مقاله پژوهشی

استنباط آماری در مورد آزمون عمر شتابیده برای دستگاه یک‌بار شلیک با ریسک رقابتی

نوشین حکمی‌پور*
استادیار، دکترای آمار، گروه ریاضی، مرکز آموزش عالی فنی و مهندسی بوئین زهرا، قزوین، ایران.

چکیده: این مقاله به مدل‌سازی و تجزیه و تحلیل مدل ریسک‌های رقابتی برای دستگاه یک‌بار شلیک، تحت آزمون عمر شتابیده تنش ثابت می‌پردازد. در تجزیه و تحلیل قابلیت اطمینان یک دستگاه مهم است، بتوانیم علل اصلی خرابی را شناسایی کنیم. بنابراین مدل ریسک رقابتی مورد استفاده قرار می‌گیرد. ما مدل ریسک رقابتی را در دو حالت مشاهده دلیل خرابی و دلیل خرابی پوشانده شده، در نظر می‌گیریم. داده‌های به‌دست‌آمده از آزمایش دستگاه یک‌بار شلیک، مفقود شده‌اند. از این‌رو، الگوریتمEM به همراه روش امتیازدهی فیشر برای براورد پارامترهای مدل استفاده می‌شوند. همچنین، برای کم‌کردن زمان و هزینه، آزمون عمر شتابیده استفاده می‌شود. به علاوه، در انتها به منظور براورد دقیق قابلیت اطمینان محصول، طرح آزمون بهینه می‌شود. با توجه به داده‌های شبیه‌سازی شده، نتیجه می‌گیریم که الگوریتم EM و فاصله اطمینان بوت استرپ روش‌های مناسبی برای براورد هستند. به علاوه، کوتاه شدن مدت آزمون منجر به دستیابی به طرح آزمون بهینه می‌شود.

کلیدواژه‌ها: الگوریتم EM، براورد امتیازدهی فیشر، دستگاه یک‌بار شلیک، ریسک‌های رقابتی، دلایل خرابی پوشانده شده.

۱- مقدمه

دستگاه یک‌بار شلیک[1]، به وسیله‌ای گفته می‌شود که تنها یک بار قابل استفاده است و آزمون طول عمر باعث نابودی کامل آن می‌شود. دستگاه‌های یک‌بار شلیک از قبیل شاتل‌های فضایی، موشک‌ها، کپسول‌های آتش‌نشانی، کیسه هوای خودروها و ... می‌باشند. به دلیل ماهیت دستگاه‌های یک‌بار شلیک، داده‌های آزمایش این وسایل به طور کامل سانسور می‌شوند، در نتیجه طول عمر واقعی این دستگاه‌ها قابل مشاهده نیست. به عبارت دیگر، داده‌های مشاهده شده سانسور چپ یا راست می‌شوند. بدین ترتیب که اگر دستگاه در زمان آزمایش دچار شکست شود، طول عمر کمتر از زمان آزمایش است، بنابراین سانسور چپ رخ می‌دهد؛ و اگر دستگاه در زمان انجام آزمون با شکست مواجه نشود، پس طول عمر بیشتر از زمان آزمایش است و بنابراین سانسور راست رخ می‌دهد. بنابراین در مورد دستگاه‌های یک‌بار شلیک، ما صرفاً در مورد وضعیت شکست دستگاه‌ها در یک بازه زمانی اطلاع داریم نه در مورد طول عمر واقعی آن‌ها؛ و این مسئله پیش‌بینی قابلیت اعتماد این دستگاه‌ها را به یک مشکل چالش برانگیز تبدیل کرده است. مطالعه دستگاه‌های یک‌بار شلیک توسط آزمون‌های طول عمر اولین بار توسط فَن[2] و همکاران [۷] انجام شد. اخیراً، بالاکریشنان[3] و همکاران [۳] استنباطی در مورد دستگاه‌های یک‌بار شلیک که طول عمر آن‌ها از توزیع نمایی تبعیّت می‌کنند، ارائه دادند. روی هم رفته، مطالعات زیادی روی دستگاه‌های یک‌بار شلیک انجام نگرفته است.

دستگاه‌های یک‌بار شلیک اغلب دارای اجزای متعددی هستند که می‌توانند باعث خرابی دستگاه شوند. به عنوان مثال، یک کپسول آتش‌نشانی شامل یک استوانه، یک سوپاپ و مواد شیمیایی در داخل آن است. کیسه هوای خودرو شامل سنسور تصادف، باد کننده و کیسه هوا است. همچنین برای هر نوع غذای بسته‌بندی شده، علل مختلفی برای انقضای غذا وجود دارد؛ مانند رشد میکرو ارگانیسم‌ها در بسته، سطح رطوبت و خرابی غذا در اثر اکسیداسیون. در تمامی مثال‌های ذکر شده، خرابی هر یک از اجزای سازنده منجر به خرابی محصول می‌شود. در مورد واحدهای خراب، ما معمولاً علت خرابی را بررسی می‌کنیم. به طور کلی در آزمون‌های تجزیه و تحلیل بقا و قابلیت اعتماد،

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۱/۱۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۲/۰۷
دوره ۱۱/ شماره ۳
صفحات ۲۸۵-۳۰۶

[1] One-shot device

*Corresponding author: *n.hakami@bzte.ac.ir*

[2] Fan
[3] Balakrishnan

شکست محصول در نتیجه چندین عامل رخ می‌دهد که نادیده گرفتن این عوامل و یا کاهش دادن آن‌ها فقط به یک فاکتور، ممکن است منجر به تصمیمات اشتباه و نتایج غیر قابل قبول شود. تجزیه و تحلیل داده‌های طول عمر با درنظر گرفتن همه عواملی که منجر به شکست محصول می‌شوند، به مسئله ریسک‌های رقابتی[4] معروف است. به عنوان مثال در یک کارآزمایی بالینی بر روی گروهی از بیماران مبتلا به نوع خاصی از سرطان، ممکن است از علل دیگری غیر از سرطان وجود داشته باشد که موجب مرگ برخی از بیماران شود؛ مانند تصادف، سکته و ... امروزه بیمارانی که به کووید ۱۹ مبتلا می‌شوند، ممکن است از بیماری‌های زمینه‌ای دیگری نیز رنج ببرند که مرگ بیمار ممکن است به یکی از این دلایل اتفاق بیفتد. از این مثال‌ها می‌توان متوجه شد که داده‌های ریسک رقابتی شامل طول عمر و علت شکست محصول است. علل شکست ممکن است مستقل از هم باشند و یا وابسته باشند [۱]. مدل ریسک رقابتی توسط برخی از نویسندگان در زمینه های متنوعی از قابلیت اعتماد مورد مطالعه قرار گرفته است که از این بین می‌توان به [۲۰]، [۲۸]، [۱۸]، [۲۶] و [۲] اشاره کرد.

در این مقاله قصد داریم مدل ریسک رقابتی را برای دستگاه‌های یک‌بار شلیک مورد بررسی قرار دهیم. به این منظور اطلاعاتی که از آزمون طول عمر، جمع‌آوری می‌شوند شامل وضعیت محصول در زمان بازرسی و همچنین علت خرابی در صورت شکست محصول خواهد بود. همچنین، در این مقاله مدل ریسک رقابتی هم در صورتی که دلایل خرابی محصولات تخریب شده، موجود و هم در حالتی که دلایل خرابی پنهان شده[5] باشند، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. به علاوه برای جمع‌آوری داده‌های طول عمر، از آزمونی که در ادامه توضیح داده می‌شود، استفاده می‌کنیم.

این روزها اکثر محصولات تولید شده از کیفیت بالایی برخوردار هستند، بنابراین طول عمر طولانی خواهند داشت که این امر منجر به طولانی شدن زمان آزمون می‌شود. به دلیل مشکلی که در ارزیابی محصولات با قابلیت اعتماد بالا مواجه هستیم، در این مقاله به منظور کاهش زمان و هزینه آزمایش، از آزمون‌های عمر شتابیده[6] استفاده می‌شود. آزمون‌های عمر شتابید با اعمال تنشی بیش از حد طبیعی به محصولات، باعث سرعت بخشیدن به روند تخریب محصول و در نتیجه کاهش طول عمر محصول می‌شوند.

[4] Competing risks
[5] Masked
[6] Accelerated life tests

البته لازم به ذکر است که تمامی نتایج در رابطه با این آزمون‌ها در شرایط استفاده معمول ارائه می‌شوند. برای اطلاع و آشنایی بیشتر با آزمون‌های عمر شتابیده به [۲۳]، [۶] و [۱۱] مراجعه کنید.

آزمون‌های عمر شتابیده انواع مختلفی دارند که ما در این مقاله از آزمون تنش ثابت[7] که یکی از متداول‌ترین آزمون‌های عمر شتابیده است، استفاده می‌نماییم. در آزمون تنش ثابت هر وسیله تنها تحت یک سطح تنش از پیش تعیین شده که بیش ازحد معمول می‌باشد، قرا می‌گیرد و این روند تا شکست وسیله و یا اعمال نوعی سانسور ادامه می‌یابد. تا کنون مطالعات زیادی در زمینه آزمون عمر شتابیده تنش ثابت، انجام شده است که به عنوان مثال می‌توان به [۲۵]، [۱۷] و [۲۲] اشاره کرد. ولی مطالعات بسیار محدودی در زمینه به کار بردن آزمون‌های عمر شتابیده برای دستگاه‌های یک‌بار شلیک انجام شده است. اخیراً، ژی‌یو و لی‌یو[8] [۳۰] قابلیت اطمینان دستگاه‌های یک‌بار شلیک را که از توزیع گامای تعمیم‌یافته تبعیّت می‌کنند و تحت آزمون عمر شتابیده دوره‌ای قرار می‌گیرند، مورد بررسی قرار دادند. ما در این مقاله قصد داریم برای جمع‌آوری اطلاعات دستگاه‌های یک‌بار شلیک از آزمون عمر شتابیده تنش ثابت تحت مدل ریسک رقابتی استفاده کنیم، این امر موجب پیچیدگی مدل حاصل جهت براورد پارامترهای مجهول خواهد شد. رویکرد ما در این مقاله، جهت براورد پارامترهای مجهول مدل حاصل، استفاده از دو روش الگوریتم انتظار بیشینه[9] (EM) و روش امتیازدهی فیشر[10] است.

الگوریتم EM یک روش قدرتمند برای به دست آوردن براورد ماکسیمم درستنمایی[11] (MLE) با حضور داده‌های مفقود شده است. همان‌طور که بالاتر توضیح داده شد، داده‌های حاصل از آزمون دستگاه‌های یک‌بار شلیک، سانسور می‌شوند و می‌توان آن‌ها را به عنوان داده‌های مفقود شده در نظر گرفت. به همین دلیل یکی از روش‌های مورد بحث در این مقاله برای براورد پارامترهای مجهول، استفاده از الگوریتم EM است. اِنگ[12] و همکاران [۲۴] الگوریتم EM را برای توزیع‌های لگ‌نرمال و وایبل[13] که تحت سانسور فزاینده قرار گرفته بودند، به کار بردند.

[7] Constant stress test
[8] Zhu & Liu
[9] Expectation-maximization algorithm
[10] Fisher Scoring
[11] Maximum likelihood estimates
[12] Ng
[13] Weibull

حکمی‌پور [۹] الگوریتم EM را برای براورد پارامترهای حاصل از اعمال آزمون عمر شتابیده تنش ثابت برای توزیع لومکس و تحت سانسور فزاینده نوع اول به کار برد.

در این مقاله در نظر می‌گیریم که طول عمر دستگاه‌های یک‌بار شلیک از توزیع رایلی[۱۴] پیروی می‌کند. توزیع رایلی، یکی از توزیع‌های پیوسته پر کاربرد برای طول عمر محصولات است که کاربرد قابل توجهی در زمینه تجزیه و تحلیل بقا، نظریه قابلیت اعتماد، مطالعات بالینی و به طور ویژه مهندسی ارتباطات دارد. به علاوه، در زمینه‌های مختلف فیزیک برای مدل‌سازی فرآیندهایی مانند ارتفاع موج، تابش صدا و نور، سیگنال‌های رادیویی، نیروی باد، مدل‌سازی تصویر و غیره استفاده می‌شود. همچنین برای مدل‌سازی طول عمر در لوله‌ها، مقاومت‌ها، شبکه‌ها، کریستال‌ها، دستگیره‌ها، ترانسفورماتورها، رله‌ها و خازن‌ها در مجموعه‌های رادار هواپیما استفاده می‌شود. توزیع رایلی برای مطالعه سرعت باد در طول یک سال در سایت‌های توربین بادی و میانگین سرعت باد روزانه استفاده می شود. برای آشنایی بیشتر با منشا و کاربردهای این توزیع به [۱۵] و [۱۴] مراجعه نمایید. اخیراً این توزیع در بررسی آزمون‌های عمر شتابیده مورد استفاده گسترده‌ای قرار گرفته است. به عنوان مثال حکمی‌پور [۱۲] طرح آزمون عمر شتابیده تنش گام به گام[۱۵] را برای توزیع رایلی با حضور محدودیت هزینه و زمان بهینه کرد. همچنین حکمی‌پور [۱۰] طرح بهینه آزمون تنش گام به گام و آزمون تنش ثابت را برای محصولاتی که طول عمر آن‌ها از توزیع رایلی پیروی می‌کنند، مورد مقایسه قرار داد. با توجه به کاربردهای گسترده توزیع رایلی در زمینه‌های مختلف که تا حدودی به آن اشاره شد، برای اینکه بتوان موضوع مورد بحث در این مقاله را در موارد مختلف به کار برد و همچنین به دلیل جامعیت موضوع در زمینه‌های مختلف، توزیع رایلی را به عنوان توزیع طول عمر محصولات یک‌بار شلیک، که موضوع مورد بحث این مقاله می‌باشد، در نظر می‌گیریم.

