

طراحی آماری نمودار کنترلی \bar{X} با اندازه نمونه‌های متغیر تحت مدل شوک وایبول با فاصله‌های نمونه‌گیری نایک‌نواخت

بهمن فصیحی

دانشجوی دکتری، دانشگاه علامه طباطبایی، گروه آمار، تهران، ایران. b_fasihi@atu.ac.ir

رضا پورطاهری*

(نویسنده مسئول)، دانشیار، دانشکده علوم پایه، گروه آمار، دانشگاه علامه طباطبایی، تهران، ایران. pourtaheri@atu.ac.ir

چکیده: این مقاله برای اولین بار در طراحی آماری نمودارهای کنترلی تطبیقی به طراحی آماری نمودار کنترلی تک متغیره \bar{X} تحت مدل شوک وایبول پرداخته است. در عمل، به کارگیری مدل‌های شوک که دارای تابع‌های نرخ خطر منقطع‌تری است، در طراحی آماری نمودارهای کنترلی تطبیقی به واقعیت نزدیک‌تر است. این تحقیق نشان می‌دهد که نمودار \bar{X} تحت مدل شوک وایبول (VRS) با فاصله‌های نمونه‌گیری نایک‌نواخت و اندازه نمونه متغیر، نسبت به نمودار \bar{X} تحت مدل شوک وایبول با فاصله‌های نمونه‌گیری نایک‌نواخت و اندازه نمونه ثابت (FRS)، در کشف تغییرات میانگین سریع‌تر بوده و عملکرد بهتری دارد. در این مدل با افزایش تغییرات در میانگین، سرعت کشف تغییرات در میانگین افزایش پیدا می‌کند و مقدار h_1 افزایش و مقدار متوسط تعداد هشدارهای غلط (ANF) کاهش پیدا می‌کند. همچنین تغییرات نسبتاً بزرگ ($\delta \geq 2$)، به اندازه نمونه مطلوب نسبتاً کوچک ($n_p \leq 10$) و تغییرات کوچک‌تر ($0.25 \leq \delta < 2$)، به اندازه نمونه بهینه بزرگ‌تر ($11 \leq n_p \leq 14$) منجر می‌شود.

کلمات کلیدی: طراحی آماری، نمودار کنترلی \bar{X} ، فاصله نمونه‌گیری نایک‌نواخت، مدل شوک وایبول.

۱. مقدمه

حتی اگر تمام نقاط در داخل حدود کنترل به گونه‌ای باشد که از یک حالت غیر تصادفی و سیستماتیک برخوردار باشد، آن‌گاه نیز فرایند خارج از کنترل محسوب می‌شود. طراحی نمودارهای کنترلی به معنی تصمیم‌گیری در مورد سه پارامتر طراحی یعنی، اندازه‌ی نمونه (n)، فاصله‌ی زمانی نمونه‌گیری (h) و ضریب حدود کنترل (k) است.

برای کنترل فرایند تک‌متغیری افرادی همانند بور^۳ (۱۹۶۹) [۱]، پرابهو و همکاران^۴ (۱۹۹۳) [۲] و کوستا^۵ (۱۹۹۷) [۳] طرح نمونه‌گیری VSS^* با دو اندازه نمونه متغیر $\bar{\mu}$ را به منظور بهبود عملکرد نمودار کنترلی شوهارتی \bar{X} مورد بحث و مطالعه قرار دادند. در ادامه زیمیر و همکاران^۶ (۱۹۹۸) طرح VSS را با استفاده از سه اندازه نمونه $VSS - 3$ ارائه نمودند و عنوان

نمودارهای کنترلی یکی از مهم‌ترین ابزار SPC^1 هستند. در دهه ۱۹۲۰، شوهارت اولین نمودار کنترلی برای پیش‌فرایند تک‌متغیری را با هدف کاهش هزینه‌های کنترل آماری فرایند ارائه داد که بعدها معروف به نمودار کنترل شوهارت \bar{X} شد. نمودار کنترلی شوهارتی با نرخ نمونه‌گیری ثابت (FRS)^۲، رایج‌ترین و مرسوم‌ترین نمودارهای کنترلی برای کنترل میانگین فرایند تک‌متغیری است. در این طرح، نمونه‌هایی با اندازه‌ی ثابت n_0 در فاصله‌های زمانی ثابت h_0 انتخاب می‌شوند. چنانچه برای نمونه‌ای، آماره حاصل مابین حدود کنترلی قرار نگیرد، هشدار لازم دال بر عدم پایداری فرایند به مخاطب ارسال می‌شود. البته

* (Corresponding author) pourtaheri@atu.ac.ir

³Burr

⁴Prabhu et al

⁵Costa

⁶Variable Sampel Size

⁷Zimer et al

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۱/۲۵

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۹/۲۱

دوره ۱۱/ شماره ۳

صفحات: ۲۲۱-۲۴۱

¹ Statistical Process Control

² Fix Rate Scheme

پارامترهای طراحی نمودارهای کنترلی تطبیقی مورد بررسی قرار گرفته است. دیگر مدل‌های شوک که دارای تابع‌های نرخ خطر منعطف‌تری هستند تاکنون در طراحی آماری نمودارهای کنترلی تطبیقی مورد بررسی قرار نگرفته است. چون در وضعیت نمونه‌گیری یکنواخت نیز (که حالتی ساده تر محسوب می‌شود) زنجیر مارکوف همگن نمی‌باشد. بنابراین می‌توان گفت این زنجیر مارکوف در حالت کلی برای مدل‌های شوک غیرنمایی همگن نمی‌باشد. در این تحقیق برای برقراری شرط همگن بودن زنجیر دو محدودیت اعمال شده است: ناپیکنواخت بودن فاصله نمونه‌گیری و ثابت بودن نرخ خطر تجمعی در فواصل نمونه‌گیری. لذا در این مقاله برای اولین بار قصد بر این است که به طراحی آماری نمودار کنترلی تک متغیره \bar{X} تحت مدل شوک وایبول^۹ (VRS) بپردازیم.

ساختار این مقاله به این صورت است که در بخش ۲، مروری بر توزیع وایبول ارائه می‌شود. در بخش ۳، رویکرد زنجیر مارکوف در به دست آوردن ماتریس احتمال انتقال و اثبات مارکوف همگن بودن محاسبه شده است. در بخش ۴، طراحی آماری نمودار کنترلی \bar{X} تحت مدل شوک وایبول (VRS) ارائه می‌شود. در بخش ۵ نیز علاوه بر تعیین مقدار بهینه‌ی پارامترهای طراحی، مقایسه‌ای بین مدل پیش‌نهادی ما با نمودار کنترلی آماری \bar{X} - FRS تحت سازوکار شکست فرایند وایبول با نمونه‌گیری ناپیکنواخت انجام می‌گیرد و در نهایت، نتیجه‌گیری در بخش ۶ ارائه می‌شود.

۲. مروری بر توزیع وایبول

اگر متغیر تصادفی X دارای تکیه‌گاه با مقدارهای نامنفی و پیوسته باشد، به طوری که تابع چگالی آن به شکل زیر نوشته شود، آنگاه می‌گوییم این متغیر تصادفی دارای توزیع وایبول با پارامترهای v و λ است.

$$f(x; \lambda, v) = \begin{cases} \lambda v x^{v-1} e^{-\lambda x^v} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

نمودار تابع چگالی این متغیر تصادفی در شکل ۱ قابل مشاهده است.

داشتند که این طرح نسبت به طرح $VSS - 2$ از کارایی بالاتری برخوردار است، اما تفاوت چندان معنی‌دار نیست. لذا در به‌کارگیری طرح VSS استفاده از دو اندازه‌ی نمونه کفایت می‌کند. [۴]

رینولدز و همکاران^۸ (۱۹۸۹) یک راهبرد تطبیقی برای انتخاب فاصله‌های نمونه‌گیری بر اساس مقدار آماره نمونه قبل ارائه دادند و نشان دادند این طرح نمودار کنترلی با فاصله‌های نمونه‌گیری متغیر ($\bar{X} - VSI$)، تغییرهای کوچک تا متوسط در میانگین فرایند را سریع‌تر از طرح کلاسیک $\bar{X} - FRS$ تشخیص می‌دهد. [۵] آپاراسی^{۱۰} روند تطبیقی (که حداقل یکی از پارامترهای طراحی (n, h, k) در طول زمان تغییر می‌کند) را در نمودارهای کنترلی از حالت تک‌متغیری به حالت چند متغیری تعمیم داد. بدین ترتیب که ابتدا طراحی آماری نمودار کنترلی با اندازه‌های نمونه‌ی متغیر (VSS) را معرفی کرد. [۶] سپس به همراه هارو^{۱۱} نمودارهای کنترلی با فاصله‌های نمونه‌گیری متغیر (VSI) و با اندازه‌های نمونه و فاصله‌های نمونه‌گیری متغیر ($VSSI$)^۵ را مطرح نمودند (آپاراسی و هارو، ۲۰۰۳). [۷] قناتیان و همکاران^۶ (۲۰۱۷) طرح‌های آماری - اقتصادی برای نمودارهای کنترلی $VSSI-MEWMA-DWL$ تحت مدل شوک نمایی و چند علت اسنادپذیر را بررسی نمودند. [۸] بامنی مقدم و رفیعی^{۱۳۹۶} طراحی آماری - اقتصادی نمودار کنترلی \bar{X} با داده‌های همبسته تحت مدل شوک نمایی تعمیم‌یافته و وایبول را توسعه داده‌اند. [۹] نادری و همکاران^۸ (۲۰۲۰) به طراحی حداقل زیان نمودار کنترلی \bar{X} برای داده‌های همبسته تحت علت‌های اسنادپذیر چندگانه با توزیع زمان تحت کنترل وایبول پرداختند. [۱۰]

تاکنون طراحی آماری نمودارهای کنترلی تحت توزیع‌های طول عمر متعددی با تابع‌های نرخ شکست ثابت، نزولی، صعودی، گودالی شکل (U-شکل) تحت حضور یک علت اسنادپذیر و علل اسنادپذیر (علل اسنادپذیر چندگانه) ارائه شده‌اند، ولی تنها مدل شوک نمایی در طراحی آماری انواع نمودارهای کنترلی تطبیقی یک یا چندمتغیره در انواع شیوه‌های مذکور در تعیین

^۸ Reynolds and e

^۲ Variable Sampling Intervals

^{۱۰} Aparisi

^{۱۱} Haro

^۵ Variable Sample Sizes and Sampling interval

^۶ Ghanaatiyan et al

^۷ variable sample size and sampling interval multivariate exponentially weighted moving average control chart by using double warning lines

^۸ Naderi et al

^۹ Variable Rate Scheme

$$r(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

$r(x)$ نشان دهنده احتمال شرطی خراب شدن قطعه‌ای است که x واحد زمان عمر کرده است.

اگر متغیر تصادفی X بیانگر «زمان شکست»^۱ باشد، توزیع وایبول می‌تواند برای توصیف این متغیر تصادفی به کار رود، به طوری که نرخ شکست، متناسب با زمان و به صورت نمایی است. در این حالت پارامتر v نشانگر «متوسط نرخ شکست»^۲ است.

