مقاله پژوهشی

# طراحی یک سیستم سری- موازی بر اساس مسئله بهینه‌سازی قابلیت اطمینان و هزینه

**الهام بصیری**

استادیار آمار، دانشگاه کوثر بجنورد، گروه ریاضیات و کاربردها

**چکیده :** قابلیت اطمینان یکی از مباحث مهم در فرایند طراحی مهندسی است. وقتی سیستمی را مورد استفاده قرار می‌دهیم اغلب مایل به تعیین قابلیت اطمینان این سیستم هستیم. واضح است که سیستم‌های با قابلیت اطمینان بالاتر از ارزش بیشتری برخوردار هستند. از طرف دیگر قابلیت اطمینان هر سیستم به ساختار و قابلیت اطمینان اجزای آن بستگی دارد. بنا بر این برای افزایش قابلیت اطمینان سیستم می‌توان قابلیت اطمینان اجزای آن را بهبود بخشید. علاوه بر این، برای افزایش قابلیت اطمینان اجزای یک سیستم لازم است تا هزینه‌های آن نیز در نظر گرفته شود. این پژوهش با در نظر گرفتن یک سیستم سری-موازی به تعیین میزان افزایش مورد نیاز برای قابلیت اطمینان اجزای سیستم می‌پردازد به‌گونه‌ای که قابلیت اطمینان کل سیستم به حداکثر برسد و هزینه حاصل از این افزایش از مقدار از پیش تعیین‌شده‌ای بیشتر نشود. در ادامه، یک مثال عددی برای بررسی نتایج ارائه شده است. در انتها هم جمع‌بندی از نتایج مقاله بیان شده است.

**کلیدواژه‌ها:** سیستم سری-موازی، بهینه‌سازی، قابلیت اطمینان، هزینه

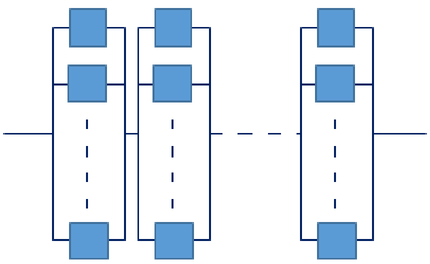
## ۱-مقدمه

در دنیای صنعتی امروز رقابت در تولید محصولات افزایش یافته است. تولیدکنندگان صنعتی در تلاش برای افزایش قابلیت تولیدات و کاهش هزینه‌ها هستند. قابلیت اطمینان یکی از مهم‌ترین مشخصه‌های کیفی تولیدات به شمار می‌آید. قابلیت اطمینان، احتمال آن است که یک محصول هدف خاص خود را برای یک زمان معین به نحو راضی‌کننده‌ای انجام دهد. علاقه‌مندان به نظریه قابلیت اطمینان می‌توانند به [۱] و [۴] مراجعه کنند.

یک تابع محوری در مبحث قابلیت اطمینان جهت تعیین خواص متغیر طول عمر $T$، تابع قابلیت اطمینان یا تابع بقا است که بیان‌گر احتمال عدم خرابی یا ازکارافتادگی تا زمان مشخص $t$ است و به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$R(t) = P(T \geq t), \quad t \geq 0.$$

سیستم‌های صنعتی معمولاً از اجزا و قطعات متعددی تشکیل شده‌اند که بر اساس یک ساختار از پیش تعیین شده برای یک هدف معین در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند و هر کدام از اجزا به طور مستقل یا وابسته به دیگر اجزا، وظیفه‌ای را انجام می‌دهند. از معروف‌ترین سیستم‌ها می‌توان به سیستم‌های سری، موازی و مختلط (سری-موازی و موازی-سری) اشاره کرد. شکل ۱ ساختار یک سیستم سری-موازی را نمایش می‌دهد.



شکل ۱- سیستم سری-موازی

Corresponding author: elhambasiri@kub.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۳/۳۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۰/۰۳
دوره ۱۲/ شماره ۱
صفحات ۳۹-۵۰

به‌عنوان یک مثال از کاربرد سیستم‌های سری-موازی می‌توان به پژوهش حیدری و شهرخی [۵] اشاره کرد. در پژوهش انجام شده مسئله بهینه‌سازی برنامه نگهداری و تعمیرات یک سیستم تغذیه آب بویلرهای HRSG که دیاگرام آن ساختار سری-موازی دارد، مورد مطالعه قرار گرفت. مثال دیگری از سیستم‌های سری-موازی را می‌توان در پژوهش آقایی و همکاران [۶] مشاهده کرد. اکثر سیستم‌ها ممکن است ساختاری پیچیده داشته باشند. برخی از سیستم‌های پیچیده را می‌توان به زیرسیستم‌های سری و موازی تجزیه کرد و سپس قابلیت اطمینان آن‌ها را محاسبه نمود. در بسیاری از مواقع، ممکن است سیستم‌ها ساختاری نداشته باشند که بتوان آن‌ها را به زیرسیستم‌های سری یا موازی تبدیل کرد. در واقع این نوع سیستم‌ها عملکرد و منطق پیچیده‌ای دارند که مانع از تبدیل آن به سیستم‌های ساده سری یا موازی می‌گردد. سیستم‌های مخابراتی از راه دور، شبکه‌های رایانه‌ای، سیستم‌های تجهیزات تامین انرژی الکتریکی، سیستم‌های توزیع آب و آب‌رسانی از جمله شبکه‌های پیچیده‌ای هستند که نمی‌توانند به سادگی مورد تجزیه و تحلیل واقع شوند. برخی از این نوع سیستم‌ها را می‌توان با استفاده از روش احتمال شرطی به سیستم‌های سری-موازی و موازی-سری تجزیه کرد و سپس قابلیت اطمینان آن‌ها را محاسبه نمود [۷].