مقاله حاضر شامل موارد زیر می‌شود: بخش ۲ این مقاله به توصیف مدل حاصل از آزمون دستگاه‌های یک‌بار شلیک تحت مدل ریسک رقابتی می‌پردازد. در بخش ۳، به براورد پارامرهای مجهول مدل با استفاده از الگوریتم EM و روش امتیازدهی فیشر می‌پردازیم. همچنین به بررسی نحوه انتخاب نقطه شروع الگوریتم EM و مقایسه براورد حاصل از آن با براورد حاصل از روش امتیازدهی فیشر خواهیم پرداخت. روش‌های براورد مجانبی و بوت استرپ[۱۶]، برای تخمین فاصله‌ای پارامترهای مجهول در بخش ۴ ارائه می‌شوند. در بخش ۵ الگوریتم EM برای حالتی که دلایل شکست پوشانده شده باشند، به روزرسانی می‌شوند. طرح بهینه آزمون مورد بررسی با معیار به حداقل رساندن واریانس مجانبی براورد قابلیت اعتماد در شرایط استفاده معمول و در زمان از پیش تعیین شده ξ، در بخش ۶ ارائه می‌شود. در بخش ۷ برای ارزیابی براوردهای انجام شده و بررسی‌های ارائه شده، مطالعات شبیه‌سازی بر روی مدل صورت می‌گیرد و نهایتاً در بخش ۸ نتایج حاصل از این مطالعه ارائه می‌شود.

۲- توصیف مدل

فرض کنید تعداد N دستگاه یک‌بار شلیک در J سطح تنش مختلف و از پیش تعیین شده که همگی بیش از حد استفاده معمول هستند، قرار می‌گیرند. در هر سطح تنش نیز تعداد I زمان بازرسی در نظر گرفته می‌شود که در این زمان‌ها اطلاعات لازم در مورد وضعیت خرابی و علت خرابی دستگاه‌ها جمع آوری و دستگاه‌های جدید جهت ادامه آزمون جایگزین می‌شوند. در این مقاله فرض می‌کنیم فقط دو عامل منجر به خرابی دستگاه می‌شود. به عنوان مثال در مورد دستگاه الکترو انفجاری، خرابی دستگاه به دو دلیل فرسودگی سیم‌ها و یا نشت سوخت ممکن است رخ دهد. نمادهای لازم جهت توصیف مدل به‌ازای $i=1,2,...,I$ و $j=0,1,2,...,J$ صورت زیر ارائه می‌شوند:

- N_{ij} عبارتست از تعداد دستگاه‌هایی که در سطح تنش j ام و زمان بازرسی i ام وارد آزمون می‌شوند.
- x_j عبارتست از سطوح تنش مختلفی که به محصولات اعمال می‌شوند.
- τ_i بیانگر زمان‌های بازرسی از پیش تعیین شده هستند که تمامی واحدهای تحت آزمون در سطوح مختلف تنش اعمال شده در این زمان‌ها مورد بازبینی قرار می‌گیرند.
- n_{rij} تعداد محصولاتی هستند که به دلیل r ام و در سطح تنش j ام و زمان بازرسی i ام با شکست مواجه می‌شوند؛ که در این مقاله $r=1,2$ است.

[14] Rayleigh distribution
[15] Step stress test
[16] Bootstrap

- s_{ij} نشانگر تعداد محصولات سالم باقی مانده در سطح تنش j ام و بازرسی i ام می‌باشد.
- T_{rijk} بیانگر طول عمر دستگاه k ام در سطح تنش j ام و زمان بازرسی i ام و ناشی از دلیل تخریب r ام می‌باشد، که $k=1,2,...,N_{ij}$ است.

با توجه با نمادهای معرفی شده در بالا واضح است که $s_{ij}=N_{ij}-\sum_{r=1}^{2} n_{rij}$ و $N=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} N_{ij}$ بیانگر تعداد نمونه مورد بررسی است. به علاوه در این مقاله در نظر می‌گیریم که طول عمر محصولات تحت آزمون طراحی شده، از توزیع رایلی با تابع احتمال زیر پیروی می‌نماید:

$$f_{rj}(t)=\frac{t}{\theta_{rj}^{2}}\, e^{-\frac{t^{2}}{2\theta_{rj}^{2}}} \qquad (۱)$$

که θ_{rj} بیانگر پارامتر مقیاس توزیع رایلی و متناسب با میانگین طول عمر محصولات به ازای $r=1,2$ و $j=0,1,2,...,J$ می‌باشد.

همان‌طور که قبلاً اشاره شد در آزمون‌های عمر شتابیده، داده‌های طول عمر در شرایطی جمع‌آوری می‌شوند که محصولات تحت تنشی بیش از حد طبیعی قرار گرفته‌اند. به همین دلیل، برای این‌که بتوانیم طول عمر محصولات را در شرایط استفاده طبیعی به دست آوریم، نیاز به دانستن رابطه بین تنش و طول عمر داریم. در این مقاله فرض می‌کنیم بین پارامتر مقیاس توزیع رایلی و سطح تنش اعمال شده، رابطه زیر برقرار است:

$$\theta_{rj}=\alpha_r e^{\beta_r x_j} \qquad (۲)$$

که α_r و β_r پارامترهای مجهولی هستند که باید براورد شوند.

با توجه به آزمون طراحی شده، داده‌های جمع‌آوری شده در زمان‌های بازرسی $\tau_1,\tau_2,...,\tau_I$ شامل وضعیت شکست محصول به همراه دلیل خرابی آن می‌باشد. در این مقاله دو دلیل خرابی برای محصولات در نظر گرفته می‌شود، که فرض می‌کنیم این دو دلیل مستقل از هم عمل می‌کنند و منجر به خرابی محصول می‌شوند. از این رو *نماد* Δ_{ijk} را به عنوان تابع مشخصه وضعیت محصول kام، در سطح تنش j ام و زمان بازرسی i ام در نظر می‌گیریم. به این صورت که اگر محصول در زمان بازرسی i ام دچار شکست نشده باشد، $\Delta_{ijk}=0$ و اگر عامل r ام منجر به شکست محصول شود، $\Delta_{ijk}=r$ به ازای $r=1,2$ قرار داده می‌شود. در واقع زمانی که دستگاه دچار شکست می‌شود، بازرسی دقیق‌تری انجام می‌شود تا دلیل شکست شناسایی گردد. به عبارت دیگر تابع مشخصه Δ_{ijk} به صورت زیر نیز تعریف می‌شود:

$$\Delta_{ijk}=\begin{cases}0 & \tau_i<\min(T_{1ijk},T_{2ijk})\\ 1 & T_{1ijk}<\min(\tau_i,T_{2ijk})\\ 2 & T_{2ijk}<\min(\tau_i,T_{1ijk})\end{cases} \qquad (۳)$$

مقادیر متناظر با تابع مشخصه Δ_{ijk} را با δ_{ijk} نشان می‌دهیم. به علاوه، در ادامه از نماد p_{0ij} برای احتمال عدم شکست دستگاه و از نمادهای p_{1ij} و p_{2ij} به ترتیب برای احتمال شکست ناشی از عامل یک یا دو استفاده می‌کنیم که با جایگذاری رابطه (۱) به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$p_{0ij}=P\left(\tau_i<\min(T_{1ijk},T_{2ijk})\right)=e^{-\frac{\tau_i^2}{2}\left(\frac{1}{\theta_{1j}^2}+\frac{1}{\theta_{2j}^2}\right)} \qquad (۴)$$

$$p_{1ij}=P\left(T_{1ijk}<\min(\tau_i,T_{2ijk})\right)=\frac{\theta_{2j}^2}{\theta_{1j}^2+\theta_{2j}^2}\left(1-e^{-\frac{\tau_i^2}{2}\left(\frac{1}{\theta_{1j}^2}+\frac{1}{\theta_{2j}^2}\right)}\right) \qquad (۵)$$

$$p_{2ij}=P\left(T_{2ijk}<\min(\tau_i,T_{1ijk})\right)=\frac{\theta_{1j}^2}{\theta_{1j}^2+\theta_{2j}^2}\left(1-e^{-\frac{\tau_i^2}{2}\left(\frac{1}{\theta_{1j}^2}+\frac{1}{\theta_{2j}^2}\right)}\right) \qquad (۶)$$

داده‌های جمع‌آوری شده در سطوح تنش $x=\{x_j, j=1,2,...,J\}$ و زمان‌های بازرسی $\tau=\{\tau_i, i=1,2,...,I\}$ شامل تعداد دستگاه‌هایی با مقدار مشخصه‌های $\delta_{ijk}=0$، $\delta_{ijk}=1$ و $\delta_{ijk}=2$ می‌شود؛ که به ترتیب با نمادهای s_{ij}، n_{1ij} و n_{2ij} نمایش داده می‌شوند. اکنون در روابط (۴) تا (۶) رابطه (۲) را جایگذاری می‌کنیم؛ به این ترتیب مدل مورد بررسی بر حسب پارامترهای مجهول $\gamma=(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$ به دست می‌آید. در این مقاله برای براورد پارامترهای مجهول، از روش MLE استفاده می‌شود. برای این کار به تابع درستنمایی نیاز داریم که در زیر ارائه شده است:

$$L(\boldsymbol{\gamma}|\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{x})=\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} p_{0ij}^{s_{ij}}\, p_{1ij}^{n_{1ij}}\, p_{2ij}^{n_{2ij}} \qquad (۷)$$

که درآن $N_{ij}=n_{1ij}+n_{2ij}+s_{ij}$. با جایگذاری روابط (۴) تا (۶) در رابطه (۷) تابع درستنمایی به دست می‌آید که برای سادگی محاسبات از لگاریتم آن استفاده می‌کنیم. برای به دست آوردن براورد MLپارامترها باید از لگاریتم تابع درستنمایی نسبت به

پارامترهای مجهول α_r و β_r به ازای $r = 1,2$ مشتق بگیریم و برابر صفر قرار دهیم.

$$\frac{\partial \ell(\gamma)}{\partial \alpha_r} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left\{S_{ij}\frac{\tau_i^2}{\alpha_r^3}e^{-2\beta_r x_j} + \left(n_{1ij} + n_{2ij}\right)\frac{\tau_i^2}{\alpha_r^3}e^{-2\beta_r x_j}\left(1 - e^{-\frac{\tau_i^2}{2}\left(\frac{e^{-2\beta_1 x_j}}{\alpha_1^2}+\frac{e^{-2\beta_2 x_j}}{\alpha_2^2}\right)}\right)^{-1} - 2\left(n_{1ij} + n_{2ij}\right)\frac{\alpha_r e^{2\beta_r x_j}}{\alpha_1^2 e^{2\beta_1 x_j} + \alpha_2^2 e^{2\beta_2 x_j}} + \frac{2n_{2ij}}{\alpha_r}\right\} \quad (۸)$$

$$\frac{\partial \ell(\gamma)}{\partial \beta_r} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left\{S_{ij}\frac{\tau_i^2}{\alpha_r^2}x_j e^{-2\beta_r x_j} + \left(n_{1ij} + n_{2ij}\right)\frac{\tau_i^2}{\alpha_r^2}x_j e^{-2\beta_r x_j}\left(1 - e^{-\frac{\tau_i^2}{2}\left(\frac{e^{-2\beta_1 x_j}}{\alpha_1^2}+\frac{e^{-2\beta_2 x_j}}{\alpha_2^2}\right)}\right)^{-1} - 2\left(n_{1ij} + n_{2ij}\right)\frac{\alpha_r^2 x_j e^{2\beta_r x_j}}{\alpha_1^2 e^{2\beta_1 x_j} + \alpha_2^2 e^{2\beta_2 x_j}} + 2x_j n_{2ij}\right\} \quad (۹)$$

همان‌طور که در روابط (۸) و (۹) مشخص است، به دست آوردن براورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای α_1، α_2، β_1 و β_2 به صورت تحلیلی امکان‌پذیر نیست؛ از این رو باید از روش‌های عددی استفاده کنیم. در این مقاله با توجه به طرح آزمایش مورد بررسی از روش الگوریتم EM بهره می‌گیریم.

۳- *الگوریتم EM*

الگوریتم EM یک روش کارآمد برای تعیین براورد ML پارامترهای مدل در صورت وجود داده‌های مفقود شده به دلیل سانسور و یا داده‌های پوشانده شده می‌باشد. این الگوریتم اولین بار توسط دمپستر[17] و همکاران [۵] معرفی شد. کتاب مک‌لاکلِن و کریشنان[18][۲۱] بحث جامعی را در مورد نظریه و کاربرد الگوریتم EM ارائه می دهد. الگوریتم EM یک روند تکرار شونده متشکل از دو مرحلـه می‌باشـد:

- ***مرحله* E**: *در این مرحله داده‌های مفقود شده به شرط داده‌های مشاهده شده و برآورد جاری پارامترهای مـدل برآورد می شوند،*
- مرحله ***M***: در این مرحله تابع درستنمایی با این فرض که داده‌های مفقود شده معلوم هستند، حداکثر می‌شود. در حقیقت برآورد داده‌های مفقود شده از مرحله‌ی امید ریاضی به جای مقادیر مفقود شده قرار می‌گیرند.