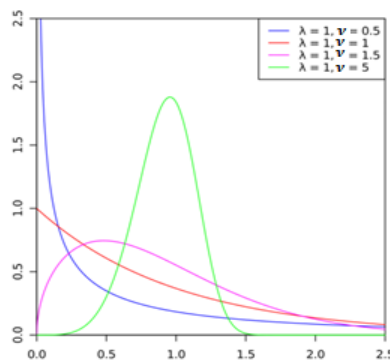
$v < 1$ بیانگر نزولی بودن نرخ شکست است، به این معنی که با گذشت زمان، احتمال شکست برای پدیده‌ای با این خصوصیت کاهش می‌یابد. اگر $v = 1$ باشد، نرخ شکست به صورت ثابت خواهد بود. و توزیع وایبول تبدیل به توزیع نمایی می‌شود. $v > 1$ نیز نشان دهنده صعودی بودن نرخ شکست است. به این ترتیب با طول عمر بیشتر، احتمال شکست یا خطا افزایش می‌یابد. در بسیاری از شرایط در صنعت سامانه رو به زوال است و احتمال شکست در سامانه با گذشت زمان افزایش می‌یابد. در نتیجه تحت این شرایط انتخاب یک تابع توزیع با نرخ شکست افزایش منطقی‌تر است. در نتیجه با فرض این که احتمال شکست رو به افزایش است، توزیع وایبول به عنوان مکانیزم شکست انتخاب شد.

تابع توزیع تجمعی برای متغیر تصادفی وایبول به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x^v} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

۳. مقدمه‌ای بر رویکرد زنجیر مارکوف

فرایند از حالت تحت کنترل آماری $\mu = \mu_0$ آغاز به کار می‌کند. وقوع انحراف با دلیل منجر به تغییر در میانگین فرایند می‌شود. فرض می‌کنیم زمان قبل از وقوع انحراف با دلیل فرایند که آن را با T نشان می‌دهیم، از توزیع وایبول با پارامتر (λ, v) پیروی



نمودار ۱: نمودار تابع چگالی وایبول

در این نمودار به خوبی مثبت بودن مقادیر متغیر تصادفی دیده می‌شود. همانطور که در تصویر دیده می‌شود، با تغییر مقدار پارامتر v ، شکل تابع چگالی احتمال برای این متغیر تصادفی تغییر می‌کند و با افزایش پارامتر v به سمت توزیع نرمال میل می‌کند.

زمانی که $0 < v < 1$ باشد، تابع چگالی با نزدیک شدن مقدار x به صفر به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. از آنجایی که در این حالت توان X یعنی $v - 1$ ، در تابع چگالی منفی است ($v < 1$)، نمودار آن به صورت نزولی است. در چنین حالتی، شیب منحنی در نزدیکی $x = 0$ ، منفی بی‌نهایت است.

اگر $v = 1$ باشد قسمت مربوط به λx از چگالی حذف شده و متغیر تصادفی دارای توزیع نمایی با نرخ شکست λ خواهد شد. در این حالت تابع چگالی با نزدیک شدن x به صفر، λ به سمت ۱ میل می‌کند. در تصویر با توجه به مقدار $\lambda = 1$ تابع چگالی احتمال در نقطه $x = 0$ به مقدار ۱ رسیده است.

به ازاء مقدار $v > 1$ ، با نزدیک شدن مقدار x به سمت صفر تابع چگالی نیز به صفر میل می‌کند. به این ترتیب با افزایش مقدار x تا رسیدن به مقدار نمای توزیع، تابع چگالی صعودی و پس از آن نزولی خواهد شد.

زمانی که $1 < v < 2$ باشد شیب منحنی در زمانی که x به سمت صفر میل می‌کند به سمت مثبت بی‌نهایت می‌رود. از طرفی زمانی که $v > 2$ باشد، شیب منحنی تابع چگالی در $x = 0$ برابر با صفر است.

تابع نرخ شکست $r(t)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

¹ failure time

² mean failure rate

حالت ۴: $LWL < \bar{X} < UWL$ بوده و فرایند خارج از کنترل است. (نمونه n_1)

حالت ۵: $UWL \leq \bar{X} < UCL$ یا $LCL < \bar{X} \leq LWL$ بوده و فرایند خارج از کنترل است. (نمونه n_2)

حالت ۶: (حالت جاذب): هنگامی رخ می‌دهد که $\bar{X} \geq UCL$ یا $\bar{X} \leq LCL$ بوده و فرایند خارج از کنترل باشد. به راحتی مشاهده می‌شود که حالت ۳ یک زنگ خطر اشتباه و حالت ۶ یک زنگ خطر صحیح است.

در قضیه زیر بیان می‌کنیم $\{X_n | n=0, 1, 2, \dots\}$ یک زنجیر مارکوف با فضای وضعیت $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است.

قضیه ۱: فرایند تصادفی $\{X_n | n = 0, 1, 2, \dots\}$ با فضای حالت شمارای E ، یک زنجیر مارکوف است، به عبارتی به ازای هر $n \geq 1$ و هر x_0, x_1, \dots, x_n, x و y از حالت‌ها، برابری:

$$P(X_{n+1}=y | X_0=x_0, X_1=x_1, \dots, X_n=x) \\ = P(X_{n+1}=y | X_n=x)$$

برقرار است. یعنی فقط اطلاع از حالت فرایند در مرحله n برای تعیین توزیع حالت فرایند در مرحله $n+1$ کفایت می‌کند و اطلاعات قبل از آن موثر نخواهد بود. (اثبات در پیوست ۱)

قضیه ۲: فرایند تصادفی $\{X_n | n=0, 1, 2, \dots\}$ با فضای حالت شمارای E ، یک زنجیر مارکوف همگن است. به عبارتی احتمال‌های انتقال به مرحله n بستگی ندارد. یعنی: (اثبات در پیوست ۲)

$$p_{xy} = P(X_{n+1}=y | X_n=x) \quad ; \forall x, y \in E, \forall n \geq 1$$

۴. طراحی آماری نمودار کنترلی \bar{X} تحت مدل شوک وایبول (VRS)

در این طرح نمونه‌گیری از دو حد هشدار اضافی با فاصله نمونه‌گیری نایک‌نواخت h_1 و دو حجم نمونه متفاوت n_1 و n_2 به صورتی که $n_2 > n_1$ باشد برای طراحی نمودار کنترل استفاده می‌شود. چنانچه اگر نمونه در نزدیک خط مرکز نمودار کنترل و بین حدود هشدار قرار بگیرد از اندازه نمونه کوچکتر n_1 برای

می‌کند. بنابراین، میانگین زمانی که فرایند در حالت تحت کنترل آماری باقی می‌ماند برابر $(1 + \frac{1}{\nu}) \lambda^{-\frac{1}{\nu}} \Gamma(\frac{1}{\nu})$ است. همچنین فرض می‌کنیم فرایند خود اصلاح نیست. از زمانی که فرایند شروع به کار می‌کند تا لحظه‌ای که مجدداً پس از اصلاح به حالت تحت کنترل درآید، یک چرخه‌ی کیفیت نامیده می‌شود. بنابراین زمانی که فرایند از کنترل خارج می‌شود تا انتهای چرخه فرایند به حالت تحت کنترل باز نخواهد گشت.

۳-۱. رویکرد زنجیر مارکوف در به دست آوردن ماتریس احتمال انتقال

فرض کنید نمودار کنترلی \bar{X} برای کنترل کردن یک فرایندی به کار گرفته شده است که X_n نشان دهنده وضعیت فرایند در n امین مرحله نمونه‌گیری در یک چرخه کیفیت باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} X_n = 1 & \iff \bar{X}_n \in A \cdot \mu_n = \mu_0 \\ X_n = 2 & \iff \bar{X}_n \in B \cdot \mu_n = \mu_0 \\ X_n = 3 & \iff \bar{X}_n \in C \cdot \mu_n = \mu_0 \\ X_n = 4 & \iff \bar{X}_n \in A \cdot \mu_n = \mu_1 \\ X_n = 5 & \iff \bar{X}_n \in B \cdot \mu_n = \mu_1 \\ X_n = 6 & \iff \bar{X}_n \in C \cdot \mu_n = \mu_1 \end{aligned}$$

که در آن μ_n میانگین مشخصه کیفیت در n امین مرحله نمونه‌گیری و \bar{X}_n میانگین نمونه گرفته شده در n امین مرحله نمونه‌گیری است. همچنین داریم:

$$A = (LWL, UWL)$$

$$B = (UWL, UCL) \cup (LCL, LWL)$$

$$C = (-\infty, UCL) \cup (UCL, +\infty)$$

به عبارتی در هر مرحله‌ی نمونه‌گیری یکی از شش حالت زیر ممکن است رخ دهد:

حالت ۱: $LWL < \bar{X} < UWL$ بوده و فرایند تحت کنترل است. (نمونه n_1)

حالت ۲: $UWL \leq \bar{X} < UCL$ یا $LCL < \bar{X} \leq LWL$ بوده و فرایند تحت کنترل است. (نمونه n_2)

حالت ۳: $\bar{X} \geq UCL$ یا $\bar{X} \leq LCL$ بوده و فرایند تحت کنترل است. (نمونه n_2) (هشدار اشتباه)

نشریه مهندسی و مدیریت کیفیت

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} & p_{36} \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & p_{45} & p_{46} \\ 0 & 0 & 0 & p_{54} & p_{55} & p_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1-4)$$

که در رابطه (۴-۱)، p_{ij} بیان‌گر احتمال شرطی تغییر وضعیت از حالت پیشین i به حالت فعلی j است. با توجه به این که در طرح نمونه‌گیری VRS فاصله‌ی نمونه‌گیری در وضعیت فعلی به وضعیت پیشین بستگی دارد. لذا p_{ij} ها عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} p_{11} &= p_{21} = p_{31} = P(|Z| < w) e^{-\lambda(h_1)^v} \\ p_{12} &= p_{22} = p_{32} = P(w \leq |Z| < k) e^{-\lambda(h_1)^v} \\ p_{13} &= p_{23} = p_{33} = P(|Z| \geq k) e^{-\lambda(h_1)^v} \\ p_{14} &= P(-\delta\sqrt{n_1} - w \leq Z < -\delta\sqrt{n_1} + w) (1 - e^{-\lambda(h_1)^v}) \\ p_{15} &= \{P(-\delta\sqrt{n_1} + w \leq Z < -\delta\sqrt{n_1} + k) \\ &\quad + P(-\delta\sqrt{n_1} - k < Z \leq -\delta\sqrt{n_1} - w)\} (1 - e^{-\lambda(h_1)^v}) \\ p_{16} &= \{P(Z \leq -\delta\sqrt{n_1} + k) + P(Z \geq -\delta\sqrt{n_1} - k)\} (1 - e^{-\lambda(h_1)^v}) \\ p_{24} &= p_{34} = P(-\delta\sqrt{n_2} - w \leq Z < -\delta\sqrt{n_2} + w) (1 - e^{-\lambda(h_1)^v}) \\ p_{25} &= p_{35} = P(-\delta\sqrt{n_2} + w \leq Z < -\delta\sqrt{n_2} + k) \\ &\quad + P(-\delta\sqrt{n_2} - k < Z \leq -\delta\sqrt{n_2} - w) (1 - e^{-\lambda(h_1)^v}) \\ p_{26} &= p_{36} = \{P(Z \geq -\delta\sqrt{n_2} + k) \\ &\quad + P(Z \leq -\delta\sqrt{n_2} - k)\} (1 - e^{-\lambda(h_1)^v}) \\ p_{44} &= P(-\delta\sqrt{n_1} - w \leq Z < -\delta\sqrt{n_1} + w) \\ p_{45} &= P(-\delta\sqrt{n_1} + w \leq Z < -\delta\sqrt{n_1} + k) \\ &\quad + P(-\delta\sqrt{n_1} - k < Z \leq -\delta\sqrt{n_1} - w) \\ p_{46} &= P(Z \leq -\delta\sqrt{n_1} + k) + P(Z \geq -\delta\sqrt{n_1} - k) \\ p_{54} &= P(-\delta\sqrt{n_2} - w \leq Z < -\delta\sqrt{n_2} + w) \\ p_{55} &= P(-\delta\sqrt{n_2} + w \leq Z < -\delta\sqrt{n_2} + k) \\ &\quad + P(-\delta\sqrt{n_2} - k < Z \leq -\delta\sqrt{n_2} - w) \\ p_{56} &= P(Z \leq -\delta\sqrt{n_2} + k) + P(Z \geq -\delta\sqrt{n_2} - k) \\ p_{66} &= 1 \end{aligned}$$

