\theta,\beta}(x) = 1 - \left(1 + x^{\theta}\right)^{-\beta}, x > 0, \theta, \beta > 0.$$

Main results

Suppose a sample with n items from the Burr XII distribution. Here, we consider a cost function as

$$C(r,n,T) = c_0 + c_u n + c_t Min(X_{r:n}, T),$$

when, c_0, c_u and c_t are the sampling set-up cost or any other related cost involved in sampling, cost per unit and cost of total time on test, respectively.

[1] Corresponding author (elham_basiri2000@yahoo.com)

The expected cost function can be written as

$$EC(r,n,T)=c_0+c_u n+c_t E\big(Min(X_{r:n},T)\big).$$

After some calculations, the above relation can be expressed as

$$EC(r,n,T)=c_0+c_u n+c_t T-c_t\sum_{i=r}^{n}\sum_{l=0}^{i}\binom{n}{i}\binom{i}{l}(-1)^l\int_0^T\left(1+x^{\theta}\right)^{-\beta(n-i+l)}dx.$$

For $\theta=1$, we have

$$EC(r,n,T)=c_0+c_u n+c_t T-c_t\sum_{i=r}^{n}\sum_{l=0}^{i}\binom{n}{i}\binom{i}{l}(-1)^l\int_0^T(1+x)^{-\beta(n-i+l)}dx.$$

Firstly, assume that r and T are pre-fixed values and we should find the optimal value for n, namely n_{opt}. To this end, we define

$$\nabla EC(n)=EC(r,n,T)-EC(r,n-1,T).$$

So, n_{opt} is the smallest value of n which $\nabla EC(n)\le 0$. On the other hand, it can be shown that $\nabla EC(n)\le 0$ is equivalent to $\mathrm{G}(n)\ge\frac{c_u}{c_t}$, when

$$G(n)=\sum_{l=0}^{r-1}\binom{n-1}{r-1}\binom{r-1}{l}(-1)^l\frac{(1+T)^{1-\beta(n-r+l)}-1}{1-\beta(n-r+l)}.$$

So, we can conclude that

$$n_{opt}=inf\left\{n;n\ge r,\mathrm{G}(n)\ge\frac{c_u}{c_t}\right\}.$$

Now, assume that n and T ar pre-fixed values and the aim is finding the optimal value for r, r_{opt}. For this, we define

$$\nabla EC(r)=EC(r+1,n,T)-EC(r,n,T).$$

r_{opt} is the smallest r that $\nabla EC(r)\ge 0$. On the other hand, $\nabla EC(r)\ge 0$ is equivalent to $\mathrm{K}(r)\ge 0$, when

$$K(r)=\sum_{l=0}^{r-1}\binom{r-1}{l}(-1)^l\frac{(1+T)^{1-\beta(n-r+l)}-1}{1-\beta(n-r+l)}.$$

So, we find that

$$r_{opt}=inf\{r;r\le n,\mathrm{K}(r)\ge 0\}.$$

Finally, let r and n are pre-fixed values and the values of T should be obtained. For this purpose, we have

$$\frac{\partial}{\partial T}EC(r,n,T)=c_t-c_t F_{X_{r:n}}(x)=c_t\bar{F}_{X_{r:n}}(x).$$

which is a positive value, since $0\le\bar{F}_{X_{r:n}}(x)\le 1$. So, $EC(r,n,T)$ is an increasing function of T. It concludes that smaller values of T lead to smaller values of $EC(r,n,T)$.

Reference

[1] Epstein, B. (1954). Truncated life tests in the exponential case. The Annals of Mathematical Statistics, 555-564.

[2] Childs, A., Chandrasekar, B., Balakrishnan, N., & Kundu, D. (2003). Exact likelihood inference based on Type-I and Type-II hybrid censored samples from the exponential distribution. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 55(2), 319-330.

[3] Asgharzadeh, A., & Azizpour, M. (2016). Bayesian inference for Rayleigh distribution under hybrid censoring. International Journal of System Assurance Engineering and Management, 7(3), 239-249.

[4] Kayal, T., Tripathi, Y. M., Rastogi, M. K., & Asgharzadeh, A. (2017). Inference for Burr XII distribution under Type I progressive hybrid censoring. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 46(9), 7447-7465.

[5] Asgharzadeh, A., Kazemi, M., & Kundu, D. (2017). Estimation of P(X>Y) for Weibull distribution based on hybrid censored samples. International Journal of System Assurance Engineering and Management, 8(1), 489-498.

[6] Burkschat M, Cramer E, and Kamps U (2006), On Optimal Schemes in Progressive Censoring, Statistics and Probability letters, 76,1032-1036.

[7] Burkschat M, Cramer E, and Kamps U (2007), Optimality Criteria and Optimal Schemes in Progressive Censoring, Communications in Statistics-Theory and Methods, 36, 1419-1431.

[8] Volterman, W., Davies, F.K. and Balakrishnan, N. (2012), Pitman Closeness as a Criterion for the Determination of the Optimal Progressive Censoring Scheme, Statistical Methodology, 9, 563-572.

[9] Bhattacharya, R., Pradhan, B., & Dewanji, A. (2014). Optimum life testing plans in presence of hybrid censoring: a cost function approach. Applied Stochastic Models in Business and Industry, 30(5), 519-528.

[10] Mishra, N. (2018), Optimal One-Step Censoring Schemes Under Entropy Criterion, Communications in Statistics-Simulation and Computation, 1-14.

[11] Ebrahimi, N. (1988). Determining the sample size for a hybrid life test based on the cost function. Naval Research Logistics (NRL), 35(1), 63-72.

[12] David, H.A., Nagaraja, H.N. (2003). Order Statistics. 3rd ed. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.

[13] Rastogi, M. K., and Tripathi, Y. M. (2013). Inference on unknown parameters of a Burr distribution under hybrid censoring. Statistical Papers, 54(3), 619-643.