قابلیت اطمینان یک سیستم سری-موازی متشکل از $m$ زیرسیستم سری که هر کدام از زیرسیستم‌ها شامل $n_i$، $i=1,\dots,m$ جزء موازی هستند و هرکدام دارای قابلیت اطمینان $R_i$ باشند، را می‌توان از رابطه (۱) محاسبه کرد.

$$R_{sys} = \prod_{i=1}^{m}[1-(1-R_i)^{n_i}] \qquad (۱)$$

واضح است که قابلیت اطمینان هر سیستم به ساختار و قابلیت اطمینان اجزای آن سیستم وابسته است. بنا بر این، یک راه برای افزایش قابلیت اطمینان سیستم، افزایش قابلیت اطمینان اجزای آن است. بدیهی است که افزایش قابلیت اطمینان اجزای سیستم نیازمند صرف هزینه بیشتری است. از آن‌جا که هزینه همواره معیاری مهم در تصمیم‌گیری است، لازم است تا یک موازنه بین این دو ایجاد شود.

تاکنون پژوهش‌گران زیادی مطالعاتی درخصوص بهینه‌سازی در سیستم‌ها انجام داده‌اند. به‌عنوان مثال، کویت و اسمیت [۸] مسئله بهینه‌سازی قابلیت اطمینان و هزینه را در یک سیستم سری-موازی با انتخاب‌های چندگانه برای هر زیرسیستم مورد مطالعه قرار دادند. در این پژوهش از الگوریتم ژنتیک برای حل مسئله استفاده شد. مسئله تخصیص افزونگی برای یک سیستم سری-موازی با به‌کارگیری الگوریتم ژنتیک و با هدف به حداکثر رساندن قابلیت اطمینان سیستم، توسط توکلی‌مقدم و همکاران [۹] مورد بررسی قرار گرفت. کرباسیان و همکاران [۱۰] مدلی چندهدفه ارائه نمودند که بین قابلیت اطمینان سیستم و هزینه مکان‌یابی، نگهداری و تعمیرات سیستم موازنه‌ای برقرار می‌کند. در ادامه با کمک نرم‌افزار لینگو به حل این مدل پرداختند. سیستم مورد مطالعه در این پژوهش از نوع سری بود و طول عمر تمام قطعات نیز از توزیع وایبل پیروی می‌کرد. چنبری و همکاران [۱۱] به مطالعه یک مسئله بهینه‌سازی دو هدفه قابلیت اطمینان و هزینه برای تخصیص افزونگی در سیستم‌ها پرداختند. صفایی و احمدی [۱۲] طول دوره جایگذاری بهینه در سیستم‌های تعمیرپذیر را با توجه به تابع هزینه و با در نظر گرفتن توابع نرخ خطر مختلف و همچنین با احتمال تعمیر مینیمال متفاوت، به دست آوردند و مورد مقایسه قرار دادند. بصیری [۱۳] با در نظر گرفتن یک سیستم سری-موازی با نرخ شکست وانی شکل، مکان بهینه اجزای سیستم و زمان بهینه نگهداری پیشگیرانه را طوری تعیین نمود که هزینه کل حداقل و قابلیت اطمینان کل سیستم حداکثر شود. کیم و ان [۱۴] یکی از مسائل بهینه‌سازی قابلیت اطمینان یعنی مکان‌یابی اجزای یک سیستم سری را مورد بحث قرار دادند. مسئله مورد بررسی در این پژوهش حداقل کردن تابع هزینه به منظور دست‌یابی به قابلیت اطمینان مورد نظر بود. مسئله بهینه‌سازی دو هدفه قابلیت اطمینان-هزینه در یک سیستم سری-موازی توسط گارگ [۱۵] مورد مطالعه قرار گرفت. سپس با در نظر گرفتن ترکیبی از توابع هدف و توابع عضویت فازی به حل مسئله پرداخته شد.

خاتمی فیروزآبادی و جوانشیر [۷] به تعیین قابلیت اطمینان مورد نیاز اجزای یک سیستم سری پرداختند به‌گونه‌ای که تابع هزینه حاصل از افزایش قابلیت اطمینان اجزای این سیستم به حداقل برسد و با در نظر گرفتن این شرط که قابلیت اطمینان کل این سیستم از مقدار از پیش تعیین‌شده‌ای کمتر نشود. هدف این پژوهش تعیین میزان افزایش مورد نیاز برای قابلیت اطمینان اجزای یک سیستم سری-موازی است به‌گونه‌ای که قابلیت اطمینان کل سیستم حداکثر شود و مقدار هزینه حاصل از این افزایش از مقدار از قبل تعیین‌شده‌ای بیشتر نشود.

ساختار مقاله به این شرح است. ابتدا به معرفی روش پژوهش شامل نمادها، فرضیه‌ها و متغیر تصمیم پرداخته می‌شود. سپس مدل ریاضی مورد استفاده در مقاله ارائه می‌شود که شامل تابع هدف و محدودیت است. پنج حالت خاص برای تابع هزینه در نظر گرفته می‌شود و در هر حالت مسئله بهینه‌سازی ارائه و حل

می‌شود. برای ارزیابی نتایج یک مثال عددی تحلیل می‌شود. در انتها، جمع‌بندی مقاله بیان می‌شود.

## ۲- روش پژوهش

برای ارائه مسئله بهینه‌سازی در این مقاله، در این بخش ابتدا فرضیه‌ها، نمادها و متغیر تصمیم مورد معرفی قرار می‌گیرند.

### ۲-۱- فرضیه‌ها و نمادها

در این مدل فرض می‌شود یک سیستم سری-موازی شامل $m$ زیرسیستم سری هستند و هرکدام از زیرسیستم‌ها دارای $n_i$ جزء هستند که به صورت موازی به هم متصل شده‌اند. همچنین فرض می‌شود:

- $m$: تعداد زیرسیستم سری در یک سیستم سری–موازی
- $n_i$: تعداد اجزای زیرسیستم $i$ام در یک سیستم سری-موازی، $i=1,\dots,m$
- $R_i$: قابلیت اطمینان اجزای زیرسیستم $i$ام در یک سیستم سری-موازی، $i=1,\dots,m$
- $c_i$: میزان هزینه مربوط به افزایش قابلیت اطمینان اجزای زیرسیستم $i$ام در یک سیستم سری-موازی، $i=1,\dots,m$
- $R_{sys}$: قابلیت اطمینان کل سیستم سری-موازی،
- $C_{total}$: هزینه کل ناشی از افزایش قابلیت اطمینان اجزای سیستم سری-موازی،
- $c^*$: حداکثر بودجه در دسترس برای طراحی سیستم سری-موازی.