یکی از معیارهای آماری متداول در پژوهش‌های اخیر، معیار تعدیل شده ATS^۲، (AATS^۱) است که متوسط زمان تعدیل شده تا بروز هشدار بعد از تغییر در میانگین فرایند را نمایش می‌دهد. زمانی که فرایند خارج از کنترل است، نموداری

نمونه‌گیری بعدی استفاده خواهد شد و از طرف دیگر اگر نمونه بین حدود کنترل و حدود هشدار قرار بگیرد برای نمونه‌گیری بعدی از اندازه نمونه بزرگتر n_2 استفاده می‌کنیم.

در نمودارهای کنترل، فرایند به‌وسیله یک حالت تحت کنترل μ_0 توصیف می‌شود و یک انحراف با دلیل به اندازه‌ی δ که به صورت تصادفی رخ می‌دهد باعث می‌شود تا میانگین از μ_0 به $\mu_0 + \delta\sigma$ تغییر کند. نمودار کنترل با خط مرکز μ_0 و حدود کنترل بالا و پایین $\mu_0 \pm k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ بناسازی می‌شود. نمونه‌ها در فاصله‌ی h_i ساعت از یکدیگر انتخاب شده و هنگامی که نقطه‌ای، خارج از حدود کنترل رسم شود، جستجو برای شناسایی انحراف با دلیل آغاز می‌شود. در رسم این نمودار، پارامترهای μ_0 ، δ و σ معلوم فرض می‌شوند در حالی که پارامترهای نمودار کنترل، n_1 ، n_2 ، k و h باید تعیین شوند.

به طوری که

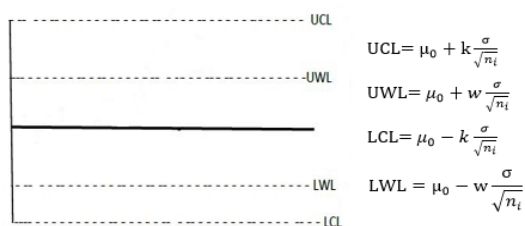
$$\bar{X} \sim N\left(\mu_i, \frac{\sigma^2}{n_j}\right) \quad i=0,1, \quad j=1,2, \quad n_1 < n_2$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n_j}\right) & \text{فرایند تحت کنترل باشد} \\ \bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n_j}\right) & \text{فرایند خارج از کنترل باشد} \end{cases}$$

که در آن $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$ و مقادیر حدود کنترلی و هشدار از رابطه زیر به دست می‌آیند:

در طرح $VRS - \bar{X}$ (با یک حد هشدار)، با شش حالت تعریف شده در بخش ۳-۱ و حدود کنترلی به شرح زیر داریم:



نمودار ۲: نمودار حدود کنترلی

بدین ترتیب ماتریس احتمال انتقال به‌قرار زیر است:

^۱ Adjusted Average Time to Signal

^۲ Average Time of the Cycle

است، به قسمی که:

$\underline{f}=(0,0,1,0,0)$, $\underline{n}=(n_1, n_2, n_2, 0, 0)$, $\underline{r}=(1, 1, 1, 0, 0)$
در نمودار ۲-۳ مرحله‌های یک چرخه‌ی کیفیت و معیارهای
ATC و AATS در آن چرخه نمایش داده شده است:
همان‌طور که قبلاً ذکر شد، ایده‌آل‌ترین حالت این است که اندازه
نمونه‌های بزرگ در فاصله‌های زمانی کوتاه تهیه شوند. اما در
عمل چنین کاری باعث افزایش هزینه‌ی نمونه‌گیری شده و
مقرون به صرفه نیست. لذا پژوهش‌گران در پی ارائه طرح‌هایی
برآمدند که بدون افزایش هزینه نمونه‌گیری، سرعت کشف تغییر
در فرایند را تا حد امکان افزایش دهد. در این ارتباط نمودارهای
کنترل با نرخ نمونه‌گیری متغیر (VRS) مطرح شدند. در این
طرح‌ها حداقل یکی از پارامترهای طرح، متغیر هستند.

۵. تعیین بهینه پارامترهای طراحی آماری \bar{X} تحت مدل شوک وایبول و اندازه نمونه متغیر

محاسبه مقادیر پارامترهای طراحی آماری با اندازه نمونه متغیر
تحت مدل شوک وایبول با استفاده از ابزار شبکه‌های عصبی در
روش بهینه سازی جعبه سیاه^۵ توسط نرم افزار برنامه نویسی
جولیا^۶ صورت گرفته است. به طوری که به ازای مقادیر مختلف
 δ , λ و ν مقدار بهینه‌ی پارامترهای طراحی در مدل آماری
 $\bar{X} - VRS$ تحت مدل شوک وایبول بدست آمده است. به ازای
مقادیر $\delta = \{0.25, 0.5, \dots, 3\}$, n , h_1 و k مقدار بهینه سایر
پارامترهای طراحی آماری $\bar{X} - VRS$ در جدول‌های ۱ و ۲ آمده
است.

قدرتمندتر است که دارای کم‌ترین مقدار AATS نسبت به
نمودارهای دیگر باشد. با توجه به تعریف AATS داریم:

$$AATS = ATC^1 - (\text{متوسط زمان تحت کنترل})$$

حال اگر مدت زمان تحت کنترل دارای توزیع وایبول با پارامتر
(λ, ν) باشد آن‌گاه AATS برابر است با:

$$AATS = ATC - \lambda^{-1} \nu \Gamma(1 + \frac{1}{\nu}) \quad (4-2)$$

(کوستا، ۱۹۹۷) که در آن ATC بیان‌گر مدت زمان متوسط از
شروع تولید تا مشاهده اولین هشدار در نمودار بعد از وقوع تغییر
در فرایند است. معیار ATC را می‌توان با توجه به خواص زنجیر
مارکوف به صورت زیر محاسبه نمود. (اثبات در پیوست ۳)

$$ATC = \underline{b}' \sum_{j=1}^{+\infty} Q^{j-1} \underline{h}_j \quad (4-3)$$

به قسمی که Q یک ماتریس 5×5 حاصل از حذف سطر و ستون
حالت جاذب (۶) ماتریس احتمال انتقال P، $\underline{b}' = (p_1, p_2, p_3, 0, 0)$
بردار احتمال آغازین با شرط
 $\sum_{i=1}^3 p_i = 1$ است. به منظور اعمال سخت‌گیرانه‌تر بر فرایند
فرض می‌شود که فرایند از حالت دوم شروع به فعالیت می‌کند.
به عبارت دیگر $\underline{b}' = (0, 1, 0, 0, 0)$ در نظر می‌گیریم.
همچنین قرار می‌دهیم:

$$\underline{h}_j = (h_1^j, h_2^j, h_3^j, h_4^j, h_5^j) \quad \text{که} \quad h_1^j = (j^{\frac{1}{\nu}} - (j-1)^{\frac{1}{\nu}}) h_1$$

$$h_1^j = h_2^j = h_3^j = h_4^j = h_5^j$$

متوسط تعداد هشدارهای غلط را با ANF^۲ نشان می‌دهیم که با
توجه به خواص زنجیرهای مارکوف برابر خواهد بود با:

$$ANF = \underline{b}' (I-Q)^{-1} \underline{f} = \underline{b}' \sum_{j=1}^{+\infty} Q^{j-1} \underline{f}$$

مقادیر ANI^۳ و ANS^۴ بیانگر متوسط تعداد اقلام بازرسی شده
و نمونه‌ی اخذ شده طی یک چرخه‌ی کیفیت است که برابر:

$$ANI = \underline{b}' (I-Q)^{-1} \underline{n} = \underline{b}' \sum_{j=1}^{+\infty} Q^{j-1} \underline{n}$$

$$ANS = \underline{b}' (I-Q)^{-1} \underline{r} = \underline{b}' \sum_{j=1}^{+\infty} Q^{j-1} \underline{r}$$

¹ Average Time of the cycle

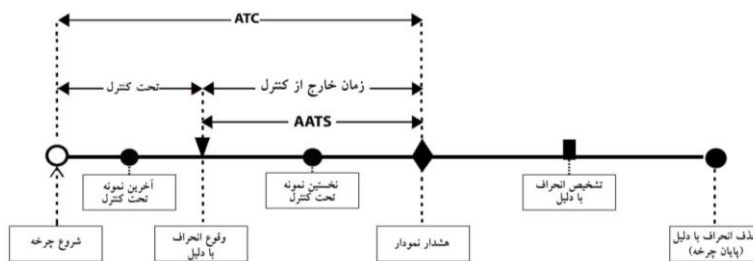
² Average Number of False Alarms

³ Average Number of Items

⁴ Average Number of

¹ BlackBoxOptim

² Joulia



نمودار ۳: مرحله‌های یک چرخه‌ی کیفیت

جدول ۱: تعیین مقدار بهینه‌ی پارامترهای طراحی در مدل آماری $VRS - \bar{X}$ تحت مدل شوک وایبول ($\lambda = 0.003$ و $v = 2$)