در مرحله **M** با تکرار الگـوریتم با توجه به اینکـه مقـدار درسـتنمایی در هـر مرحلـه افزایش می‌یابد، می‌توان نسبت به همگرایی مطمئن بود.

الگوریتم EM در مقایسه با سایر الگوریتم‌های تکرار شونده برای یافتن براورد ML مانند روش نیوتن رافسون، دارای ویژگی‌های جالب توجهی است. برخی از مزایای این روش نسبت به بقیه روش‌های تکرار شونده توسط هوشیار [۱۶] و و هرمانز[19] و همکاران [۱۳] ارائه شده است؛ که از میان آن‌ها می‌توان به همگرایی الگوریتم EM در صورت انتخاب نقطه شروع مناسب، عدم نیاز به ارزیابی تابع درستنمایی و مشتقات مرتبه دوم آن اشاره کرد. به علاوه با توجه به توضیحات ارائه شده در بخش مقدمه، مناسب‌ترین روش برای براورد پارامترهای مجهول در صورت وجود داده‌های مفقود شده، استفاده از الگوریتم EM است.

در این بررسی، طول عمر واقعی دستگاه‌ها را به عنوان داده‌های مفقود شده در نظر می‌گیریم و با نماد $T_{rijk}^{(\Delta_{rijk})}$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$T_{rijk}^{(\Delta_{ijk})} = \begin{cases} T_{rijk} | \tau_i < \min(T_{1ijk}, T_{2ijk}) & \Delta_{ijk} = 0 \\ T_{rijk} | T_{1ijk} < \min(\tau_i, T_{2ijk}) & \Delta_{ijk} = 1 \\ T_{rijk} | T_{2ijk} < \min(\tau_i, T_{1ijk}) & \Delta_{ijk} = 2 \end{cases}$$

به علاوه به خاطر داریم، داده‌های مشاهده شده در این آزمون شامل $\boldsymbol{obs} = \left(n_{1ij}, n_{2ij}, s_{ij}\right)$ هستند و در این‌جا نماد $\gamma = \left(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\right)$ را برای پارامترهای مجهول مدل و نماد $\gamma^{(k)} = \left(\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \beta_1^{(k)}, \beta_1^{(k)}\right)$ را برای براورد پارامترها در تکرار kام در نظر می‌گیریم.

اکنون برای پیاده‌سازی الگوریتم EM به لگاریتم تابع درستنمایی برای داده‌های کامل نیاز داریم که در زیر ارائه می‌شود:

$$\ell_{com}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{N_{ij}}\sum_{r=1}^{2}\left\{-2\log\theta_{rj} + \log t_{rijk}^{(\delta_{ijk})} - \frac{{t_{rijk}^{(\delta_{ijk})}}^2}{2\theta_{rj}^2}\right\} \quad (۱۰)$$

با استفاده از رابطه (۲) و قرار دادن آن در رابطه (۱۰) داریم:

[17] Dempster
[18] McLachlan & Krishnan
[19] Hermanns

$$\ell_{com}(\boldsymbol{\gamma}) = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{N_{ij}}\sum_{r=1}^{2}\left\{-2\alpha_r - 2\beta_r x_j + \log t_{rijk}^{(\delta_{ijk})} - \frac{{t_{rijk}^{(\delta_{ijk})}}^2}{2} e^{-2\alpha_r - 2\beta_r x_j}\right\} \tag{۱۱}$$

اکنون با توجه به مشاهدات ثبت شده، رابطه (۱۱) را به صورت زیر بازنویسی می‌نماییم:

$$\begin{aligned}\ell_{com}(\boldsymbol{\gamma}) = {}& \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{r=1}^{2}\{-2N_{ij}\alpha_r - 2N_{ij}\beta_r x_j\} \\ &+ \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{N_{ij}}\sum_{r=1}^{2}\{ s_{ij}\log t_{rijk}^{(0)} + n_{1ij}\log t_{rijk}^{(1)} + n_{2ij}\log t_{rijk}^{(2)}\} \\ &- \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{N_{ij}}\sum_{r=1}^{2}\frac{e^{-2\alpha_r - 2\beta_r x_j}}{2}\{ s_{ij}\left(t_{rijk}^{(0)}\right)^2 + n_{1ij}\left(t_{rijk}^{(1)}\right)^2 + n_{2ij}\left(t_{rijk}^{(2)}\right)^2\}\end{aligned}$$

۳-۱- مرحله E

همانطور که اشاره شد، در این مرحله برای تقریب داده‌های مفقود شده، به امیدریاضی تابع لگاریتم درستنمایی داده‌های مفقود شده به شرط اطلاع از داده‌های مشاهده شده و براورد اخیر پارامترها (یعنی $Z = (\gamma^{(k)}, obs)$) نیازمندیم. که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}(\ell_{com}(\boldsymbol{\gamma})|\boldsymbol{Z}) \\ &= \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{r=1}^{2}\{-2N_{ij}\alpha_r^{(k)} - 2N_{ij}\beta_r^{(k)} x_j\} \\ &+ \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{N_{ij}}\sum_{r=1}^{2}\{ s_{ij}\mathrm{E}(\log t_{rijk}^{(0)}\,|\boldsymbol{Z}) + n_{1ij}\mathrm{E}(\log t_{rijk}^{(1)}\,|\boldsymbol{Z}) \\ &+ n_{2ij}\mathrm{E}(\log t_{rijk}^{(2)}\,|\boldsymbol{Z})\} \\ &- \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{N_{ij}}\sum_{r=1}^{2}\frac{e^{-2\alpha_r - 2\beta_r x_j}}{2}\{ s_{ij}\mathrm{E}\left(\left(t_{rijk}^{(0)}\right)^2\middle|\boldsymbol{Z}\right) \\ &+ n_{1ij}\mathrm{E}\left(\left(t_{rijk}^{(1)}\right)^2\middle|\boldsymbol{Z}\right) + n_{2ij}\mathrm{E}\left(\left(t_{rijk}^{(2)}\right)^2\middle|\boldsymbol{Z}\right)\}\end{aligned} \tag{۱۲}$$

۳-۲- مرحله M

در این مرحله، براورد پارامترها از طریق ماکسیمم کردن امید ریاضی تابع لگاریتم درستنمایی ارائه شده در مرحله E که در رابطه (۱۲) محاسبه شد، به روز می‌شوند. بنابراین به گرادیان رابطه (۱۲) نسبت به پارامترهای مجهول $\boldsymbol{\gamma}$ نیازمندیم که در روابط (۱۳) و (۱۴) ارائه می‌شوند.

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\mathrm{E}(\ell_{com}(\boldsymbol{\gamma}^{(k+1)})|\boldsymbol{Z})}{\partial\alpha_r} = \\ &-2\textstyle\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}N_{ij} + \\ &\textstyle\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{N_{ij}}\sum_{r=1}^{2} e^{-2\alpha_r{}^{(k+1)} - 2\beta_r{}^{(k+1)}x_j} \\ &\times\left\{ s_{ij}\mathrm{E}\left(\left(t_{rijk}^{(0)}\right)^2\middle|\boldsymbol{Z}\right) + n_{1ij}\mathrm{E}\left(\left(t_{rijk}^{(1)}\right)^2\middle|\boldsymbol{Z}\right) + n_{2ij}\mathrm{E}\left(\left(t_{rijk}^{(2)}\right)^2\middle|\boldsymbol{Z}\right)\right\}\end{aligned} \tag{۱۳}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\mathrm{E}(\ell_{com}(\boldsymbol{\gamma}^{(k+1)})|\boldsymbol{Z})}{\partial\beta_r} = -2\textstyle\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}x_j N_{ij} + \\ &\textstyle\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{N_{ij}}\sum_{r=1}^{2} x_j e^{-2\alpha_r^{(k+1)} - 2\beta_r^{(k+1)}x_j} \\ &\times\left\{ s_{ij}\mathrm{E}\left(\left(t_{rijk}^{(0)}\right)^2\middle|\boldsymbol{Z}\right) + n_{1ij}\mathrm{E}\left(\left(t_{rijk}^{(1)}\right)^2\middle|\boldsymbol{Z}\right) + n_{2ij}\mathrm{E}\left(\left(t_{rijk}^{(2)}\right)^2\middle|\boldsymbol{Z}\right)\right\}\end{aligned} \tag{۱۴}$$

که $E\left(\left(t_{rijk}^{\delta}\right)^2\middle|\gamma^{(k)},\boldsymbol{obs}\right)$ در بخش ضمیمه الف محاسبه شده است. با دقت در روابط (۱۳) و (۱۴) واضح است که برای حل این معادلات باید از روش‌های عددی بهره گرفت. ما در این مقاله از نرم‌افزار Matlab برای حل معادلات استفاده کردیم.

براورد به روز شده پارامترها در مرحله **M** را با نماد $\boldsymbol{\gamma}^{(k+1)}$ نمایش می‌دهیم و مجدد به مرحله **E** برمی‌گردیم. مراحل **E** و **M** را تا جایی تکرار می کنیم که تفاضل $E\left(\ell_{com}(\gamma)|\gamma^{(k+1)},\boldsymbol{obs}\right) - E\left(\ell_{com}(\gamma)|\gamma^{(k)},\boldsymbol{obs}\right)$ مقدار کوچک دلخواهی را که نشان‌دهنده همگرایی است، اختیار کند.

۳-۳- نقطه شروع الگوریتم EM

الگوریتم EM نسبت به براورد اولیه پارامترها حساس است. اگر نقطه شروع مناسب نباشد، ممکن است الگوریتم همگرا نشود؛ همین‌طور نقطه شروع مناسب، منجر به همگرایی سریع‌تر الگوریتم می‌شود. روش‌های مختلفی برای تعیین نقطه شروع وجود دارد، در این زمینه می‌توان به [۷] و [۴] اشاره کرد. در این مقاله از روش ارائه شده توسط [۷] استفاده می‌کنیم. آن‌ها در نظر گرفتند که قابلیت اعتماد در سطح تنش x_j و زمان بازرسی τ_i باید در حدود احتمالات واقعی p_{0ij} ، p_{1ij} و p_{2ij} به ازای $i = 1,2,...,I$ و $j = 0,1,2,...,J$ باشند. به طور شهودی،

برآوردهای تجربی $\hat{p}_{0ij}$ ، $\hat{p}_{1ij}$ و $\hat{p}_{2ij}$ عبارتند از $\frac{s_{ij}}{N_{ij}}$ ، $\frac{n_{1ij}}{N_{ij}}$ و $\frac{n_{2ij}}{N_{ij}}$.
اگر یکی از این موارد صفر باشند، برآورد مقدار اولیه با مشکل مواجه خواهد شد. مقالات زیادی به این مشکل پرداخته‌اند که در اینجا از راهکار ارائه شده توسط لی و کوهن[20] [۱۹] که به صورت زیر می‌باشد، استفاده می‌کنیم. این رابطه به برآورد تجربی اصلاح شده معروف است.

$$(\tilde{p}_{0ij},\tilde{p}_{1ij},\tilde{p}_{2ij}) = \left(\frac{s_{ij}+1}{N_{ij}+3},\frac{n_{1ij}+1}{N_{ij}+3},\frac{n_{2ij}+1}{N_{ij}+3}\right) \qquad (۱۵)$$

اکنون با توجه به رابطه (۴) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{\theta_{1j}^2\theta_{2j}^2}{\theta_{1j}^2+\theta_{2j}^2} = \frac{-\tau_i^2}{2\log p_0} \qquad (۱۶)$$

همچنین با ساده کردن رابطه (۱۶) توسط رابطه (۲) و قرار دادن در روابط (۵) و (۶) داریم:

$$\log(\alpha_r)+\beta_r x_j = \frac{1}{2}\log(-\tau_i^2) - \frac{1}{2}\log(2p_{rij}) + \frac{1}{2}\log(1-p_{0ij}) - \frac{1}{2}\log(\log(p_{0ij}))$$

به ازای $r = 1,2$ ، $i = 1,2,\dots,I$ و $j = 0,1,2,\dots,J$. با جایگذاری کردن p_{0ij} ، p_{1ij} و p_2 توسط برآورد تجربی اصلاح‌شده که در رابطه (۱۵) معرفی شد، برآورد حداقل مربعات پارامترهای α_1 ، α_2 ، β_1 و β_2 توسط به حداقل رساندن معادله زیر به دست می‌آید:

$$S(\gamma) = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} N_{ij}\sum_{r=1}^{2}\Big(-\frac{1}{2}\log(2\tilde{p}_{rij}) + \frac{1}{2}\log(1-\tilde{p}_{0ij}) - \frac{1}{2}\log(\log(\tilde{p}_{0ij})) - \log(\alpha_r) + \beta_r x_j - \frac{1}{2}\log(-\tau_i^2)\Big)^2$$

بدین ترتیب برآورد حداقل مربعات پارامترها عبارت‌اند از:

$$\hat{\alpha}_r^{LSE} = e^{\frac{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}N_{ij}(W_{ij}-\beta_r x_j)}{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}N_{ij}}} \qquad (۱۷)$$

$$\hat{\beta}_r^{LSE} = \frac{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}N_{ij}(W_{rij}-\log\alpha_r)}{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}N_{ij}x_j} \qquad (۱۸)$$

به ازای $r = 1,2$. که W_{rij} در روابط (۱۷) و (۱۸) عبارت‌است از:

$$W_{rij} = -\frac{1}{2}log(2\tilde{p}_{rij}) + \frac{1}{2}log(1-\tilde{p}_{0ij}) - \frac{1}{2}log(log\,\tilde{p}_{0ij}) - \frac{1}{2}log(-\tau_i^2)$$

طبق توضیحات بیان شده شده، از برآورد حداقل مربعات پارامترها که در روابط (۱۷) و (۱۸) ارائه شدند، برای نقطه شروع پارامترها در الگوریتم EM استفاده می‌شود.