### ۲-۲- متغیر تصمیم

$x_i$: میزان افزایش قابلیت اطمینان اجزای زیرسیستم $i$ام در یک سیستم سری-موازی، $i=1,\dots,m$.

## ۳- مدل ریاضی

در این پژوهش هدف تعیین مقدار مورد نیاز برای افزایش قابلیت اطمینان هر یک از اجزای یک سیستم سری-موازی است با هدف به حداکثر رساندن قابلیت اطمینان کل سیستم به شرط آنکه هزینه کل سیستم ناشی از افزایش قابلیت اطمینان اجزای سیستم از مقدار از قبل تعیین شده‌ای مانند $c^*$، بیشتر نشود. به عبارت دیگر، هدف تعیین مقادیر $x_i$ است به‌گونه‌ای که

$$\begin{aligned} &Max \quad R_{sys}, \\ &s.t. \quad C_{total} \le c^*. \end{aligned}$$

با توجه به رابطه (۱)، مسئله فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود.

$$\begin{aligned} &Max \quad \prod_{i=1}^{m}[1-(1-(R_i+x_i))^{n_i}], \\ &s.t. \quad C_{total} \le c^*, \;\; 0 \le R_i + x_i \le 1, \end{aligned}$$

که معادل است با

$$\begin{aligned} &Max \quad \sum_{i=1}^{m} ln[1-(1-(R_i+x_i))^{n_i}], \\ &s.t. \quad C_{total} \le c^*, \;\; 0 \le R_i + x_i \le 1. \end{aligned}$$

حال برای تابع هزینه کل پنج حالت را در نظر می‌گیریم.

$$C_{total}^{I} = \sum_{i=1}^{m} c_i n_i (R_i + x_i),$$

$$C_{total}^{II} = \sum_{i=1}^{m} c_i n_i (R_i + x_i)^2,$$

$$C_{total}^{III} = \sum_{i=1}^{m} c_i n_i e^{(R_i + x_i)},$$

$$C_{total}^{IV} = \sum_{i=1}^{m} c_i n_i ln(1 + (R_i + x_i)),$$

$$C_{total}^{V} = \sum_{i=1}^{m} c_i n_i \sqrt{1 + (R_i + x_i)}.$$

واضح است که $C_{total}$ و $R_{sys}$ هردو توابعی غیرنزولی از $x_i$ و در نتیجه توابعی غیرنزولی از $y_i = R_i + x_i$ هستند. بنا بر این، با در نظر گرفتن محدودیت $C_{total} \le c^*$ قابلیت اطمینان سیستم زمانی حداکثر می‌شود که رابطه $C_{total} = c^*$ برقرار شود. بنا بر این، برای تعیین متغیرهای تصمیم یعنی $x_i$ از روش تابع لاگرانژ استفاده می‌کنیم. برای این منظور بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید $y_i = R_i + x_i$، $i=1,\dots,m$. حال تابع لاگرانژ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$H\left(\underline{y},\lambda\right) = \sum_{i=1}^{m} ln[1-(1-y_i)^{n_i}] - \lambda\{C_{total}^{k} - c^*\}, \qquad (۲)$$

هرگاه $k = I,\cdots,V$، $\underline{y} = (y_1,\cdots,y_m)$ و $\lambda$ نشان‌دهنده ضریب لاگرانژ است. گرادیان $\nabla_{\underline{y}} H\left(\underline{y},\lambda\right)$ با مشتق‌گیری از رابطه (۲) به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H(\underline{y},\lambda)}{\partial y_i} = \dfrac{n_i(1-y_i)^{n_i-1}}{1-(1-y_i)^{n_i}} - \lambda c_i n_i, & k = I، \\ \dfrac{\partial H(\underline{y},\lambda)}{\partial y_i} = \dfrac{n_i(1-y_i)^{n_i-1}}{1-(1-y_i)^{n_i}} - 2\lambda c_i n_i y_i, & k = II، \\ \dfrac{\partial H(\underline{y},\lambda)}{\partial y_i} = \dfrac{n_i(1-y_i)^{n_i-1}}{1-(1-y_i)^{n_i}} - \lambda c_i n_i e^{y_i}, & k = III، \\ \dfrac{\partial H(\underline{y},\lambda)}{\partial y_i} = \dfrac{n_i(1-y_i)^{n_i-1}}{1-(1-y_i)^{n_i}} - \dfrac{\lambda c_i n_i}{1+y_i}, & k = IV، \\ \dfrac{\partial H(\underline{y},\lambda)}{\partial y_i} = \dfrac{n_i(1-y_i)^{n_i-1}}{1-(1-y_i)^{n_i}} - \dfrac{\lambda c_i n_i}{2\sqrt{1+y_i}}, & k = V. \end{cases}$$

و

$$\frac{\partial H(\underline{y},\lambda)}{\partial y_i} = -[C_{total}^k - c^*], \quad k = I, \cdots, V.$$

از مساوی صفر قرار دادن رابطه‌های فوق، نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} \dfrac{n_i(1-y_i)^{n_i-1}}{1-(1-y_i)^{n_i}} - \lambda c_i n_i = 0, & k = I, \\ \dfrac{n_i(1-y_i)^{n_i-1}}{1-(1-y_i)^{n_i}} - 2\lambda c_i n_i y_i = 0, & k = II, \\ \dfrac{n_i(1-y_i)^{n_i-1}}{1-(1-y_i)^{n_i}} - \lambda c_i n_i e^{y_i} = 0, & k = III, \\ \dfrac{n_i(1-y_i)^{n_i-1}}{1-(1-y_i)^{n_i}} - \dfrac{\lambda c_i n_i}{1+y_i} = 0, & k = IV, \\ \dfrac{n_i(1-y_i)^{n_i-1}}{1-(1-y_i)^{n_i}} - \dfrac{\lambda c_i n_i}{2\sqrt{1+y_i}} = 0, & k = V, \end{cases}$$

