

طراحی نمودار کنترل برای پایش پایایی سیستم‌های در معرض شوک‌های تجمعی

یوسف شمس‌تبار*

دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران. y.shamstabar@email.kntu.ac.ir

حمید شهریاری

استاد، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران. hshahriari@kntu.ac.ir

چکیده: در مدل‌های شوک، سیستم به محض این که میزان خسارات ناشی از شوک‌ها، از آستانه تحمل آن عبور نماید، دچار خرابی می‌شود. در این پژوهش، به طراحی نمودار کنترل برای پایش پایایی سیستم‌های با آستانه تحمل تصادفی در معرض شوک‌های تصادفی تجمعی پرداخته می‌شود. در مدل شوک تجمعی، سیستم زمانی از کار می‌افتد که میزان تجمعی خسارات ناشی از شوک‌ها از آستانه تحمل سیستم بیش‌تر شود. برای حل تحلیلی مدل مرتبط با نمودار کنترل، چالش‌هایی نظیر نامشخص بودن توزیع‌ها، به دست آوردن پیچش توزیع‌ها و محاسبات انتگرال وجود دارند. برای غلبه کردن بر این چالش‌ها، از توزیع نوع مرحله‌ای برای مدل‌سازی مسئله استفاده می‌شود. با ارائه مثال عددی، نتایج حاصل از مدل تحلیلی ارائه شده با روش شبیه‌سازی مونت کارلو ارزیابی و مقایسه شده است. هم‌چنین، عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی نیز با استفاده از معیارهای متوسط طول دنباله و متوسط زمان تا رسیدن به هشدار خارج از کنترل مورد ارزیابی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: خرابی سیستم، مدل‌های شوک، شوک تجمعی، پایایی، نمودار کنترل

۱. مقدمه

فاصله زمانی بین دو خرابی متوالی پایش می‌شود اما در نمودار t_r ، فاصله زمانی تا رسیدن به t_r آمین خرابی پایش می‌شود که این کار می‌تواند موجب حساسیت بیش‌تر نمودار در شناسایی سریع شیفت در فرآیند تخریب شود. علاوه بر متغیر زمان بین خرابی‌ها، متغیر شدت خرابی نیز می‌تواند جهت شناسایی انحراف در فرآیند حائز اهمیت باشد. بدین منظور، وو^۵ و همکاران [۳] پایش توأم متغیرهای مستقل زمان بین وقوع دو خرابی متوالی و شدت خرابی را مطالعه کردند. وو و همکاران [۴] نسبت شدت خرابی به فاصله زمانی بین خرابی در حالت مستقل از هم را پایش کردند. در این زمینه مطالعاتی توسط سایر محققان صورت گرفت که از جمله می‌توان به تحقیقات وو و همکاران [۵]، لیو^۶ و همکاران [۶]، کیو^۷ و همکاران [۷] و سانوسی^۸ و موخرجی^۹ [۸] اشاره کرد.

امروزه پایش پایایی از جمله موضوعات مهم در سیستم‌های تولیدی و خدماتی است. نمودار کنترل زمان بین وقوع^۱ (TBE) یکی از نمودارهای کنترل است که در دو دهه اخیر برای پایش و کنترل پایایی سیستم‌ها استفاده می‌شود. نمودارهای اولیه TBE برای پایش فرآیندهای با کیفیت بالا ارائه شده‌اند که از این قبیل می‌توان نمودار کنترل تعداد تجمعی اقلام منطبق^۲ (CCC) به‌عنوان جایگزین نمودارهای کنترل p و np و همچنین نمودار کنترل مقدار تجمعی اقلام منطبق^۳ (CQC) به‌عنوان جایگزین نمودارهای کنترل c و u را نام برد [۱]. ژای^۴ و همکاران [۲] نمودارهای t_r و t را برای پایش داده‌های پایایی بر اساس توزیع‌های آماری مختلف معرفی کرده‌اند. در نمودار t_r

Corresponding author: y.shamstabar@email.kntu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۵/۱۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۸/۱۷

دوره ۱۱/ شماره ۴

صفحات ۳۲۳-۳۳۸

⁵ Wu

⁶ Liu

⁷ Qu

⁸ Sanusi

⁹ Mukherjee

¹ Time between event

² Cumulative count of conforming

³ Cumulative quantity of conforming

⁴ Xie

FPT متناسب با مدل شوک‌های تجمعی و حدی و با فرض رخداد شوک‌ها از توزیع پواسون ناهمگن پرداخته است. در مدل شوک تجمعی، سیستم زمانی خراب می‌شود که میزان تجمعی خسارات ناشی از شوک‌ها از آستانه تحمل سیستم عبور نماید. در مدل شوک حدی، سیستم زمانی خراب می‌شود که برای اولین بار میزان خسارت ناشی از شوک وارده از آستانه تحمل سیستم بیش‌تر شود. برای حل تحلیلی این مدل‌ها ممکن است دو چالش اساسی وجود داشته باشند. اول این‌که ممکن است با توجه به داده‌های جمع‌آوری شده نتوان توزیع مشخصی را برای داده‌ها در نظر گرفت و دوم این‌که برای حل تحلیلی علاوه بر پیچیدگی در انجام محاسبات، نیازمند تعیین پیش‌^{۱۷} توزیع-های زمان بین ورود و هم‌چنین تعیین پیش‌میزان خسارات ناشی از شوک‌ها در مدل شوک تجمعی باشیم که این امر برای اکثر توزیع‌ها به غیر از توزیع‌های نمایی، گاما و نرمال دشوار است. بدین منظور نتوس^{۱۸} و باتاچاریا^{۱۹} [۱۸] از توزیع نوع مرحله‌ای^{۲۰} (PH) برای مدل‌سازی پایایی در مدل‌های شوک استفاده کرده‌اند که در این مدل‌ها زمان بین ورود شوک‌ها از توزیع‌های PH پیروی می‌کند. ریاسوس-اوجا^{۲۱} و همکاران [۱۹] توزیع عمر سیستم تحت تأثیر شوک‌های تصادفی تجمعی را با استفاده از تابع توزیع PH برای حل مشکل پیش‌چش و محاسبات پیچیده توزیع‌های زمان بین ورود و میزان خسارات وارده بر سیستم مطالعه کردند. شمس‌تبار و همکاران [۲۰] با استفاده از توزیع‌های PH به طراحی تحلیلی نمودار کنترل FPT_r برای پایش پایایی سیستم‌های در معرض شوک‌های تصادفی پرداختند. آن‌ها آستانه تحمل سیستم را عدد مشخصی فرض کردند. مقالات مونتورو-کازورلا و پرز-اکان^{۲۲} [۲۱-۲۵]، حامد-رنج‌کش^{۲۳} و همکاران [۲۶] و لیو^{۲۴} و همکاران [۲۷] را می‌توان از مطالعاتی نام برد که در آن‌ها برای حل تحلیلی مدل پایایی از توزیع PH استفاده شده است. اکثر کارهای موجود در زمینه مدل‌های شوک و فرسایش با فرض آستانه تحمل ثابت برای سیستم‌ها است. در عمل، طراح و تولیدکننده یک سیستم نمی‌تواند صراحتاً آستانه تحمل سیستم