۴-۳- برآورد امتیازدهی فیشر

در اینجا علاوه بر الگوریتم EM از روش برآورد امتیازدهی فیشر نیز برای برآورد پارامترهای مجهول مدل استفاده می‌شود. و نهایتاً مقایسه‌ای بین این دو روش برآورد ارائه می‌شود. امتیازدهی فیشر (FS) یک روش عددی اصلاح‌شده، برگرفته از روش نیوتن رافسون با استفاده از بردارهای امتیاز و ماتریس اطلاعات فیشر است [۲۹]. همان‌طور که می‌دانیم ماتریس اطلاع فیشر نقش کلیدی در استنباط آماری پارامترهای برآوردشده ایفا می‌کند. تکرارهای نیوتن رافسون از ماتریس هسین استفاده می‌کنند که عناصر آن متشکل از مشتقات دوم تابع درستنمایی هستند [۸]. شورر و هووی[21] [۲۷] دو روش برآورد نیوتن رافسون و FS را مقایسه کردند و به این نتیجه رسیدند که روش FS بهتر است زیرا این الگوریتم در زمانی که الگوریتم نیوتن رافسون همگرا نمی شود، همگرا می‌شود. در روش FS به تابع امتیازها که عبارتست از $V(\gamma) = \partial\ell(\gamma)/\partial\gamma$ و ماتریس اطلاع فیشر نیاز داریم و معادله به روزرسانی برای برآورد پارامترها عبارتست از:

$$\gamma^{(k+1)} = \gamma^{(k)} + \hat{F}^{-1}V(\gamma)$$

که در این رابطه، $\hat{F}$ برآورد ماتریس اطلاع فیشر است که در بخش ضمیمه ب محاسبه و ارائه شده است.

[20] Lee & Cohen

[21] Schworer & Hovey

۴- برآورد فاصله‌ای پارامترها

۴-۱- فاصله اطمینان مجانبی

زمانی که فرم بسته‌ای برای براوردگر ماکسیمم درستنمایی پارامترها وجود ندارد، تعیین توزیع دقیق براوردگرها دشوار می‌شود؛ از این رو از فاصله اطمینان مجانبی که بر پایه توزیع تقریبی نرمال ساخته می‌شود، استفاده می‌شود. در این روش به ماتریس واریانس کواریانس مجانبی براوردگرها نیاز داریم. فاصله اطمینان مجانبی پارامتر γ در سطح اطمینان $100(1-\omega)\%$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{\gamma} \pm Z_{\frac{\omega}{2}}\sqrt{Var(\hat{\gamma})}$$

که برای محاسبه $Var(\hat{\gamma})$ به درایه‌های روی قطر اصلی معکوس ماتریس اطلاع فیشر باید مراجعه کرد.

۴-۲- فاصله اطمینان بوت استرپ

فواصل اطمینان را می‌توان از طریق روش بوت استرپ پارامتریک نیز به دست آورد. مراحل فاصله اطمینان بوت استرپ به شرح زیر است:

۱. *با استفاده از داده‌های اولیه، $\hat{\gamma}$ را براورد می‌کنیم،*
۲. *B نمونه بوت استرپ تصادفی با پارامترهای براوردشده $\hat{\gamma}$، تولید می‌کنیم،*
۳. *در هر نمونه بوت استرپ تولید شده از مرحله ۲، پارامترها را براورد می‌کنیم،*
۴. *پارامترهای براورد شده در مرحله ۳ را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم،*
۵. *فاصله اطمینان بوت استرپ پارامتر γ در سطح اطمینان $100(1-\omega)\%$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:*

$$\left(\hat{\gamma}^{\left[\frac{\omega}{2}(B+1)\right]}, \hat{\gamma}^{\left[1-\frac{\omega}{2}(B+1)\right]}\right)$$

در بخش ۷ که شامل مطالعات شبیه‌سازی شده است، فاصله اطمینان حاصل از دو روش ذکر شده در بخش ۴ با هم مقایسه می‌شوند.

۵- علل شکست پوشانده‌شده

گاهی نمی‌توان علت شکست محصول را شناسایی کرد. در این مورد، گفته می‌شود که علت شکست واحدها، "پوشانده شده" است. برای تطبیق الگوریتم EM با این مورد، به تابع مشخصه ارائه شده در رابطه (۳) مقدار $\Delta_{ijk} = -1$ را برای حالت علل پوشانده شده، اضافه می‌کنیم. در این صورت تابع مشخصه Δ_{ijk} به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\Delta_{ijk} = \begin{cases} -1 & \{\min(T_{1ijk}, T_{2ijk}) < \tau_i\} \cap \{\text{masked}\} \\ 0 & \tau_i < \min(T_{1ijk}, T_{2ijk}) \\ 1 & \{T_{1ijk} < \min(\tau_i, T_{2ijk})\} \cap \{\text{not masked}\} \\ 2 & \{T_{2ijk} < \min(\tau_i, T_{1ijk})\} \cap \{\text{not masked}\} \end{cases}$$

برای سادگی در نظر می‌گیریم که وقوع علل پوشانده‌شده مستقل از علل زیربنایی عدم مشاهده دلیل شکست است. به این معنا که

$$\mathrm{E}\left(T_{rijk}{}^2 \middle| \begin{matrix} \{\text{conditions of } T_{1ijk} \text{ and } T_{2ijk}\} \\ \cap \{\text{masking event}\} \end{matrix}\right) = \mathrm{E}\left(T_{rijk}{}^2 \middle| \{\text{conditions of } T_{1ijk} \text{ and } T_{2ijk}\}\right)$$

بنابراین $\mathrm{E}\left(\left(t_{rijk}^{(\delta_{ijk})}\right)^2\right)$ زمانی که $\delta_{ijk} = 0,1,2$ در حالتی که علل پوشانده‌شده وجود دارد، دقیقاً مشابه حالتیست که علل پوشانده‌شده وجود ندارد، یعنی همان روابطی که در بخش ضمیمه الف محاسبه و ارائه شدند.

اکنون تعداد دستگاه‌هایی که با دلیل پوشانده‌شده دچار شکست شدند را در سطح تنش j ام و زمان بازرسی i ام با نماد m_{ij} نمایش می‌دهیم. در این صورت داریم:

$$N_{ij} = m_{ij} + n_{1ij} + n_{2ij} + s_{ij}$$

به علاوه $p_{(-1)ij} = 1 - p_{0ij} = p_{1ij} + p_{2ij}$. که p_{0ij}، p_{1ij} و p_{2ij} در روابط (۴)، (۵) و (۶) ارائه شدند.

همانطور که در بخش ۳ ملاحظه کردید، برای پیاده‌سازی الگوریتم EM در مرحله M، امید ریاضی T_{rijk}^2 را تحت مقادیر مختلف Δ_{ijk} محاسبه و در بخش ضمیمه الف ارائه کردیم. اکنون برای اینکه بتوان الگوریتم EM را در حالتی که علل پوشانده‌شده وجود دارد، نیز استفاده کرد، رابطه (۱۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}(\ell_{com}(\boldsymbol{\gamma})|\boldsymbol{Z}) \\
&= \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{r=1}^{2}\{-2N_{ij}\alpha_r^{(k)} - 2N_{ij}\beta_r^{(k)}x_j\} \\
&+ \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{N_{ij}}\sum_{r=1}^{2}\{ s_{ij}\mathrm{E}\left(\log t_{rijk}^{(0)}\,|\boldsymbol{Z}\right) \\
&+ n_{1ij}\mathrm{E}\left(\log t_{rijk}^{(1)}\,|\boldsymbol{Z}\right) + n_{2ij}\mathrm{E}\left(\log T_{rijk}^{(2)}\,|\boldsymbol{Z}\right) \\
&+ m_{ij}\mathrm{E}\left(\log t_{rijk}^{(-1)}\,|\boldsymbol{Z}\right)\} \\
&- \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{N_{ij}}\sum_{r=1}^{2}\frac{e^{-2\alpha_r-2\beta_r x_j}}{2}\{ s_{ij}\mathrm{E}\left(\left(t_{rijk}^{(0)}\right)^2\Big|\boldsymbol{Z}\right) \\
&+ n_{1ij}\mathrm{E}\left(\left(t_{rijk}^{(1)}\right)^2\Big|\boldsymbol{Z}\right) + n_{2ij}\mathrm{E}\left(\left(t_{rijk}^{(2)}\right)^2\Big|\boldsymbol{Z}\right) \\
&+ m_{ij}\mathrm{E}\left(\left(t_{rijk}^{(-1)}\right)^2\Big|\boldsymbol{Z}\right)\}
\end{aligned}
$$

همچنین برای ادامه روند این الگوریتم در مرحله M به محاسبه $E\left(\left(t_{rijk}^{(-1)}\right)^2\Big|\gamma^{(k)},\boldsymbol{obs}\right)$ نیاز داریم که در زیر محاسبه می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left(T_{rijk}{}^2\middle|\min\left(T_{1ijk},T_{2ijk}\right) \le \tau_i\right) \\
&= \frac{1}{1-p_{0ij}}\int_0^{\tau_i}\int_{t_1}^{\infty} t_r^2 f_{1j}(t_1) f_{2j}(t_2)\, dt_2 dt_1 \\
&+ \frac{1}{1-p_{0ij}}\int_0^{\tau_i}\int_{t_2}^{\infty} t_r^2 f_{1j}(t_1) f_{2j}(t_2)\, dt_1 dt_2 \\
&= \frac{1}{1-p_{0ij}}\left(e^{-\frac{\tau_i^2}{2}\left(\frac{1}{\theta_{1j}^2}+\frac{1}{\theta_{2j}^2}\right)}\left(-2\theta_{rj}^2 - \tau_i^2\right) + 2\theta_{rj}^2\right)
\end{aligned}
$$

به این ترتیب الگوریتم EM را می‌توان برای حالتی که علل پوشانده‌شده وجود دارد، نیز به کار برد.

۶- بهینه کردن برآورد قابلیت اطمینان

در این بخش به منظور دست‌یابی به نتایج بهینه و قابل اعتماد، به بهینه کردن طرح آزمون مورد بررسی می‌پردازیم. منظور از بهینه کردن طرح این آزمون، تعیین زمان خاتمه آزمون می‌باشد که منطبق با آخرین زمان بازرسی (τ_I) است. معیاری که در این مقاله برای بهینه کردن طرح آزمون استفاده می‌شود، عبارتست از به حداقل رساندن واریانس مجانبی براورد قابلیت اعتماد در زمان ξ و در شرایط استفاده معمول. قابلیت اطمینان و میانگین زمان تا خرابی[22] (MTTF) محصولات در شرایط استفاده معمول، مقادیری هستند که مهندسان قابلیت اطمینان به آن‌ها علاقه‌مند هستند. براورد قابلیت اعتماد در زمان ξ و در شرایط استفاده معمول (x_0) در این آزمایش عبارتست از:

$$\widehat{R}_0(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}\left(\frac{e^{-2\widehat{\beta}_1 x_0}}{\widehat{\alpha}_1^2}+\frac{e^{-2\widehat{\beta}_2 x_0}}{\widehat{\alpha}_2^2}\right)}$$

همچنین با داشتن $\hat{R}_0(\xi)$ براورد MTTF به روش زیر محاسبه می‌شود:

$$MTTF = \int_0^{\infty}\widehat{R}_0(t)dt$$

در این مقاله از براورد پارامترهای مجهول، برای براورد قابلیت اعتماد در شرایط استفاده طبیعی استفاده می‌شود.