و

$$C_{total}^k = c^*, \qquad k = I, \cdots, V,$$

که معادل هستند با

$$\begin{cases} (1-y_i)^{n_i-1} - \lambda c_i \\ \quad +\lambda(1-y_i)^{n_i} = 0, & k = I \\ (1-y_i)^{n_i-1} - 2\lambda c_i y_i \\ \quad +2\lambda c_i y_i (1-y_i)^{n_i} = 0, & k = II, \\ (1-y_i)^{n_i-1} - \lambda c_i e^{y_i} \\ \quad +\lambda c_i e^{y_i}(1-y_i)^{n_i} = 0, & k = III, \\ (1-y_i)^{n_i-1}(1+y_i) - \lambda c_i \\ \quad +\lambda c_i (1-y_i)^{n_i} = 0, & k = IV, \\ (1-y_i)^{n_i-1}\sqrt{1+y_i} - \lambda c_i \\ \quad +\lambda c_i (1-y_i)^{n_i} = 0, & k = V. \end{cases} \qquad (۳)$$

برای حل معادله‌های (۳) باید از روش‌های عددی استفاده کرد. برای این منظور می‌توان از الگوریتم زیر بهره برد (به [۷] مراجعه شود).

**الگوریتم:** فرض کنید مقادیر $R_i$، $n_i$، $c_i$، $m$، $i=1,\dots,m$ و $c^*$ از قبل معلوم باشند. در این صورت:

۱) مقدار دلخواهی برای $\lambda$ در نظر بگیرید.

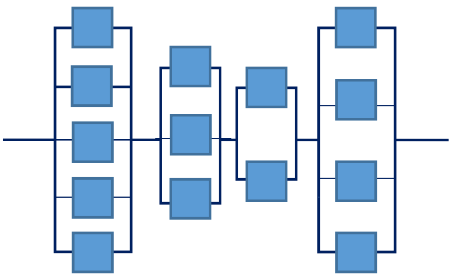
۲) مقادیر $y_i = R_i + x_i$، $i=1,\dots,m$ را از حل معادله‌های (۳) بیابید.

۳) حاصل $C_{total}$ را به دست آورید.

۴) اگر رابطه $C_{total} = c^*$ برقرار باشد آنگاه فرایند را پایان دهید و قرار دهید $x_i = y_i - R_i$، $i=1,\dots,m$. در غیر این صورت، مقدار $\lambda$ را تغییر دهید و به مرحله ۲ بروید.

## ۴- مثال عددی

در این بخش برای مطالعه بیشتر یک مثال عددی مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. یک سیستم سری-موازی به صورت شکل ۲ را در نظر بگیرید.



شکل ۲- سیستم سری-موازی

همچنین اطلاعات مربوط به این سیستم در جدول ۱ گزارش شده است.

**جدول ۱.** اطلاعات مربوط به سیستم سری-موازی

| زیرسیستم | $R_i$ | $c_i$ | $n_i$ |
|---|---|---|---|
| اول | ۰/۶ | ۱۰ | ۴ |
| دوم | ۰/۶۵ | ۲۰ | ۲ |
| سوم | ۰/۶ | ۵۰ | ۳ |
| چهارم | ۰/۵۵ | ۳۵ | ۵ |

با توجه به شکل ۲، مقدار $m$ برابر ۴ است. در حالت اولیه ($x_i=0$) قابلیت اطمینان سیستم برابر است با

$$R_{sys} = \prod_{i=1}^{m} [1-(1-R_i)^{n_i}] = 0.7855.$$

همچنین، در حالت اولیه داریم

$$C_{total}^{I} = \sum_{i=1}^{m} c_i n_i R_i = 236.25,$$
$$C_{total}^{II} = \sum_{i=1}^{m} c_i n_i (R_i)^2 = 138.2375,$$
$$C_{total}^{III} = \sum_{i=1}^{m} c_i n_i e^{R_i} = 726.1435,$$
$$C_{total}^{IV} = \sum_{i=1}^{m} c_i n_i ln(1+R_i) = 186.0263,$$
$$C_{total}^{V} = \sum_{i=1}^{m} c_i n_i \sqrt{1+R_i} = 509.5873.$$

حال برای هر تابع هزینه یک مقدار از پیش تعیین شده برای حداکثر بودجه یعنی $c^*$ در نظر گرفته می‌شود. سپس با به‌کارگیری الگوریتم ۱می‌توان مقادیر مجهول $y_i$را به دست آورد. در این مقاله از دستور uniroot در نرم‌افزار R برای حل معادله‌ها استفاده شده است. نتایج در جدول‌های ۶-۲ گزارش شده است. به‌عنوان مثال برای تابع هزینه $C_{total}^{I}$، مقدار$c^*$ را برابر ۳۰۰ در نظر می‌گیریم. ابتدا فرض می‌شود$\lambda = 0.01$. در چنین حالتی با حل معادله‌های (۳)، نتیجه می‌شود:

$$y_1 = 0.5427, \quad y_2 = 0.8074,$$
$$y_3 = 0.3819, \quad y_4 = 0.2732,$$

و مقدار تابع هزینه در این حالت برابر می‌شود با

$$C_{total}^{I} = 159.1102,$$

که رابطه$C_{total} = c^*$ برقرار نمی‌باشد. بنا بر این لازم است تا مقدار $\lambda$ را تغییر دهیم تا زمانی‌که رابطه $C_{total} = c^*$ برقرار شود. با تغییر مقادیر $\lambda$ هزینه‌های مرتبط محاسبه و در جدول ۲ ارائه شده است. در نهایت با فرض $\lambda = 0.0006949$ رابطه$C_{total} = c^*$ برقرار می‌شود و مقادیر $y_i$ در این حالت برابر هستند با