ANF	AATS	ATC	w	n_2	n_1	δ
۰.۸۹۸۵۸	۰.۲۳۲۷۵۷	۱۶.۴۱۲۹۷۳	۰.۹۶۳۸۲۶	۱۲	۸	۰.۲۵
	۰.۲۷۰۲۳۶	۱۶.۴۵۰۴۵۲	۱.۳۷۵۶۹	۱۴	۸	۰.۵
	۰.۱۷۰۲۵۷	۱۶.۳۵۰۴۷۳	۱.۲۷۵۴۲	۱۳	۸	۰.۷۵
	۰.۰۶۱۸۶	۱۶.۲۴۲۰۷۶	.	۱۱	۸	۱
	۰.۰۳۵۵۷۴	۱۶.۲۱۵۷۹۰	۰.۶۷۲۳۶۷	۱۱	۷	۱.۲۵
	۰.۰۲۲۸۰۴۴	۱۶.۲۰۳۰۲۰	۰.۷۶۴۲۴۸	۱۲	۵	۱.۵
	۰.۰۲۴۱۷۸۵	۱۶.۲۰۴۳۹۴	۰.۸۷۶۳۳۸	۹	۷	۱.۷۵
	۰.۰۲۳۳۱۷	۱۶.۲۰۴۳۳۳	۰.۸۷۳۲۵۷	۹	۷	۲
۰.۸۹۸۲۵	۰.۰۲۰۲۳۴	۱۶.۲۰۰۴۴۰	۰.۹۶۳۸۲۶	۱۰	۶	۲.۲۵
	۰.۰۲۳۴۲۷	۱۶.۲۰۴۶۴۳	۱.۱۷۲۳۶۷	۹	۵	۲.۵
	۰.۰۲۳۳۵۶۶	۱۶.۲۰۳۵۷۳	۱.۰۷۵۲۳	۹	۳	۲.۷۵
۰.۰۰۰۰۱۹	۰.۰۲۳۳۵۳	۱۶.۲۰۳۵۶۹	۱.۱۶۰۴۱	۹	۳	۳
	۰.۲۴۹۲۴۶	۱۶.۴۲۹۵	۱.۱۵۰۳۵	۱۶	۹	۰.۲۵
	۰.۴۰۲۱۶۳	۱۶.۵۸۲۴	۰.۹۶۷۴۲۱	۱۶	۹	۰.۵
	۱.۰۳۷۵۶	۱۷.۲۱۷۸	۱.۲۸۱۵۵	۱۶	۸	۰.۷۵
	۱.۵۴۸۶۱	۱۷.۷۲۸۸	۱.۳۸۳۶۱	۱۵	۸	۱
	۰.۳۷۲۳۶	۱۶.۵۵۲۶	۱.۱۲۰۵	۱۵	۸	۱.۲۵
	۰.۱۲۰۹۱۹	۱۶.۳۰۱۱	۰.۹۶۲۵۳	۱۴	۸	۱.۵
	۰.۰۵۳۲۳۵۷	۱۶.۲۳۳۵	۱.۰۸۳۲۵	۱۴	۸	۱.۷۵
	۰.۰۳۲۰۳۱۳	۱۶.۲۱۲۲	۱.۱۲۶۵۱	۱۴	۷	۲
	۰.۰۲۵۵۳۳۷	۱۶.۲۰۵۷	۱.۲۱۱۳۵	۱۱	۷	۲.۲۵
	۰.۰۲۳۹۴۷۹	۱۶.۲۰۴۲	۱.۱۲۱۷۸	۱۱	۶	۲.۵
۰.۰۰۰۰۰۵	۰.۰۲۳۰۳۴۲	۱۶.۲۰۳۶	۰.۹۱۴۶۳۷	۱۰	۶	۲.۷۵
	۰.۰۲۲۷۱۵۷	۱۶.۲۰۳۱	۱.۲۶۸۳۱	۹	۶	۳
	۰.۸۷۵۹۰۱	۱۷.۰۵۶۱	۰.۹۶۷۴۲۱	۱۴	۹	۰.۲۵
	۱.۲۹۲۲۹	۱۷.۴۷۲۵	۱.۰۸۳۳۵	۱۴	۹	۰.۵
	۳.۳۹۷۰۹	۱۹.۵۷۷۳	۱.۱۸۱۵۵	۱۴	۹	۰.۷۵
	۴.۸۷۵۶۱	۲۱.۰۵۵۸	۱.۱۸۷۰۱	۱۳	۸	۱
	۱.۲۸۷۰۶	۱۷.۴۶۷۳	۰.۹۲۷۴۵۳	۱۳	۸	۱.۲۵
	۰.۴۳۷۶۱۷	۱۶.۶۱۷۸	۰.۹۲۷۴۵۳	۱۳	۸	۱.۵
	۰.۲۰۳۰۴۲	۱۶.۴۱۰۶	۰.۶۷۴۴۸۹	۱۲	۸	۱.۷۵
	۰.۱۲۲۸۹۷	۱۶.۳۰۳۱	۱.۱۹۲۶۱	۱۱	۹	۲
	۰.۰۹۹۲۲۷۲	۱۶.۲۷۹۴	۱.۲۰۱۸۴	۱۱	۹	۲.۲۵
۰.۰۹۲۴۳۷۱۶	۱۶.۱۸۶۴	۰.۹۹۳۶۱۷	۱۱	۸	۲.۵	
۰.۰۹۱۲۹۳۸۴	۱۶.۱۱۴۶	۱.۲۱۷۸۱	۱۰	۹	۲.۷۵	
۰.۰۹۱۰۶۵۷۱	۱۶.۱۰۱۳	۱.۲۶۸۳۱	۱۰	۸	۳	

ادامه جدول ۱: تعیین مقدار بهینه‌ی پارامترهای طراحی در مدل آماری $\bar{X} - VRS$ تحت مدل شوک وایبول ($\lambda = 0.03$ و $\gamma = 2$)

۰.۸۹۸۵۸	۰.۲۳۵۶۹	۱۶.۴۱۵۹۱	۰.۹۶۳۸۲۶	۶	۲	۰.۲۵
	۰.۲۷۷۰۲	۱۶.۴۵۷۲۴	۰.۹۶۳۸۲۶	۶	۲	۰.۵
	۰.۳۶۷۷۱	۱۶.۵۴۷۹۳	۰.۹۶۳۸۲۶	۶	۲	۰.۷۵
	۰.۳۸۲۶۴	۱۶.۵۶۲۸۶	۰.۶۷۲۳۶۷	۶	۲	۱
	۰.۱۹۳۸۹	۱۶.۳۷۴۱۱	۰.۶۷۲۳۶۷	۶	۲	۱.۲۵
	۰.۱۰۶۱	۱۶.۲۸۶۳۲	۰.۹۶۳۸۲۶	۵	۲	۱.۵
	۰.۰۶۴۹۱	۱۶.۲۴۵۱۳	۰.۹۸۴۲۶۸	۵	۲	۱.۷۵
	۰.۰۴۴۸۹	۱۶.۲۲۵۱۱	۱.۰۲۶۴۵	۵	۲	۲
۰.۸۹۸۲۵	۰.۰۳۰۳۱	۱۶.۲۱۰۵۳	۱.۱۳۴۶۷	۴	۲	۲.۲۵
	۰.۰۲۶۱۶	۱۶.۲۰۶۳۸	۱.۲۲۳۶۷	۴	۲	۲.۵
	۰.۰۲۴۶۷	۱۶.۲۰۴۸۹	۱.۲۳۷۸۵	۳	۲	۲.۷۵
	۰.۰۲۳۷۳	۱۶.۲۰۳۹۵	۱.۲۴۰۱۲	۳	۲	۳

n=۳
h₁ = 1
k=۳

با توجه به جدول ۱ نتایج زیر به دست آمده است:

۲- با افزایش مقدار اندازه نمونه‌گیری مقدار متوسط زمان تعدیل شده تا بروز هشدار بعد از تغییر در میانگین فرایند کاهش پیدا می‌کند.

۳- با افزایش مقدار k از عدد ۳ به عدد ۵، برای مقادیر $0.25 \leq \delta \leq 1.75$ سرعت کشف تغییرات کاهش، و برای مقادیر $\delta \geq 1.75$ سرعت کشف تغییرات در میانگین افزایش پیدا می‌کند.

۴- مقدار AATS با افزایش مقدار h₁ افزایش پیدا می‌کند. به عبارتی سرعت کشف تغییرات با کاهش زمان نمونه‌گیری افزایش پیدا می‌کند.

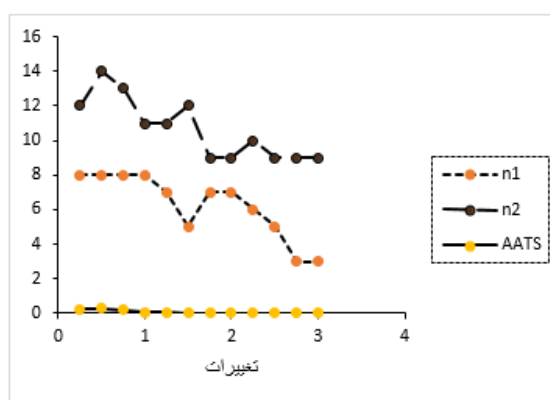
۵- اندازه نمونه بهینه با افزایش مقدار تغییرات در میانگین (δ)، اغلب به اندازه نمونه مطلوب n_p ، نسبتاً کوچک منجر می‌شود و برای تغییرات کوچک‌تر نیاز به نمونه‌های بزرگتر است. نتیجه تحلیل جدول ۲:

۱- با افزایش تغییرات در میانگین مقدار متوسط زمان تعدیل شده تا بروز هشدار بعد از تغییر در میانگین فرایند کاهش پیدا می‌کند. به عبارتی سرعت کشف تغییرات در میانگین فرایند با افزایش تغییرات افزایش پیدا می‌کند.

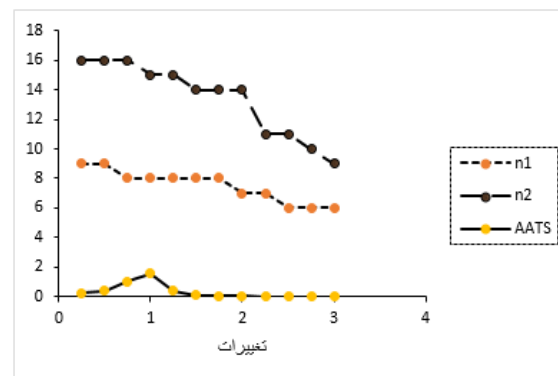
۲- با افزایش مقدار δ مقدار h₁ افزایش پیدا می‌کند.

۳- اندازه نمونه بهینه تا حد زیادی توسط میزان تغییر δ تعیین می‌شود. به طور کلی، تغییرات نسبتاً بزرگ ($\delta \geq 2$)، اغلب به اندازه نمونه مطلوب نسبتاً کوچک ($n_p \leq 10$) منجر می‌شود. تغییرات کوچک‌تر نیاز به نمونه‌های بزرگتر، با $0.25 \leq \delta < 2$ اغلب تولید اندازه نمونه بهینه در محدوده $11 \leq n_p \leq 14$ نیاز است.

۴- با افزایش مقدار δ مقدار ANF کاهش پیدا می‌کند.



نمودار ۴: پارامترهای بهینه شده روی محور مقادیر δ



نمودار ۵: پارامترهای بهینه شده روی محور مقادیر δ

۱- با افزایش تغییرات در میانگین مقدار متوسط زمان تعدیل شده تا بروز هشدار بعد از تغییر در میانگین فرایند کاهش پیدا می‌کند. به عبارتی سرعت کشف تغییرات در میانگین فرایند با افزایش تغییرات افزایش پیدا می‌کند.