واریانس مجانبی براورد قابلیت اعتماد با استفاده از روش دلتا و بر حسب ماتریس واریانس- کواریانس مجانبی که معادل با معکوس ماتریس اطلاع فیشر است، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$AV\left(\widehat{R}_0(\xi)\right) = H\widehat{F}^{-1}H'$$

در این رابطه، $\hat{F}$ براورد ماتریس اطلاع فیشر است و H بردار مشتقات مرتبه اول از $\hat{R}_0(\xi)$ نسبت به پارامترهای α_1، α_2، β_1 و β_2 می‌باشد؛ سپس مقادیر $\hat{\alpha}_1$، $\hat{\alpha}_2$، $\hat{\beta}_1$ و $\hat{\beta}_2$ جایگزین می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
&H = [H_1, H_2, H_3, H_4] \\
&H_1 = \frac{\xi^2}{\widehat{\alpha}_1^3}e^{-\frac{\xi^2}{2}\left(\frac{e^{-2\widehat{\beta}_1 x_0}}{\widehat{\alpha}_1^2}+\frac{e^{-2\widehat{\beta}_2 x_0}}{\widehat{\alpha}_2^2}\right)}, \\
&H_2 = \frac{\xi^2}{\widehat{\alpha}_2^3}e^{-\frac{\xi^2}{2}\left(\frac{e^{-2\widehat{\beta}_1 x_0}}{\widehat{\alpha}_1^2}+\frac{e^{-2\widehat{\beta}_2 x_0}}{\widehat{\alpha}_2^2}\right)}, \\
&H_3 = \frac{\xi^2 x_0}{\widehat{\alpha}_1^3}e^{-\frac{\xi^2}{2}\left(\frac{e^{-2\widehat{\beta}_1 x_0}}{\widehat{\alpha}_1^2}+\frac{e^{-2\widehat{\beta}_2 x_0}}{\widehat{\alpha}_2^2}\right)-2\widehat{\beta}_1 x_0}, \\
&H_4 = \frac{\xi^2 x_0}{\widehat{\alpha}_2^3}e^{-\frac{\xi^2}{2}\left(\frac{e^{-2\widehat{\beta}_1 x_0}}{\widehat{\alpha}_1^2}+\frac{e^{-2\widehat{\beta}_2 x_0}}{\widehat{\alpha}_2^2}\right)-2\widehat{\beta}_2 x_0},
\end{aligned}
$$

با توجه به توضیحات ذکر شده، معیار بهینه‌سازی مورد استفاده در این مقاله عبارت است از:

$$\min_{\tau^*} \mathrm{AV}\left(\widehat{R}_0(\xi)\right) \qquad (۱۹)$$

زمان بهینه خاتمه آزمون با نماد τ^* نمایش داده شده است و برای بهینه کردن رابطه (۱۹) از ابزار بهینه‌سازی در نرم افزار متلب، استفاده می‌شود.

۷- مطالعات شبیه‌سازی شده

در این بخش قصد داریم مواردی را که در بخش‌های قبل به صورت تئوری مورد بحث قرار دادیم، به صورت عددی مورد

[22] Mean time to failure

ارزیابی قرار دهیم. برای این منظور نمونه‌های تصادفی با حجم‌های مختلف، از دستگاه‌های یکبار شلیک که طول عمر آن‌ها از توزیع رایلی تبعیّت می‌کند، به ازای مقادیر اولیه مختلف، تولید می‌کنیم و آزمون شتابیده تنش ثابت را برای آن‌ها اعمال می‌کنیم. در این‌جا، سه مجموعه داده مختلف را به عنوان سه مثال مختلف، جهت مطالعات شبیه‌سازی در نظر می‌گیریم. مقادیر اولیه این سه مجموعه داده به صوت زیر می‌باشند:

مقادیر اولیه مثال اول: دو سطح تنش شتابیده $\mathrm{x} = (0.3, 0.7)$ به همراه سطح تنش در شرایط استفاده معمول $\mathrm{x}_0 = 0.1$، سه زمان بازرسی از پیش تعیین شده شامل $\tau = (10, 20, 30)$، همچنین $\alpha_1 = 2$، $\alpha_2 = 3.5$، $\beta_1 = 4.5$. $\beta_2 = 6.5$.

مقادیر اولیه مثال دوم: سه سطح تنش شتابیده $\mathrm{x} = (0.2, 0.4, 0.6)$ به همراه $\mathrm{x}_0 = 0.1$، چهار زمان بازرسی شامل $\tau = (10, 20, 30, 40)$، همچنین $\alpha_1 = 3$، $\alpha_2 = 6.5$، $\beta_1 = 5$، $\beta_2 = 7.5$.

مقادیر اولیه مثال سوم: چهار سطح تنش شتابیده $\mathrm{x} = (0.2, 0.4, 0.6, 0.8)$ به همراه $\mathrm{x}_0 = 0.1$، پنج زمان بازرسی از پیش تعیین شده شامل $\tau = (5, 10, 15, 20, 25)$، همچنین $\alpha_1 = 4$، $\alpha_2 = 4.5$، $\beta_1 = 5$، $\beta_2 = 6$.

در ابتدا به براورد نقطه‌ای پارامترهای مجهول مدل می‌پردازیم. در جدول‌های ۱ تا ۳، براورد ML پارامترها با استفاده از الگوریتم EM به همراه اریبی[۲۳]، میانگین مربعات خطا[۲۴] (MSE) و خطای نسبی[۲۵] (RE) به ازای ۱۰۰۰۰ بار تکرار به ترتیب برای داده‌های مثال‌های ۱، ۲ و ۳ ارائه شده است. هر یک از مثال‌های ۱، ۲ و ۳، با سه حجم نمونه مختلف که عبارتند از: حالت اول، به ازای تمام i و j ها $\mathrm{N}_{ij} = 10$؛ حالت دوم، به ازای تمام i و j ها $\mathrm{N}_{ij} = 15$ و حالت سوم، به ازای تمام i و j ها $\mathrm{N}_{ij} = 20$ مورد استفاده قرار گرفته‌اند. همان‌طور که در جدول‌های ۱ تا ۳ مشاهده می‌کنیم، در هر سه مثال، با افزایش حجم نمونه مقدار اریبی، MSE و RE کاهش می‌یابند، که این نشان از بهبود براورد پارامترها دارد. به عبارت دیگر می‌توان گفت با افزایش حجم نمونه تحت بررسی، مقادیر پارامتر براورد شده به مقادیر واقعی نزدیک‌تر می‌شوند. به علاوه، به منظور مقایسه دو روش براورد EM و FS در جدول‌های ۴ تا ۶ براورد پارامترهای مدل با استفاده از روش FS، به همراه مقدار اریبی، MSE و RE به ترتیب برای داده‌های مثال‌های ۱، ۲ و ۳ ارائه شده است. همان‌طور که در جدول‌های ۴ تا ۶ مشاهده می‌شود، نتایج مشابه جدول‌های ۱ تا ۳ است، یعنی با افزایش حجم نمونه براورد پارامترها به مقدار واقعی نزدیک‌تر می‌شوند. در واقع افزایش حجم نمونه موجب دقت بیشتر براورد پارامترهای مجهول می‌شود؛ زیرا با افزایش حجم نمونه مقادیر اریبی، MSE و RE کاهش می‌یابند. به علاوه با مقایسه دو روش براورد EM و FS، متوجه می‌شویم در الگوریتم EM علی‌رغم پیچیدگی محاسباتی، پارامترها دقیق‌تر براورد می‌شوند و به مقدار واقعی نزدیک‌تر هستند، چون در جدول‌های ۱ تا ۳ مقادیر اریبی، MSE و RE کمتر از مقادیر متناظر درجدول‌های ۴ تا ۶ می‌باشند.

در جدول‌های ۷ تا ۹ براورد فاصله‌ای پارامترهای مجهول به دو روش مجانبی و بوت استرپ در سطح اطمینان ۹۵٪ به ترتیب برای داده‌های مثال ۱ تا ۳ ارائه شده است. همان‌طور که در جدول‌های ۷ تا ۹ مشاهده می‌نمایید، طول بازه اطمینان بوت استرپ کمتر از طول بازه اطمینان مجانبی است و این نشان از برتری فاصله اطمینان بوت استرپ دارد. همچنین واضح است که با افزایش حجم نمونه، براورد فاصله‌ای ارائه شده به هر دو روش، دقیق‌تر می‌شود.

نهایتاً، طرح آزمون مورد بررسی در این مقاله بر حسب معیار اشاره شده در بخش ۶ بهینه می‌شود. در جدول ۱۰ زمان خاتمه آزمون به همراه براورد بهینه قابلیت اطمینان در زمان از پیش تعیین شده ξ برای هر یک از مثال‌های ۱ تا ۳ ارائه شده است. در جدول ۱۰، برای داده‌های مثال ۱، $N = 60$ و $\xi = 45$؛ برای داده‌های مثال ۲، $N = 120$ و $\xi = 55$ و برای داده‌های مثال ۳، $N = 200$ و $\xi = 65$ در نظر گرفته شده است. با توجه به زمان بهینه خاتمه آزمون در جدول ۱۰، می‌توان نتیجه گرفت که هرقدر طول مدت آزمون کوتاه‌تر باشد، واریانس مجانبی براورد قابلیت اعتماد در شرایط استفاده معمول کمتر می‌شود و در نتیجه براورد قابلیت اعتماد به مقدار واقعی نزدیک‌تر خواهد بود. در این صورت قابلیت اعتماد محصولات و همچنین میانگین طول عمر محصولات دقیق‌تر براورد می‌شوند. در جدول ۱۰ مشاهده می‌شود که زمان بهینه خاتمه آزمون نزدیک به آخرین زمان بازرسی می‌باشد.

---

[23] Bias
[24] Mean Square Error
[25] Relative Error

۸- نتایج

دستگاه‌های تک شات محصولات یا تجهیزاتی هستند که بلافاصله پس از استفاده از بین می‌روند و بنابراین عمر واقعی آنها هرگز قابل مشاهده نیست. تنها اطلاعات مشاهده شده در مورد این دستگاه‌ها این است که آیا آنها در زمان استفاده کار می‌کردند یا نه. دلایل شکست دستگاه‌ها اغلب در تجزیه و تحلیل بقا و قابلیت اطمینان نادیده گرفته می شوند که در نهایت منجر به تصمیم‌گیری‌های نادرست می‌شود. موضوع ریسک‌های رقابتی از موضوعات مهم در بحث آنالیز قابلیت اعتماد است. در این مقاله، آزمون عمر شتابیده تنش ثابت، برای دستگاه‌های یک بار شلیک تحت مدل ریسک‌های رقابتی مورد مطالعه قرار گرفت. همچنین توزیع رایلی به عنوان طول عمر این دستگاه‌ها در نظر گرفته شد که در تجزیه و تحلیل بقا و قابلیت اعتماد، آمار کاربردی و علوم فیزیک نقش مهمی را بازی می‌کند؛ و این نشان از انعطاف‌پذیری این توزیع دارد. به دلیل اعمال سانسور به داده‌ها و وجود داده‌های مفقود شده از الگوریتم EM برای براورد پارامترهای مجهول مدل استفاده شد. همچنین موضوع انتخاب مقادیر اولیه این الگوریتم برای کارایی بیشتر آن مورد بحث قرار گرفت. علاوه بر الگوریتم EM از روش امتیازدهی فیشر نیز برای براورد پارامترهای مجهول استفاده شد و دو روش ذکر شده مورد مقایسه قرار گرفتند. همچنین براورد فاصله‌ای پارامترهای مجهول به دو روش مجانبی و بوت استرپ ارائه و مورد مقایسه قرار گرفتند. با توجه به مطالعات شبیه‌سازی شده، نتیجه گرفته شد که الگوریتم EM علی‌رغم پیچیدگی محاسباتی، براورد دقیق‌تری را نسب به روش امتیازدهی فیشر ارائه می‌دهد. همچنین فاصله اطمینان حاصل از روش بوت استرپ، دقیق‌تر از فاصله اطمینان مجانبی پارامترهای مجهول می‌باشد. به علاوه، با افزایش حجم نمونه، در تمامی روش‌های براورد مورد بحث نتایج بهتری مشاهده شد. در ادامه، براورد پارامترها با الگوریتم EM برای داده‌هایی که علت خرابی آن‌ها پوشیده شده هستند، مورد اصلاح و بازبینی قرار گرفت. پس از براورد نقطه‌ای و فاصله‌ای پارامترهای مجهول به روش‌های مختلف، زمان بهینه خاتمه آزمون با به حداقل رساندن براورد قابلیت اعتماد در شرایط استفاده معمول ارائه شد. با توجه به نتایج دریافتیم، هرقدر زمان انجام آزمون کوتاه‌تر باشد، براورد قابلیت اعتماد در شرایط استفاده معمول دقیق‌تر خواهد بود و به این ترتیب به طرح آزمون بهینه دست پیدا کردیم.

۹- منابع

[1] Abd El-Raheem, A.M., Hosny, M., & Abu-Moussa, M.H (2021). On Progressive Censored Competing Risks Data: Real Data Application and Simulation Study. *Mathematics*, *9*(15), 1805.

[2] Abushal, T. A., Soliman, A. A., & Abd-Elmougod, G. A. (2021). Inference of partially observed causes for failure of Lomax competing risks model under type-II generalized hybrid censoring scheme. *Alexandria Engineering Journal*.

[3] Balakrishnan, N., Castilla, E., Martín, N., & Pardo, L. (2019). Robust estimators and test statistics for one-shot device testing under the exponential distribution. *IEEE Transactions on Information Theory*, *65*(5), 3080-3096.

[4] Balakrishnan, N., & Ling, M. H. (2013). Expectation maximization algorithm for one shot device accelerated life testing with Weibull lifetimes, and variable parameters over stress. *IEEE Transactions on Reliability*, *62*(2), 537-551.

[5] Dempster, A. P., Laird, N. M., & Rubin, D. B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, *39*(1), 1-22.