$$y_1 = 0.8092, \quad y_2 = 0.9861,$$
$$y_3 = 0.8142, \quad y_4 = 0.6060,$$

که معادل هستند با

$$x_1 = 0.2092, \quad x_2 = 0.3361,$$
$$x_3 = 0.2142, \quad x_4 = 0.0560.$$

مقادیر فوق به این معنی هستند که قابلیت اطمینان اجزای اولین زیرسیستم باید به اندازه ۰/۲۰۹۲ واحد، زیر سیستم دوم به اندازه ۰/۳۳۶۱ واحد، زیرسیستم سوم به اندازه ۰/۲۱۴۲ واحد و زیرسیستم چهارم به اندازه ۰/۰۵۶۰ واحد افزایش یابند تا در عین حال که شرط$C_{total} \leq c^*$ برقرار است قابلیت اطمینان کل سیستم حداکثر گردد. به عبارت دیگر، بیشترین مقدار ممکن برای قابلیت اطمینان کل سیستم با در نظر گرفتن محدودیت$C_{total} \leq c^*$، برابر است با

$$R_{sys} = 0.9826.$$

به‌طور مشابه نتایج برای تابع هزینه$C_{total}^{II}$ در جدول ۳ گزارش شده است. در این حالت با در نظر گرفتن مقدار ۳۰۰ برای $c^*$، به ازای $\lambda = 0.00006493$ رابطه$C_{total} = c^*$ برقرار می‌شود و مقدار قابلیت اطمینان کل سیستم در این حالت برابر است با

$$R_{sys} = 0.9985.$$

در این حالت داریم

$$y_1 = 0.8948, \quad y_2 = 0.9974,$$
$$y_3 = 0.9226, \quad y_4 = 0.7577,$$

که معادل هستند با

$$x_1 = 0.2948, \quad x_2 = 0.3474,$$
$$x_3 = 0.3226, \quad x_4 = 0.2077.$$

برای تابع هزینه$C_{total}^{III}$ و با فرض$c^* = 800$ نتایج در جدول ۴ نمایش داده شده است. از جدول ۴ مشاهده می‌شود که به ازای$\lambda = 0.00074537$ شرط$C_{total} = c^*$ برقرار می‌شود، مقدار قابلیت اطمینان کل سیستم در این حالت برابر است با

$$R_{sys} = 0.9543.$$

همچنین، در این حالت داریم:

$$y_1 = 0.7495, \quad y_2 = 0.9610,$$
$$y_3 = 0.7254, \quad y_4 = 0.5421,$$

که معادل هستند با

$$x_1 = 0.1495, \quad x_2 = 0.3110,$$
$$x_3 = 0.1254, \quad x_4 = -0.0078.$$

برای تابع هزینه$C_{total}^{IV}$ و با فرض$c^* = 200$ نتایج در جدول ۵ گزارش شده است. از جدول ۵ نتیجه می‌شود که به ازای $\lambda = 0.0029301$ شرط$C_{total} = c^*$ برقرار می‌شود. مقدار قابلیت اطمینان کل سیستم در چنین حالتی برابر است با:

$$R_{sys} = 0.9380.$$

علاوه بر این، در این حالت داریم

$$y_1 = 0.7442, \quad y_2 = 0.9702,$$
$$y_3 = 0.7109, \quad y_4 = 0.4923,$$

که معادل هستند با

$$x_1 = 0.1442, \quad x_2 = 0.3202,$$
$$x_3 = 0.1109, \quad x_4 = -0.0576.$$

در نهایت برای تابع هزینه $C_{total}^{V}$ و با فرض $c^* = 550$ نتایج در جدول ۶ ارائه شده است. با توجه به نتایج جدول ۶، به ازای $\lambda = 0.00017997$ شرط $C_{total} = c^*$ برقرار می‌شود. مقدار قابلیت اطمینان کل سیستم در چنین حالتی برابر است با:

$$R_{sys} = 0.9980.$$

در این حالت داریم

$$y_1 = 0.8906, \quad y_2 = 0.9974,$$
$$y_3 = 0.9194, \quad y_4 = 0.7371,$$

که معادل هستند با

$$x_1 = 0.2906, \quad x_2 = 0.3474,$$
$$x_3 = 0.3194, \quad x_4 = 0.1871.$$

**جدول ۲.** نتایج عددی مثال ۱ برای $C_{total}^{I}$ و با فرض $c^* = 300$.

| $R_{sys}$ | $C_{total}$ | $y_4$ | $y_3$ | $y_2$ | $y_1$ | λ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۰/۵۶۰۷ | ۱۵۹/۱۱۰۲ | ۰/۲۷۳۲ | ۰/۳۸۱۹ | ۰/۸۰۷۴ | ۰/۵۴۲۷ | ۰/۰۱ |
| ۰/۹۷۱۸ | ۲۸۶/۸۲۲۶ | ۰/۵۶۹۰ | ۰/۷۷۷۶ | ۰/۹۸۰۰ | ۰/۷۸۴۷ | ۰/۰۰۱ |
| ۰/۹۹۸۶ | ۳۴۷/۷۵۸۱ | ۰/۷۵۶۸ | ۰/۹۲۹۳ | ۰/۹۹۸۰ | ۰/۹۰۰۰ | ۰/۰۰۰۱ |
| ۰/۹۸۸۸ | ۳۱۰/۵۴۴۱ | ۰/۶۳۶۸ | ۰/۸۴۲۱ | ۰/۹۹۰۰ | ۰/۸۲۹۰ | ۰/۰۰۰۵ |
| ۰/۹۸۵۷ | ۳۰۴/۸۵۵۶ | ۰/۶۲۰۰ | ۰/۸۲۷۲ | ۰/۹۸۸۰ | ۰/۸۱۸۳ | ۰/۰۰۰۶ |
| ۰/۹۸۲۴ | ۲۹۹/۷۵۲۳ | ۰/۶۰۵۳ | ۰/۸۱۳۵ | ۰/۹۸۶۰ | ۰/۸۰۸۷ | ۰/۰۰۰۷ |
| ۰/۹۸۴۱ | ۳۰۲/۲۴۰۲ | ۰/۶۱۲۴ | ۰/۸۲۰۲ | ۰/۹۸۷۰ | ۰/۸۱۳۴ | ۰/۰۰۰۶۵ |
| ۰/۹۸۳۱ | ۳۰۰/۷۳۲۹ | ۰/۶۰۸۱ | ۰/۸۱۶۱ | ۰/۹۸۶۴ | ۰/۸۱۰۶ | ۰/۰۰۰۶۸ |
| ۰/۹۸۲۸ | ۳۰۰/۲۴۰۱ | ۰/۶۰۶۷ | ۰/۸۱۴۸ | ۰/۹۸۶۲ | ۰/۸۰۹۷ | ۰/۰۰۰۶۹ |
| ۰/۹۸۲۶ | ۲۹۹/۹۹۵۶ | ۰/۶۰۶۰ | ۰/۸۱۴۱ | ۰/۹۸۶۱ | ۰/۸۰۹۲ | ۰/۰۰۰۶۹۵ |
| ۰/۹۸۲۶ | ۳۰۰/۰۴۴۴ | ۰/۶۰۶۱ | ۰/۸۱۴۳ | ۰/۹۸۶۱ | ۰/۸۰۹۳ | ۰/۰۰۰۶۹۴ |
| **۰/۹۸۲۶** | **۳۰۰** | **۰/۶۰۶۰** | **۰/۸۱۴۲** | **۰/۹۸۶۱** | **۰/۸۰۹۲** | **۰/۰۰۰۶۹۴۹** |