در عمل ممکن است بین دو متغیر زمان بین خرابی‌ها و شدت وقوع آن‌ها همبستگی وجود داشته باشد. بدین منظور، چنگ^{۱۷} و موکرجی [۹] با استفاده از تبدیلات نرمال‌سازی این دو متغیر و به‌کارگیری نمودار T^2 هتلینگ به پایش داده‌ها پرداختند. چنگ و همکاران [۱۰] نسبت متغیر زمان بین وقوع خرابی‌ها به متغیر شدت وقوع را با فرض همبستگی بین آن‌ها با استفاده از نمودار میانگین متحرک موزون نمایی^{۱۱} ($EWMA$) پایش کردند. چنگ و همکاران [۱۱] توزیع گامای دومتغیره برای پایش زمان بین وقوع خرابی و شدت آن را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها نمودار چندمتغیره میانگین متحرک موزون نمایی^{۱۲} ($MEWMA$) با توزیع گاما را برای پایش این داده‌ها معرفی کردند. هوانگ^{۱۳} و همکاران [۱۲] یک نمودار $EWMA$ برای پایش آماره‌ای از این دو متغیر ارائه نمودند. در ادامه هوانگ و همکاران [۱۳] و موکرجی و همکاران [۱۴] نیز طرح‌هایی ناپارامتری برای پایش داده‌های این دو متغیر ارائه دادند. مدل‌های شوک از مدل‌های پرکاربرد در تحلیل پایایی می‌باشند. در این مدل‌ها ممکن است سیستم با توجه به آستانه تحمل طراحی شده برای آن، در اثر ورود چندین شوک دچار خرابی شود. در اثر شوک‌های وارده به سیستم، مقداری خسارت ناشی می‌شود که در نتیجه به‌محض عبور خسارات از آستانه تحمل (ظرفیت) آن، سیستم از کار می‌افتد. برای پایش پایایی چنین سیستم‌هایی نمودار TBE مناسب نیست. علی^{۱۴} و پیواتالو^{۱۵} [۱۵] نمودار اولین زمان عبور^{۱۶} (FPT) را معرفی کردند که متناسب با مدل‌های شوک می‌باشد. آن‌ها دو مدل شوک‌های تجمعی و حدی را با فرض توزیع نمایی برای متغیرهای زمان بین ورود شوک‌ها و میزان خسارات ناشی از آن‌ها مورد مطالعه قرار دادند و برای طراحی نمودار کنترل، از شبیه‌سازی مونت‌کارلو استفاده نمودند. علی [۱۶] نمودار FPT را برای مدل‌های شوک تجمعی و حدی با ظرفیت تصادفی را مورد بررسی قرار داده است. در تحقیق وی نیز با فرض توزیع نمایی برای متغیرها، از شبیه‌سازی مونت‌کارلو برای طراحی حدود کنترل استفاده شده است. علی [۱۷] به طراحی نمودار کنترل

¹⁷ Convolution

¹⁸ Neuts

¹⁹ Bhattacharjee

²⁰ Phase-type distribution

²¹ Riascos-Ochoa

²² Montoro-Cazorla

²³ Hamed-Ranjekesh

²⁴ Lyu

¹⁰ Cheng

¹¹ Exponentially weighted moving average

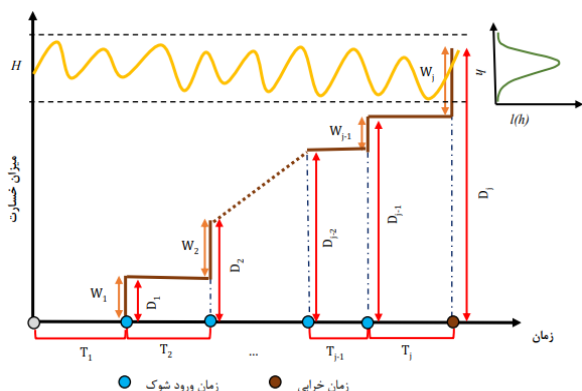
¹² Multivariate exponentially weighted moving average

¹³ Huang

¹⁴ Ali

¹⁵ Pievatolo

¹⁶ First passage time



شکل ۱. فرآیند یک مدل شوک تجمعی با آستانه تحمل تصادفی

پایایی سیستم در زمان t از رابطه (۲) به دست می‌آید.

$$R(t) = P(FPT > t)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t) = k) P\left(\sum_{j=0}^k W_j \leq H \mid N(t) = k\right) \quad (2)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t) = k) \bar{P}_k(H),$$

به طوری که $P(N(t) = k)$ برابر با احتمال اتفاق افتادن دقیقاً k شوک تا زمان t است. توجه شود که $W_0 = 0$ و $\bar{P}_k(H)$ برابر با احتمال سالم ماندن سیستم بعد از ورود k شوک است. در نظر بگیرد $S_k = \sum_{j=0}^k T_j$ به طوری که $T_0 = 0$ ، بنابراین داریم:

$$P(N(t) = k) = P\{S_k \leq t \text{ and } S_{k+1} > t\} \\ = F^{(k)}(t) - F^{(k+1)}(t), \quad (3)$$

$$\bar{P}_k(H) = P\left(\sum_{j=0}^k W_j \leq H \mid N(t) = k\right) \\ = \int_0^{\infty} G^{(k)}(h) dL(h). \quad (4)$$

در روابط (۳) و (۴)، $\varphi^{(k)}(a)$ نشان‌دهنده پیش‌کش k تا تابع $\varphi(a)$ با خودش است به طوری که $\varphi^{(0)}(a) = 1$ و $\varphi^{(k)}(0) = 0$ از این‌رو، $R(t)$ با استفاده از رابطه (۵) حاصل می‌شود.

$$R(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [F^{(k)}(t) - F^{(k+1)}(t)] \int_0^{\infty} G^{(k)}(h) dL(h) \quad (5)$$

محاسبات رابطه (۵) مرتبط با جمع بی‌نهایت عبارت می‌شود. بدین منظور، جمع بی‌نهایت عبارت تا رسیدن به K امین عبارت باید به ازای خطای تقریب $\varepsilon > 0$ ، به طوری کوتاه شود که $\bar{P}_K(H) < \varepsilon$ در نتیجه تقریب $R(t)$ از رابطه (۶) به دست می‌آید.

را مشخص نماید و همچنین، کاربران مختلف هنگام استفاده از یک سیستم به طور متفاوت عمل می‌کنند [۲۸، ۲۹، ۱۶]. در این پژوهش به طراحی تحلیلی نمودار کنترل FPT متناسب با مدل شوک تجمعی برای پایش پایایی سیستم‌های با آستانه تحمل تصادفی پرداخته شده است. بدین منظور، با استفاده از روابط توزیع PH ، حل تحلیلی برای طراحی نمودار FPT ارائه می‌شود. در بخش ۲، مدل مرتبط با نمودار کنترل FPT توصیف می‌شود. در بخش ۳، توزیع PH و روابط موجود آن مرور می‌شود. در بخش ۴، با استفاده از توزیع PH ، نمودار FPT متناسب با مدل شوک تجمعی، طراحی و معرفی می‌شود. در بخش ۵، عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی با استفاده از مثال عددی اعتبارسنجی و مورد ارزیابی قرار می‌گیرد و در نهایت در بخش ۶، جمع‌بندی و نتیجه‌گیری می‌شود.

۲. توصیف مدل

یک سیستم را در نظر بگیرید که شوک‌های تصادفی به آن وارد شده و مقداری خسارت از این شوک‌ها ناشی می‌شود. در مدل شوک تجمعی سیستم زمانی خراب می‌شود که میزان تجمعی خسارات ناشی از شوک‌ها بیش‌تر از آستانه تحمل سیستم شود. فرآیند مدل شوک تجمعی برای سیستمی با آستانه تحمل تصادفی در شکل ۱ نشان داده شده است. این سیستم زمانی خراب می‌شود که میزان تجمعی خسارات ناشی از ورود شوک‌ها از آستانه تحمل تصادفی H عبور نماید. فرض می‌شود که متغیرهای T_j و W_j به ازای $j \geq 1$ دو به دو از هم مستقل هستند. متغیرهای تصادفی $\{T_j\}_{j \geq 1}$ مستقل و هم توزیع iid هستند و همچنین متغیرهای $\{W_j\}_{j \geq 1}$ نیز iid هستند. بنابراین، $F(t) = P(T_j \leq t)$ و $G(w) = P(W_j \leq w)$ متغیر تصادفی H دارای تابع توزیع احتمال $L(h)$ است. عمر سیستم (FPT) برابر با زمانی است که برای اولین بار میزان تجمعی خسارات ناشی از شوک‌ها از آستانه تحمل تصادفی H بیش‌تر شود. در نتیجه، FPT برابر است با:

$$FPT = \sum_{j=1}^{i^*} T_j \text{ for } \\ i^* = \min\{i = 1, 2, 3, \dots \mid D_i = \sum_{j=1}^i W_j > H\}. \quad (1)$$

²⁵ Independently and identically distributed

$$f(x) = \pi \cdot \exp(Dx) \cdot d; \text{ for } x \geq 0 \quad (9)$$

به طوری که d یک بردار ستونی شامل شدت انتقال بین m حالت گذرا به حالت جاذب $m+1$ است. همچنین، $d = -De$ است که e بردار ستونی با درایه‌های یک می‌باشد. یک فرآیند تصادفی مارکوف زمان پیوسته روی فضای حالت متناهی $S = \{1, 2, \dots, m, m+1\}$ را در نظر بگیرید. مجموعه فضای حالت شامل مجموعه‌ای از حالات گذرا $\{1, 2, \dots, m\}$ و مجموعه حالت جاذب $\{m+1\}$ می‌باشد. فرض می‌شود که $\pi_0 = (\pi_1, \dots, \pi_{m+1})$ نشان‌دهنده بردار احتمالات اولیه باشد که در آن $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_m)$ احتمالات مربوط به شروع از حالات گذرا است و π_{m+1} احتمال مربوط به شروع از حالت جاذب است. به طوری که $\pi_1 + \dots + \pi_{m+1} = 1$ است.