جدول ۲: تعیین مقدار بهینه‌ی پارامترهای طراحی در مدل آماری $VRS - \bar{X}$ تحت مدل شوک وایبول ($\lambda = 2$ و $v = 2$)

ANF	AATS	ATC	k	w	h_1	n_2	n_1	δ
۱۲۳۲.۹	۰.۰۴۵۷۹۰۲۷	۱۹۸.۱۶۷	۲.۸۳۹۵۷	۱.۵۶۷۴۹	۰.۱۳۵۳۶۵	۱۴	۲	۰.۲۵
۱۱۹۶.۲	۰.۰۴۴۶۷۱۲۵	۱۹۸.۱۶۸	۴.۸۸۶۹۴	۱.۸۷۷۱۴	۰.۱۸۶۶۹۹	۱۲	۵	۰.۵
۱۰۴۱.۴	۰.۰۴۳۹۱۷۱۵	۱۹۸.۱۶۷	۳.۹۵۶۱۲	۲.۰۲۹۹۹	۰.۱۹۲۲۸۷	۱۲	۷	۰.۷۵
۱۰۱۴.۴	۰.۰۴۳۷۳۶۵۶	۱۹۸.۱۶۷	۳.۱۷۲۱۱	۱.۵۷۷	۰.۲۰۷۷۵۷	۱۱	۹	۱
۵۴۱.۹۲	۰.۰۰۸۰۳۷۵۹	۱۹۸.۱۶۷	۲.۴۶۷۸۵	۱.۳۴۷	۰.۲۱۹۱۷۲	۱۲	۶	۱.۲۵
۳۶۱.۱۳	۰.۰۰۵۱۶۳۰۹	۱۹۸.۱۷۲	۳.۵۲۵۵۶	۰.۹۶۲۷۵۶	۰.۳۳۴۰۲۲	۱۱	۹	۱.۵
۱۴۸.۶۲	۰.۰۰۴۴۵۱۲۷	۱۹۸.۱۴۶	۴.۶۴۰۳۲	۱.۹۰۵۰۸	۰.۵۵۰۷۸۲	۱۱	۹	۱.۷۵
۱۰۷.۵۶	۰.۰۰۴۱۳۰۵۲	۱۹۸.۱۶۲	۴.۴۷۲۹۱	۱.۰۱۹۹۲	۰.۶۳۳۳۶۴۸	۱۰	۹	۲
۹۹.۵۱۸	۰.۰۰۴۰۲۶۰۹	۱۹۸.۱۸۲	۲.۰۷۲۷۸	۱.۳۷۴۵	۰.۶۳۴۰۲۲	۸	۵	۲.۲۵
۵۴.۱۳۴	۰.۰۰۲۶۳۱۸۲	۱۹۸.۱۶۹	۲.۴۸۱۶۹	۱.۴۱۶۴۴	۰.۷۸۷۹۱۴	۱۰	۵	۲.۵
۲۲.۷۰۶	۰.۰۰۲۱۱۰۵۲	۱۹۸.۱۷۲	۲.۸۶۴۴۳	۱.۱۰۲۱	۰.۹۳۳۳۶۴۸	۱۰	۵	۲.۷۵
۷.۱۹۰۵	۰.۰۰۰۹۰۰۱۵	۱۹۸.۱۷۵	۳.۴۷۹۰۴	۱.۲۱۶۳۶	۱.۹۰۱۸۵	۹	۶	۳

۲- فرایند از طریق نمونه‌گیری‌های تصادفی هر یک به اندازه n

در زمان‌های $h_1, h_2, h_3, h_1 + h_2 + h_3$ و الی آخر مورد بررسی قرار می‌گیرد که h_1, h_2, h_3 و ... فاصله‌های نمونه‌گیری هستند.

$$w_j = \sum_{i=1}^j h_i, \quad j=1,2,3,\dots, \quad w_0=0$$

$$w_j = jv h_1$$

$$ANS_0 = \sum_{j=0}^{\infty} j q_{j+1}$$

$$AATS = \sum_{j=1}^{\infty} h_j q_j \tau + \sum_{j=1}^{\infty} q_j \sum_{m=j+1}^{\infty} h_m \beta^{m-j}$$

$$ATC = AATS + \lambda \frac{1}{v} \Gamma \left(1 + \frac{1}{v} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} h_j q_j + \sum_{j=0}^{\infty} q_{j+1} w_j + \sum_{j=1}^{\infty} q_j \sum_{m=j+1}^{\infty} h_m \beta^{m-j}$$

که در روابط بالا داریم:

$$\alpha = 2 \int_k^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx$$

$$\beta = \int_{-\infty}^{k-\delta\sqrt{v}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx - \int_{-\infty}^{k-\delta\sqrt{v}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx$$

$$ANF = \alpha ANS_0$$

۵-۱. نمودار کنترلی آماری $FRS - \bar{X}$ تحت سازوکار شکست فرایند وایبول با نمونه‌گیری نایک‌نواخت

طراحی اقتصادی نمودار کنترلی \bar{X} تحت سازوکار شکست فرایند وایبول با نمونه‌گیری نایک‌نواخت توسط بنرجی و رحیم^۱ (۱۹۸۸) بررسی شده است. [۱۱] در این قسمت با توجه به مقادیر پارامترهای طراحی در مدل آماری- اقتصادی مقاله نادری و همکاران (۲۰۲۰) مقادیر ATC و AATS برای محاسبه پارامترهای طراحی سازوکار شکست وایبول با فاصله نمونه‌گیری نایک‌نواخت با فرضیه‌های زیر برقرار است:

۱- تحت سازوکار شکست وایبول، زمان‌های تحت کنترل از توزیع وایبول رابطه (۵-۱) پیروی می‌کند.

$$f(x; \lambda, v) = \begin{cases} \lambda v x^{v-1} e^{-\lambda x^v} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (5-1)$$

که در آن X متغیر زمان، و λ پارامتر مقیاس و v پارامتر مکان است.

^۱ Banerjee and Rahim

$$\tau = (\lambda)^{\frac{1}{\nu}} \Gamma \left(1 + \frac{1}{\nu} \right) - \sum_{j=0}^{\infty} q_{j+1} w_j$$

$$q_j = \frac{\int_{w_{j-1}}^{w_j} f(x) dx}{\int_{w_{j-1}}^{\infty} f(x) dx} = \frac{F(w_j) - F(w_{j-1})}{1 - F(w_{j-1})}$$

جدول ۳: مقادیر پارامترهای طراحی نمودار کنترلی آماری $\bar{X} - FRS$ تحت مدل شوک وایبول ($\lambda = 0.003$ و $\nu = 2$)

AATS			ANF			ATC			δ
k=5, h=2, n=9			k=1, h=2, n=3			k=3, h=1, n=9			
۱۲۲.۴۴۸۷	۰.۰۰۰۰۴۷	۱۶۵.۸۴۸۲	۱۷.۴۶۹۲۹	۰.۸۹۸۵۸	۶۰.۸۶۸۷۶	۰.۲۵			
۹۸.۹۸۱۵۱		۱۱۵.۱۶۱۷	۲.۰۵۰۳۵۶		۱۸.۲۳۰۵۷	۰.۵			
۲۱.۶۴۹۷۴		۳۷.۸۲۹۹۶	۰.۸۴۸۹۹۳۵		۱۷.۰۲۹۲۱	۰.۷۵			
۴.۸۹۹۷۵۴		۲۱.۰۷۹۹۷	۰.۳۸۵۵۴۶۶		۱۶.۵۶۷۵۶	۱			
۱.۳۱۱۴۷۱		۱۷.۴۹۱۶۹	۰.۱۹۳۹۰۷۸		۱۶.۳۷۴۱۲	۱.۲۵			
۰.۴۵۱۷۳۶۸		۱۶.۶۳۱۹۵	۰.۱۰۷۹۰۳۶		۱۶.۲۸۸۱۲	۱.۵			
۰.۲۰۴۹۰۳۷		۱۶.۳۸۵۱۲	۰.۰۶۶۳۱۰۱۱		۱۶.۲۴۶۵۳	۱.۷۵			
۰.۱۲۴۶۸۲۸		۱۶.۳۰۴۹	۰.۰۴۵۰۷۱۰۲		۱۶.۲۲۵۲۹	۲			
۰.۰۹۹۶۳۵۶۲		۱۶.۲۷۹۸۵	۰.۰۳۳۹۷۳۶۹		۱۶.۲۱۴۱۹	۲.۲۵			
۰.۰۹۳۵۳۱۹		۱۶.۲۷۳۷۵	۰.۰۲۸۲۷۳۱۲		۱۶.۲۰۸۴۹	۲.۵			
۰.۰۹۲۵۵۸۳۴		۱۶.۲۷۲۷۷	۰.۰۲۵۵۱۹۲۳		۱۶.۲۰۵۷۴	۲.۷۵			
۰.۰۹۲۴۶۴۳۲		۱۶.۲۷۲۶۸	۰.۰۲۴۳۲۰۵۳		۱۶.۲۰۴۵۴	۳			
۳۹.۵۸۸۵۷		۰.۰۰۰۰۱۹	۸۲.۹۸۸۰۴		۸.۴۷۹۷۲	۰.۸۹۸۵۸	۵۱.۸۷۹۱۹	۰.۲۵	
۴۳.۸۴۱۰۸	۶۰.۰۲۱۲۹		۰.۵۸۱۲۶۲۲	۱۶.۷۶۱۴۸	۰.۵				
۸.۱۲۲۱۹۹	۲۴.۳۰۲۴۲		۰.۱۷۱۴۹	۱۶.۳۵۱۷۱	۰.۷۵				
۱.۵۴۹۸۳۷	۱۷.۷۳۰۰۵		۰.۰۶۸۴۴۱۵۸	۱۶.۲۴۸۶۶	۱				
۰.۳۷۳۹۵۷۵	۱۶.۵۵۴۱۷		۰.۰۳۶۹۶۷۵	۱۶.۲۱۷۱۸	۱.۲۵				
۰.۱۲۲۱۵۳۶	۱۶.۳۰۲۳۷		۰.۰۲۶۹۳۴۹۱	۱۶.۲۰۷۱۵	۱.۵				
۰.۰۵۳۸۵۶۸۵	۱۶.۲۳۴۰۷		۰.۰۲۴۲۳۵۴	۱۶.۲۰۴۴۵	۱.۷۵				
۰.۰۳۲۲۴۶۷	۱۶.۲۱۲۴۶		۰.۰۲۳۷۳۱۹۹	۱۶.۲۰۳۹۵	۲				
۰.۰۲۵۵۷۴۶۱	۱۶.۲۰۵۷۹		۰.۰۲۳۶۷۴۲۹	۱۶.۲۰۳۸۹	۲.۲۵				
۰.۰۲۳۹۵۵۶۳	۱۶.۲۰۴۱۷		۰.۰۲۳۶۷۰۴	۱۶.۲۰۳۸۹	۲.۵				
۰.۰۲۳۶۹۶۶۲	۱۶.۲۰۳۹۱		۰.۰۲۳۶۷۰۲۵	۱۶.۲۰۳۸۹	۲.۷۵				
۰.۰۲۳۶۷۱۶۹	۱۶.۲۰۳۸۹		۰.۰۲۳۶۷۰۲۵	۱۶.۲۰۳۸۹	۳				

۵- برآورد برای حالتی که $k=3$ و $h=1$ ، $n=9$ دارای متوسط زمان تعدیل شده تا بروز هشدار کمتری نسبت به سایر حالت‌ها است.

۲-۵. مقایسه‌ای نارایب و عادلانه بین طرح‌های VRS و FRS

فرض کنید (n, h, k) پارامترهای طرح FRS باشند. فرض کنید P احتمال آن باشد که در طرح VSS، اندازه نمونه‌گیری n انتخاب شود مشروط به آن که فرآیند تحت کنترل باشد.

