

طراحی آماری - اقتصادی دو هدفه‌ی نمودارهای کنترل \bar{X} با توزیع مکانیزم شکست پارتو

سلیمه سادات عقیلی

دانشجوی دکتری، گروه آمار، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران. aghili.asal61@gmail.com

محسن ترابیان*

(نویسنده مسئول) استادیار، گروه ریاضی، واحد قزوین، دانشگاه آزاد اسلامی، قزوین، ایران. torabianmohsen@gmail.com

محمدحسن بهزادی

دانشیار، گروه آمار، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران. behzadi@srbiau.ac.ir

اصغر سیف

دانشیار، گروه آمار، دانشکده ی علوم پایه، دانشگاه بوعلی سینا، همدان، ایران. erfan.seif@gmail.com

چکیده: نمودارهای کنترل در تجزیه و تحلیل و کنترل فرآیندهای تولید کاربرد زیادی دارند تا کیفیتی رضایت‌بخش، کافی، قابل اعتماد و اقتصادی تولید کنند. تعیین بهینه‌ی پارامترهای نمودار یک موضوع مهم برای مهندسين کیفیت جهت بهبود فرآیندها است. در این مقاله، طراحی آماری - اقتصادی نمودار کنترل \bar{X} تحت مدل شوک پارتو بر اساس طراحی دو هدفه ارائه شده، که در آن با اعمال محدودیت بر خطای نوع اول، هزینه به‌عنوان هدف اقتصادی و خطای نوع دوم به‌عنوان هدف آماری در نظر گرفته شده و سپس بر اساس جبهه‌ی پارتو، جواب‌های بهینه انتخاب شده‌است. در نهایت از طریق یک مثال کاربردی، مزایای رویکرد پیشنهادی با تهیه فهرستی از راه‌حل‌های بهینه و نمایش‌های گرافیکی نشان داده شده‌است.

کلمات کلیدی: طراحی آماری - اقتصادی، نمودار کنترل \bar{X} ، طراحی دوهدفه، توزیع پارتو

پهنای حدود کنترل به گونه ای انتخاب می‌شوند که خطای نوع اول و توان نمودار، کران‌های مشخصی داشته باشند. این روش معمولاً پیامدهای اقتصادی به همراه داشت. بنابراین، طراحی اقتصادی (ED)^۲ نمودارهای کنترل به‌وسیله‌ی دانکن [۱] معرفی شد و به طور وسیعی توسط افراد دیگر مورد استفاده قرار گرفت. در این روش، پارامترهای طراحی به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که مقدار مورد انتظار هزینه در واحد زمان چرخه‌ی تولید کمینه شود. سانیکا [۲] با تلفیق پارامترهای اقتصادی با ملزومات آماری، طراحی آماری - اقتصادی را معرفی کرد. پارامترهای طراحی علاوه بر نوع طرح، به توزیع ساز و کار شکست فرآیند (مدل شوک) نیز

۱- مقدمه^۱

نمودارهای کنترل مهم‌ترین ابزار در کنترل آماری فرآیند هستند. برای استفاده از هر نمودار کنترل، پارامترهای طراحی یعنی اندازه ی نمونه (n)، فاصله‌ی نمونه‌گیری (h) و پهنای حدود کنترل (L) بایستی مشخص شود. انتخاب این پارامترها، طراحی نمودار کنترل نامیده می‌شود. در گذشته، اغلب نمودارهای کنترل تنها بر اساس محدودیت‌های آماری طراحی می‌شدند. در این روش که به طراحی آماری مشهور است، اندازه‌ی نمونه، فاصله‌ی نمونه‌گیری و

^۱ تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۶/۱۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۰/۰۴

^۲ Economic Design

*Corresponding author : torabianmohsen@gmail.com

دوره ۱۲/ شماره ۱

صفحات ۸۷-۱۰۲

از واحدها تضمین می‌شود و پس از تکمیل تعداد مشخص شده‌ای برش، فرآیند از کنترل خارج می‌شود. در این فرایندها نیاز به توزیعی است که انعطاف پذیر باشد. سعادت و همکاران [۶] از توزیع بر ۱۲ به‌عنوان یک توزیع انعطاف پذیر استفاده کردند. یکی دیگر از توزیع‌های احتمالی که با این ویژگی قابل انطباق است، توزیع پارتو است. توزیع پارتو همچنین یک توزیع زمان انتظار را مشخص می‌کند. اگرچه توزیع پارتو به طور گسترده در بسیاری از فرآیندهای تولید مورد استفاده قرار می‌گیرد، این واقعیت که زمان‌های تحت کنترل از توزیع پارتو پیروی می‌کنند به ندرت در طراحی نمودار کنترل استفاده می‌شود. طراحی آماری- اقتصادی نمودارهای کنترل \bar{X} تحت مدل‌های شوک پارتو توسط کرالتی و همکارانش [۷] معرفی شد.

طرح‌های آماری- اقتصادی فوق همگی در دسته‌ی طرح‌های تک‌هدفی نمودارهای کنترل قرار می‌گیرند، یعنی برای میانگین هزینه فقط یک مقدار بهینه به دست می‌آید. به عبارتی نمودارهای کنترل تک‌هدفی انعطاف‌پذیر نیستند. عدم انعطاف‌پذیری کامل، یکی از مشکلات عمده‌ی طراحی تک‌هدفی نمودارهای کنترل را برطرف و طراحی دوهدفی را پیشنهاد کردند. در این نوع طراحی، مجموعه‌ای از طرح‌های بهینه به دست می‌آید و بنابراین، می‌توان متناسب با الزامات زمانی یا موقعیت صنعتی خاص هر کدام از آن‌ها را انتخاب کرد. آن‌ها نشان دادند که روش پیشنهادی دارای مزایای انعطاف پذیری و در نتیجه سازگاری بیشتری در مقایسه با ESD^۳های سنتی است و در عین حال، نقاط قوت آماری و بهینه بودن اقتصادی طرح‌های سنتی را حفظ می‌کند. سیف [۹] و [۱۰] با توسعه‌ی نظریه‌ی سانیکا یک طرح آماری- اقتصادی دو هدفی با فواصل نمونه‌گیری متغیر چندگانه (MVS^۴) و نمودار کنترل VSST^۲ با میانگین زمان تنظیم شده برای ارسال سیگنال (AATS)^۵ به‌عنوان هدف آماری و هزینه‌ی مورد انتظار در ساعت را به‌عنوان هدف اقتصادی، مورد بررسی قرار داد. در ادامه خلاصه‌ای از ادبیات موضوع در جدول ۱ ارائه شده است.

وابسته هستند. تعیین ماهیت یا جابه‌جایی از حالت تحت کنترل به حالت خارج از کنترل هم نیاز به پیش‌فرض‌های خاصی دارد. در ابتدا معمولاً فرض می‌شود انحراف با دلیل در طول یک فاصله‌ی زمانی بر اساس یک فرآیند پواسون با میانگین λ مشاهده در ساعت ایجاد می‌شود. چنین فرضی طراحی مدل‌های اقتصادی را به میزان قابل ملاحظه‌ای ساده‌تر می‌سازد. تاکنون توزیع‌های گاما و وایبول به‌عنوان رایج‌ترین توزیع‌ها برای تحلیل سازوکار شکست یک فرآیند تولیدی به کار برده شده است. این توزیع‌ها دارای خاصیت‌های مطلوب و تعبیرهای فیزیکی خوبی هستند، ولی متأسفانه هر دو این توزیع‌ها دارای ایراداتی هستند. با در نظر گرفتن رویکرد دانکن، هو [۳] طرح اقتصادی از نمودار کنترل \bar{X} را تحت یک تغییر فرآیند در حالتی که توزیع مکانیزم شکست پواسون نباشد، ارائه کرد. از مفروضاتی که وی به کار برد، اول مکانیزم شکست فرآیند از یک مدل وایبول پیروی می‌کند و دوم فرضی که بر اساس آن طول فواصل نمونه‌گیری در طول دوره‌ی تولید ثابت است. بعد از آن بنرجی و رحیم [۴] با در نظر گرفتن طرح نمونه‌گیری غیریکنواخت برای سیستم‌های دارای مدل شوک وایبول توانستند هزینه‌ها را کاهش دهند.