الگوریتم‌هایی برای برازش پارامترهای توزیع PH برای هر متغیر با داده‌های غیرمنفی وجود دارند. الگوریتم‌ها به دو دسته کلی بیشینه‌سازی امید ریاضی EM ^{۲۷} و تطابق گشتاوری MM ^{۲۸} تقسیم‌بندی می‌شوند. برای تخمین پارامترهای توزیع PH روش‌های EM از تمام داده‌های موجود و روش‌های MM از تعدادی از گشتاورها استفاده می‌کنند [۳۱].

آن‌طور که در مراجع [۳۰-۳۲] نشان داده شده است توزیع PH دارای ویژگی‌هایی است که برخی از آن‌ها که در این پژوهش مورد استفاده قرار گرفته‌اند به‌طور خلاصه به شرح زیر ارائه می‌شوند:

قضیه ۱: چنانچه $X \sim PH(\pi, D)$ با مرتبه m_X و $Y \sim PH(\gamma, T)$ با مرتبه m_Y باشند، $X + Y \sim PH(\eta, L)$ مرتبه $m = m_X + m_Y$ می‌باشد، به طوری که:

$$\eta = [\pi, \pi_{m_X+1} \cdot \gamma] \quad (10)$$

$$L = \begin{bmatrix} D & d \cdot \gamma \\ 0 & T \end{bmatrix}$$

به طوری که π_{m_X+1} برابر با احتمال اولیه برای حالت جاذب $m_X + 1$ است.

قضیه ۲: چنانچه $X \sim PH(\pi, D)$ و $Y \sim PH(\gamma, T)$ باشند، داریم:

$$P(X > Y) = -(\pi \otimes \gamma)(D \oplus T)^{-1}(e \otimes t), \quad (11)$$

به طوری که $t = -Te$

$$R(t) \approx \sum_{k=0}^K [F^{(k)}(t) - F^{(k+1)}(t)] \int_0^\infty G^{(k)}(h) dL(h). \quad (6)$$

در نتیجه، تقریب تابع توزیع تجمعی متغیر اولین زمان عبور از آستانه تحمل تصادفی سیستم با استفاده از رابطه (۷) حاصل می‌شود.

$$F(t) = 1 - R(t) \approx 1 - \sum_{k=0}^K [F^{(k)}(t) - F^{(k+1)}(t)] \int_0^\infty G^{(k)}(h) dL(h). \quad (7)$$

برای به دست آوردن حد پایین نمودار کنترل یک‌طرفه FPT از تابع توزیع تجمعی اولین زمان عبور حاصل از رابطه (۷) به ازای احتمال هشدار اشتباه α ، مطابق با رابطه (۸)، استفاده می‌شود.

$$1 - \sum_{k=0}^K [F^{(k)}(LCL) - F^{(k+1)}(LCL)] \int_0^\infty G^{(k)}(h) dL(h) = \alpha \quad (8)$$

ممکن است در حل رابطه (۸) با سه چالش اساسی به شرح زیر مواجه شویم:

- ۱) پیدا کردن توزیع متغیرهای T_j ، W_j و H
- ۲) دشواری در محاسبات پیچش $F^{(k)}(t)$ و $G^{(k)}(h)$ به جز در موارد خاصی از توزیع‌های نمایی، نرمال و گاما
- ۳) محاسبه انتگرال $\int_0^\infty G^{(k)}(h) dL(h)$ بسته به توزیع متغیرهای W_j و H

برای رفع این چالش‌ها، ابتدا توزیع PH متغیرهای زمان بین ورود شوک‌ها و میزان خسارت ناشی از شوک‌ها را برازش کرده و سپس با استفاده از روابط خاص توزیع PH ، به مدل‌سازی مسئله پرداخته می‌شود. به همین منظور، در بخش ۳ توزیع PH و روابط مهم آن مرور می‌شود.

۳. توزیع نوع مرحله‌ای

فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی پیوسته باشد. بر طبق [۳۰] این متغیر با یک زنجیره مارکوف محدود با یک حالت جاذب مرتبط است. این متغیر از توزیع PH پیروی می‌کند که به صورت $PH(\pi, D)$ نمایش داده می‌شود. ماتریس D ، یک ماتریس مربعی با مرتبه m است که شامل شدت انتقال بین حالات گذرا است و ماتریس π شامل احتمالات اولیه از حالات گذرا می‌باشد. تابع چگالی احتمال^{۲۶} (pdf) از رابطه (۹) به دست می‌آید.

²⁷ Expectation maximization

²⁸ Moment matching

²⁶ Probability density function

توزیع $PH(\boldsymbol{\pi}_k, \mathbf{D}_k)$ از مرتبه $m_{W_1} + m_{W_2} + \dots + m_{W_k}$ با پارامترهای زیر است.

$$\boldsymbol{\pi}_k = [\omega_1, 0, \dots, 0],$$

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} W_1 & w_1 \cdot \omega_2 & 0 & & & \\ 0 & W_2 & w_2 \cdot \omega_3 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & W_{k-1} & w_{k-1} \cdot \omega_k & \\ & & & 0 & W_k & \end{bmatrix} \quad (16)$$

و

$$\mathbf{d}_k = -\mathbf{D}_k \mathbf{e}$$

متغیر تصادفی H از توزیع $PH(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{H})$ با مرتبه m_H پیروی می کند به طوری که $\mathbf{h} = -\mathbf{H}\mathbf{e}$ طبق قضیه ۲، احتمال سالم ماندن سیستم بعد از ورود k شوک تجمعی برابر است با:

$$\bar{P}_{k(H)} = P(D_k < H)$$

$$= \begin{cases} -(\boldsymbol{\psi} \otimes \boldsymbol{\pi}_k)(\mathbf{D}_k \oplus \mathbf{H})^{-1}(\mathbf{e} \otimes \mathbf{d}_k), & k \geq 1 \\ 1, & k = 0 \end{cases} \quad (17)$$

احتمال این که دقیقاً k شوک منجر به خرابی سیستم شوند برابر است با:

$$p_k = P\{D_{k-1} \leq H \text{ and } D_k > H\}$$

$$= P(D_{k-1} < H) - P(D_k < H) \quad (18)$$

$$= \bar{P}_{k-1(H)} - \bar{P}_{k(H)}.$$

مطابق با رابطه (۶) مقدار $R(t)$ به ازای K تقریب زده می شود. در نتیجه، مطابق با قضیه ۳، FPT از توزیع $PH(\boldsymbol{\eta}_K, \mathbf{L}_K)$ با پارامترهای زیر پیروی می کند.

$$\boldsymbol{\eta}_K = [p_1 \boldsymbol{\beta}_1, p_2 \boldsymbol{\beta}_2, \dots, p_{K-1} \boldsymbol{\beta}_{K-1}, p_K \boldsymbol{\beta}_K],$$

$$\mathbf{L}_K = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & S_2 & 0 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & S_{K-1} & 0 & \\ & & & 0 & S_K & \end{bmatrix} \quad (19)$$