در بررسی نتایج جدول ۳ مشاهده می‌شود:

- ۱- با افزایش مقدار δ در طراحی نمودار کنترلی $\bar{X} - FRS$ با مدل شوک وایبول، مدت زمان لازم برای یافتن علت اسنادپذیر کاهش پیدا می‌کند.
- ۲- با افزایش اندازه نمونه، متوسط زمان تعدیل شده تا بروز هشدار کمتر می‌شود.
- ۳- با کاهش طول فاصله نمونه‌گیری (h)، متوسط زمان تعدیل شده تا بروز هشدار کمتر می‌شود.
- ۴- با افزایش مقدار k ، متوسط زمان تعدیل شده تا بروز هشدار بیشتر می‌شود.

$$= \frac{P(|Z| < w \mid |Z| < k)}{P(|Z| < k)}$$

از آنجایی که $|Z| < w$ ، $|Z| < k$ را نتیجه می‌دهد. داریم:
 $[|Z| < w] \subseteq [|Z| < k]$

پس:

$$[|Z| < w] \cap [|Z| < k] = [|Z| < w]$$

برای p . خواهیم داشت:

$$p = \frac{P(|Z| < w)}{P(|Z| < k)}$$

$$P(|Z| < w) = p \cdot P(|Z| < k)$$

است کنترل تحت فرایند)

$$\phi(w) - \phi(-w) = p \cdot (\phi(k) - \phi(-k))$$

$$\phi(w) - [1 - \phi(w)] = p \cdot (\phi(k) - [1 - \phi(k)])$$

$$2\phi(w) - 1 = p \cdot (2\phi(k) - 1)$$

$$\phi(w) = \frac{1}{2} [p \cdot (2\phi(k) - 1) + 1]$$

چون تابع توزیع ϕ یک تابع اکیدا صعودی و پیوسته است، می‌توان w را از معادله بالا به دست آورد. لذا خواهیم داشت:

$$w = \phi^{-1} \left(\frac{1}{2} [p \cdot (2\phi(k) - 1) + 1] \right) \quad (2-5)$$

جای‌گذاری مقدار p . در رابطه (2-5) می‌توانیم مقدار w را از رابطه زیر به دست آوریم:

$$w = \phi^{-1} \left(\frac{1}{2} \left[\frac{n_1 - n_2}{n_1 - n_2} [2\phi(k) - 1] + 1 \right] \right)$$

حال می‌توان به محاسبه AATS پرداخت و با مقدار AATS طرح FRS با داشتن پارامترهای n ، h و k مقایسه کرد

در بررسی نتایج مقایسه پارامترهای طراحی در مدل آماری $VRS - \bar{X}$ و $FRS - \bar{X}$ تحت مدل شوک وایبول (جدول 4) مشاهده می‌شود:

۱- سرعت کشف تغییرات در میانگین فرایند در مدل آماری $VRS - \bar{X}$ بیشتر از مدل $FRS - \bar{X}$ به ازای همه مقادیر δ است. بنابراین ویژگی VRS عملکرد آماری روش کنترل را بهبود می‌بخشد.

در این صورت احتمال آن که در این فرایند اندازه نمونه‌گیری n_2 انتخاب شود برابر $1 - P_1$ خواهد بود. متغیر تصادفی

اندازه‌ی نمونه‌گیری در طرح VSS را با N نشان می‌دهیم. پس:
 $P_1 = P(N = n_1 \mid \text{است کنترل تحت فرایند تحت کنترل است})$

$$1 - P_1 = P(N = n_1 \mid \text{است کنترل تحت کنترل است})$$

بنابراین میانگین اندازه نمونه‌گیری در زمان تحت کنترل بودن فرایند را با نماد زیر نشان می‌دهیم و مقدار آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$E(N \mid \text{است کنترل تحت کنترل است}) = n_1 \cdot P_1 + n_2 \cdot (1 - P_1)$$

همانطور که گفتیم برای مقایسه دو طرح VSS و FRS، پارامترهای طرح چنان انتخاب می‌شوند که در زمان تحت کنترل بودن فرایند، شرایط دو طرح یکسان باشد. پس اگر (n_1, n_2, h_1, w, k) پارامترهای طرح VSS باشند، آن گاه باید داشته باشیم $k = k_1$ و

$$n = E(N \mid \text{است کنترل تحت کنترل است}).$$

$$n = n_1 P_1 + n_2 (1 - P_1)$$

داریم:

$$P_1 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 - n_2}$$

پس از مشخص شدن مقدار n_1 توسط کاربر، مقدار n_2 از

رابطه زیر به دست می‌آید:

$$n_2 = \frac{n_1 - n_1 P_1}{1 - P_1}$$

حال توجه کنید که در یک طرح VSS زمانی که فرایند تحت کنترل است و آماره کنترل در ناحیه کنترل (LCL, UCL) قرار دارد، اندازه نمونه‌گیری n_1 به صورتی انتخاب می‌شود که آماره کنترلی در ناحیه اطمینان قرار داشته باشد و اندازه نمونه‌گیری n_2 زمانی انتخاب می‌شود که آماره کنترلی در ناحیه هشدار باشد. بنابراین:

$$P_1 = P(N = n_1 \mid \text{است کنترل تحت کنترل است})$$

$$= P(\bar{X} \in (LWL, UWL) \mid \bar{X} \in (LCL, UCL), \text{است کنترل تحت کنترل است})$$

$$= P(|Z| < w \mid |Z| < k)$$

۲- به ازای مقادیر بزرگتر k مدل آماری $VRS - \bar{X}$ عملکرد بهتری نسبت به مدل $FRS - \bar{X}$ در کشف سریعتر تغییرات در میانگین را دارد.

۳- برای تغییرات بسیار کوچک ($\delta < 1$)، طرح کنترل آماری $VRS - \bar{X}$ به طور قابل توجه عملکرد خوبی نسبت به مدل $FRS - \bar{X}$ در کشف سریعتر تغییرات میانگین را دارد.

جدول ۴: مقایسه پارامترهای طراحی در مدل آماری $VRS - \bar{X}$ و $FRS - \bar{X}$ تحت مدل شوک وایبول ($\lambda = 0.003$ و $\nu = 2$)

δ	$FRS - \bar{X}$				$VRS - \bar{X}$			
	$h=1, n=9$ $k=$	$h=2, n=9$ $k=$	$h=1, n=9$ $k=$	$n=3$ $k=3, h=1$	$h=1, n=9$ $k=3$	$h=2, n=9$ $k=$	$h=1, n=9$ $k=$	$n=3$ $h=1$ $k=3$
	AATS	AATS	AATS	AATS	AATS	AATS	AATS	AATS
0.25	8.47972	122.4487	39.08857	17.4692	0.232757	0.875901	0.249246	0.23569
0.5	0.5812622	98.98151	43.84108	2.05035	0.270236	1.29229	0.402163	0.27702
0.75	0.17149	21.74974	8.122199	0.84899	0.170257	3.39709	1.02756	0.36771
1	0.06844158	4.899754	1.549837	0.38554	0.06186	4.87561	1.54861	0.38264
1.25	0.0369675	1.311471	0.3739575	0.19390	0.035574	1.28706	0.37236	0.19389
1.5	0.02693491	0.4517368	0.1221536	0.10790	0.0228044	0.437617	0.120919	0.10610
1.75	0.0242354	0.2049037	0.05385685	0.06631	0.0241785	0.203042	0.0523357	0.06491
2	0.02373199	0.1246828	0.0322467	0.04507	0.023217	0.122897	0.0320313	0.04489
2.25	0.0237629	0.09963562	0.02557461	0.03397	0.020224	0.0992272	0.0255237	0.03031
2.5	0.023704	0.09353519	0.02395563	0.02827	0.023427	0.09243716	0.0239479	0.02616
2.75	0.0237025	0.09255834	0.02369662	0.02551	0.0233566	0.09129384	0.0230342	0.02467
3	0.0237025	0.09247432	0.02367179	0.02432	0.023353	0.09106571	0.0227157	0.02373

خیلی بهتری دارد و کشف تغییرات میانگین در طرح کنترل آماری $VRS - \bar{X}$ نسبت به طرح $FRS - \bar{X}$ سریعتر بوده و عملکرد بهتری دارد.

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله برای اولین بار طراحی آماری نمودار کنترلی تک متغیره \bar{X} با اندازه نمونه متغیر و فاصله‌های نمونه‌گیری نایکنواخت تحت مدل شوک وایبول ارائه گردید. در این مدل با افزایش تغییرات در میانگین، سرعت کشف تغییرات در میانگین افزایش پیدا می‌کند و مقدار h_1 افزایش و ANF کاهش پیدا می‌کند. همچنین تغییرات نسبتاً بزرگ ($\delta \geq 2$)، به اندازه نمونه مطلوب نسبتاً کوچک ($n_p \leq 10$) و تغییرات کوچک‌تر ($0.25 \leq \delta < 2$)، به اندازه نمونه بهینه بزرگ‌تر ($n_p \leq 11$) منجر می‌شود.

نتایج مقایسه‌های عددی حاکی از آن است که طرح کنترل پیشنهادی در کشف تغییرات کوچک، نسبت به FRS عملکرد

۷- منابع

- [1] Burr, I.W. (1969), Control charts for measurements with varying sample sizes. *Journal of Quality Technology*, 1, 163-167.
- [2] Prabhu, S.S., Runger, G.C. and Keats, J.B. (1993), \bar{X} chart with adaptive sample sizes. *International Journal of Production Research*, 31, 2895-2909.
- [3] Costa, A.F.B. (1997), \bar{X} charts with variable sampling size and sampling intervals. *Journal of Quality Technology*, 29:2, 197-204.

DOI: 10.1080/00224065.1997.11979750.

[4] Zimmer, L.S., Montgomery, D.C., and Runger, G.C. (1998), Evaluation of a Three-state adaptive sample size \bar{X} control chart. *International Journal of Production Research*, 36 733-743.

[5] Reynolds Jr, M.R. and Arnold, J.C., (1989). Optimal one-side Shewhart control chart with variable sampling intervals. *Sequential Analysis* 8, 51-77.

[6] Aparisi, F. (1996), Hotelling's T^2 control chart with adaptive sample sizes, *International Journal of Production Research*, 34, 2853-2862.

[7] Aparisi, F. and Haro, C.L. (2003), A comparison of T^2 control charts with variable sampling schemes as opposed to MEWMA chart. *International Journal of Production Research* 41, 2169-2182.

[8] Ghanaatiyan, R., Amiri, A., Sogandi, F. (2017). Multi-Objective Economic-Statistical Design of VSSI-MEWMA-DWL Control Chart with Multiple Assignable Causes. *Journal of Industrial and Systems Engineering*, 10(special issue on Quality Control and Reliability), 34-58.

[9] بامنی‌مقدم، محمد و رفیعی، سعیدرضا. (۱۳۹۶). طراحی آماری- اقتصادی نمودار کنترلی \bar{X} برای داده‌های همبسته تحت مدل‌های شوک نمایی تعمیم یافته و وایبول، نشریه علمی پژوهشی مهندسی و مدیریت کیفیت.

[10] naderi, M., Bameni Moghadam, M., Seif, A. (2020). Minimum Loss Design of X Control Chart for Correlated Data Under Weibull In-Control Times with Multiple Assignable Causes. *Journal of Computational Statistics and Modeling*, 1(1), 99-127.

[11] Banerjee, P. K., & Rahim, M. A. (1988). Economic design of control charts under weibull shock models. *Technometrics*, 30(4), 407-414.