الاورینی و رحیم [۵] یک طرح آماری- اقتصادی از نمودار کنترل \bar{X} با این فرض که زمان کنترل از توزیع گاما $(\lambda, 2)$ پیروی می‌کند، ارائه کرده‌اند. در تمامی این مقالات مشاهده می‌شود که برای طراحی اقتصادی نمودار کنترل \bar{X} زمان تحت کنترل (زمان انتظار تا وقوع اولین انحراف با دلیل تصادفی در نظر گرفته شده است و از یک توزیع احتمال خاص مانند توزیع نمایی، وایبول یا گاما پیروی می‌کند. با این حال، در بسیاری از موقعیت‌های عملی که در صنایعی مانند صنایع شیمیایی و صنایع کود به وجود می‌آیند، زمان‌های کنترل فرآیند، محدودیت خاصی دارند. یعنی شکست فرآیند پس از یک دوره‌ی زمانی مشخص رخ می‌دهد. به‌عنوان مثال، در صنعت ظروف شیشه‌ای، یکی از فرآیندهای مهم ساخت، برش شیشه بخارپز در واحدهای مشخص شده است. این فرآیند برش بر اساس تیزی تیغه کار می‌کند. تیزی تیغه معمولاً برای برش تعداد مشخصی

⁵ Adjusted Average Time to Signal

³ Economic Statistical Design

⁴ Multiple Variable Sampling Intervals

جدول ۱: خلاصه‌ی ادبیات موضوع

هدف (ها)	توزیع مشخصه کیفی	نوع طرح	توزیع مکانیزم شکست فرآیند	نویسنده(ها) و سال ارائه
هزینه	نرمال	اقتصادی	نمایی	دانکن [۲]
هزینه	نرمال	اقتصادی	نمایی	لورنزن و وانس [۱۲]
هزینه	نرمال	اقتصادی	وایبول	بنرجی و رحیم [۵]
هزینه	نرمال	آماری-اقتصادی	گاما	الاورینی و رحیم [۱۳]
هزینه	بر	آماری-اقتصادی	وایبول	چن و چنگ [۱۴]
هزینه	بر	آماری-اقتصادی	گاما	چن و یه [۱۵]
هزینه	نرمال	آماری-اقتصادی	پارتو	کراتلی و همکاران [۸]
هزینه	جانسون	آماری-اقتصادی	پارتو	رائو و همکاران [۱۶]
هزینه و ARL_1	نرمال	آماری-اقتصادی	نمایی	صفایی و همکاران [۱۷]
هزینه و ATS	نرمال	آماری-اقتصادی	نمایی	درودیان [۱۸]
هزینه	بر	آماری-اقتصادی	نمایی	سیف و همکاران [۱۰]
هزینه	نرمال	آماری-اقتصادی	بر	حیدری و همکاران [۱۹]
هزینه	نرمال	آماری-اقتصادی	بر	سعادت و همکاران [۷]
هزینه	نرمال	آماری-اقتصادی	وایبول	نادری و همکاران [۲۰]
هزینه و β	نرمال	آماری-اقتصادی	پارتو	این مقاله

ارائه شده توسط لورنزن و وانس [۱۱] و پارامترهای مربوط معرفی می‌شود. بخش چهارم به طراحی دو هدفه‌ی نمودار کنترل می‌پردازد. یک مثال کاربردی و برخی مقایسه‌ها در بخش پنجم ارائه شده است و در نهایت، نتایج کلی در بخش پایانی گزارش شده است.

۲- مروری بر طراحی آماری-اقتصادی تک‌هدفه تحت شوک مدل پارتو

۲-۱- فرضیه‌ها

اولین بار نیلوفر نیل و همکاران [۷] طرح آماری-اقتصادی نمودار کنترل \bar{X} را با این فرض که مشخصه‌ی کیفیت از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 پیروی می‌کند و زمان‌های تحت کنترل فرآیند، تصادفی هستند و از توزیع پارتو با تابع چگالی احتمال به شکل زیر پیروی می‌کنند ارائه کردند.

$$f(t) = \{c \cdot \theta^c \cdot t^{-(c+1)}\} \quad (1)$$

$$, (\theta > 0, c > 0, t \geq 0)$$

تابع توزیع تجمعی توزیع پارتو به صورت زیر است:

$$F(t) = \left\{ 1 - \left(\frac{\theta}{t} \right)^c \right\}, \quad (2)$$

$$(\theta > 0, c > 0, t \geq 0)$$

که در آن t زمان تحت کنترل، θ پارامتر توزیع پارتو و c پارامتر شکل است. هدف از طراحی، به حداقل رساندن هزینه‌ی مورد انتظار در واحد زمان با در نظر گرفتن سطحی ثابت برای خطاهای نوع I و II است. هزینه‌ی مورد انتظار هر ساعت برابر است با نسبت هزینه‌ی مورد انتظار چرخه به زمان مورد انتظار که هر چرخه به پایان می‌رسد. پارامترهای طراحی بهینه برای طراحی نمودار کنترل \bar{X} ، یعنی حجم نمونه (n) و فاصله نمونه‌گیری (h) با به حداقل رساندن هزینه‌ی مورد انتظار در واحد زمان به دست می‌آیند. این نسخه‌ی اصلاح شده با مفروضات زیر در این مقاله در نظر گرفته شده است:

۱. چرخه‌ی تولید به‌عنوان زمان بین شروع دوره‌های متوالی تحت کنترل تعریف می‌شود. تکنیک نمودار کنترل معمولاً شامل نمونه‌گیری n مشاهده از خروجی فرآیند در هر ساعت است. جستجو برای یک انحراف با دلیل در صورتی انجام می‌شود که اندازه‌گیری فرآیند محاسبه شده (مثلاً میانگین

در این مقاله طراحی آماری-اقتصادی نمودارهای کنترل \bar{X} تحت مدل شوک غیرنمایی پارتو، بر اساس طراحی دو هدفه ارائه می‌شود. سپس فرمول‌هایی را بر اساس طراحی دو هدفه ارائه و اثبات شده که در آن هزینه به‌عنوان یک عامل اقتصادی و خطای نوع دوم به‌عنوان یک عامل آماری در نظر گرفته می‌شود و در نهایت نتایج در حالت‌های تک‌هدفه و دو هدفه مورد مقایسه قرار می‌گیرند.

ساختار کلی این مقاله به شرح زیر است: در بخش دوم، طراحی آماری-اقتصادی نمودارهای کنترل \bar{X} تحت مدل شوک پارتو به طور خلاصه مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش سوم، مدل هزینه‌ی

- E: زمان نمونه‌گیری برای یک مشاهده‌ی مورد انتظار.
 - δ_1 : متغیر شاخص برای نشان دادن ادامه یا عدم ادامه‌ی تولید در طول انحراف با دلیل است. $\delta_1 = 1$ چنانچه طی جستجو برای یافتن انحراف با دلیل فرآیند ادامه یابد و در غیر این صورت برابر با صفر است.
 - δ_2 : متغیر شاخص برای نشان دادن ادامه یا عدم ادامه تولید در طول انحراف با دلیل است. $\delta_2 = 1$ چنانچه طی تصحیح و تعمیر انحراف با دلیل تولید ادامه یابد و در غیر این صورت برابر با صفر است.
 - T: متوسط زمان صرف شده برای بررسی یک هشدار اشتباه.
 - T_1 : زمان مورد انتظار برای کشف انحراف با دلیل.
 - T_2 : زمان مورد انتظار برای برطرف کردن انحراف با دلیل.
 - a: هزینه‌ی ثابت نمونه‌گیری.
 - b: هزینه‌ی متغیر نمونه‌گیری.
 - C: هزینه‌ی تولید محصول نامنطبق تا زمانی که فرآیند تحت کنترل است.
 - C_1 : هزینه‌ی تولید محصول نامنطبق زمانی که فرآیند خارج از کنترل است.
 - C_2 : هزینه‌ی بررسی هشدار اشتباه.
 - W: هزینه‌ی تعیین محل، تعمیر و اصلاح انحراف با دلیل.
 - α : احتمال این‌که مشاهده خارج از حدود کنترل قرار گیرد در حالی که فرآیند تحت کنترل است.
 - β : احتمال این‌که مشاهده داخل حدود کنترل قرار گیرد در حالی که فرآیند خارج از کنترل است.
 - $E(C)$: هزینه‌ی مورد انتظار هر چرخه.
 - $E(T)$: زمان مورد انتظار هر چرخه.
- نمونه) از حدود کنترل خاصی فراتر رود. این حدود کنترل را می‌توان بر حسب $\pm L$ ، یعنی تعداد انحرافات استاندارد بالا یا پایین خط مرکزی فرآیند مشخص کرد.
۲. هنگامی که فرآیند از کنترل خارج می‌شود، انحراف به‌عنوان یک حالت شناخته شده (به دلیل یک انحراف با دلیل) فرض می‌شود که بدون مداخله به حالت تحت کنترل باز نمی‌گردد. مداخله مستلزم جستجو برای یک علت قابل تعیین و ترمیم آن است.
۳. هزینه‌ها شامل هزینه‌ی جمع آوری نمونه، هزینه‌ی کشف انحراف با دلیل و هزینه‌ی تعمیر است. این هزینه‌ها مشخص و برآورد شده است.
۴. هنگامی که میانگین فرآیند به $\mu - \delta\sigma$ یا $\mu + \delta\sigma$ به دلیل وقوع یک انحراف با دلیل تغییر می‌کند، سیستم خارج از کنترل فراخوانی می‌شود، که در آن δ پارامتر تغییر نامیده می‌شود.
۵. فرض بر این است که زمانی که فرآیند تحت کنترل قرار دارد، از توزیع پارتو با پارامتر θ و پارامتر شکل C پیروی می‌کند. دلیل این فرض این است که برای هر فرآیند، حداقل زمان برای خارج شدن فرآیند از حالت تحت کنترل در نظر گرفته می‌شود و همچنین زمانی که فرآیند عملیاتی می‌شود، تحت شرایط و عوامل تصادفی مختلف مانند سایش ابزار، کیفیت ورودی، مواد اولیه‌ی معیوب، راندمان اپراتور و غیره متفاوت است.
۶. فرض بر این است که با در نظر گرفتن سطحی ثابت برای خطای نوع I یعنی α و خطای نوع II یعنی β ، پارامترهای طراحی به گونه‌ای برآورد شوند که هزینه کمینه شود.
۷. ارزش زمانی پول در دوره‌ی بررسی ثابت در نظر گرفته می‌شود.
۸. فرآیند در حین تشخیص و تعمیر انحراف با دلیل ادامه می‌یابد و متوقف نمی‌شود.