و

$$\mathbf{l}_K = -\mathbf{L}_K \mathbf{e}.$$

بنابراین، مقدار تقریبی $R(t)$ با استفاده از رابطه (۲۰) به دست می آید:

$$R(t) \approx \boldsymbol{\eta}_K \cdot \exp(\mathbf{L}_K t) \cdot \mathbf{e}; \quad t \geq 0. \quad (20)$$

با استفاده از رابطه (۲۱) و (۲۲) می توان به ترتیب متوسط زمان تا رسیدن به خرابی^{۳۱} ($MTTF$) و تابع توزیع تجمعی عمر سیستم را تخمین زد.

$$MTTF = E(FPT) \approx -\boldsymbol{\eta}_K \cdot \mathbf{L}_K^{-1} \cdot \mathbf{e} \quad (21)$$

قضیه ۳: چنانچه $X \sim PH(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{D})$ و $Y \sim PH(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{T})$ باشند و داشته باشیم احتمالات p_1 و p_2 را به طوری که $p_1 + p_2 = 1$ در نتیجه، جمع محدب $p_1 X + p_2 Y \sim PH(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{L})$ به طوری که:

$$\boldsymbol{\eta} = [p_1 \boldsymbol{\pi}, p_2 \boldsymbol{\gamma}] \quad \text{و} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

قضیه ۴: چنانچه $X \sim PH(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{D})$ تابع توزیع تجمعی ($F(x)$) و گشتاور n ام $E(X^n)$ به ترتیب از روابط (۱۳) و (۱۴) حاصل می شوند.

$$F(x) = 1 - \boldsymbol{\pi} \cdot \exp(\mathbf{D}x) \cdot \mathbf{e}; \quad \text{for } x \geq 0 \quad (13)$$

$$E(X^n) = (-1)^n n! \boldsymbol{\pi} \mathbf{D}^{-n} \mathbf{e} \quad (14)$$

در رابطه (۱۳)، حاصل $\exp(\mathbf{D}x)$ برابر است با $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{D}x)^i}{i!}$ **تعریف:** اگر A یک ماتریس $n_1 \times m_1$ و B یک ماتریس $n_2 \times m_2$ باشند، ضرب کرونگر^{۲۹} آن ها $A \otimes B$ یک ماتریس از مرتبه $n_1 \cdot n_2 \times m_1 \cdot m_2$ است که برابر است با $a_{ij} B$. اگر C و D ماتریس های مربعی به ترتیب از مرتبه های p و q باشند، جمع کرونگر^{۳۰} آن ها برابر با $C \otimes I_q + I_p \otimes D$ است به طوری که I_p و I_q نشان دهنده ماتریس همانی از مرتبه های p و q می باشند.

۴. طراحی نمودار کنترل با استفاده از توزیع PH

فرض می شود که $\{T_j\}_{j \geq 1}$ دارای توزیع $PH(\boldsymbol{\gamma}_j, \mathbf{T}_j)$ از مرتبه m_{T_j} باشند. مطابق با قضیه ۱، $S_k = \sum_{j=1}^k T_j$ دارای توزیع $PH(\boldsymbol{\beta}_k, \mathbf{S}_k)$ از مرتبه $m_{T_1} + m_{T_2} + \dots + m_{T_k}$ با پارامترهای زیر است [۲۰].

$$\boldsymbol{\beta}_k = [\boldsymbol{\gamma}_1, 0, \dots, 0],$$

$$\mathbf{S}_k = \begin{bmatrix} T_1 & t_1 \cdot \boldsymbol{\gamma}_2 & 0 & & & \\ 0 & T_2 & t_2 \cdot \boldsymbol{\gamma}_3 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & T_{k-1} & t_{k-1} \cdot \boldsymbol{\gamma}_k & \\ & & & 0 & T_k & \end{bmatrix} \quad (15)$$

و

$$\mathbf{s}_k = -\mathbf{S}_k \mathbf{e}$$

همچنین، $\{W_j\}_{j \geq 1}$ دارای توزیع $PH(\boldsymbol{\omega}_j, \mathbf{W}_j)$ از مرتبه m_{W_1} هستند. مطابق با قضیه ۱، $D_k = \sum_{j=1}^k W_j$ دارای

³¹ Mean Time To Failure

²⁹ Kronecker product

³⁰ Kronecker sum

وایبول با میانگین $\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$ و تابع توزیع تجمعی $G(w) = \varphi\left(\frac{\ln(w)-\mu}{\sigma}\right)$ است و آستانه تحمل سیستم از توزیع $L(h) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{h}{\theta}\right)^\beta\right]$ پیروی می‌کند. پارامترهای توزیع نرمال لگاریتمی برابر با $\mu = 2$ و $\sigma = 0.8$ هستند. برای توزیع وایبول نیز پارامترها برابر با $\theta = 60$ و $\beta = 6$ هستند. زمان بین ورود شوک‌ها از توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = 0.1$ و تابع توزیع تجمعی $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$ پیروی می‌کند. با توجه به نمایی بودن زمان بین ورود شوک‌ها، توزیع PH به راحتی قابل نمایش است و نیاز به برازش نیست اما برای برازش توزیع میزان خسارت ناشی از شوک‌ها از الگوریتم G-FIT استفاده می‌شود.

نمایش توزیع PH متغیر T بدین صورت است که:

$$T_j \sim PH(\tau, T), \tau = (1), T = [-0.1], t = [0.1]$$

توزیع متغیر W توسط توزیع PH از مرتبه ۷ بیان می‌شود که دقت برازش آن در مقایسه با توزیع واقعی در شکل ۲ نشان داده شده است. همچنین، برای مقایسه دقت برازش از آزمون آماری کولموگروف-اسمیرنوف^{۳۴} استفاده شده است. نتیجه آزمون با مقدار P-value برابر ۰/۶۸ حاکی از آنست که فرض همسانی توزیع برازش شده با توزیع PH و توزیع واقعی رد نمی‌شود.

نمایش توزیع PH متغیر W به صورت زیر است:

$$W_j \sim PH(\omega, W), \omega = (0.05, 0.35, 0, 0.6, 0, 0),$$

$$W = \begin{bmatrix} -0.04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$F(t) = 1 - R(t) \approx 1 - \eta_K \cdot \exp(L_K t) \cdot e; t \geq 0. \quad (۲۲)$$

نمودار کنترل یک طرفه برای پایش پایایی در نظر گرفته شده است. با حل رابطه (۲۳) به ازای α تعیین شده، حد پایین نمودار کنترل (LCL) به دست می‌آید.

$$1 - \eta_K \cdot \exp(L_K \cdot LCL) \cdot e = \alpha \quad (۲۳)$$

متوسط طول دنباله^{۳۲} (ARL) از رابطه (۲۴) برآورد می‌شود:

$$\widehat{ARL} = \frac{1}{1 - \eta_K \cdot \exp(L_K \cdot LCL) \cdot e} \quad (۲۴)$$

در نتیجه، متوسط زمان تا رسیدن به هشدار خارج از کنترل^{۳۳} (ATS) با استفاده از رابطه (۲۵) برآورد می‌شود.

$$\widehat{ATS} = \frac{-\eta_K \cdot L_K^{-1} \cdot e}{1 - \eta_K \cdot \exp(L_K \cdot LCL) \cdot e} \quad (۲۵)$$

معمولاً مقادیر ARL و ATS با استفاده از تعداد مناسبی از شبیه‌سازی تخمین زده می‌شوند تا عملکرد نمودار کنترل مورد ارزیابی قرار گیرد. به منظور اعتبارسنجی و ارزیابی نمودار کنترل پیشنهادی، در بخش بعد، با شبیه‌سازی یک سیستم با آستانه تحمل تصادفی در برابر شوک‌های تجمعی به تحلیل نتایج عددی پرداخته می‌شود.