**جدول ۳**- نتایج عددی مثال ۱ برای $C_{total}^{II}$ و با فرض $c^* = 300$.

| $R_{sys}$ | $C_{total}$ | $y_4$ | $y_3$ | $y_2$ | $y_1$ | λ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۰/۶۱۴۷ | ۷۸/۱۹۴۵ | ۰/۳۳۰۸ | ۰/۴۱۹۳ | ۰/۷۲۹۵ | ۰/۵۳۳۳ | ۰/۰۱ |
| ۰/۹۵۹۱ | ۱۹۴/۴۵۳۹ | ۰/۵۵۷۴ | ۰/۷۳۲۰ | ۰/۹۶۱۵ | ۰/۷۵۳۳ | ۰/۰۰۱ |
| ۰/۹۹۷۵ | ۲۸۷/۳۳۶۲ | ۰/۷۳۲۴ | ۰/۹۰۴۹ | ۰/۹۹۶۰ | ۰/۸۷۹۳ | ۰/۰۰۰۱ |
| ۰/۹۹۷۸ | ۲۹۰/۵۴۷۶ | ۰/۷۳۸۸ | ۰/۹۰۹۵ | ۰/۹۹۶۴ | ۰/۸۸۳۲ | ۰/۰۰۰۰۹ |
| ۰/۹۹۸۱ | ۲۹۴/۰۶ | ۰/۷۴۵۸ | ۰/۹۱۴۵ | ۰/۹۹۶۸ | ۰/۸۸۷۶ | ۰/۰۰۰۰۸ |
| ۰/۹۹۸۴ | ۲۹۷/۸۹۶۷ | ۰/۷۵۳۵ | ۰/۹۱۹۷ | ۰/۹۹۷۲ | ۰/۸۹۲۳ | ۰/۰۰۰۰۷ |
| ۰/۹۹۸۷ | ۳۰۲/۱۶۶۳ | ۰/۷۶۲۱ | ۰/۹۲۵۴ | ۰/۹۹۷۶ | ۰/۸۹۷۵ | ۰/۰۰۰۰۶ |
| ۰/۹۹۸۵ | ۲۹۹/۹۷۰۳ | ۰/۷۵۷۷ | ۰/۹۲۲۵ | ۰/۹۹۷۴ | ۰/۸۹۴۸ | ۰/۰۰۰۰۶۵ |
| ۰/۹۹۸۶ | ۳۰۰/۳۹۹۳ | ۰/۷۵۸۵ | ۰/۹۲۳۱ | ۰/۹۹۷۴ | ۰/۸۹۵۳ | ۰/۰۰۰۰۶۴ |
| ۰/۹۹۸۵ | ۳۰۰/۱۸۴۲ | ۰/۷۵۸۱ | ۰/۹۲۲۸ | ۰/۹۹۷۴ | ۰/۸۹۵۰ | ۰/۰۰۰۰۶۴۵ |
| ۰/۹۹۸۵ | ۳۰۰/۰۱۳ | ۰/۷۵۷۸ | ۰/۹۲۲۶ | ۰/۹۹۷۴ | ۰/۸۹۴۸ | ۰/۰۰۰۰۶۴۹ |
| **۰/۹۹۸۵** | **۳۰۰** | **۰/۷۵۷۷** | **۰/۹۲۲۶** | **۰/۹۹۷۴** | **۰/۸۹۴۸** | **۰/۰۰۰۰۶۴۹۳** |