۳- تابع هزینه

۲-۲- نمادها

در این مقاله از مدل هزینه‌ی لورنزن و وانس [۱۱] استفاده شده است. فرض بر این است که فرآیند تولید در یک حالت تحت کنترل شروع می‌شود. به منظور تشخیص تغییر در میانگین فرآیند، نمونه‌ای به حجم n ، از مشخصه‌های کیفی مستقل X_1, X_2, X_3

در این مقاله از نمادهای زیر که توسط نیلوفر نیل و همکارانش [۷] ارائه شده، استفاده می‌کنیم:

- n : حجم نمونه.

۴- طراحی آماری- اقتصادی دو هدفی نمودار کنترل \bar{X}

نمودارهای کنترلی ابزارهای اولیه کنترل فرآیندهای آماری هستند. این نمودارها ممکن است با استفاده از یک قانون ساده پیشنهاد شده توسط شوهارت [۲۰]، یک معیار آماری، یک معیار اقتصادی یا یک معیار آماری- اقتصادی مشترک طراحی شوند. هر روشی نقاط قوت و ضعف خود را دارد. یکی از ضعف‌های روش‌های طراحی ذکر شده، عدم انعطاف‌پذیری و سازگاری آن‌ها است که هدف اصلی مدل‌های ریاضی عملی است. فراز و سانیکا [۸] مدل‌های چندهدفه را به‌عنوان جایگزینی برای روش‌های ذکر شده بررسی کردند. روش آن‌ها مجموعه‌ای از راه‌حل‌های بهینه را به جای یک راه‌حل بهینهی واحد ارائه می‌کند و بنابراین به کاربر اجازه می‌دهد تا راه‌حل خود را با الزامات زمانی یک موقعیت صنعتی خاص تنظیم کند. سه معیار مهم برای طراحی نمودار کنترل عموماً α ، $AATS$ یا β و $E(A)$ هستند. با کوچک نگه داشتن α ، یک مدیر می‌تواند جستجوهای نادرست و تنظیمات نادرست فرآیند احتمالی را به حداقل برساند یا به عبارت دیگر نرخ هشدار اشتباه را کاهش دهد و بنابراین از پذیرش رفتاری یک فرآیند کنترل اطمینان حاصل کند. به روشی مشابه، کوچک نگه داشتن $AATS$ یا β تضمین می‌کند که انحراف با دلیل به سرعت شناسایی و اصلاح می‌شوند، بنابراین خاصیت حفظ محصولات یا خدمات با کیفیت بالا را دارد. علاوه بر این، حفظ هزینه یا $E(A)$ ، تا حد امکان کوچک، هدفی است که باید در محیط رقابتی امروزی برآورده شود تا اهداف اقتصادی صنعتگر را برآورده سازد. طراحی‌های آماری- اقتصادی سنتی رویکردی است که تمام معیارهای ذکر شده قبلی را در نظر می‌گیرد و تنها نقص نظری آن انعطاف‌پذیری و سازگاری است. بدین صورت که به دنبال کمینه کردن یک پارامتر اقتصادی هستیم که تنها یک پارامتر آماری در محدوده مورد نظر قرار گیرد. به این معنی که برای صنعتگر تنها یک انتخاب وجود دارد که فقط بر اساس کمینه‌ی هزینه، پارامترهای بهینه را انتخاب کند. یک رویکرد برای هدف بهبود انعطاف‌پذیری و سازگاری، ارائه راه‌حلی به تحلیل‌گر است که مبادلات بین دو معیار آماری و معیار اقتصادی را در نظر می‌گیرد. یک راه برای دستیابی به این هدف، مدل‌سازی مسئله به روشی چندهدفه است، که در آن به دنبال کمینه کردن یک پارامتر

جلد ۱۲- شماره ۱- بهار ۱۴۰۱

،...، X_n (که از توزیع نرمال پیروی می‌کنند) در فواصل زمانی h گرفته می‌شود.

برای مشاهدات مستقل، احتمال خطاهای نوع I و نوع II، α و β به شرح زیر است:

$$\alpha = 2\Phi(-L) \quad (۳)$$

$$\beta = \Phi(L - \delta\sqrt{n}) - \Phi(-L - \delta\sqrt{n}) \quad (۴)$$

که در آن Φ تابع توزیع تجمعی توزیع نرمال استاندارد است. برای تشخیص این‌که فرآیند تحت کنترل است یا خارج از حدود کنترل قرار دارد از نمودار کنترل \bar{X} استفاده می‌کنیم. پارامترهای طراحی n و h و L به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که هزینه مورد انتظار در زمان، یعنی $\frac{E(C)}{E(T)}$ کمینه شود.

چرخه‌ی کیفی در فرآیند به چهار مرحله‌ی زیر تقسیم می‌شود:

- زمان تحت کنترل.
 - زمان خارج از کنترل تا صدور هشدار.
 - زمان تشخیص، بررسی و تفسیر نمونه خارج از کنترل.
 - زمان بررسی و حذف انحرافات با دلیل.
- بنابراین، طول و هزینه‌ی مورد انتظار یک چرخه‌ی تولید با استفاده از رابطه‌های زیر محاسبه می‌شود:

$$E(T) = \left\{ (1 - \delta_1) \cdot T_1 \cdot S \cdot \alpha + \left(S + \frac{1}{(1 - \beta)} \right) \cdot h + nE + T_1 + T_2 \right\} \quad (۵)$$

$$E(C) = C_1 \cdot \left(\frac{c - \theta}{c - 1} \right) + C_2 \cdot \left\{ \left(S + \frac{1}{(1 - \beta)} \right) \cdot h - \left(\frac{c - \theta}{c - 1} \right) + nE + \delta_1 T_1 + \delta_2 T_2 \right\} + C_3 \cdot S \cdot \alpha + \frac{(a + b \cdot n)}{h} \quad (۶)$$

$$\left\{ \left(S + \frac{1}{(1 - \beta)} \right) \cdot h + nE + \delta_1 \cdot T_1 \right\} + W + \delta_2 \cdot T_2$$

در این نوع فرآیند تجدید پاداش می‌توان هزینه‌ی مورد انتظار در واحد زمان را به‌صورت نسبت هزینه‌ی مورد انتظار در هر چرخه‌ی تولید به طول مورد انتظار چرخه‌ی تولید بیان کرد. تابع هزینه‌ی مورد انتظار در ساعت با

$$E(A) = \frac{E(C)}{E(T)} \quad (۷)$$

تعریف می‌شود.