۵. اعتبارسنجی و ارزیابی نمودار کنترل پیشنهادی

برای اعتبارسنجی و ارزیابی نمودار کنترل پیشنهادی با شبیه‌سازی شرایط واقعی یک مثال عددی ارائه می‌شود. در این مثال ابتدا به طراحی نمودار کنترل FPT پیشنهادی متناسب با مدل شوک تجمعی پرداخته می‌شود و سپس عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی توسط معیارهای ARL و ATS مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. چنانچه در انجام محاسبات نیاز به برازش توزیع PH باشد، از الگوریتم G-FIT [۳۳] استفاده می‌شود. الگوریتم G-FIT از الگوریتم‌های روش EM است که بر اساس توزیع هایپر-ارلانگ به برازش توزیع‌های آماری مختلف با دامنه غیرمنفی می‌پردازد. مشخصات مثال شبیه‌سازی شده به شرح زیر می‌باشد:

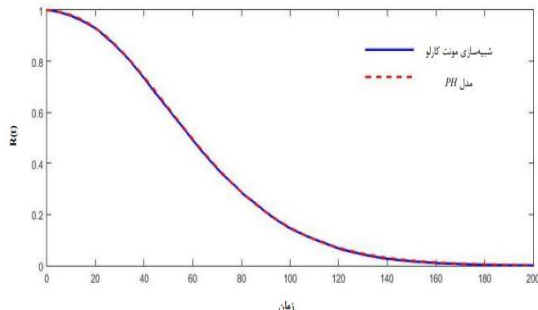
یک سیستم با مدل شوک تجمعی را در نظر بگیرید که میزان خسارت ناشی از شوک‌ها نیز از توزیع نرمال لگاریتمی با میانگین $\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$ و تابع توزیع تجمعی

³⁴ Kolmogorov-Smirnov test

³² Average run length

³³ Average time to signal

پایایی این سیستم با استفاده از مدل پیشنهادی به ازای $\varepsilon = 10^{-6}$ و همچنین روش شبیه‌سازی مونت کارلو محاسبه شده است. شکل ۴، تخمین بسیار نزدیک این دو روش در محاسبه پایایی سیستم را نشان می‌دهد.

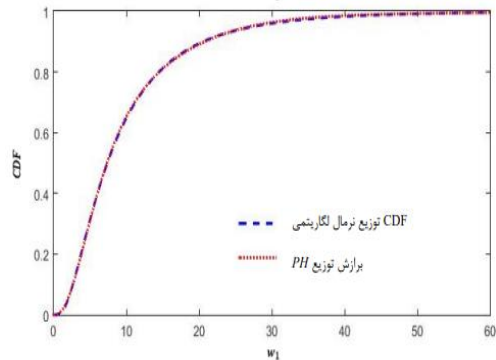


شکل ۴. مقایسه محاسبه پایایی سیستم با روش‌های مدل PH و شبیه‌سازی مونت کارلو

با توجه به آنکه هر چه پایایی بیشتر باشد بهتر است لذا نمودار کنترل FPT یک‌طرفه پایین مورد نظر است و به همین دلیل حد پایین نمودار کنترل محاسبه می‌شود. در ادامه شیفت‌هایی از پارامترها مورد تحلیل قرار می‌گیرند که منجر به کاهش پایایی شوند. شناسایی این شیفت‌ها توسط مدل پیشنهادی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

با استفاده از رابطه (۲۳)، حد پایین نمودار کنترل یک‌طرفه FPT به ازای $\alpha = 0.0027$ برای این مثال برابر با $LCL = 2.4491$ شده است. در حالت تحت کنترل آماري معیارهای عملکردی برابر با $ARL = 370.37$ و $ATS = 24112.12$ به دست می‌آیند. مقدار تخمینی ARL با استفاده از 10^4 بار شبیه‌سازی محاسبه می‌شود. مقدار تخمینی ARL برابر با 376.21 و فاصله اطمینان 95 درصد آن (368.98, 383.44) است. این فاصله در برگزیده مقدار تئوری ARL یعنی 370.37 است که از رابطه (۲۴) به دست می‌آید. نتایج حاصله نشان‌دهنده عملکرد مناسب نمودار کنترل پیشنهادی است.

در جدول ۱، زمان بین خرابی‌های متوالی برای سیستم در معرض شوک‌های تصادفی تجمعی ارائه شده است. ۱۵ نمونه اولیه مربوط به زمان بین خرابی در حالت تحت کنترل آماري می‌باشند اما در نمونه‌های ۱۶ تا ۳۰ پارامتر μ به مقدار ۳ منحرف شده است ($\mu_1 = 3$) یعنی به مقدار یک واحد نسبت به $\mu = 2$ تغییر نموده است. شکل ۵، نمودار FPT متناسب با داده‌های ارائه شده در جدول ۱ را نشان می‌دهد. با توجه به



شکل ۲. مقایسه دقت توزیع PH برازش شده با توزیع نرمال لگاریتمی واقعی

توزیع متغیر H توسط توزیع PH از مرتبه ۲۵ بیان می‌شود که دقت برازش آن در مقایسه با توزیع واقعی در شکل ۳ نشان داده شده است. نتیجه حاصل از آزمون کولموگروف-اسمیرنوف حاکی از آنست که توزیع برازش شده به روش توزیع PH با مقدار P-value برابر ۰/۳۱ فرض همسانی آن با توزیع واقعی را رد نمی‌کند.

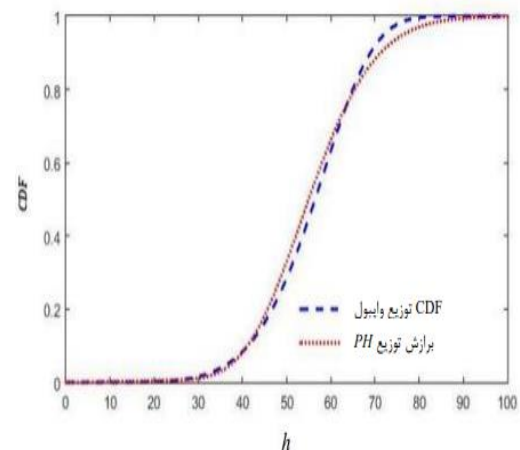
نمایش توزیع PH متغیر W به صورت زیر است:

$$H \sim PH(\psi, H)$$

$$\psi = [0.01, 0, 0.99, 0]_{1 \times 25}$$

9

$$H = \begin{bmatrix} -0.06 & -0.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -0.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4 & 0.4 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 0.4 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 \end{bmatrix}_{25 \times 25}$$



شکل ۳. مقایسه دقت توزیع PH برازش شده با توزیع وایبول واقعی

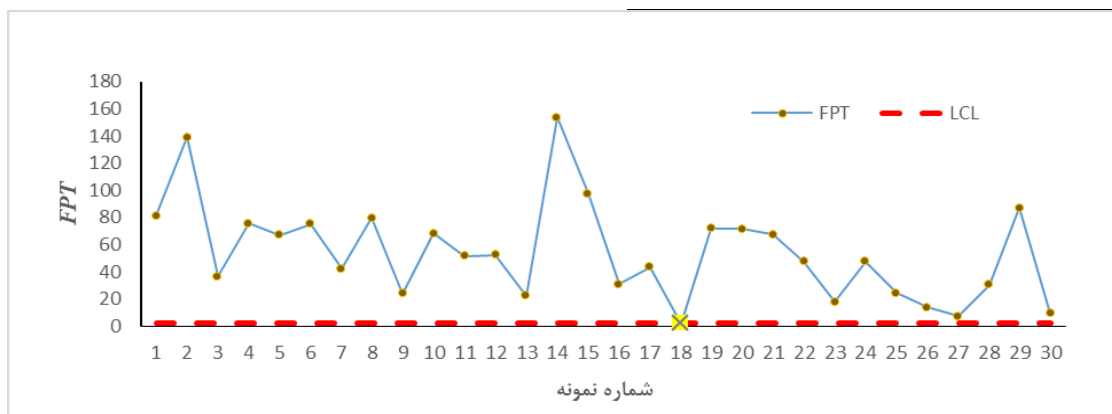
برای ارزیابی عملکرد نمودار پیشنهادی، معیارهای ARL و ATS و به ازای شیفت‌های مختلف در پارامترهای سیستم محاسبه می‌شوند که هر چه مقادیر این معیارها در حالت خارج از کنترل کم‌تر باشد، نشان‌دهنده حساسیت بیش‌تر نمودار جهت شناسایی شیفت در پارامترها است. همان‌طور که در جدول ۲ مشاهده می‌شود، به ازای افزایش پارامترهای λ و μ و با کاهش پارامتر θ ، مقدار ARL و ATS کاهش می‌یابند که عملکرد بهتر نمودار کنترل پیشنهادی برای تشخیص سریع‌تر شیفت در پارامترها را نشان می‌دهد.