[6] Escobar, L. A., & Meeker, W. Q. (2006). A review of accelerated test model. *Statistical science*, 21(4), 552–577.

[7] Fan, T. H., Balakrishnan, N. & Chang, C. C. (2009). The Bayesian approach for highly reliable electro-explosive devices using one-shot device testing. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 79(9), 1143-1154.

[8] Farbod, D., Ebrahimpour, M., & Ghayourmoradi, Z. (2010). Maximum likelihood estimation for distribution generated by Cauchy stable law. *International Journal of Mathematics & Computation*, *7*(J10), 22-28.

[9] Hakamipour, N. (2022). Parameter estimation using EM algorithm and test design optimization of constant stress accelerated life test with non-constant parameters under type-I progressive censoring. Journal of decisions and operations research, 6(4), 570-591. (**Persian**)

[10] Hakamipour, N. (2021). Comparison between constant-stress and step-stress accelerated life tests under a cost constraint for progressive type I censoring. *Sequential Analysis*, *40*(1), 17-31.

[11] Hakamipour, N. (2020). Design and analysis of step stress accelerated life tests for censored data. *Andishe-ye Amari, 24*(2), 55-64. (**Persian)**

[12] Hakamipour, N. (2019). Time and cost constrained optimal designs of multiple step stress tests under progressive censoring. *International Journal of Quality & Reliability Management*, 36(10), 1721-1733.

[13] Hermanns, M., Cramer, E., & Ng, H. K. T. (2020). EM algorithms for ordered and censored system lifetime data under a proportional hazard rate model. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, *90*(18), 3301-3337.

[14] Hirano, K. (1986*). Rayleigh distribution, Encyclopedia of Statistical Sciences*, Vol. 7, 647-649. John Wiley, New York.

[15] Hoffman, D., & Karst, O. J. (1975). The theory of the Rayleigh distribution and some of its applications. *Journal of Ship Research*, *19*(03), 172-191.

[16] Hoshyar, H. (2007). EM Algorithm. *Student Statistical Journal_ NEDA*, 5(1), 7-18. (**Persian**)

[17] Jiang, P. H., Wang, B. X., & Wu, F. T. (2019). Inference for constant-stress accelerated degradation test based on Gamma process. *Applied Mathematical Modelling*, *67*(2), 123-134.

[18] Kayid, M. (2021). EM Algorithm for Estimating the Parameters of Weibull Competing Risk Model. *Applied bionics and biomechanics*, *2021*.

[19] Lee, H. L., & Cohen, M. A. (1985). A multinomial logit model for the spatial distribution of hospital utilization. *Journal of Business & Economic Statistics*, *3*(2), 159-168.

[20] Lindqvist, B. H. (2006). Competing risks. *Encyclopedia of Statistics in Quality and Reliability. New York: Wiley*, *10*, 9780470061572.

[21] McLachlan, G. J., & Krishnan, T. (2007). *The EM algorithm and extensions* (Vol. 382). John Wiley & Sons.

[22] Nassar, M., Dey, S., & Nadarajah, S. (2021). Reliability analysis of exponentiated Poisson-exponential constant stress accelerated life test model. *Quality and Reliability Engineering International*, 37(6), 2853-2874.

[23] Nelson, W. (1990). *Accelerated Testing - Statistical Models, Test Plans, and data Analyses*. John Wiley and Sons, New York.

[24] Ng, H. K. T., Chan, P. S., & Balakrishnan, N. (2002). Estimation of parameters from progressively censored data using EM algorithm. *Computational Statistics & Data Analysis*, *39*(4), 371-386.

[25] Pan, R., Yang, T., & Seo, K. (2015). Planning constant-stress accelerated life tests for acceleration model selection. *IEEE Transactions on Reliability*, *64*(4), 1356-1366.

[26] Samanta, D., & Kundu, D. (2021). Bayesian inference of a dependent competing risk data. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 1-18.

[27] Schworer, A. & Hovey, P. "*Newton Raphson versus Fisher Scoring Algorithms in Calculating Maximum Likelihood Estimates*," Dayton, 2004.

[28] Wang, L., Tripathi, Y. M., & Lodhi, C. (2020). Inference for Weibull competing risks model with partially observed failure causes under generalized progressive hybrid censoring. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *368*, 112537.

[29] Widyaningsih, P., Saputro, D. R. S., & Putri, A. N. Fisher scoring method for parameter estimation of geographically weighted ordinal logistic regression (GWOLR) model. *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 855, no. 1, p. 012060. IOP Publishing, 2017.

[30] Zhu, X., & Liu, K. (2021). Reliability of one-shot device with generalized gamma lifetime under cyclic accelerated life-test. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability*, 1748006X211058938.

ضمایم

ضمیمه الف

در این بخش به محاسبه $E\left(\left(t_{rijk}^{\delta}\right)^2\middle|\gamma^{(k)},\boldsymbol{obs}\right)$ به در روابط (۱۴) و (۱۵) از الگوریتم EM مورد نیاز است، می‌پردازیم. $E\left(\left(t_{rijk}^{\delta}\right)^2\middle|\gamma^{(k)},\boldsymbol{obs}\right)$ به ازای مقادیر مختلف r و δ_{ijk} در جدول ۱۱، ارائه شده است. که مقادیر I تا VI در جدول ۱۱، به ترتیب در روابط (۲۰) تا (۲۵) محاسبه می‌شوند.

$$\mathrm{I} = \mathrm{E}\left({T_{1ijk}}^2\middle|\min\left(T_{1ijk}, T_{2ijk}\right) > \tau_i\right) = \frac{1}{p_{0ij}}\left(e^{-\frac{\tau_i^2}{2}\left(\frac{1}{\theta_{1j}^2}+\frac{1}{\theta_{2j}^2}\right)}\left(2\theta_{1j}^2+\tau_i^2\right)\right) \quad (۲۰)$$

$$\mathrm{II} = \mathrm{E}\left({\mathrm{T}_{2ijk}}^2\middle|\min\left(\mathrm{T}_{1ijk}, \mathrm{T}_{2ijk}\right) > \tau_i\right) = \frac{1}{p_{0ij}}\left(e^{-\frac{\tau_i^2}{2}\left(\frac{1}{\theta_{1j}^2}+\frac{1}{\theta_{2j}^2}\right)}\left(2\theta_{2j}^2+\tau_i^2\right)\right) \quad (۲۱)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{III} &= \mathrm{E}\left({T_{1ijk}}^2\middle|T_{1ijk} < \min\left(\tau_i, T_{2ijk}\right)\right)\\ &= \frac{1}{p_{1ij}}\left(e^{-\frac{\tau_i^2}{2}\left(\frac{1}{\theta_{1j}^2}+\frac{1}{\theta_{2j}^2}\right)}\left(-2\theta_{1j}^2-\tau_i^2\right)+2\theta_{1j}^2 e^{-\frac{\tau_i^2}{2\theta_{2j}^2}}\right)\end{aligned} \quad (۲۲)$$

$$\mathrm{IV} = \mathrm{E}\left({T_{2ijk}}^2\middle|T_{1ijk} < \min\left(\tau_i, T_{2ijk}\right)\right) = \frac{1}{p_{1ij}}\left(e^{-\frac{\tau_i^2}{2}\left(\frac{1}{\theta_{1j}^2}+\frac{1}{\theta_{2j}^2}\right)}\left(-2\theta_{2j}^2-\tau_i^2\right)+2\theta_{2j}^2 e^{-\frac{\tau_i^2}{2\theta_{2j}^2}}\right) \quad (۲۳)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V} &= \mathrm{E}\left({T_{1ijk}}^2\middle|T_{2ijk} < \min\left(\tau_i, T_{1ijk}\right)\right)\\ &= \frac{1}{p_{2ij}\left(\theta_{1j}^2+\theta_{2j}^2\right)^2}\left(e^{-\frac{\tau_i^2}{2}\left(\frac{1}{\theta_{1j}^2}+\frac{1}{\theta_{2j}^2}\right)}\left(-2\theta_{1j}^6-\theta_{1j}^2\theta_{2j}^2\tau_i^2-4\theta_{1j}^4\theta_{2j}^2-\theta_{1j}^4\tau_i^2\right)+2\theta_{1j}^6+4\theta_{1j}^4\theta_{2j}^2\right)\end{aligned} \quad (۲۴)$$

$$\mathrm{V}I = \mathrm{E}\left({T_{2ijk}}^2\middle|T_{2ijk} < \min\left(\tau_i, T_{1ijk}\right)\right) = \frac{1}{p_{2ij}}\left(e^{-\frac{\tau_i^2}{2}\left(\frac{1}{\theta_{1j}^2}+\frac{1}{\theta_{2j}^2}\right)}\left(-2\theta_{2j}^2-\tau_i^2\right)+2\theta_{2j}^2 e^{-\frac{\tau_i^2}{2\theta_{1j}^2}}\right) \quad (۲۵)$$

ضمیمه ب

در این بخش به محاسبه ماتریس اطلاع فیشر می‌پردازیم. همانطور که می‌دانیم، از کاربردهای ماتریس اطلاع فیشر تعیین واریانس براوردگرها و رفتار مجانبی براوردگرهای ML پارامترها است. در آزمون طول عمر دستگاه‌های یک‌بار شلیک، ماتریس اطلاع فیشر معادل با منفی امید ریاضی مشتقات جزئی مرتبه دوم از لگاریتم تابع درستنمایی است. بنابراین ماتریس اطلاع فیشر با توجه به پارامترهای مدل به صورت زیر می‌باشد.

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14}\\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24}\\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34}\\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44}\end{bmatrix}$$

که درایه‌های آن عبارتند از:

$$F_{11} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left(3\frac{A_{1ij}}{\alpha_1^4} - 2\left(E\left[n_{1ij}\right] + E\left[n_{2ij}\right]\right)\frac{\alpha_1^2 e^{4\beta_1 x_j} - \alpha_2^2 e^{2(\beta_1+\beta_2)x_j}}{B_j} + 2\frac{E\left[n_{2ij}\right]}{\alpha_1^2} + \left(E\left[n_{1ij}\right] + E\left[n_{2ij}\right]\right)\tau_i^2\left[\frac{\tau_i^2 C_j e^{-4\beta_1 x_j}}{\alpha_1^6\left(1-C_j\right)^2} + \frac{3e^{-2\beta_1 x_j}}{\alpha_1^4\left(1-C_j\right)}\right]\right), \tag{۲۶}$$

$$F_{22} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left(3\frac{A_{2ij}}{\alpha_2^4} + 2\left(E\left[n_{1ij}\right] + E\left[n_{2ij}\right]\right)\frac{\alpha_1^2 e^{4\beta_2 x_j} - \alpha_2^2 e^{2(\beta_1+\beta_2)x_j}}{B_j} + 2\frac{E\left[n_{1ij}\right]}{\alpha_2^2} + \left(E\left[n_{1ij}\right] + E\left[n_{2ij}\right]\right)\tau_i^2\left[\frac{\tau_i^2 C_j e^{-4\beta_2 x_j}}{\alpha_1^6\left(1-C_j\right)^2} + \frac{3e^{-2\beta_2 x_j}}{\alpha_1^4\left(1-C_j\right)}\right]\right), \tag{۲۷}$$

$$F_{33} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left(2\frac{A_{1ij}x_j^2}{\alpha_1^2} + 4\left(E\left[n_{1ij}\right] + E\left[n_{2ij}\right]\right)x_j^2\frac{\alpha_1^2\alpha_2^2 e^{2(\beta_1+\beta_2)x_j}}{B_j} + \left(E\left[n_{1ij}\right] + E\left[n_{2ij}\right]\right)\tau_i^2\left[\frac{\tau_i^2 x_j^2 C_j e^{-4\beta_1 x_j}}{\alpha_1^4\left(1-C_j\right)^2} + \frac{2x_j^2 e^{-2\beta_1 x_j}}{\alpha_1^2\left(1-C_j\right)}\right]\right), \tag{۲۸}$$

$$F_{44} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left(2\frac{A_{2ij}x_j^2}{\alpha_2^2} + 4\left(E\left[n_{1ij}\right] + E\left[n_{2ij}\right]\right)x_j^2\frac{\alpha_1^2\alpha_2^2 e^{2(\beta_1+\beta_2)x_j}}{B_j} + \left(E\left[n_{1ij}\right] + E\left[n_{2ij}\right]\right)\tau_i^2\left[\frac{\tau_i^2 x_j^2 C_j e^{-4\beta_2 x_j}}{\alpha_2^4\left(1-C_j\right)^2} + \frac{2x_j^2 e^{-2\beta_2 x_j}}{\alpha_2^2\left(1-C_j\right)}\right]\right), \tag{۲۹}$$

$$F_{12} = F_{21} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left(-4\left(E\left[n_{1ij}\right] + E\left[n_{2ij}\right]\right)\frac{\alpha_1\alpha_2 e^{2(\beta_1+\beta_2)x_j}}{B_j} + \left(E\left[n_{1ij}\right] + E\left[n_{2ij}\right]\right)\tau_i^4\frac{C_j e^{-2\beta_1 x_j - 2\beta_2 x_j}}{\alpha_1^3\alpha_2^3\left(1-C_j\right)^2}\right), \tag{۳۰}$$