روشنی نسبت به دو هدف دیگر ندارد. بنابراین، می‌توان طراحی آماری- اقتصادی نمودارهای کنترلی \bar{X} را با مسئله‌ی بهینه‌سازی چند هدفی زیر مدل‌سازی کرد:

$$\begin{aligned} \text{Min}(E(A); \beta) \quad \text{s.t. :} \\ \alpha \leq \alpha, \quad 0.01 < h < h_{max} \end{aligned} \quad (۸)$$

در طراحی دو هدفی فوق، قید $\alpha \leq \alpha$ اضافه می‌شود تا بهترین محافظت در برابر هشدارهای اشتباه ایجاد شود. در این مقاله بدون از دست دادن کلیت، از مقدار $\alpha = 0.01$ استفاده می‌شود. پارامتر h_{max} برای پایان یک شیفت کاری در نظر گرفته شده است. به طور خاص، ما از مقادیر $h_{max} = 8$ برای حذف ساعت‌های دیگری که ممکن است در یک شیفت کاری مشکل‌ساز باشند، استفاده می‌کنیم.

الگوریتم ژنتیک (GA)^۶ چند هدفی یک راه حل برای مسئله‌ی بهینه‌سازی (معادله ۸) که با بردار تصمیم $\vec{x} = (n, h, L)$ شرح داده می‌شود، فراهم می‌کند. توابع هدف معادله‌ی ۴ و معادله‌ی ۷، یک تابع f تعریف می‌کند که یک بردار هدف $\vec{Y} = (E(A), \beta)$ را در فضای هدف Y به هر بردار \vec{x} اختصاص می‌دهد. یعنی f یک نگاشت به شکل $f: X \rightarrow Y$ است. فرض کنید \vec{x}_1 و \vec{x}_2 دو راه حل دلخواه و قابل اجرا در X هستند. تعاریف برتری و بهینه‌ی پارتو به شرح زیر است:

- \vec{x}_1 بر \vec{x}_2 غالب است اگر دو مولفه‌ی $f(\vec{x}_1) = \vec{y}_1$ کمتر یا مساوی مولفه‌های متناظرش در $f(\vec{x}_2) = \vec{y}_2$ باشد.
- بردار \vec{x} به‌عنوان حدود غالب در X در نظر گرفته می‌شود اگر هیچ مولفه‌ی دیگری در X بر \vec{x} غالب نشود.

کران محدودیت شامل تمام راه‌حل‌های بهینه‌ی غیر محدود برای مسئله است. مجموعه‌ای از این راه‌حل‌ها مجموعه‌ی پارتو نام دارند در حالی که تصویر آن در فضای عینی جبهه‌ی پارتو نام دارد. مسئله بهینه‌سازی، جواب‌های بدست آمده که با هدف اصلی مطابقت بیشتری دارد را انتخاب می‌کند.

الگوریتم‌های ژنتیک روش‌های نیمه تصادفی هستند که بر اساس قوانین داروین بیان شده‌اند. اولین الگوریتم ژنتیک چندهدفی (MOGA)^۷ به نام GA ارزیابی شده بردار یا (VEGA)^۸ توسط

اقتصادی و یک پارامتر آماری هستیم. فراز و سانیکا [۸] چنین رویکردی را ارائه کردند که آن را *MOESD* نامیدند. انواع مختلفی از فرمولاسیون *MOESD* وجود دارد. در این پژوهش، مدلی را در نظر می‌گیریم که در آن می‌خواهیم $E(A)$ و β را در حین رسیدن به یک هدف از پیش تعیین‌شده در سطح α بهینه کنیم. به عبارت دیگر با ایجاد محدودیت بر خطای نوع اول، هزینه‌ها و خطای نوع دوم کاهش یابد یعنی هزینه‌ها کاهش و توان بالا رود. کاهش همزمان خطای نوع دوم و هزینه‌ها امکان‌پذیر نیست چون با کم شدن خطای نوع دوم هزینه‌ها افزایش و با بیشتر شدن خطای نوع دوم هزینه‌ها کاهش می‌یابند. یک راه‌حل معقول برای *MOESD* بررسی مجموعه‌ای از راه‌حل‌های بهینه‌ی پارتو است که هر یک از آنها اهداف را در سطح قابل قبولی برآورده می‌کنند، بدون اینکه توسط هیچ راه‌حل دیگری تحت سلطه قرار گیرند. مزیت اصلی یافتن مجموعه‌ای از راه‌حل‌های بهینه‌ی پارتو این است که مجموعه‌ای از راه‌حل‌های بهینه را در اختیار تحلیل‌گر قرار می‌دهد که در آن تحلیل‌گر می‌تواند تصمیم بگیرد که بهترین گزینه برای استفاده از یک فرآیند صنعتی معین کدام است. بنابراین راه‌حل را با الزامات زمانی خاص تنظیم می‌کند. انتخاب تحلیل‌گر به چیزهای زیادی بستگی دارد، از جمله حداکثر اندازه نمونه که می‌توان برای نظارت بر فرآیند استفاده کرد، فواصل نمونه‌گیری قابل استفاده، توان و هزینه‌ی بهینه. این موضوع انعطاف‌پذیر بودن بر اساس طراحی دو هدفی را بیان می‌کند که مزیت طراحی دوهدفی در مقابل طراحی تک‌هدفی را نشان می‌دهد. چون در طراحی تک‌هدفی که تنها بر اساس کمینه‌کردن هزینه صورت می‌گیرد، چنین انتخابی وجود ندارد.

در این مقاله، یک طرح آماری- اقتصادی دو هدفی با هدف آماری β و هدف اقتصادی هزینه مورد انتظار در ساعت در نظر گرفته شده است. این رویکرد راه‌حلی را در اختیار صنعت‌گر قرار می‌دهد که در آن مبادلات بین اهداف آماری و اقتصادی را در نظر می‌گیرد. بردار روبه‌رو را در نظر بگیرید $\vec{x} = (n, h, L)$ که در آن n حجم نمونه، L حد کنترل، و h طول بازه‌ی نمونه‌گیری است. معمولاً α برای تحلیل‌گران تا حدودی ثابت است، اما اولویت نسبی

^۸Vector Evaluated Genetic Algorithm

^۶ Genetic Algorithm

^۷ Multi-Objective Genetic Algorithm

گرفته می‌شود. ویژگی کیفی این محصول از طریق غلظت اسید فسفریک بر حسب درصد وزنی اندازه گیری می‌شود.

سازنده از نمودار \bar{X} برای نظارت بر فرآیند استفاده می‌کند. بر اساس تجزیه و تحلیل حقوق تکنسین‌های کنترل کیفیت، هزینه‌ی تجهیزات آزمایش و غیره، تخمین زده می‌شود، که هزینه‌ی ثابت نمونه‌گیری $a = 0.5 Rs$ ، هزینه‌ی متغیر تخمینی نمونه‌گیری $b = 0.1 Rs$ ، هزینه‌ی ساعتی تقریبی ناشی از عدم انطباق‌های تولید شده در زمانی که فرآیند تحت کنترل قرار دارد، $C_1 = 10 Rs$ و هزینه‌ی تقریبی ساعتی ناشی از عدم انطباق‌های تولید شده در زمانی که فرآیند خارج از کنترل قرار دارد، $C_2 = 20 Rs$ است. هزینه‌ی هشدار اشتباه $C_3 = 50 Rs$ و هزینه‌ی مکان‌یابی و تعمیر انحراف با دلیل که فرآیند را از کنترل خارج می‌کند $W = 200 Rs$ است. زمان مورد انتظار برای جستجوی یک انحراف با دلیل به دلیل هشدار اشتباه $T_1 = 1$ ساعت است. زمان مورد انتظار برای شناسایی انحراف با دلیل $T_2 = 2$ ساعت، زمان مورد انتظار برای تعمیر سیستم $T_3 = 1$ ساعت و زمان مورد انتظار برای گرفتن یک مشاهده‌ی نمونه $E = 3$ دقیقه (۰.۰۵ ساعت) است. از سوابق سازنده، غلظت اسید فسفریک در کود از توزیع نرمال پیروی می‌کند با احتمال این که X در زمانی که فرآیند تحت کنترل است خارج از محدوده‌ی کنترل قرار می‌گیرد $\alpha \leq 0.01$ و احتمال اینکه X در محدوده‌ی کنترل قرار می‌گیرد، هنگامی که خارج از کنترل است $\beta = 0.1$ است. تخصیص مقادیر به پارامترهای توزیع پارتو در زمان‌های کنترل، داده‌های آن‌ها از سوابق سازنده با توجه به زمان‌های کنترل فرآیند جمع‌آوری شده است. با استفاده از روش ماکزیمم درست‌نمایی برای برآورد پارامترها، مقدار بهینه‌ی پارامترهای توزیع پارتو $C = 2$ و $\theta = 5$ به دست آمده است.