تحلیل حساسیت‌های انجام شده در این بخش، نشان‌دهنده اعتبار و عملکرد مناسب مدل تحلیلی نمودار کنترل FPT پیشنهادی بر اساس توزیع PH می‌باشد که زمان و هزینه خیلی کم‌تری نسبت به شبیه‌سازی مونت‌کارلو دارد. به‌ویژه در سیستم‌های با پایایی بالا، شبیه‌سازی مونت‌کارلو نیاز به صرف زمان و تعداد دفعات اجرای بسیار زیاد برای کاهش واریانس برآورد پارامترها و بهبود دقت محاسبه حد پایین نمودار کنترل دارد.

شکل ۵، نمودار FPT توانسته است بعد از رسم ۳ نقطه، شیفت در فرآیند خرابی سیستم را تشخیص دهد.

جدول ۱. داده‌های مربوط به زمان بین خرابی‌های متوالی

قبل از شیفت		بعد از شیفت	
شماره نمونه	FPT	شماره نمونه	FPT
۱	۸۱/۲۳	۱۶	۳۰/۷۷
۲	۱۳۸/۸۳	۱۷	۴۳/۶۰
۳	۳۶/۶۶	۱۸	۲/۱۸
۴	۷۵/۷۹	۱۹	۷۲/۰۱
۵	۶۶/۹۲	۲۰	۷۱/۵۳
۶	۷۵/۳۵	۲۱	۶۷/۵۵
۷	۴۲/۴۳	۲۲	۴۷/۴۳
۸	۷۹/۷۷	۲۳	۱۷/۸۸
۹	۲۳/۹۲	۲۴	۴۷/۵۶
۱۰	۶۸/۲۸	۲۵	۲۴/۱۶
۱۱	۵۱/۴۴	۲۶	۱۳/۸۷
۱۲	۵۲/۵۹	۲۷	۷/۴۷
۱۳	۲۲/۵۳	۲۸	۳۰/۴۴
۱۴	۱۵۳/۶۱	۲۹	۸۶/۹۲
۱۵	۹۷/۵۸	۳۰	۹/۴۲



شکل ۵. نمودار FPT متناسب با داده‌های ارائه‌شده زمان بین خرابی‌ها

۶. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در مدل شوک تجمعی، سیستم زمانی خراب می‌شود که میزان تجمعی خسارات ناشی از شوک‌ها، از آستانه تحمل آن عبور نماید. بعد از محاسبه پایایی و تعیین پارامترهای بهینه در طراحی سیستم، کنترل و حفظ سیستم در شرایط مطلوب اهمیت دارد تا تضمین شود که پایایی سیستم به حالت خارج از

جدول ۲. نتایج محاسباتی ARL و ATS مربوط به عملکرد نمودار کنترل FPT

θ		λ			
		۰/۱		۰/۲	
		۲	۲/۵	۲	۲/۵
۶۰	ARL	۳۷۰/۳۷	۹۱/۳۲	۱۵۲/۷۳	۳۷/۳۴
	ATS	۲۴۱۱۲/۱۲	۳۸۷۶/۰۵	۴۸۹۱/۵۷	۷۹۱/۳۱
۳۰	ARL	۵۷/۲۹	۲۱/۹۱	۲۴/۴۶	۱۰/۱۹
	ATS	۲۰۹۲/۹۱	۵۵۸/۹۹	۴۴۷/۷۷	۱۳۰/۴۷

- and Reliability Engineering International*, 26, PP. 541-554.
- [6] Liu, Y., He, Z., Shamsuzzaman, M. and Wu, Z. (2010) A combined control scheme for monitoring the frequency and size of an attribute event. *Journal of Applied Statistics*, 37, PP. 1991-2013.
- [7] Qu, L., Wu, Z., Khoo, M. B. and Castagliola, P. (2013). A CUSUM scheme for event monitoring. *International Journal of Production Economics*, 145, PP. 268-280.
- [8] Sanusi, R. A. and Mukherjee, A. (2019). A combination of max-type and distance based schemes for simultaneous monitoring of time between events and event magnitudes. *Quality and Reliability Engineering International*, 35, PP. 368-384.
- [9] Cheng, Y. and Mukherjee, A. (2014). One Hotelling T^2 chart based on transformed data for simultaneous monitoring the frequency and magnitude of an event. *2014 IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management*. IEEE, PP. 764-768.
- [10] Cheng, Y., Knoth, S. and Xie, M. (2015). Monitoring the frequency and magnitude of an event with a ratio chart. *2015 IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM)*. IEEE, PP. 928-931.
- [11] Cheng, Y., Mukherjee, A. and Xie, M. (2017). Simultaneously monitoring frequency and magnitude of events based on bivariate gamma distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 87, PP. 1723-1741.
- [12] Huang, S., Yang, J. and Mukherjee, A. (2017). Nonparametric EWMA chart for simultaneous monitoring of event frequency and magnitude. *2017 IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM)*. IEEE, PP. 1878-1882.
- [13] Huang, S., Yang, J. and Mukherjee, A. (2018). Distribution-free EWMA schemes for simultaneous monitoring of time between events and event magnitude. *Computers & Industrial Engineering*, 126, PP. 317-336.
- [14] Mukherjee, A., Cheng, Y. and Gong, M. (2018). A new nonparametric scheme for simultaneous monitoring of bivariate processes and its application in monitoring service quality. *Quality Technology & Control*, 24, PP. 1-12.
- کنترل نمی‌رود. بدین منظور، به‌کارگیری نمودار کنترل مناسب با نوع فرآیند تخریب از ضرورت ویژه‌ای برخوردار است.
- برای حل تحلیلی مدل شوک تجمعی و طراحی نمودار کنترل آن پیچیدگی‌ها و چالش‌هایی نظیر نامشخص بودن توزیع‌ها، به دست آوردن پیچش توزیع‌ها و محاسبات انتگرال وجود دارند. در این پژوهش، نمودار کنترل برای پایش پایایی سیستم‌ها با آستانه تحمل تصادفی بر اساس توزیع PH متناسب با مدل شوک تجمعی ارائه شده است. از شبیه‌سازی مونت‌کارلو نیز برای اعتبارسنجی مدل پیشنهادی در محاسبه پایایی سیستم، استفاده شده است. همچنین با استفاده از معیارهای متوسط طول دنباله (ARL) و متوسط زمان تا رسیدن به هشدار خارج از کنترل (ATS)، عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی در شناسایی شیفت در پارامترهای فرآیند تخریب مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که استفاده از توزیع PH در حل پیچیدگی‌های مدل و محاسبات متغیر FPT در مقایسه با شبیه سازی مونت‌کارلو توجیه‌پذیر است. به‌عنوان مطالعات آتی، طراحی نمودار کنترل FPT با در نظر گرفتن همبستگی بین متغیرهای زمان بین ورود شوک‌ها و میزان خسارت ناشی از آن‌ها و یا اعمال سیاست‌های نگهداری و تعمیرات پیشنهاد می‌شود.