**جدول ۴. نتایج عددی مثال ۱ برای $C_{total}^{III}$ و با فرض $c^* = 800$.**

| $R_{sys}$ | $C_{total}$ | $y_4$ | $y_3$ | $y_2$ | $y_1$ | λ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۰/۴۱۴۳ | ۵۶۹/۸۱۵۷ | ۰/۲۴۰۵ | ۰/۳۱۶۵ | ۰/۶۵۸۶ | ۰/۴۷۱۳ | ۰/۰۱ |
| ۰/۹۳۵۲ | ۷۷۶/۷۳۷۲ | ۰/۵۱۱۸ | ۰/۶۸۹۱ | ۰/۹۴۸۵ | ۰/۷۲۶۰ | ۰/۰۰۱ |
| ۰/۹۴۲۸ | ۷۸۵/۲۱۵۹ | ۰/۵۲۲۸ | ۰/۷۰۲۵ | ۰/۹۵۳۴ | ۰/۷۳۴۷ | ۰/۰۰۰۹ |
| ۰/۹۵۰۳ | ۷۹۴/۵۲۱۴ | ۰/۵۳۴۹ | ۰/۷۱۷۰ | ۰/۹۵۸۳ | ۰/۷۴۴۰ | ۰/۰۰۰۸ |
| ۰/۹۵۷۶ | ۸۰۴/۸۰۷۱ | ۰/۵۴۸۳ | ۰/۷۳۲۷ | ۰/۹۶۳۳ | ۰/۷۵۴۳ | ۰/۰۰۰۷ |
| ۰/۹۵۴۰ | ۷۹۹/۵۲۲۸ | ۰/۵۴۱۴ | ۰/۷۲۴۷ | ۰/۹۶۰۸ | ۰/۷۴۹۰ | ۰/۰۰۰۷۵ |
| ۰/۹۵۴۷ | ۸۰۰/۵۵۶۵ | ۰/۵۴۲۸ | ۰/۷۲۶۲ | ۰/۹۶۱۳ | ۰/۷۵۰۱ | ۰/۰۰۰۷۴ |
| ۰/۹۵۴۳ | ۸۰۰/۰۳۸۳ | ۰/۵۴۲۱ | ۰/۷۲۵۴ | ۰/۹۶۱۰ | ۰/۷۴۹۵ | ۰/۰۰۰۷۴۵ |
| ۰/۹۵۴۳ | ۷۹۹/۹۳۵۰ | ۰/۵۴۲۰ | ۰/۷۲۵۳ | ۰/۹۶۱۰ | ۰/۷۴۹۴ | ۰/۰۰۰۷۴۶ |
| ۰/۹۵۴۳ | ۸۰۰/۰۰۷۳ | ۰/۵۴۲۱ | ۰/۷۲۵۴ | ۰/۹۶۱۰ | ۰/۷۴۹۵ | ۰/۰۰۰۷۴۵۳ |
| ۰/۹۵۴۳ | ۷۹۹/۹۹۶۹ | ۰/۵۴۲۰ | ۰/۷۲۵۴ | ۰/۹۶۱۰ | ۰/۷۴۹۵ | ۰/۰۰۰۷۴۵۴ |
| **۰/۹۵۴۳** | **۸۰۰** | **۰/۵۴۲۱** | **۰/۷۲۵۴** | **۰/۹۶۱۰** | **۰/۷۴۹۵** | **۰/۰۰۰۷۴۵۳۷** |

**جدول ۵.** نتایج عددی مثال ۱ برای $C_{total}^{IV}$ و با فرض $c^* = 200$.

| $R_{sys}$ | $C_{total}$ | $y_4$ | $y_3$ | $y_2$ | $y_1$ | λ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۰/۶۸۸۸ | ۱۴۸/۹۶۰۳ | ۰/۳۱۰۸ | ۰/۴۶۲۵ | ۰/۸۹۵۶ | ۰/۶۰۶۸ | ۰/۰۱ |
| ۰/۹۸۶۳ | ۲۲۶/۷۶۹۲ | ۰/۶۱۷۲ | ۰/۸۳۵۳ | ۰/۹۸۹۹ | ۰/۸۲۳۷ | ۰/۰۰۱ |
| ۰/۸۷۰۶ | ۱۸۰/۹۵۰۳ | ۰/۴۱۷۴ | ۰/۶۱۸۰ | ۰/۹۴۸۸ | ۰/۶۹۱۷ | ۰/۰۰۵ |
| ۰/۹۳۶۰ | ۱۹۹/۲۵۳۹ | ۰/۴۸۹۲ | ۰/۷۰۷۳ | ۰/۹۶۹۵ | ۰/۷۴۲۱ | ۰/۰۰۳ |
| ۰/۹۶۳۷ | ۲۱۱/۰۲۸۱ | ۰/۵۴۰۶ | ۰/۷۶۳۴ | ۰/۹۷۹۸ | ۰/۷۷۶۰ | ۰/۰۰۲ |
| ۰/۹۳۸۹ | ۲۰۰/۳۲۴۳ | ۰/۴۹۳۷ | ۰/۷۱۲۴ | ۰/۹۷۰۵ | ۰/۷۴۵۱ | ۰/۰۰۲۹ |
| ۰/۹۳۸۰ | ۲۰۰/۰۰۱۱ | ۰/۴۹۲۳ | ۰/۷۱۰۹ | ۰/۹۷۰۲ | ۰/۷۴۴۲ | ۰/۰۰۲۹۳ |
| ۰/۹۳۷۷ | ۱۹۹/۸۹۳۸ | ۰/۴۹۱۹ | ۰/۷۱۰۴ | ۰/۹۷۰۱ | ۰/۷۴۳۹ | ۰/۰۰۲۹۴ |
| ۰/۹۳۸۰ | ۱۹۹/۹۹۰۴ | ۰/۴۹۲۳ | ۰/۷۱۰۸ | ۰/۹۷۰۲ | ۰/۷۴۴۲ | ۰/۰۰۲۹۳۱ |
| **۰/۹۳۸۰** | **۲۰۰** | **۰/۴۹۲۳** | **۰/۷۱۰۹** | **۰/۹۷۰۲** | **۰/۷۴۴۲** | **۰/۰۰۲۹۳۰۱** |