مزیت طراحی آماری-اقتصادی دو هدفه در این مثال آشکار است. این روش با ارائه مجموعه‌ای از طرح‌های بهینه با هزینه و β متناظر، به کاربران کمک می‌کند تا طرح‌ها را با الزامات زمانی فرآیند صنعتی تطبیق دهند و در نتیجه از مزیت انعطاف‌پذیری و سازگاری برخوردار باشند. همان‌گونه که در این مثال کاربردی دیده می‌شود ابتدا طراحی تک‌هدفه انجام شده و به ازای مقادیر مشخص شده بالا و به ازای مقدار ثابت $\beta = 0.1$ تنها یک مقدار بهینه برای هزینه به دست می‌آید که برابر $26/41$ است. در حالی که به ازای همین مقادیر با مقدار دلتا برابر 0.75 (یعنی سطر اول جدول ۲) در

شافر پیشنهاد شد. MOGA یک روش کارآمد چند هدفه است که برای شناسایی مجموعه بهینه‌ی پارتو انتخاب شده است (سیف، [۱۰]). رویکرد MOGA در ادبیات اخیر مورد توجه زیادی قرار گرفته است. کوناک، کویت و اسمیت [۲۱] با تمرکز بر مؤلفه‌های آن‌ها و مسائل برجسته‌ای که هنگام اجرای MOGA با آن مواجه شدند، مروری بر ادبیات بزرگ متشکل از ۶۵ مرجع در رویکردهای MOGA ارائه کردند. آن‌ها همچنین لیستی از تمام روش‌های شناخته شده‌ی MOGA با مزایا و معایب آن‌ها را ارائه دادند. جعبه ابزار MATLAB GA تابع بهینه‌سازی MOGA به نام Gamultiobj را در اختیار کاربران قرار می‌دهد. استراتژی MOGA راه حل‌های گسترده‌ای را در مجموعه بهینه‌ی پارتو پیدا می‌کند. این یکی از محبوب‌ترین الگوریتم‌های تکاملی چندهدفه است که به دلیل ظرفیتش در ارتقای کیفیت الگوریتم‌های راه‌حل‌ها با جستجوی مقادیر مختلف متغیرهای تصمیم‌گیری و استفاده از توابع جریمه یا مانع مناسب که می‌توانند به بهترین راه‌حل‌ها همگرا شوند، شناخته شده است.

برای حل مسئله بهینه‌سازی، الگوریتم MOGA را به کار می‌بریم. بدین منظور مقادیر مهم‌ترین پارامترهای GA باید از قبل تعیین شود. این پارامترها شامل تعداد اندازه جمعیت (NPOP)، نرخ متقاطع (r_C) و نرخ کسری (r_F) است. مقادیر ذکر شده در بالا پس از انجام یک طرح فاکتوریل برای مطالعه طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترل \bar{X} پیشنهاد شده است. در این مقاله، $NPOP=1000$ و $r_F = 0.3$ و $r_C = 0.6$ را برای اعمال روش GA در نظر گرفته‌ایم.

۵- کاربردی از مدل

۵-۱- یک مثال کاربردی

برای نشان دادن کاربرد نمودار کنترل \bar{X} دو هدفه، تجزیه و تحلیل عددی انجام شده است. ما یک مثال که توسط نیلوفر نیل و همکاران [۷] استفاده شده است را در نظر می‌گیریم. گیاه کودی تولید کننده‌ی اوره با اسید فسفریک به‌عنوان یک محصول میانی مهم که کیفیت آن تأثیر مستقیمی بر کیفیت محصول نهایی دارد، در نظر

می‌ماند، برنامه به ازای $\delta = 1.25$ (سطر سوم جدول ۲) نیز اجرا شد. در این حالت نیز ۱۷۵ مقدار بهینه به دست آمد. از بین جواب‌های به دست آمده ۲۴ جواب انتخاب و نتایج در جدول ۴ نشان داده شده است.

همچنین، نمودار جبهه‌ی پارتو در طراحی دو هدفه به ازای دو مقدار δ در شکل ۱ نشان داده شده است. در محور افقی مقادیر $E(A)$ و در محور عمودی مقادیر β نمایش داده شده است. نمودار آبی مربوط به مقدار $\delta = 0.75$ و نمودار قرمز مربوط به مقدار $\delta = 1.25$ است. همان‌طور که در نمودار قرمز رنگ در شکل ۱ نشان داده شده است هرچه δ بزرگتر می‌شود با افزایش β مقدار هزینه با سرعت بیشتری کاهش می‌یابد و برعکس. می‌توانیم این مساله را به ازای هر کدام از سطرهای دیگر جدول ۲ یعنی به ازای هر کدام از دلتاهای دیگر اجرا کنیم که باز هم به همین نتایج دست می‌یابیم.

همچنین می‌توان مقایسه دیگری با ثابت نگه داشتن α در طراحی تک‌هدفه نسبت به دو هدفه داشت. بدین صورت که به ازای مقدار $\alpha = 0.01$ ، هزینه در طراحی دو هدفه نسبت به طراحی تک‌هدفه کاهش داشته است همچنین، به ازای مقدار $\delta = 1.25$ ، مقدار خطای نوع دوم در طراحی دو هدفه نسبت به تک‌هدفه کاهش می‌یابد.

طراحی دو هدفه حدود ۱۵۰ مقدار بهینه برای هزینه به دست می‌آید که در بین آن‌ها ۲۴ مقدار را به صورت تصادفی انتخاب کرده و در جدول ۳ نشان داده‌ایم.

جدول ۲: طراحی تک‌هدفه با توزیع مکانیزم شکست پارتو برحسب δ های مختلف

n	h	L	α	β	δ	$E(A)$
۲۶	۱.۲۴	۲.۵۶	۰.۰۱۰	۰.۱۰	۰.۷۵	۲۶.۴۸
۱۶	۱.۱۶	۲.۷۶	۰.۰۰۶	۰.۱۰	۱	۲۴.۵۲
۱۱	۰.۹۷	۲.۹۱	۰.۰۰۴	۰.۱۰	۲۵.۱	۹۷.۲۳
۸	۰.۸۵	۳.۰۳	۰.۰۰۲	۰.۱۰	۱.۵	۲۳.۵۹
۶	۰.۷۷	۳.۱۲	۰.۰۰۲	۰.۱۰	۱.۷۵	۲۳.۳۱

جدول ۳: طراحی دوهدفه با توزیع مکانیزم شکست پارتو با مقدار $\delta = 0.75$

n	h	L	α	β	$E(A)$
۷	۷.۸۶	۲.۹۹	۰.۰۰۳	-۰.۸۵	۲۱.۷۷
۱۳	۷.۹۳	۲.۹۳	۰.۰۰۳	-۰.۵۹	۲۳.۷۹
۱۴	۱.۲۲	۲.۷۳	۰.۰۰۶	-۰.۴۸	۲۴.۲۶
۱۸	۱.۳۱	۲.۷۰	۰.۰۰۷	-۰.۳۱	۲۴.۶۹
۱۰	۷.۹۷	۲.۹۴	۰.۰۰۳	-۰.۷۰	۲۳.۰۲
۱۵	۱.۲۴	۲.۶۵	۰.۰۰۸	-۰.۴۱	۲۴.۴۳
۲۲	۱.۴۸	۲.۶۵	۰.۰۰۸	-۰.۲۰	۲۵.۰۰
۲۵	۱.۵۸	۲.۶۸	۰.۰۰۷	-۰.۱۵	۲۵.۱۸
۱۲	۷.۹۶	۲.۸۲	۰.۰۰۵	-۰.۵۹	۲۳.۷۷
۲۷	۱.۶۳	۲.۶۸	۰.۰۰۷	-۰.۱۲	۲۵.۳۱
۲۱	۱.۳۳	۲.۶۸	۰.۰۰۷	-۰.۲۳	۲۴.۹۰
۲۳	۱.۳۲	۲.۶۶	۰.۰۰۸	-۰.۱۷	۲۵.۱۲
۱۵	۱.۲۲	۲.۶۹	۰.۰۰۷	-۰.۴۲	۲۴.۴۱
۹	۷.۹۵	۲.۷۴	۰.۰۰۶	-۰.۶۹	۲۳.۰۸
۲۸	۱.۶۰	۲.۶۸	۰.۰۰۷	-۰.۱۰	۲۵.۳۶
۱۹	۱.۳۷	۲.۷۱	۰.۰۰۷	-۰.۲۹	۲۴.۷۵
۲۷	۱.۵۰	۲.۷۰	۰.۰۰۷	-۰.۱۱	۲۵.۳۳
۹	۷.۸۹	۲.۹۲	۰.۰۰۳	-۰.۷۶	۲۲.۵۹
۱۶	۱.۲۷	۲.۷۰	۰.۰۰۷	-۰.۳۹	۲۴.۴۹
۲۶	۱.۵۹	۲.۶۷	۰.۰۰۸	-۰.۱۳	۲۵.۲۶
۱۷	۱.۲۳	۲.۶۸	۰.۰۰۷	-۰.۳۳	۲۴.۶۱
۷	۷.۸۸	۲.۵۸	۰.۰۱۰	-۰.۷۳	۲۲.۷۹
۲۷	۱.۷۶	۲.۶۴	۰.۰۰۸	-۰.۱۰	۲۵.۳۹
۱۳	۱.۲۲	۲.۷۴	۰.۰۰۶	-۰.۵۱	۲۴.۲۰