$$F_{13} = F_{31} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left(2\frac{A_{1ij}x_j}{\alpha_1^3} + 4\left(E\left[n_{1ij}\right] + E\left[n_{2ij}\right]\right)\frac{\alpha_1\alpha_2^2\, x_j e^{2(\beta_1+\beta_2)x_j}}{B_j} + \left(E\left[n_{1ij}\right] + E\left[n_{2ij}\right]\right)\tau_i^2\left[\frac{\tau_i^2 x_j C_j e^{-4\beta_1 x_j}}{\alpha_1^5\left(1-C_j\right)^2} + \frac{2\,x_j e^{-2\beta_1 x_j}}{\alpha_1^3\left(1-C_j\right)}\right]\right), \tag{۳۱}$$

$$F_{14} = F_{41} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left(4\left(E\left[n_{1ij}\right] + E\left[n_{2ij}\right]\right)\frac{\alpha_1\alpha_2^2\, x_j e^{2(\beta_1+\beta_2)x_j}}{B_j} + \left(E\left[n_{1ij}\right] + E\left[n_{2ij}\right]\right)\tau_i^4\frac{x_j C_j e^{-2\beta_1 x_j - 2\beta_2 x_j}}{\alpha_1^3\alpha_2^2\left(1-C_j\right)^2}\right), \tag{۳۲}$$

$$F_{23} = F_{32} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left(-4\left(E\left[n_{1ij}\right] + E\left[n_{2ij}\right]\right)\frac{\alpha_1^2\,\alpha_2 x_j e^{2(\beta_1+\beta_2)x_j}}{B_j} + \left(E\left[n_{1ij}\right] + E\left[n_{2ij}\right]\right)\tau_i^4\frac{x_j C_j e^{-2\beta_1 x_j - 2\beta_2 x_j}}{\alpha_1^2\alpha_2^3\left(1-C_j\right)^2}\right), \tag{۳۳}$$

$$\begin{aligned} F_{24} = F_{42} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\Bigg(2\frac{A_{2ij}x_j}{\alpha_2^3} &+ 4\left(E\left[n_{1ij}\right] + E\left[n_{2ij}\right]\right)\frac{\alpha_1^2\,\alpha_2\, x_j e^{2(\beta_1+\beta_2)x_j}}{B_j} \\ &+ \left(E\left[n_{1ij}\right] + E\left[n_{2ij}\right]\right)\tau_i^2\left[\frac{\tau_i^2 x_j C_j e^{-4\beta_2 x_j}}{\alpha_2^5\left(1-C_j\right)^2} + \frac{2\,x_j e^{-2\beta_1 x_j}}{\alpha_2^3\left(1-C_j\right)}\right]\Bigg), \end{aligned} \tag{۳۴}$$

$$F_{34} = F_{43} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left(-4\left(E\left[n_{1ij}\right] + E\left[n_{2ij}\right]\right)\frac{\alpha_1^2\,\alpha_2^2\, x_j^2 e^{2(\beta_1+\beta_2)x_j}}{B_j} + \left(E\left[n_{1ij}\right] + E\left[n_{2ij}\right]\right)\tau_i^4\frac{x_j^2 C_j e^{-2\beta_1 x_j - 2\beta_2 x_j}}{\alpha_1^2\alpha_2^2\left(1-C_j\right)^2}\right), \tag{۳۵}$$

که در راوبط (۲۶) تا (۳۵) داریم:

$$A_{rij} = E\left[S_{ij}\right]\tau_i^2 e^{-2\beta_r x_j} \tag{۳۶}$$

$$B_j = \left(\alpha_1^2 e^{2\beta_1 x_j} + \alpha_2^2 e^{2\beta_2 x_j}\right)^2 \tag{۳۷}$$

$$C_j = e^{\frac{\tau_i^2}{2}\left(\frac{e^{-2\beta_1 x_j}}{\alpha_1^2} + \frac{e^{-2\beta_2 x_j}}{\alpha_2^2}\right)} \tag{۳۸}$$

همچنین با توجه به این‌که متغیرهای S_{ij}، n_{1ij} و n_{2ij} دارای توزیع چند جمله‌ای با پارامترهای N_{ij} ، $\hat{p}_{0ij}$ ، $\hat{p}_{1ij}$ و $\hat{p}_{2ij}$ هستند، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

$$E[n_{1ij}] = N_{ij}\hat{p}_{1ij} \quad (۳۹)$$

$$E[n_{2ij}] = N_{ij}\hat{p}_{2ij} \quad (۴۰)$$

$$E[S_{ij}] = N_{ij} - E[n_{1ij}] - E[n_{2ij}] \quad (۴۱)$$

با جایگذاری روابط (۳۶) تا (۴۱) در راوبط (۲۶) تا (۳۵) ماتریس اطلاع فیشر به دست می‌آید.

جدول ۱- براوردگر ML پارامترها به همراه اریبی، MSE و RE با استفاده از روش EM برای داده‌های مثال ۱.

N		MLE	Bias	MSE	RE
60	$\hat{\alpha}_1$	2.2405	0.2405	5.7840×10^{-6}	0.1202
	$\hat{\alpha}_2$	3.7141	0.2141	4.5839×10^{-6}	0.0612
	$\hat{\beta}_1$	4.6438	0.1438	2.0678×10^{-6}	0.0320
	$\hat{\beta}_2$	6.9073	0.4073	1.6589×10^{-5}	0.0627
90	$\hat{\alpha}_1$	2.0932	0.0932	8.6490×10^{-7}	0.0466
	$\hat{\alpha}_2$	3.6035	0.1035	1.0712×10^{-6}	0.0296
	$\hat{\beta}_1$	4.5785	0.0875	6.1623×10^{-7}	0.0174
	$\hat{\beta}_2$	6.8240	0.3240	1.0498×10^{-5}	0.0498
120	$\hat{\alpha}_1$	2.0821	0.0821	6.7404×10^{-7}	0.0411
	$\hat{\alpha}_2$	3.5936	0.0936	8.7610×10^{-7}	0.0267
	$\hat{\beta}_1$	4.5231	0.0231	5.3361×10^{-8}	0.0051
	$\hat{\beta}_2$	6.5045	0.0045	2.0250×10^{-9}	6.9231×10^{-4}

جدول ۲- براوردگر ML پارامترها به همراه اریبی، MSE و RE با استفاده از روش EM برای داده‌های مثال ۲.

N		MLE	Bias	MSE	RE
120	$\hat{\alpha}_1$	3.2109	0.2109	4.4479×10^{-6}	0.0703
	$\hat{\alpha}_2$	6.6951	0.1951	3.8064×10^{-6}	0.0300
	$\hat{\beta}_1$	5.1574	0.1574	2.4775×10^{-6}	0.0315
	$\hat{\beta}_2$	7.6351	0.1351	1.8252×10^{-6}	0.0180
180	$\hat{\alpha}_1$	3.2052	0.2052	4.2107×10^{-6}	0.0684
	$\hat{\alpha}_2$	6.6128	0.1128	1.2724×10^{-6}	0.0174
	$\hat{\beta}_1$	5.1204	0.1204	1.4496×10^{-6}	0.0241
	$\hat{\beta}_2$	7.6104	0.1104	1.2188×10^{-6}	0.0147
240	$\hat{\alpha}_1$	3.1891	0.1891	3.5759×10^{-6}	0.0630
	$\hat{\alpha}_2$	6.6073	0.1073	1.1513×10^{-6}	0.0165
	$\hat{\beta}_1$	5.1071	0.1071	1.1477×10^{-6}	0.0214
	$\hat{\beta}_2$	7.6033	0.1033	1.0671×10^{-6}	0.0133

جدول ۳- براوردگر ML پارامترها به همراه اریبی، MSE و RE با استفاده از روش EM برای داده‌های مثال ۳.

N		MLE	Bias	MSE	RE
200	$\hat{\alpha}_1$	4.1425	0.1425	2.0296×10^{-6}	0.0356
	$\hat{\alpha}_2$	4.6593	0.1593	2.5365×10^{-6}	0.0354
	$\hat{\beta}_1$	5.1782	0.1782	3.1741×10^{-6}	0.0356
	$\hat{\beta}_2$	6.1375	0.1375	1.8899×10^{-6}	0.0229
300	$\hat{\alpha}_1$	4.1218	0.1218	1.4835×10^{-6}	0.0305
	$\hat{\alpha}_2$	4.6209	0.1209	1.4617×10^{-6}	0.0269
	$\hat{\beta}_1$	5.1491	0.1491	2.2231×10^{-6}	0.0298
	$\hat{\beta}_2$	6.1126	0.1126	1.2679×10^{-6}	0.0188
400	$\hat{\alpha}_1$	4.0934	0.0934	8.7236×10^{-7}	0.0234
	$\hat{\alpha}_2$	4.5832	0.0832	6.9222×10^{-7}	0.0185
	$\hat{\beta}_1$	5.1021	0.1021	1.0424×10^{-6}	0.0204
	$\hat{\beta}_2$	6.1007	0.1007	1.0140×10^{-7}	0.0168

جدول ۴- براورد پارامترها به همراه اریبی، MSE و RE با استفاده از روش FS برای داده‌های مثال ۱.

N		MLE	Bias	MSE	RE
60	$\hat{\alpha}_1$	2.3271	0.3271	1.0699×10^{-5}	0.1635
	$\hat{\alpha}_2$	3.8591	0.3591	1.2895×10^{-5}	0.1026
	$\hat{\beta}_1$	4.8139	0.3139	9.8533×10^{-6}	0.0698
	$\hat{\beta}_2$	7.2031	0.7031	4.9435×10^{-5}	0.1082
90	$\hat{\alpha}_1$	2.2593	0.2593	6.7236×10^{-6}	0.1297
	$\hat{\alpha}_2$	3.7714	0.2714	7.3658×10^{-6}	0.0775
	$\hat{\beta}_1$	4.6358	0.1358	1.8442×10^{-6}	0.0302
	$\hat{\beta}_2$	7.0341	0.5341	2.8526×10^{-5}	0.0822
120	$\hat{\alpha}_1$	2.1735	0.1735	3.0102×10^{-6}	0.0868
	$\hat{\alpha}_2$	3.6281	0.1281	1.6410×10^{-6}	0.0366
	$\hat{\beta}_1$	4.6192	0.1192	1.4209×10^{-6}	0.0265
	$\hat{\beta}_2$	6.7235	0.2235	4.9952×10^{-6}	0.0344

جدول ۵- براورد پارامترها به همراه اریبی، MSE و RE با استفاده از روش FS برای داده‌های مثال ۲.

N		MLE	Bias	MSE	RE
120	$\hat{\alpha}_1$	3.2872	0.2872	8.2484×10^{-6}	0.0957
	$\hat{\alpha}_2$	6.7391	0.2391	5.7169×10^{-6}	0.0368
	$\hat{\beta}_1$	5.1961	0.1961	3.8544×10^{-6}	0.0392
	$\hat{\beta}_2$	7.6825	0.1825	3.3306×10^{-6}	0.0243
180	$\hat{\alpha}_1$	3.2356	0.2356	5.5507×10^{-6}	0.0785
	$\hat{\alpha}_2$	6.6841	0.1841	3.3893×10^{-6}	0.0283
	$\hat{\beta}_1$	5.1628	0.1628	2.6504×10^{-6}	0.0326
	$\hat{\beta}_2$	7.6585	0.1585	2.5122×10^{-6}	0.0211
240	$\hat{\alpha}_1$	3.2033	0.2033	4.1331×10^{-6}	0.0678
	$\hat{\alpha}_2$	6.6291	0.1291	1.6667×10^{-6}	0.0199
	$\hat{\beta}_1$	5.1358	0.1358	1.8442×10^{-6}	0.0272
	$\hat{\beta}_2$	7.6265	0.1265	1.6002×10^{-6}	0.0169

جدول ۶- براورد پارامترها به همراه اریبی، MSE و RE با استفاده از روش FS برای داده‌های مثال ۳.

N		MLE	Bias	MSE	RE
200	$\hat{\alpha}_1$	43144	0.3144	9.8847×10^{-6}	0.0786
	$\hat{\alpha}_2$	4.7215	0.2215	4.9062×10^{-6}	0.0492
	$\hat{\beta}_1$	5.2282	0.2282	5.2075×10^{-6}	0.0456
	$\hat{\beta}_2$	6.2365	0.2365	5.6406×10^{-6}	0.0396
300	$\hat{\alpha}_1$	4.2813	0.2813	7.91305×10^{-6}	0.0703
	$\hat{\alpha}_2$	4.7023	0.2023	4.0925×10^{-6}	0.0450
	$\hat{\beta}_1$	5.1892	0.1892	3.5759×10^{-6}	0.0378
	$\hat{\beta}_2$	6.2033	0.2033	4.1331×10^{-6}	0.0339
400	$\hat{\alpha}_1$	4.1931	0.1931	3.7288×10^{-6}	0.0483
	$\hat{\alpha}_2$	4.6673	0.1673	2.7989×10^{-6}	0.0372
	$\hat{\beta}_1$	5.1725	0.1725	2.9756×10^{-6}	0.0345
	$\hat{\beta}_2$	6.1582	0.1582	2.5027×10^{-6}	0.0264

جدول ۷- فاصله اطمینان ۹۵٪ پارامترها به همراه طول آن‌ها برای داده‌های مثال ۱.