پیوست ۱:

اگر در ابتدای بازه j ام، $j = ۱, ۲, ۳, \dots$ فرایند در وضعیت k ، $k \in S$ باشد، آنگاه احتمال آنکه متغیر تصادفی T^j مقدار h_k^j را اختیار کند به شرط آنکه فرایند در شروع در وضعیتی برابر با $q_{ik}^{(j)}$ است. از آنجا که قبل از هشدار درست فرایند در وضعیت-های گذرا قرار می‌گیرد و همچنین در لحظه شروع فرایند تحت کنترل است پس

$$q_{ik}^{(j)} = 0 \quad k=۶ \text{ یا } i=۴,۵,۶$$

$$q_{ik}^{(j)} > 0 \quad k \in S_0, \quad i=۱,۲,۳$$

$$E[T^j | X_0 = i] = \begin{cases} \sum_{k=1}^5 q_{ik}^{(j)} h_k^j & i=۱,۲,۳ \\ 0 & i=۴,۵,۶ \end{cases}$$

بنابراین

$$E[T | X_0 = i] = \sum_{j=1}^{\infty} E[T^j | X_0 = i] = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 q_{ik}^{(j)} h_k^j & i=۱,۲,۳ \\ 0 & i=۴,۵,۶ \end{cases}$$

پس

$$E[T] = E[E(T | X_0 = i)] = \sum_{i \in S} P(X_0 = i) E[T | X_0 = i] \\ = \sum_{i=1}^3 P(X_0 = i) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 q_{ik}^{(j)} h_k^j$$

رابطه فوق را در فرم ماتریس به صورت زیر می‌توان نوشت

$$E[T] = b \sum_{j=1}^{\infty} Q^j \underline{h}^j$$

که در آن $Q^j = (q_{ik}^{(j)})_{i,k \in S_0}$ و $\underline{h}^j = (h_1^j, h_2^j, h_3^j, h_4^j, h_5^j, h_6^j)$

$$h_1^j = h_2^j = h_3^j = h_4^j = h_5^j = h_6^j$$

T: مدت زمانی که فرایند تحت کنترل است.

h_j : طول فاصله نمونه‌گیری j ام است.

W_j : زمان لازم تا رسیدن به j امین انتخاب نمونه است. بنابراین

$$w_j = \sum_{i=1}^j h_i \quad . j = ۱, ۲, ۳, \dots \quad . w_0 = 0$$

$$P(X_n \in A, T > w_n | X_{n-1} \in A, X_{n-2} = x_{n-2}, \dots, X_1 = x_1, T > w_{n-1}, T > w_{n-2}, \dots, T > w_1)$$

$$= P(X_n \in A, T > w_n | X_{n-1} \in A, X_{n-2} = x_{n-2}, \dots, X_1 = x_1, T > w_{n-1})$$

$$= P(X_n \in A, T > w_n | X_{n-1} \in A, T > w_{n-1})$$

$$= P(X_n \in A, \mu_n = \mu_0 | X_{n-1} \in A, \mu_{n-1} = \mu_0)$$

پیوست ۲:

نشان می‌دهیم که

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(X_2 = j | X_1 = i) \quad ; \forall n \geq 1 \text{ و } j, i \in E$$

داریم:

$$p_{11} = P(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) \\ = P(LWL < \bar{X} < UWL, T > W_{n+1} | LWL < \bar{X} < UWL, T > W_n) \\ = P(|Z| < w) P(T > W_{n+1} | T > W_n) = P(|Z| < w) e^{-\lambda h_1^j}$$

از طرفی

$$p_{11} = P(X_2 = 1 | X_1 = 1) \\ = P(LWL < \bar{X} < UWL, T > W_2 | LWL < \bar{X} < UWL, T > W_1) \\ = P(|Z| < w) P(T > W_2 | T > W_1) = P(|Z| < w) e^{-\lambda h_1^j}$$

پیوست ۳:

اگر فضای وضعیت برابر $S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ و مجموعه

وضعیت‌های گذار برابر $S_0 = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و مجموعه

وضعیت‌های آغازین برابر $S_1 = \{۱, ۲, ۳\}$ باشد و داشته باشیم

$$Q = (q_{ij})_{i,j \in S_0}$$

$$\text{و } q_{ij} = p_{ij} \quad ; i, j \in S_0$$

$$q_{ij}^{(n)} = P(X_1 \in S_0, \dots, X_{n-1} \in S_0, X_n = j | X_0 = i) \text{ و}$$

متغیر تصادفی طول بازه نمونه‌گیری در نمونه‌گیری j ام =

$$(T^j = . . . ۱, ۲, . . . j)$$

مدت زمان تا رسیدن به اولین هشدار درست :

$$T = \sum_{j=1}^{\infty} T^j$$

Statistical design of \bar{X} control chart with variable sample size under Weibull shock model with non-uniform sampling intervals

Bahman Fasihi

PhD student, Allameh Tabatabaee University, Department of Statistics, Tehran, Iran. b_fasihi@atu.ac.ir

Reza Pourtaheri²⁸

Associate Professor, Allameh Tabatabaee University, Department of Statistics, Tehran, Iran. pourtaheri@atu.ac.ir

Abstract: This paper for the first time in the statistical design of adaptive control charts, deals with the statistical design of univariate control chart \bar{X} under the Weibull shock model. Practically, the use of shock models with more flexible risk rate functions in the statistical design of adaptive control charts is closer to reality. This study shows that diagram $\bar{X} - VRS$ under Weibull shock model with non-uniform sampling intervals and variable sample size, compared to diagram \bar{X} under Weibull shock model with non-uniform sampling intervals and fixed sample size (FRS), detecting average changes is faster and performs better. In this model, with increasing changes in the mean, the rate of detection of changes in the mean increases and the value of h_1 increases and the ANF decreases. Also relatively large changes ($\delta \geq 2$), lead to a relatively small sample size ($n_2 \leq 10$) and smaller changes ($2 \leq \delta < 0.25$) lead to a larger optimal sample size ($11 \leq n_2 \leq 14$).

Keywords: Statistical design, Control chart \bar{X} , Non-uniform sampling distance, Weibull shock model.

1. Introduction

Statistical Process Control (SPC) is one of seven basic quality tools used in Total Quality Management (TQM). The quality movement in the last few decades has made quality control a necessary condition for competition in the manufacturing and the provision of service to customers. The ability to reduce the changes in process output is one of the keys to identifying a successful economic unit. In many cases, statistical process control is an acceptable tool for showing the changes in the process.

Designing control charts means making a fundamental decision about the three design parameters, namely, sample size (n), the sampling interval between samples (h), and coefficient of control limits (k).

So far, statistical design of control charts under several lifetime distributions with fixed, descending, ascending, U-shaped failure rate functions in the presence of an attributable cause and attributable causes (multiple attributable causes) has been presented, but only the exponential shock model has been studied in the statistical design of various types of univariate or multivariate adaptive control charts, variables in the various methods mentioned in determining the design parameters of adaptive control charts. Other shock models with more flexible risk rate functions have not been studied in the statistical design of adaptive control charts. Therefore, in this paper, for the first time, we intend to statistically design a univariate \bar{X} control chart under the Weibull shock model.

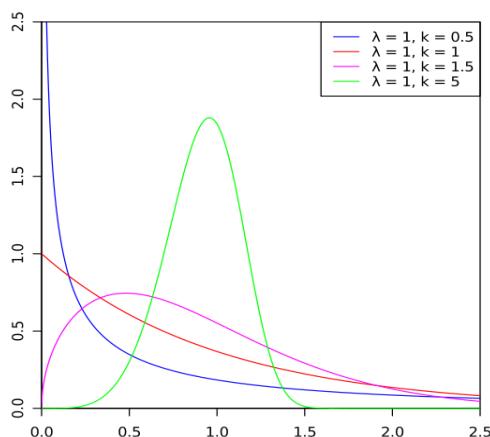
²⁸ Corresponding author: pourtaheri@atu.ac.ir

2. A review of the Weibull distribution

If the random variable X has a support with negative and continuous values, so that its density function is written as follows, then we say that this random variable has a Weibull distribution with parameters v and λ .

$$f(x; \lambda, v) = \begin{cases} \lambda v x^{v-1} e^{-\lambda x^v} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

The chart of the density function of this random variable can be seen in the image below.



Graph 1: Weibull density function chart

In this chart, the positive values of the random variables can be clearly seen. As can be seen in the chart, by changing the value of the parameter v , the shape of the probability density function for this random variable changes, and by increasing the parameter v , it tends towards a normal distribution.

If the random variable X represents the "failure time", the Weibull distribution can be used to describe this random variable, so that the failure rate is proportional to the time and exponentially distributed. In this case, the parameter v indicates the "mean failure rate".

" $v < 1$ " indicates a downward failure rate. This means that over time, the probability of failure for a phenomenon with this property decreases. If " $v = 1$ ", the failure rate will be constant; and the Weibull distribution becomes an exponential distribution. " $v > 1$ " also indicates an upward failure rate. This increases the probability of failure or error with longer life. In this study, the failure rate is considered to be increasing, which is closer to reality in practice.

3. \bar{X} control design chart under the Weibull shock model (Variable Rate design)

In this sampling design, two additional warning limits with non-uniform sampling interval (h_i) and two different sample volumes n_1 and n_2 , such that $n_2 > n_1$, are used to design the control chart. If the sample is located near the centerline of the control chart and between the warning limits, the smaller sample size n_1 will be used for the next sampling, and on the other hand, if the sample is located between the control and the warning limits for the next

sampling of the sample size, we use the larger n_2 .

In control charts, the process is described by a state under the control of μ_0 , and a random deviation with a cause from the mean leads to change of μ_0 to $\mu_0 + \delta\sigma$. The control chart is constructed with the centerline μ_0 and the upper and lower control limits $\mu_0 \pm k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. The samples are selected at h hours apart from each other, and when a point is drawn outside the control range, the search for a cause-and-effect deviation begins. The process starts from the state under statistical control $\mu = \mu_0$. The occurrence of deviation with a cause leads to a change in the mean of the process. We assume that the time follows the Weibull distribution with the parameter $(\lambda$ and $\nu)$, before the deviation occurs due to the process, which we denote by T . Thus, when the process remains in statistically controlled mode, the mean is $\lambda^{-\frac{1}{\nu}}\Gamma(1+\frac{1}{\nu})$. We also assume that the process is not self-corrected. Therefore, when the process gets out of control, it will not return to the controlled state until the end of the process cycle. It is called a quality cycle, from the time the process starts to the moment it returns to control after modification.

In the VRS design, one of the following six situations may occur each time the sampling process is performed:

Mode 1: $LWL < \bar{X} < UWL$ and the process are under control. (sample n_1)

Mode 2: $UWL \leq \bar{X} < UCL$ or $LCL < \bar{X} \leq LWL$ and the process are under control. (sample n_2)

Mode 3: $\bar{X} \geq UCL$ or $\bar{X} \leq LCL$ and the process are under control. (sample n_2)

Mode 4: $LWL < \bar{X} < UWL$ and the process are out of control. (sample n_1)

Mode 5: $UWL \leq \bar{X} < UCL$ or $LCL < \bar{X} \leq LWL$ and the process are out of control. (sample n_2)

Mode 6 (adsorbent state): occurs when $\bar{X} \geq UCL$ or $\bar{X} \leq LCL$ "and the process are out of control. It is easy to see that mode 3 is a false alarm and mode 6 is a true alarm.