۷- منابع

- [1] Ali, S., Pievatolo, A. and Göb, R. (2016). An overview of control charts for high-quality processes. *Quality and reliability engineering international*, 32, PP. 2171-2189.
- [2] Xie, M., Goh, T. N. and Ranjan, P. (2002). Some effective control chart procedures for reliability monitoring. *Reliability Engineering & System Safety*, 77, PP. 143-150.
- [3] Wu, Z., Jiao, J. and He, Z. (2009a). A control scheme for monitoring the frequency and magnitude of an event. *International Journal of Production Research*, 47, PP. 2887-2902.
- [4] Wu, Z., Jiao, J. and He, Z. (2009b). A single control chart for monitoring the frequency and magnitude of an event. *International Journal of Production Economics*, 119, PP. 24-33.
- [5] Wu, Z., Liu, Y., He, Z. and Khoo, M. B. (2010). A cumulative sum scheme for monitoring frequency and size of an event. *Quality*

- cumulative shocks governed by a BMAP. *Applied Mathematical Modelling*, 39, PP. 7620-7629.
- [25] Montoro-Cazorla, D. and Pérez-Ocón, R. (2015). A shock and wear model with dependence between the interarrival failures. *Applied Mathematics and Computation*, 259, PP. 339-352.
- [26] Hamed-Ranjesh, S. H., Hamadani, A. Z. and Mahmoodi, S. (2018). A new cumulative shock model with damage and inter-arrival time dependency. *Reliability Engineering & System Safety*, 192, 106047.
- [27] Lyu, H., Qu, H., Ma, L., Wang, S., & Yang, Z. (2022). Reliability assessment of a system with multi-shock sources subject to dependent competing failure processes under phase-type distribution. *Quality and Reliability Engineering International*.
- [28] Wang, P., & Coit, D. W. (2007, January). Reliability and degradation modeling with random or uncertain failure threshold. In 2007 Annual Reliability and Maintainability Symposium (pp. 392-397). IEEE.
- [29] Chen, H., & Chen, Y. (2012, May). Competing failure with degradation and random shocks based on probabilistic failure threshold. In Proceedings of the IEEE 2012 Prognostics and System Health Management Conference (PHM-2012 Beijing) (pp. 1-6). IEEE.
- [30] Verbelen, R. (2013). Phase-type distributions & mixtures of Erlangs (Doctoral dissertation, UNIVERSITY OF LEUVEN).
- [31] Buchholz, P., Kriege, J. and Felko, I. (2014). Input modeling with phase-type distributions and Markov models: theory and applications, Springer.
- [32] Bladt, M., & Nielsen, B. F. (2017). Matrix-exponential distributions in applied probability (Vol. 81). New York: Springer.
- [33] Thummler, A., Buchholz, P., & Telek, M. (2006). A novel approach for phase-type fitting with the EM algorithm. *IEEE Transactions on dependable and secure computing*, 3(3), 245-258.
- Quantitative Management*, 15, PP. 143-156.
- [15] Ali, S. and Pievatolo, A. (2018). Time and magnitude monitoring based on the renewal reward process. *Reliability Engineering & System Safety*, 179, PP. 97-107.
- [16] Ali, S. (2020). Monitoring time and magnitude based on the renewal reward process with a random failure threshold. *Journal of Applied Statistics*, PP.1-38.
- [17] Ali, S. (2021). First passage time control charts assuming power law intensity for time to jointly monitor time and magnitude. *Quality and Reliability Engineering International*, 37(5), 2034-2064.
- [18] Neuts, M. F. and Bhattacharjee, M. C. (1981). Shock models with phase type survival and shock resistance. *Naval Research Logistics Quarterly*, 28, PP. 213-219.
- [19] Riascos-Ochoa, J., Sanchez-Silva, M. and Akhavan-Tabatabaei, R. (2014). Reliability analysis of shock-based deterioration using phase-type distributions. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 38, PP. 88-101.
- [20] Shamstabar, Y., Shahriari, H., & Samimi, Y. (2021). Reliability monitoring of systems with cumulative shock-based deterioration process. *Reliability Engineering & System Safety*, 216, 107937.
- [21] Montoro-Cazorla, D., Rafael, P.-O. and Carmen Segovia, M. (2007). Survival probabilities for shock and wear models governed by phase-type distributions. *Quality technology & quantitative management*, 4, PP. 85-94.
- [22] Montoro-Cazorla, D., Pérez-Ocón, R. and Segovia, M. C. (2009). Shock and wear models under policy N using phase-type distributions. *Applied mathematical modelling*, 33, PP. 543-554.
- [23] Montoro-Cazorla, D. and Pérez-Ocón, R. (2014a). Matrix stochastic analysis of the maintainability of a machine under shocks. *Reliability Engineering & System Safety*, 121, PP. 11-17.
- [24] Montoro-Cazorla, D. and Pérez-Ocón, R. (2015). A reliability system under

Design of control chart for reliability monitoring of systems subjected to cumulative shocks

Yusof Shamstabar *

Ph.D candidate, Department of Industrial Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.
y.shamstabar@email.kntu.ac.ir

Hamid Shahriari

Professor, Department of Industrial Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.
hshahriari@kntu.ac.ir

Abstract: In shock models, the system will fail as soon as the amount of damages caused by shocks exceeds its failure threshold. In this research, the design of control chart for reliability monitoring of systems with random failure threshold subjected to cumulative random shocks is discussed. In the cumulative shock model, the system fails when the cumulative amount of damage caused by the shocks exceeds the failure threshold of the system. For the analytical solution of the model related to the control chart, there are some complexities such as the existence of unknown distributions, obtaining the convolutions of the distributions and integral calculations. To overcome these problems, phase-type distribution is used for modeling. By presenting a numerical example, the results of the presented analytical model are evaluated and compared with the Monte Carlo simulation method. Also, the performance of the proposed control chart using the average run length and average time to out of control signal criteria is evaluated.

Keywords: System failure; Shock models; Cumulative shock; Reliability; Control chart.

1. Introduction

Today, reliability monitoring is one of the important issues in production and service systems. Time between events (TBE) control chart is one of the control charts used in the last two decades to monitor and control the reliability of systems. Xie et al. [1] introduced t and t_r control charts to monitor reliability data based on different statistical distributions. In the t control chart, the time interval between two successive failures is monitored, but in the t_r control chart, the time interval until reaching the r^{th} failure is monitored, which can make the chart more sensitive in quickly identifying the shift in the deterioration process. Shock models are one of the most widely used models in reliability analysis. In these models, the system may fail due to the arrival of several shocks according to the failure threshold designed for it. The shocks cause some damages and as a result, as soon as the damage exceeds its failure threshold (capacity), the system fails. TBE control chart is not

*Corresponding author: y.shamstabar@email.kntu.ac.ir

suitable for reliability monitoring of such systems. Ali and Pievatolo [2] introduced the first passage time (FPT) control chart.

In this research, the analytical design of the FPT control chart according to the cumulative shock model for monitoring the reliability of systems with random failure threshold has been discussed. For this purpose, by using PH distributions, an analytical solution for designing the FPT control chart is presented.

2. Model description

Consider a system that is subjected to random shocks and some damages are caused by these shocks. In the cumulative shock model, the system fails when the cumulative amount of damage caused by the shocks exceeds the failure threshold of the system. The cumulative shock model process for a system with a random failure threshold is shown in Figure 1. This system fails when the cumulative amount of damage caused by shocks exceeds the random failure threshold H . System lifetime (FPT) is equal to the time when for the first time the cumulative amount of damage caused by shocks exceeds the random failure threshold H .

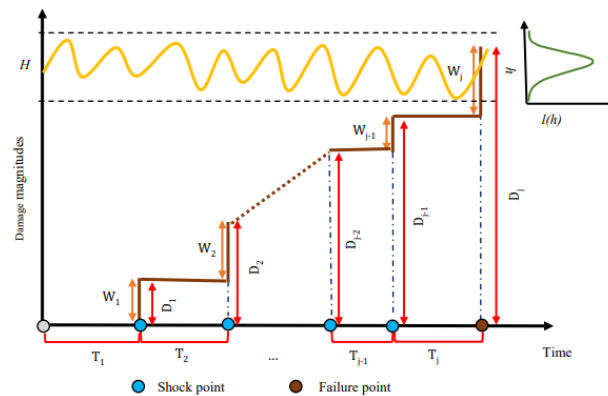


Figure 1. Process of a cumulative shock model with random failure threshold

3. Phase-type distribution

Let X be a nonnegative continuous random variable. This variable is associated with a finite Markov chain with an absorbing state. This variable follows the PH distribution, which is displayed as $PH(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{D})$. Matrix \mathbf{D} is a square matrix of order m , which contains the intensity of transition between transient states, and matrix $\boldsymbol{\pi}$ contains initial probabilities of transient states.