موضوع اصلی در این پژوهش طراحی دوهدفه‌ی نمودارهای کنترل و نشان دادن مزیت انعطاف‌پذیری این نوع طراحی است که به ازای اجرای هر سطر در طراحی تک‌هدفه بیش از ۱۵۰ مقدار بهینه در طراحی دوهدفه به دست می‌آید بنابراین می‌توان بر اساس موقعیت مکانی یا زمانی خاص هر کدام از آنها را انتخاب کرد. با این حال برای نشان دادن اینکه مقدار δ در نتایج اثری ندارد و نتایج ثابت

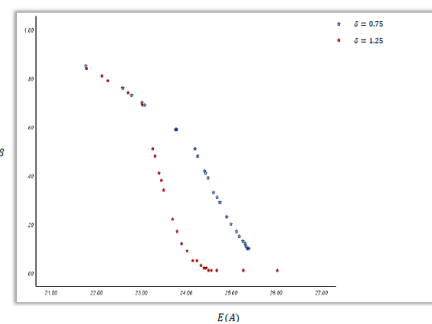
۶- نتیجه گیری

در این مقاله، ما یک MOESD را با استفاده از رویکرد الگوریتم ژنتیک برای نمودار کنترل \bar{X} تحت مکانیزم شکست فرآیند که از مدل پارتو پیروی می کند، توسعه داده ایم.

یک مثال عددی و یک مطالعه موردی صنعتی برای نشان دادن روش های حل، ارائه شد. با توجه به مثال ارائه شده نمی توان خطای نوع دوم و هزینه ها را به طور هم زمان کاهش داد. به این معنی که با کاهش خطای نوع دوم، هزینه افزایش می یابد و با کاهش هزینه، خطای نوع دوم افزایش می یابد. که هر دو بسیار مهم هستند. این طرح ها یک جبهه ی پارتو از راه حل های بهینه تعریف می کنند که برای صنعت گر براساس جواب های به دست آمده، براساس نیاز صنعت و این که کدام یک اولویت بیشتری دارد حق انتخاب ایجاد می کند. بنابراین، همان طور که مشاهده می شود با طراحی دودهدفه انعطاف پذیری و سازگاری نمودار کنترل \bar{X} در عمل افزایش می یابد. در طول مثال به این نتیجه دست می یابیم زمانی که از طراحی دو هدفه استفاده می کنیم، علاوه بر افزایش انعطاف پذیری به ازای خطای نوع دوم ثابت یعنی مقدار بتا برابر ۰/۱ که در طراحی تک هدفه این مقدار را ثابت در نظر گرفتیم، در طراحی دو هدفه هزینه کاهش می یابد. در مثال کاربردی فوق بهینه سازی براساس دو مقدار δ انجام شد که به ازای هر دو مقدار، هزینه در طراحی تک هدفه نسبت به دو هدفه بیشتر است. و همچنین مقدار خطای نوع اول یعنی α نیز به میزان قابل توجهی در طراحی دودهدفه نسبت به طراحی تک هدفه کاهش داشته است. به طور مثال به طور متوسط به ازای $\beta = 0.1$ و $\delta = 0.75$ مقدار هزینه در طراحی دودهدفه برابر ۲۵،۳۳ به دست آمده در صورتی که متوسط هزینه در طراحی تک هدفه برابر ۲۶،۴۸ است یعنی هزینه به میزان ۲،۲۲ درصد کاهش داشته است. همچنین مقدار α در طراحی تک هدفه برابر ۰،۰۰۷ و به ازای همین مقادیر در طراحی دودهدفه برابر ۰،۰۰۱ است. که بیان کننده کاهش چشمگیر آن است. به ازای هر کدام از δ های دیگر هم همانطور که مشاهده شد نتایج ثابت است. مقدار تمام این نکات مزیت طراحی دو هدفه نسبت به تک هدفه را عنوان می کند.

جدول ۴: طراحی دودهدفه با توزیع مکانیزم شکست پارتو با مقدار $\delta = 1.25$

n	h	L	α	β	$E(A)$
۴	۷.۹۷	۳.۴۳	۰.۰۰۱	۰.۸۴	۲۱.۷۹
۴	۷.۹۷	۳.۲۶	۰.۰۰۱	۰.۸۱	۲۲.۱۳
۴	۷.۸۶	۳.۲۷	۰.۰۰۱	۰.۷۹	۲۲.۲۶
۵	۷.۸۸	۳.۳۹	۰.۰۰۱	۰.۷۴	۲۲.۷۱
۵	۰.۷۳	۳.۲۱	۰.۰۰۱	۰.۶۹	۲۳.۰۳
۶	۰.۸۲	۳.۰۴	۰.۰۰۲	۰.۵۱	۲۳.۲۶
۶	۰.۸۰	۳.۰۵	۰.۰۰۲	۰.۴۸	۲۳.۳۱
۷	۰.۸۱	۳.۰۵	۰.۰۰۲	۰.۴۱	۲۳.۴۰
۷	۰.۷۸	۳.۰۰	۰.۰۰۳	۰.۳۸	۲۳.۴۵
۸	۰.۸۴	۳.۰۱	۰.۰۰۳	۰.۳۴	۲۳.۵۰
۹	۰.۹۳	۲.۹۹	۰.۰۰۳	۰.۲۲	۲۳.۷۰
۱۰	۰.۸۹	۲.۹۶	۰.۰۰۳	۰.۱۷	۲۳.۸۰
۱۱	۰.۹۲	۲.۹۵	۰.۰۰۳	۰.۱۲	۲۳.۹۰
۱۲	۱.۰۲	۳.۰۰	۰.۰۰۳	۰.۰۹	۲۴.۰۲
۱۳	۱.۰۲	۲.۸۸	۰.۰۰۴	۰.۰۵	۲۴.۱۵
۱۴	۰.۹۰	۳.۰۷	۰.۰۰۲	۰.۰۵	۲۴.۲۴
۱۵	۱.۰۶	۲.۹۴	۰.۰۰۳	۰.۰۳	۲۴.۳۳
۱۶	۱.۰۳	۲.۹۹	۰.۰۰۳	۰.۰۲	۲۴.۴۰
۱۷	۱.۱۰	۲.۹۷	۰.۰۰۳	۰.۰۲	۲۴.۴۵
۱۷	۱.۱۰	۲.۹۰	۰.۰۰۴	۰.۰۱	۲۴.۵۰
۱۸	۱.۲۴	۲.۹۶	۰.۰۰۳	۰.۰۱	۲۴.۵۶
۱۹	۱.۰۹	۲.۹۴	۰.۰۰۳	۰.۰۱	۲۴.۶۸
۲۶	۱.۱۳	۲.۹۲	۰.۰۰۴	۰.۰۱	۲۵.۲۷
۴۲	۱.۸۶	۲.۹۶	۰.۰۰۳	۰.۰۱	۲۶.۰۳



شکل ۱: نمودار جبهه ی پارتو برای داده های با توزیع مکانیزم شکست پارتو با مقدار $\delta = 1.25$, $\delta = 0.75$