		Bootstrap		Asymptotic	
N		Confidence interval	Width	Confidence interval	Width
60	α_1	(1.4252,2.8513)	1.4261	(0.3745,4.1065)	3.7320
	α_2	(2.6018,4.3125)	1.7107	(1.7803,5.6479)	3.8676
	β_1	(3.8125,5.2173)	1.4048	(3.0527,6.2349)	3.1822
	β_2	(6.1011,7.2512)	1.1501	(5.4264,8.3882)	2.9618
90	α_1	(1.6113,2.4812)	0.8699	(0.5758, 3.6106)	3.0348
	α_2	(2.9157,4.0510)	0.9353	(2.5996,5.4004)	2.8008
	β_1	(4.1125,4.9512)	0.8387	(3.5700,5.5870)	2.0170
	β_2	(6.1215,6.8517)	0.7302	(5.7345,7.9135)	2.1790
120	α_1	(1.7910,2.3156)	0.5246	(0.9512,3.3130)	2.3618
	α_2	(3.2150,3.8513)	0.6363	(2,6434,4.5438)	1.9004
	β_1	(4.2513,4.8392)	0.5879	(3.3581,5.6881)	2.3300
	β_2	(6.2802,6.7311)	0.4509	(5.5548,7.4542)	1.8994

جدول ۸- فاصله اطمینان ۹۵٪ پارامترها به همراه طول آن‌ها برای داده‌های مثال ۲.

		Bootstrap		Asymptotic	
N		Confidence interval	Width	Confidence interval	Width
120	α_1	(2.7136,3.6251)	0.9115	(1.6718,4.7500)	3.0782
	α_2	(6.1152,6.8691)	0.7539	(5.0422,8.3480)	3.3058
	β_1	(4.5212,5.4821)	0.9609	(3.6809,6.6339)	2.9530
	β_2	(7.0125,7.8513)	0.8388	(6.3119,8.9583)	2.6464
180	α_1	(2.8531,3.4639)	06108	(2.0516,4.3588)	2.3072
	α_2	(6.2422,6.8035)	0.5613	(5.2699,7.7557)	2.4858
	β_1	(4.8125,5.3518)	0.5393	(3.8956,6.3452)	2.4496
	β_2	(7.1451,7.7625)	0.6174	(6.6184,8.6024)	1.9840
240	α_1	(2.8917,3.3512)	0.4595	(2.2130,4.1652)	1.9522
	α_2	(6.3721,6.7512)	0.3791	(5.8496,7.3650)	1.5154
	β_1	(4.8713,5.2872)	0.4159	(4.1326,6.0816)	1.9490
	β_2	(7.2514,7.7133)	0.4619	(6.7935,8.4131)	1.6196

جدول ۹- فاصله اطمینان ۹۵٪ پارامترها به همراه طول آن‌ها برای داده‌های مثال ۳.

		Bootstrap		Asymptotic	
N		Confidence interval	Width	Confidence interval	Width
200	α_1	(3.5104,4.3322)	0.8182	(2.6763,5.6087)	2.9324
	α_2	(4.1251,4.9561)	0.8310	(3.2252,6.0934)	2.8682
	β_1	(4.6791,5.4513)	0.7722	(3.9347,6.4217)	2.4870
	β_2	(5.6707,6.5137)	0.8430	(5.5514,6.7236)	1.1722
300	α_1	(3.6651,4.2872)	0.6221	(2.7469,5.4967)	2.7498
	α_2	(4.2241,4.8795)	0.6554	(3.4751,5.7667)	2.2916
	β_1	(4.8561,5.3314)	0.4753	(4.1005,6.1977)	2.0972
	β_2	(5.8309,6.4511)	0.6202	(5.7109,6.5143)	0.8034
400	α_1	(3.8246,4.2053)	0.3807	(3.0638,5.1230)	2.0592
	α_2	(4.3512,4.7023)	0.3511	(3.5959,5.5705)	1.9746
	β_1	(4.9132,5.3115)	0.3983	(4.3360,5.8682)	1.5322
	β_2	(5.8725,6.3152)	0.4427	(5.7620,6.4394)	0.6774

جدول ۱۰- زمان بهینه خاتمه آزمون به همراه براورد قابلیت اعتماد برای مثال‌های ۱، ۲ و ۳.

	τ^*	$\hat{R}_0(\xi)$
مثال ۱	26.8234	1.0731×10^4
مثال ۲	30.1561	1.2379×10^4
مثال ۳	21.2492	1.5753×10^4

جدول ۱۱- امید ریاضی شرطی مقادیر مفقود شده به ازای مقادیر مختلف.

	$\mathrm{E}\left(\left(T_{1ijk}^{(\boldsymbol{\delta})}\right)^2 \middle\| \boldsymbol{\gamma}^{(\mathrm{k})}, \boldsymbol{obs}\right)$	$\mathrm{E}\left(\left(T_{2ijk}^{(\boldsymbol{\delta})}\right)^2 \middle\| \boldsymbol{\gamma}^{(\mathrm{k})}, \boldsymbol{obs}\right)$
$\delta_{ijk} = 0$	I	II
$\delta_{ijk} = 1$	III	IV
$\delta_{ijk} = 2$	V	VI

Inference on Accelerated Life Testing for One-Shot Device with Competing Risks

Nooshin Hakamipour

Department of Mathematics, Buein Zahra Technical University, Buein Zahra, Qazvin, Iran
Email: n.hakami@bzte.ac.ir

Abstract: This article deals with modelling and analysis of the competing risks for a one-shot device under a constant stress accelerated life test. In a reliability analysis of a device, it is important to be able to identify the main causes of failure. Therefore, a competing risk model is generally used. We consider this model in two modes: observed and masked causes of failure. The data obtained from one-shot device testing are missing in fact. For this reason, the EM algorithm along with the Fisher scoring method are used to estimate the model parameters. An accelerated life test is also used to shorten the time and cost. In addition, in order to accurately estimate the product reliability, the test design is finally optimized. Based on the simulated study, it is concluded that the EM algorithm and the bootstrap confidence interval are more accurate than the other methods. Also, shortening the test length leads to achieve an optimal test design.

Keywords: Competing risks, EM algorithm, Fisher scoring estimation, one-shot device, masked causes of failure.

Introduction

Due to the nature of one-shot devices, they get destroyed immediately after their use and their actual lifetimes are therefore never observed. Examples of one-shot devices can be found in many places, such as space shuttles, missiles, airbags of automobiles, magnetorheological fluids, etc. Due to its destructive feature, one-shot device testing data are fully censored and the actual lifetimes of the devices cannot be observed. For each device, only the condition at an inspection time can be observed in the test. In life tests for one-shot devices, a successful test indicates that the lifetime of the device is after the inspection time and leads to right-censoring, while a failed test indicates that the lifetime of the device is before the inspection time and leads to left-censoring. Binary data are collected and the exact failure time cannot be obtained from the test. As a result, the lifetime of the device is either right-censored or left-censored. Electro-explosive devices, that are detonated by inducing a current to excite inner powder, is an example of a one-shot device [1]. Those devices cannot be used any further after detonation, regardless of whether the detonation is successful or not. It poses a challenge to manufacturers and researchers to accurately estimate the reliability of one-shot devices based on limited lifetime data.

One-shot devices often have multiple components that can cause failure. For example, a fire extinguisher contains a cylinder, a valve and chemicals inside; an automobile air bag contains a crash sensor, an inflator and an air bag; and for any packed food (which is also a kind of one-shot device), there are different causes for food expiry such as the growth of microorganism in the package, the moisture level and the food deterioration due to oxidation. A failure of any of the components will result in the failure of the product. For those failed units, we will normally check for the cause responsible for the failure. Thus, the information collected from a life-test on one-shot devices in this case will include the status of the unit at inspection time as well as cause of failure in case the unit has failed.

In survival analysis and reliability experiments, the event of interest often occurs as a result of several factors. Neglecting those factors or reducing them to one factor may lead to wrong decisions and unacceptable results. Analyzing the data taking into account all the factors leading to the event of interest is called in the literature competing risks problem. For example, in a group of patients with breast cancer, there are causes other than breast cancer that are the cause of death in some patients [2]. In this work, we describe the one-shot device testing model with competing risks. We assume that the lifetime distribution is Rayleigh. We consider the competing risk model in two modes: observed and masked causes of failure in the data. For convenience, we confine our attention to the case of two competing risks corresponding to the failure of each device. The extension to the case of multiple competing risks can be done in a natural way.
The Rayleigh distribution has many real-life applications in testing lifetime of an object whose lifetime depends upon its age. The Rayleigh distribution is often used in different fields of physics to model processes such as wave heights, sound and light radiation, radio signals and wind power, ultrasound image modeling, etc. It is also used to model lifetime in hours of tubes, resistors, networks, crystals, knobs, transformers, relays and capacitors in aircraft radar sets. The Rayleigh distribution is used to study the wind speeds over a year at wind turbine sites and the daily average wind speed. On the contrary, this distribution has got valuable attention in the field of reliability theory and survival analysis, probability theory and operations research. Thus, to model the age dependent lifetimes of devices/equipments, the Rayleigh distribution may be a suitable candidate distribution.
The one-shot device testing considered in this work will be conducted in an accelerated life-test (ALT) setting since often we are interested in the reliability assessment of highly reliable products. If the products are tested under normal conditions, the lifetimes of product will be very large resulting in a long testing time. ALT will shorten the lifetime of products by increasing the stress levels, and we can use several stress factors such as temperature and humidity for this purpose. After estimating the parameters under high stress conditions, we can extrapolate the life characteristics such as mean lifetime and failure rates from high stress conditions to normal operating conditions.
The stress loading in ALT is applied in various ways. Constant stress accelerated life testing is a case of ALT. Constant stress ALT is a kind of testing where products are tested under some constant high stress levels to obtain early failures of the products. In such tests, the test is terminated when the failure times of all the products under study are obtained or the test is finished by some preplanned mechanism. [3] In this paper, the Constant stress ALT under the competing risk model is studied.

Material and methods

This article deals with modelling and analysis of the competing risks for a one-shot device under a constant stress accelerated life test. In a reliability analysis of a device, it is important to be able to identify the main causes of failure. Therefore, a competing risk model is generally used. But, in this case estimating the model parameters is a difficult problem.
For estimating the parameters of one-shot devices with competing risk under Rayleigh distribution, an EM algorithm is developed in this paper. EM algorithm is a powerful technique for obtaining the maximum likelihood estimates in the presence of missing data. The data obtained from one-shot device testing are both left- and right-censored, and so the whole data are missing in fact. For this reason, the EM algorithm becomes natural for handling the estimation problem in this case. It enables an efficient determination of the maximum likelihood estimates along with an estimate for the amount of information lost due to censoring [4]. Considerable amount of work has been done on the estimation of model parameters by using EM algorithm.
Besides EM algorithm, the Fisher scoring method is also used. Fisher scoring is a method to maximize the likelihood function directly by Newton-Raphson algorithm. To compare the performance of the Fisher scoring method with the EM algorithm, we simulate three different data

sets. We use both methods to estimate the parameters and the EM algorithm is compared with the Fisher scoring method.
The EM algorithm is sensitive to the initial estimates. If the initial estimates are far from the true parameters, the algorithm may not converge. In this paper, determination of the initial values is discussed.
Different interval estimation methods for the model parameters are described in this paper. Bootstrap confidence interval and asymptotic confidence interval are calculated.
In addition, in order to accurately estimate the product reliability, the optimal test design is defined to minimize the asymptotic variance of the reliability estimate under normal operating conditions.

Results and discussion

This paper presents the advantages of the EM algorithm and Bootstrap confidence interval to estimate the parameter of the Rayleigh distribution in the presence of competing risks model, for one-shot devices. Also, the modification of the EM algorithm for handling data with masked causes of failure is then discussed.

Conclusion

For evaluating the performance of estimators, a simulation study is conducted. Based on the Bias and Mean Squared Error (MSE), it is concluded that the EM algorithm is good and it's more accurate than the Fisher scoring method. In both of the methods, bias and MSE of the estimators are seen to decrease as the sample size increases.
In addition, the bootstrap confidence interval is better than the asymptotic confidence interval. The bootstrap confidence interval, work well for all the cases, even for small sample sizes. The average widths of the Bootstrap confidence intervals are smaller than the average widths of the asymptotic confidence intervals.
Also, based on the simulated study, shortening the test length leads to achieve an optimal test design and more accurate estimate of reliability.

Reference

[1] Balakrishnan, N., & Ling, M. H. (2013). Expectation maximization algorithm for one shot device accelerated llife testing with Weibull lifetimes, and variable parameters over stress. *IEEE Transactions on Reliability*, *62*(2), 537-551.
[2] Ferraz, R. D. O., & Moreira-Filho, D. D. C. (2017). Survival analysis of women with breast cancer: competing risk models. *Ciência & Saúde Coletiva*, *22*, 3743-3754.
[3] Hakamipour, N. (2021). Comparison between constant-stress and step-stress accelerated life tests under a cost constraint for progressive type I censoring censoring. *Sequential Analysis*, *40*(1), 17-31.
[4] Hakamipour, N. (2022). Parameter estimation using EM algorithm and test design optimization of constant stress accelerated life test with non-constant parameters under type-I progressive censoring. Journal of decisions and operations research, 6(4), 570-591. (**Persian**)