Suppose Y_n represents the state of the process at the n th sampling stage in a quality cycle, which is defined as follows:

$$\begin{aligned}
 Y_n = 1 & \iff Y_n \in A \cdot \mu_n = \mu_0 \\
 Y_n = 2 & \iff Y_n \in B \cdot \mu_n = \mu_0 \\
 Y_n = 3 & \iff Y_n \in C \cdot \mu_n = \mu_0 \\
 Y_n = 4 & \iff Y_n \in A \cdot \mu_n = \mu_1 \\
 Y_n = 5 & \iff Y_n \in B \cdot \mu_n = \mu_1 \\
 Y_n = 6 & \iff Y_n \in C \cdot \mu_n = \mu_1
 \end{aligned}$$

Where μ_n is the mean quality characteristic in the n th stage of sampling and \bar{Y}_n is the mean of the sample taken in the n th stage of sampling. We also have:

$$A=(LWL,UWL). B = (UWL,UCL) \cup (LCL,LWL). C=(-\infty,UCL) \cup (UCL,+\infty).$$

In the following theorem we express $\{Y_n|n=0, 1, 2, \dots\}$ is a Markov chain with state space “ $E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ”.

Theorem 1: Random process $\{Y_n|n = 0, 1, 2, \dots\}$ with finite state space, E is a Markov chain. In other words, for every $n \geq 1$ and every x_0, x_1, \dots, x_n and x and y of the states, we have the following equation:

$$P(Y_{n+1}=y|Y_0=y_0, Y_1=y_1, \dots, Y_n=x)=P(Y_{n+1}=y|Y_n=x)$$

Theorem 2: Random process $\{Y_n|n=0, 1, 2, \dots\}$ with the numeric state space, E is a homogeneous Markov chain. In other words, the probabilities of transfer do not depend on step n . It means:

$$p_{xy}=P(Y_{n+1}=y|Y_n=x) \quad ; \forall x, y \in E. \quad \forall n \geq 1$$

In drawing this chart, the parameters μ_0, δ and σ are assumed to be known, while the parameters of the control chart, n_1, n_2, k and h must be determined so that:

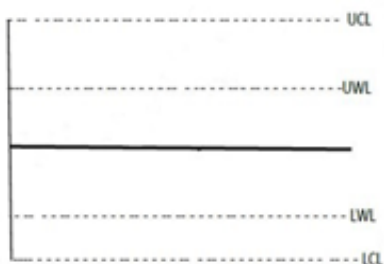
$$\bar{X} \sim N\left(\mu_i, \frac{\sigma^2}{n_j}\right) \quad i=0,1, \quad j=1,2, \quad n_1 < n_2$$

So we have:

$$\begin{cases} \bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n_j}\right) & \text{the process under control} \\ \bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n_j}\right) & \text{the process out of control} \end{cases}$$

Where $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$

In the $\bar{X} - VRS$ design (with a warning limit), we define it with six modes and control limits as follows:



$$UCL = \mu_0 + k \frac{\sigma}{\sqrt{n_i}}$$

$$UWL = \mu_0 + w \frac{\sigma}{\sqrt{n_i}}$$

$$LCL = \mu_0 - k \frac{\sigma}{\sqrt{n_i}}$$

$$LWL = \mu_0 - w \frac{\sigma}{\sqrt{n_i}}$$

Chart 2: Chart of \bar{X} control

Thus the transfer probability matrix is as follows:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} & p_{36} \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & p_{45} & p_{46} \\ 0 & 0 & 0 & p_{54} & p_{55} & p_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

In equation (1), p_{ij} represents the conditional probability of changing the state from the previous state i to the current state j . Given that in the VRS sampling design the sampling distance in the current state depends on the previous state, thus, P_{ij} is:

$$p_{11} = p_{21} = p_{31} = P(|Z| < w) e^{-\lambda(h_1)^v}$$

$$p_{12} = p_{22} = p_{32} = P(w \leq |Z| < k) e^{-\lambda(h_1)^v}$$

$$p_{13} = p_{23} = p_{33} = P(|Z| \geq k) e^{-\lambda(h_1)^v}$$

$$p_{14} = P(-\delta\sqrt{n_1} - w \leq Z < -\delta\sqrt{n_1} + w) (1 - e^{-\lambda(h_1)^v})$$

$$p_{15} = \{P(-\delta\sqrt{n_1} + w \leq Z < -\delta\sqrt{n_1} + k) + P(-\delta\sqrt{n_1} - k < Z \leq -\delta\sqrt{n_1} - w)\} (1 - e^{-\lambda(h_1)^v})$$

$$p_{16} = \{P(Z \leq -\delta\sqrt{n_1} + k) + P(Z \geq -\delta\sqrt{n_1} - k)\} (1 - e^{-\lambda(h_1)^v})$$

$$p_{24} = p_{34} = P(-\delta\sqrt{n_2} - w \leq Z < -\delta\sqrt{n_2} + w) (1 - e^{-\lambda(h_1)^v})$$

$$p_{25} = p_{35} = P(-\delta\sqrt{n_2} + w \leq Z < -\delta\sqrt{n_2} + k) + P(-\delta\sqrt{n_2} - k < Z \leq -\delta\sqrt{n_2} - w) (1 - e^{-\lambda(h_1)^v})$$

$$p_{26} = p_{36} = \{P(Z \geq -\delta\sqrt{n_2} + k) + P(Z \leq -\delta\sqrt{n_2} - k)\} (1 - e^{-\lambda(h_1)^v})$$

$$p_{44} = P(-\delta\sqrt{n_1} - w \leq Z < -\delta\sqrt{n_1} + w)$$

$$p_{45} = P(-\delta\sqrt{n_1} + w \leq Z < -\delta\sqrt{n_1} + k) + P(-\delta\sqrt{n_1} - k < Z \leq -\delta\sqrt{n_1} - w)$$

$$p_{46} = P(Z \leq -\delta\sqrt{n_1} + k) + P(Z \geq -\delta\sqrt{n_1} - k)$$

$$p_{54} = P(-\delta\sqrt{n_2} - w \leq Z < -\delta\sqrt{n_2} + w)$$

$$p_{55} = P(-\delta\sqrt{n_2} + w \leq Z < -\delta\sqrt{n_2} + k) + P(-\delta\sqrt{n_2} - k < Z < -\delta\sqrt{n_2} - w)$$

$$p_{56} = P(Z \leq -\delta\sqrt{n_2} + k) + P(Z \geq -\delta\sqrt{n_2} - k)$$

$$p_{66} = 1$$

One of the most common statistical metrics in recent research is the Average Time of the Cycle (ATS) (Adjusted Average Time to Signal (AATS)), which shows the average time it takes for a warning to appear after a change in the process average. When the process is under control, the higher the AATS value, the better it is. But when the process is out of control, the chart that has the lowest AATS value is the most powerful one. According to the definition of AATS (Costa, 1997):

$$AATS = ATC - (\text{Mean time under control})$$

Now, if the duration under control has a Weibull distribution with parameter (λ, ν) , then AATS is equal to:

$$\text{AATS} = \text{ATC} - \lambda^{-\frac{1}{\nu}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \quad (2)$$

and

$$\text{ATC} = \underline{b}' \sum_{j=1}^{+\infty} Q^{j-1} \underline{h}_j \quad (3)$$

In such a way that Q is a 5×5 matrix obtained by removing the row and column of the adsorbent state (6), the transfer probability matrix P , $\bar{b}' = (p_1, p_2, p_3, 0, 0)$ will be the initial probability vector with condition $\sum_{i=1}^3 p_i = 1$. In order to apply more rigorously to the process, it is assumed that the process starts from the second state. In other words, we consider $\bar{b}' = (0, 1, 0, 0, 0)$. We also include:

$$\underline{h}_j = (h_1^j, h_2^j, h_3^j, h_4^j, h_5^j) \text{ that is: } h_1^j = \left(\frac{1}{j^\nu - (j-1)^\nu}\right) h_1 \text{ and } h_1^j = h_2^j = h_3^j = h_4^j = h_5^j$$

5. Optimal determination of \bar{X} statistical design parameters under Weibull shock model and variable sample size

The values of statistical design parameters with variable sample size were calculated under the Weibull shock model using neural network tools in the black box optimization method by Joulia programming software. So that for different values of δ , λ and ν , the optimal value of design parameters in the VRS- \bar{X} statistical model is obtained under the Weibull shock model, and the following results are obtained.

1. By increasing the changes in the mean values, the average amount of time is adjusted until the warning after the change in the average of the process decreases. In other words, the speed of detecting changes in the average process increases with increasing changes.
2. By increasing the sample size, the average amount of time adjusted to the warning after the change in the average process decreases.
3. By increasing the value of k from the number 3 to the number 5, for the values " $0.25 \leq \delta \leq 1.75$ " the speed of change detection decreases, and for the values $\delta \geq 1.75$ the speed of detection of changes increases on average.
4. The value of AATS increases with increasing the value of h_1 . In other words, the speed of detecting changes increases with decreasing sampling time.
5. Optimal sample size as the amount of variation in the mean (δ) increases, it often results in a relatively small sample size of n_2 , and larger samples are required for smaller changes.
6. By increasing δ value, the value of h_1 increases.
7. The optimal sample size is largely determined by the amount of change. In general, relatively large variations ($\delta \geq 2$) often result in relatively small optimum sample sizes ($n_2 \leq 10$). Smaller variations require larger samples, with $0.25 \leq \delta < 2$ often producing the optimal sample size in the range $11 \leq n_2 \leq 14$.
8. With increasing δ value the value of ANF decreases.

6. Unbiased and fair comparisons between FRS and VRS plans

In the study of the results of comparing the design parameters in the statistical model of $VRS-\bar{X}$ and $FRS-\bar{X}$ under the Weibull shock model, it is observed that:

1. The speed of detecting changes in the mean process in the $VRS-\bar{X}$ statistical model is higher than the $FRS-\bar{X}$ model for all values. Thus, the VRS feature improves the statistical performance of the control method.
2. For larger k values, the $VRS-\bar{X}$ statistical model performs better than the $FRS-\bar{X}$ model in detecting changes in the mean faster.
3. For very small changes ($\delta < 1$), the $VRS-\bar{X}$ statistical control design performs significantly better than the $FRS-\bar{X}$ model in detecting the mean changes faster.

7. Conclusion

In this paper, for the first time, the statistical design of univariate control chart \bar{X} with variable sample size and non-uniform sampling intervals under the Weibull shock model was presented. In this model, with increasing changes in the mean, the rate of detection of changes in the mean increases and the value of h_1 increases and the ANF decreases. Also, relatively large changes ($\delta \geq 2$), lead to a relatively small desired sample size ($n_2 \leq 10$) and smaller changes ($0.25 \leq \delta < 2$) lead to a larger optimal sample size ($11 \leq n_2 \leq 14$).

The results of numerical comparisons indicate that the proposed control design performs much better than FRS in detecting small changes and the detection of mean changes in the $VRS-\bar{X}$ statistical control design is faster than the $FRS-\bar{X}$ design and has a better performance.

8. Reference

- [1] Costa, A.F.B. (1997), \bar{X} charts with variable sampling size and sampling intervals. *Journal of Quality Technology*, 29:2, 197-204. DOI: 10.1080/00224065.1997.11979750.