- [11] Lorenzen, T. J., & Vance, L. C. (1986). The economic design of control charts: a unified approach. *Technometrics*, 28(1), 3-10.
- [12] Al-Oraini, H., & Rahim, M. (2003). Economic statistical design of \bar{x} control charts for systems with gamma (5, 2) in-control times. *Journal of Applied Statistics*, 30(4), 397-409 .
- [13] Chen, H., & Cheng, Y. (2007). Non-normality effects on the economic-statistical design of X charts with Weibull in-control time. *European Journal of Operational Research*, 176(2), 986-998.
- [14] Chen, F., & Yeh, C.-H. (2009). Economic statistical design of non-uniform sampling scheme X bar control charts under non-normality and Gamma shock using genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, 36(5), 9488-9497.
- [15] Rao, K. S., & Subbaiah, K. V. (2010). Optimal operating policies of X-bar control chart for non-normal variables with generalised Pareto in-control times. *International Journal of Productivity and Quality Management*, 6(1), 91-111.
- [16] Safaei, A. S., Kazemzadeh, R. B., & Niaki, S. T. A. (2012). Multi-objective economic statistical design of X-bar control chart considering Taguchi loss function. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 59(9-12), 1091-1101.
- [17] Doroudian, M., Bashiri, M., & Amiri, A. (2013). Multi-Objective Genetic Algorithm for Economic-Statistical Design of Xbar Control Chart. *International Journal of Science and Technology, Scientia Iranica*, 20(3), 909-918.
- [18] Heydari, A. A., Moghadam, M. B., & Eskandari, F. (2016). Economic and economic statistical designs of-X control charts under Burr XII shock model. *International Journal of Quality Engineering and Technology*, 6(1-2), 1-19.
- [19] Nadreri, M. H., Bameni Moghadam, M., & Seif, A. (2019). Statistically constrained economic design of X control chart with Weibull in-control time for processes subject to multiple assignable causes. *International Journal of Quality & Reliability Management*, 36(4), 526-551. doi:10.1108/IJQRM-07-2017-0141
- [20] Shewhart, W. A. (1931). Statistical method from an engineering viewpoint. *Journal of the American Statistical Association*, 26(175), 262-269.
- [1] Duncan, A. J. (1956). The economic design of X charts used to maintain current control of a process. *Journal of the American Statistical Association*, 51(274), 228-242.
- [2] Saniga, E. M. (1989). Economic statistical control-chart designs with an application to and R charts. *Technometrics*, 31(3), 313-320.
- [3] Hu, P. (1984). *Economic design of an X-control chart under non-poisson process shift*. Paper presented at the Abstract, TIMS/ORSA joint national meeting, San Francisco.
- [4] Banerjee, P. K., & Rahim, M. (1988). Economic design of-control charts under weibull shock models. *Technometrics* 30(4), 407-414.
- [5] Al-Oraini, H. A., & Rahim, M. (2002) Economic statistical design of X control charts for systems with Gamma (λ , 2) in-control times. *Computers & industrial engineering*, 43(3). 645-654.
- [6] Saadatmeli, A., Moghadam, M. B., Seif, A., & Faraz, A. (2018). Constrained optimal design of X control chart with multiple assignable causes under Burr XII failure mechanism. *International Journal of Quality & Reliability Management*.
- [7] Kraleti, S. R., & Kambagowni, V. S. (2010). Optimal design of overline X control chart with Pareto in-control times. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 48(9), 829-837.
- [8] Faraz, A., & Saniga, E. (2011). Economic statistical design of a T2 control chart with double warning lines. *Quality and Reliability Engineering International*, 27(2), 125-139.
- [9] Seif, A., Faraz, A., & Sadeghifar, M. (2015). Evaluation of the economic statistical design of the multivariate T2 control chart with multiple variable sampling intervals scheme: NSGA-II approach. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 85(12), 2442-2455.
- [10] Seif, A. (2018). Multi-objective genetic algorithm for economic statistical design of the T2 control chart with variable sample size: the updated Markov chain approach. *Journal of Testing and Evaluation*, 46(3), 1209-1219.

- [21] Konak, A., Coit, D. W., & Smith, A. E. (2006). Multi-objective optimization using genetic algorithms: A tutorial. *Reliability engineering & system safety*, 91(9), 992-1007

Double Objective Economic - Statistical Design Under Pareto Shock Models

Salimeh Sadat Aghili

Ph. D student, Department of Statistics, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.

Mohsen Torabian⁹

Department of Mathematics, Qazvin Branch, Islamic Azad University, Qazvin, Iran.

Mohammad Hassan Behzadi

Department of Statistics, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.

Asghar Seif

Department of statistics, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran.

Abstract: Control charts are widely used in the analysis and control of production processes to produce satisfactory, sufficient, reliable and economical quality. Optimizing chart parameters is an important issue for quality engineers to improve processes. In this paper, the economic statistical design of the \bar{X} control chart under the Pareto shock model based on the double objective design is presented. Actually by applying restrictions on the first type of error, the cost as the economic objective and the second type of error as the statistical objective is considered and then the optimal solutions are selected based on the Pareto front. Finally, through a practical example, the advantages of the proposed approach are shown by preparing a list of optimal solutions and graphical representations.

Keywords: Economic- Statistical design, \bar{X} control chart, Double- objective design, Pareto distribution.

Aim and Introduction

The technique of control charts to monitor process behavior is one of the basic tools of statistical process control. Process changes can be divided into two main categories: common (random) cause, which is a fundamental feature of any process, and cause (definable) deviation, the occurrence of which is an unusual disorder that must be eliminated in order for the process to reverse. The main purpose of using management control charts is to separate these two different sources.

Shewhart [17] developed a control chart that is useful tool for assessing whether a process is in a state of statistical control or has a reasoned deviation. Duncan [6] proposed a model for determining the costs associated with implementing a control chart (\bar{X}), i.e the economic scheme (ED) of control charts, to examine the average process. The limitations of the control chart \bar{X} are set at the $\pm L$ standard deviation from the target average. A sample n is taken of the volume of process output at each hour interval h . The average of the sample collected in the graph is plotted at that point. Due to the occurrence of a deviation due to the average of the process may change from μ_0 to $\mu_0 \pm \sigma\delta$, where μ_0 ,

* Corresponding author: torabianmohsen@gmail.com

σ and δ , respectively, the average of the process (target value), the standard deviation of the process and the parameter of change. Occurrence of out-of-control sample averages is reflected as an indication of an out-of-control process.

Occurrence of out-of-control sample averages is reflected as an indication of an out-of-control process. The design parameters n , L and h , are control diagrams. The goal is to optimally determine these factors to minimize the total expected cost per unit time. Using Duncan's approach, Hu [9] presented an economic scheme of a control chart under a Poisson-free process change. One of his assumptions is that the mechanism of process failure follows a Weibull model, and second, the assumption that the length of sampling intervals during the production period is fixed. Keeping sampling intervals constant at all times for a system followed by the Weibull failure mechanism is in stark contrast to the non-uniform sampling scheme for systems with the Weibull shock model recommended by Banerji and Rahim [2]. The disadvantage of economic design is that it does not show statistical features such as the probability of type I, II errors when selecting parameters for the control chart. From an economic model to an economic-statistical model. In all these papers, it can be observed that, for an efficient economic design of the \bar{X} control chart, the in-control time is assumed to be random and follows a specific probability distribution like exponential, Weibull, or Gamma distribution. However, in many practical situations arising at places like chemical industries and fertilizer industries, the in-control times of the process will have minimum in-control time, i.e., the failure of the process occurs only after a certain specified period of time and has a long upper tail. One of the probability distributions that can be identified with this feature is Pareto distribution. The Pareto distribution also specifies a waiting time distribution (time to exceed a certain value of the process character). This distribution is named Pareto. Although the Pareto distribution is widely used in many production processes, the fact that in-control times follow the Pareto distribution is rarely used in the design of control chart. The economic statistical design of \bar{X} Control Charts under Pareto shock models has recommended by Kraleti et.al [10]. The above statistical-economic designs are all in the category of single-objective designs of control charts, i.e only one optimal value is obtained for the average cost, which means that single-objective control charts are not flexible. Complete inflexibility is one of the main problems of any of the above designs. Faraz and Saniga [7] solved the problem of designing control charts and provided users with a dual-purpose design in which a group of optimal designs can be selected according to the specific time needs or industrial situation of each of them. They showed that the proposed method has the advantages of flexibility and consequently more compatibility than traditional economic statistical design (ESD) methods, while maintaining the statistical strengths and economic efficiency of traditional designs. Also, a summary of the subject literature is given in Table 1.

The purpose of this paper is to develop a double-objective economic statistical design (ESD) of \bar{X} control chart under Pareto failure properties. We have expressed the probability of type II error (β) as the statistical objective and the expected cost as the economic objective.