4. Control chart design using PH distribution

It is assumed that $\{T_j\}_{j \geq 1}$ follows $PH(\boldsymbol{\gamma}_j, \mathbf{T}_j)$ of order m_{T_j} . According to theorem 1, $S_k = \sum_{j=1}^k T_j$ has distribution $PH(\boldsymbol{\beta}_k, \mathbf{S}_k)$ of order $m_{T_1} + m_{T_2} + \dots + m_{T_k}$. Also, $\{W_j\}_{j \geq 1}$ have distribution $PH(\boldsymbol{\omega}_j, \mathbf{W}_j)$ of order m_{W_j} . According to theorem 1, $D_k = \sum_{j=1}^k W_j$ follows $PH(\boldsymbol{\pi}_k, \mathbf{D}_k)$ of order $m_{W_1} + m_{W_2} + \dots + m_{W_k}$. The random variable H follows the distribution $PH(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{H})$ with order m_H so that $\mathbf{h} = -\mathbf{H}\boldsymbol{\psi}$. One-sided control chart is considered for reliability monitoring.

5. Validation and evaluation of the proposed control chart

A numerical example is provided to validate and evaluate the proposed control chart by simulating a real situation. In this example, firstly, the design of the proposed FPT control chart according to the cumulative shock model is discussed, and then the performance of the proposed control chart is evaluated by *ARL* and *ATS* criteria. If it is necessary to fit the *PH* distribution in performing the calculations, the G-FIT algorithm [3] is used. The representation of the *PH* distribution of the T variable is as follows:

$$T_j \sim PH(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{T}), \boldsymbol{\tau} = (1), \mathbf{T} = [-0.1], \mathbf{t} = [0.1]$$

The distribution of the variable W is expressed by the *PH* distribution of the 7th order. The accuracy of its fitting compared to the real distribution is shown in Figure 2. The representation of the *PH* distribution of the variable W is as follows:

$$W_j \sim PH(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{W}), \boldsymbol{\omega} = (0.05, 0.35, 0, 0, 0.6, 0, 0),$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -0.04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

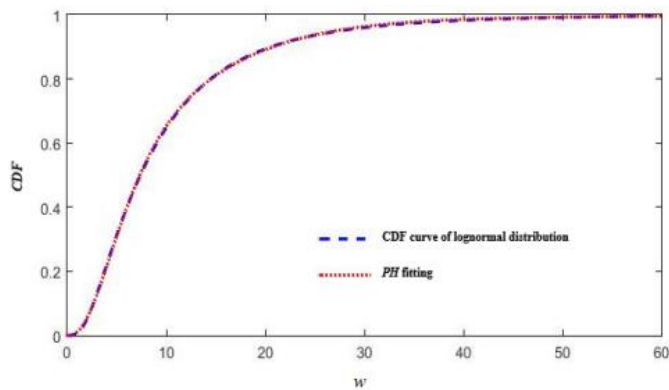


Figure 2. Comparison of the accuracy of the fitted *PH* distribution with the real lognormal distribution

The distribution of the variable H is expressed by the PH distribution of the 25th order. The accuracy of its fitting compared to the real distribution is shown in Figure 3. The representation of the PH distribution of the variable H is as follows:

$$H \sim PH(\psi, H),$$

$$\psi = [0.01, 0, 0.99, 0]_{1 \times 25}$$

$$H = \begin{bmatrix} -0.06 & -0.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -0.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4 & 0.4 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 0.4 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 \end{bmatrix}_{25 \times 25}$$

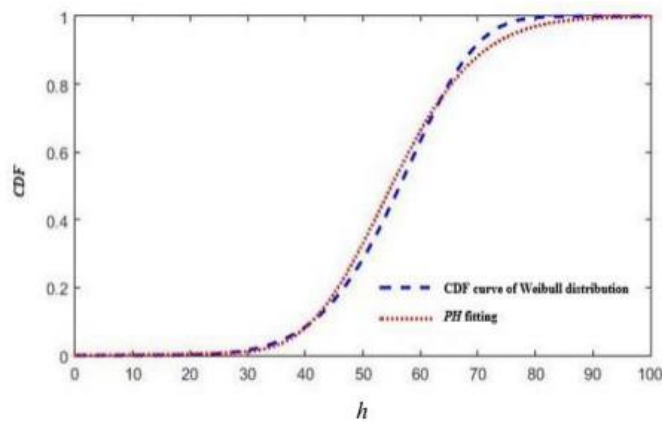


Figure 3. Comparison of the accuracy of the fitted PH distribution with the real Weibull distribution

The reliability of this system has been calculated using the proposed model for $\epsilon = 10^{-6}$ and also the Monte Carlo simulation method. Figure 4 shows the very close estimation of these two methods in computing system reliability.

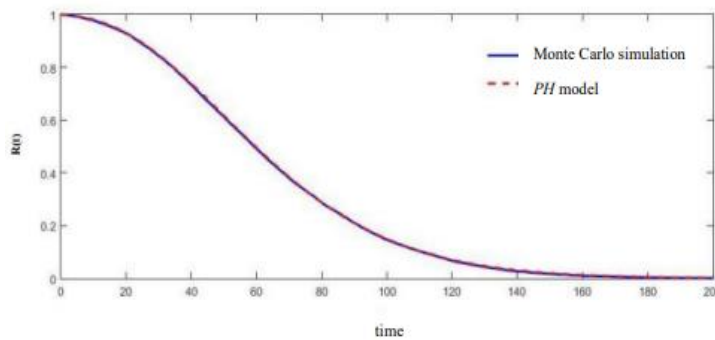


Figure 4. Comparison of reliability functions

Using the proposed model, the lower limit of one-sided FPT control chart has been computed for $\alpha = 0.0027$. According to Figure 5, the FPT chart has been able to detect the shift in the system failure process after plotting 3 points.

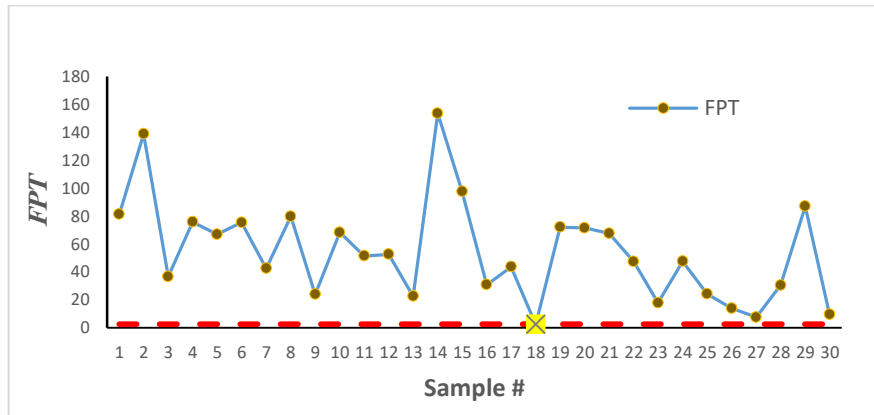


Figure 5. FPT control chart corresponding to the presented data of time between failures

The sensitivity analysis performed in this section shows the validity and proper performance of the proposed FPT control chart analytical model based on PH distribution, which has much less time and cost than Monte Carlo simulation. Especially in high-reliability systems, Monte-Carlo simulation needs to spend a lot of time and the number of execution times to reduce the variance of parameter estimation and improve the accuracy of calculating the lower limit of the control chart.

6. Conclusion

In this research, the control chart for reliability monitoring of systems with random failure threshold based on PH distribution according to cumulative shock model is presented. Monte Carlo simulation has also been used to validate the proposed model in calculating system reliability. Also, by using the criteria of average run length (ARL) and average time to out of control signal (ATS), the performance of the proposed control chart has been evaluated in identifying the shift in the deterioration process parameters. The results show that the use of PH distribution in solving the complicated model and computing the FPT in compare to Monte Carlo simulation is justified.

7. References

- [1] Xie, M., Goh, T. N. and Ranjan, P. (2002). Some effective control chart procedures for reliability monitoring. *Reliability Engineering & System Safety*, 77, PP. 143-150.
- [2] Ali, S. and Pievatolo, A. (2018). Time and magnitude monitoring based on the renewal reward process. *Reliability Engineering & System Safety*, 179, PP. 97-107.
- [3] Thummler, A., Buchholz, P., & Telek, M. (2006). A novel approach for phase-type fitting with the EM algorithm. *IEEE Transactions on dependable and secure computing*, 3, PP. 245-258.