Methodology

The design used in this study is based on a double-objective economic statistical design of \bar{X} control chart with Pareto shock model. The MATLAB GA toolbox provides users with the MOGA optimization function called Gamultiobj; preservation strategy, MOGA finds much spread solutions over the Pareto optimal set. It is one of the most popular multi-objective evolutionary algorithms known for its capacity to promote the quality of

solutions algorithms by searching different quantities of decision variables and using appropriate penalty or barrier functions that can converge to the best solutions. We apply it here to solve the optimization problem. The results in the least average cost and β compared with single-objective.

Findings

Numerical results indicate the advantage of the double-objective economic-statistical design. By providing a set of optimal plans with corresponding cost and β , this method helps users to adapt the plans to the time requirements of the industrial process and thus have the advantage of flexibility and adaptability. As can be seen in this practical example, the single-objective design is done first, and for the specified values above and for the fixed value of $\beta=0.1$, only one optimal value for the cost is obtained, which is equal to 26.41 Is. while for the same values with delta value equal to 0.75 (that is, the first line of Table 2) in a double-objective design, about 150 optimal values for cost are obtained, of which 20 are randomly selected and shown in Table 3.

We can perform this problem for each of the other rows of Table 2, i.e. for each of the other δ , and we still get the same results.

Also, another comparison can be made by keeping α constant in single-objective design compared to double-objective ones. Thus, for the value of $\alpha = 0.01$, the cost in the double-objective design has decreased compared to the single-objective design.

Table 1. Summarized literature review

Papers	PFM	Design Type	Quality	
			Characteristic distribution	Objective
Duncan [6]	Exponential	ED	Normal	Cost
Lorenzen & Vance [11]	Exponential	ED	Normal	Cost
Banerjee & Rahim [2]	Weibull	ED	Normal	Cost
Al-Oraini & Rahim [1]	Gamma($\lambda, 2$)	ESD	Normal	Cost
Chen and cheng [3]	Weibull	ESD	Johnson	Cost
Chen, F., and Yeh [4]	Exponential	ESD	Normal	Cost
Kraleti, S. R et al. [10]	Pareto	ESD	Normal	Cost
Rao et al. [13]	Pareto	ESD	Johnson	Cost
Safaei et al. [15]	Exponential	ESD	Normal	Cost, ARL ₁
Doroudian et al. [5]	Exponential	ESD	Normal	Cost, ATS
Seif et al. [16]	Exponential	ESD	Burr XII	Cost
Heydari et al. [8]	Burr XII	ESD	Normal	Cost
Saadatmeli et al. [14]	Burr XII	ESD	Normal	Cost
Naderi et al. [12]	Weibull	ESD	Normal	Cost
This paper	Pareto	ESD	Normal	Cost , β

Table2: Single objective design with Pareto shock model in terms of different δ

	h	L	α	β	δ	$E(A)$
26	1.24	2.56	0.010	0.10	0.75	26.48
16	1.16	2.76	0.006	0.10	1	24.52
11	0.97	2.91	0.004	0.10	1.25	23.97
8	0.85	3.03	0.002	0.10	1.5	23.59
6	0.77	3.12	0.002	0.10	1.75	23.31

Table 3: double-objective design with Pareto shock model and $\delta=0.75$

n	h	L	α	β	$E(A)$
7	7.86	2.99	0.003	0.85	21.77
13	7.93	2.93	0.003	0.59	23.79
14	1.22	2.73	0.006	0.48	24.26
18	1.31	2.70	0.007	0.31	24.69
10	7.97	2.94	0.003	0.70	23.02
15	1.24	2.65	0.008	0.41	24.43
22	1.48	2.65	0.008	0.20	25.00
25	1.58	2.68	0.007	0.15	25.18
12	7.96	2.82	0.005	0.59	23.77
27	1.63	2.68	0.007	0.12	25.31
21	1.33	2.68	0.007	0.23	24.90
23	1.32	2.66	0.008	0.17	25.12
15	1.22	2.69	0.007	0.42	24.41
9	7.95	2.74	0.006	0.69	23.08
28	1.60	2.68	0.007	0.10	25.36
19	1.37	2.71	0.007	0.29	24.75
27	1.50	2.70	0.007	0.11	25.33
9	7.89	2.92	0.003	0.76	22.59
16	1.27	2.70	0.007	0.39	24.49
26	1.59	2.67	0.008	0.13	25.26
17	1.23	2.68	0.007	0.33	24.61
7	7.88	2.58	0.010	0.73	22.79
27	1.76	2.64	0.008	0.10	25.39
13	1.22	2.74	0.006	0.51	24.20

Discussion and Conclusion

Numerical results indicate that it is not possible to reduce the second type of error and costs at the same time, which means that by reducing the second type of error, the cost increases, and by reducing the cost, the second type of error increases, both of which are very important. Obtained based on the needs of the industry and which one has more priority has the right to choose. These designs define a Pareto optimal front of solutions that increase the flexibility and adaptability of the \bar{X} control chart in practice.

This research adds to the body of knowledge related to flexibility in process quality control. This article may be of interest to quality systems experts in factories where the choice between cost reduction and statistical factor reduction can affect the production process.

References

- [1] Al-Oraini, H. A., & Rahim, M. (2002) Economic statistical design of X control charts for systems with Gamma ($\lambda, 2$) in-control times. *Computers & industrial engineering*, 43(3). 645-654.

- [2] Banerjee, P. K., & Rahim, M. (1988). Economic design of control charts under weibull shock models. *Technometrics*, 30(4), 407-414.
- [3] Chen, H., & Cheng, Y. (2007). Non-normality effects on the economic-statistical design of X charts with Weibull in-control time. *European Journal of Operational Research*, 176(2), 986-998.
- [4] Chen, F., & Yeh, C.-H. (2009). Economic statistical design of non-uniform sampling scheme X bar control charts under non-normality and Gamma shock using genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, 36(5), 9488-9497.
- [5] Doroudian, M., Bashiri, M., & Amiri, A. (2013). Multi-Objective Genetic Algorithm for Economic-Statistical Design of Xbar Control Chart. *International Journal of Science and Technology, Scientia Iranica*, 20(3), 909-918.
- [6] Duncan, A. J. (1956). The economic design of X charts used to maintain current control of a process. *Journal of the American Statistical Association*, 51(274), 228-242.
- [7] Faraz, A., & Saniga, E. (2011). Economic statistical design of a T2 control chart with double warning lines. *Quality and Reliability Engineering International*, 27(2), 125-139.
- [8] Heydari, A. A., Moghadam, M. B., & Eskandari, F. (2016). Economic and economic statistical designs of-X control charts under Burr XII shock model. *International Journal of Quality Engineering and Technology*, 6(1-2), 1-19.
- [9] Hu, P. (1994). *Economic design of an X-control chart under non-poisson process shift*. Paper presented at the Abstract, TIMS/ORSA joint national meeting, San Francisco.
- [10] Kraleti, S. R., & Kambagowni, V. S. (2010). Optimal design of overline X control chart with Pareto in-control times. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 48(9), 829-837.
- [11] Lorenzen, T. J., & Vance, L. C. (1986). The economic design of control charts: a unified approach. *Technometrics*, 28(1), 3-10.
- [12] Nadreri, M. H., Bameni Moghadam, M., & Seif, A. (2019). Statistically constrained economic design of X control chart with Weibull in-control time for processes subject to multiple assignable causes. *International Journal of Quality & Reliability Management*, 36(4), 526-551. doi:10.1108/IJQRM-07-2017-0141
- [13] Rao, K. S., & Subbaiah, K. V. (2010). Optimal operating policies of X-bar control chart for non-normal variables with generalised Pareto in-control times. *International Journal of Productivity and Quality Management*, 6(1), 91-111.
- [14] Saadatmeli, A., Moghadam, M. B., Seif, A., & Faraz, A. (2018). Constrained optimal design of X control chart with multiple assignable causes under Burr XII failure mechanism. *International Journal of Quality & Reliability Management*.
- [15] Safaei, A. S., Kazemzadeh, R. B., & Niaki, S. T. A. (2012). Multi-objective economic statistical design of X-bar control chart considering Taguchi loss function. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 59(9-12), 1091-1101.
- [16] Seif, A., Faraz, A., & Sadeghifar, M. (2015). Evaluation of the economic statistical design of the multivariate T2 control chart with multiple variable sampling intervals scheme: NSGA-II approach. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 85(12), 2442-2455.
- [17] Shewhart, W. A. (1931). Statistical method from an engineering viewpoint. *Journal of the American Statistical Association*, 26(175), 262-269.