**جدول ۶.** نتایج عددی مثال ۱ برای $C_{total}^{V}$ و با فرض $c^* = 550$.

| $R_{sys}$ | $C_{total}$ | $y_4$ | $y_3$ | $y_2$ | $y_1$ | λ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۰/۶۲۵۰ | ۴۸۲/۲۱۰۱ | ۰/۲۹۰۹ | ۰/۴۱۹۰ | ۰/۸۵۶۲ | ۰/۵۷۴۴ | ۰/۰۱ |
| ۰/۹۸۰۲ | ۵۳۲/۶۶۸۹ | ۰/۵۹۳۰ | ۰/۸۰۷۸ | ۰/۹۸۵۷ | ۰/۸۰۴۸ | ۰/۰۰۱ |
| ۰/۹۹۹۱ | ۵۵۳/۸۲۵۱ | ۰/۷۷۳۶ | ۰/۹۴۰۱ | ۰/۹۹۸۵ | ۰/۹۱۰۲ | ۰/۰۰۰۱ |
| ۰/۹۹۷۷ | ۵۴۹/۲۲۶۴ | ۰/۷۳۰۰ | ۰/۹۱۵۰ | ۰/۹۹۷۱ | ۰/۸۸۶۶ | ۰/۰۰۰۲ |
| ۰/۹۹۸۴ | ۵۵۱/۲۷۱۴ | ۰/۷۴۹۰ | ۰/۹۲۶۵ | ۰/۹۹۷۸ | ۰/۸۹۷۱ | ۰/۰۰۰۱۵ |
| ۰/۹۹۸۳ | ۵۵۰/۸۳۰۳ | ۰/۷۴۴۹ | ۰/۹۲۴۰ | ۰/۹۹۷۷ | ۰/۸۹۴۸ | ۰/۰۰۰۱۶ |
| ۰/۹۹۸۲ | ۵۵۰/۴۰۶۵ | ۰/۷۴۰۹ | ۰/۹۲۱۷ | ۰/۹۹۷۵ | ۰/۸۹۲۶ | ۰/۰۰۰۱۷ |
| ۰/۹۹۸۰ | ۵۴۹/۹۹۸۸ | ۰/۷۳۷۱ | ۰/۹۱۹۴ | ۰/۹۹۷۴ | ۰/۸۹۰۶ | ۰/۰۰۰۱۸ |
| ۰/۹۹۸۰ | ۵۵۰/۰۳۸۹ | ۰/۷۳۷۵ | ۰/۹۱۹۶ | ۰/۹۹۷۴ | ۰/۸۹۰۸ | ۰/۰۰۰۱۷۹ |
| ۰/۹۹۸۰ | ۵۵۰/۰۰۲۸ | ۰/۷۳۷۱ | ۰/۹۱۹۴ | ۰/۹۹۷۴ | ۰/۸۹۰۶ | ۰/۰۰۰۱۷۹۹ |
| **۰/۹۹۸۰** | **۵۵۰** | **۰/۷۳۷۱** | **۰/۹۱۹۴** | **۰/۹۹۷۴** | **۰/۸۹۰۶** | **۰/۰۰۰۱۷۹۹۷** |

## ۵-جمع‌بندی

در این مقاله، مسئله طراحی بهینه یک سیستم سری-موازی از طریق حل یک مسئله بهینه‌سازی مورد مطالعه قرار گرفت. برای این منظور، میزان افزایش مورد نیاز برای قابلیت اطمینان اجزای یک سیستم سری-موازی به گونه‌ای تعیین شد که قابلیت اطمینان کل سیستم به حداکثر برسد و هزینه حاصل از این افزایش از مقدار معلوم و از قبل تعیین شده‌ای بیشتر نشود. پنج حالت مختلف برای تابع هزینه در نظر گرفته شد و در هر حالت با به‌کارگیری روش لاگرانژ و ارائه یک الگوریتم به حل مسئله پرداخته شد. در انتها با ارائه یک مثال روش مطرح شده مورد ارزیابی قرار گرفت.


## تقدیر و تشکر

در اینجا لازم است از سردبیر، هیئت تحریریه، داوران و ویراستار محترم مجله به خاطر صرف وقت در مطالعه مقاله و ارائه پیشنهادات ارزنده، تقدیر و تشکر شود.


## ۶- منابع


[1] Barlow, R. E., & Proschan, F. (1975). Statistical theory of reliability and life testing: probability models. Florida State Univ Tallahassee.

[2] Meeker, W. Q., & Escobar, L. A. (1998). Statistical methods for reliability data John Wiley & Sons. Inc., New York.

[3] Karbasian, M., & Tabatabai, L. (2009). Introduction to Reliability, Arkan Danesh Publications, Isfahan, Volume 1. (In Persian).

[4] Asadi, M. (2016). Introduction to Reliability Theory, University Publishing Center, Isfahan, Second Edition. (In Persian).

[5] Heydari, A., & Shahrokhi, M. (2021). Optimizing the program of preventive maintenance of the series-parallel system: A case study of the water supply system of power plants. *Journal of Quality Engineering and Management*, *11*(1), 45-60. (In Persian).

[6] Aghaei, M., Amiri, M., Taghavifard, M. T., & Azimi, P. (2019). Developing a Mathematical Model to Determine the Optimum Buffer Size and Redundancy Allocation in Series-Parallel Production Systems. *Journal of Quality Engineering and Management*, *9*(2), 101-123. (In Persian).

[7] Khatami FirouzAbadi, S. M. A., & Javanshir, H. (2018). Risk and Reliability Assessment, Second Edition. (In Persian).

[8] Coit, D. W., & Smith, A. E. (1996). Reliability optimization of series-parallel systems using a genetic algorithm. IEEE Transactions on reliability, 45(2), 254-260.

[9] Tavakkoli-Moghaddam, R., Safari, J., & Sassani, F. (2008). Reliability optimization of series-parallel systems with a choice of redundancy strategies using a genetic algorithm. Reliability Engineering & System Safety, 93(4), 550-556.

[10] Karbasian, M., Ghandehary, M., & Abedi, S. (2010). Optimization of Reliability Centered Maintenance Bassed on Maintenance Costs and Reliability with Consideration of Location of Components. Journal of Production and Operations Management, 1(1), 19-30. (In Persian).

[11] Chambari, A., Rahmati, S. H. A., & Najafi, A. A. (2012). A bi-objective model to optimize reliability and cost of system with a choice of redundancy strategies. Computers & Industrial Engineering, 63(1), 109-119.

[12] Safaei, F., & Ahmadi, J. (2015). Comparison of Optimal Replacement Times in Repairable Systems Based on Failure Rate Functions and Probability of Minimal Repair Times. Journal of Statistical Sciences, 9(1), 61-76. (In Persian).

[13] Basiri, E. (2021). Optimization of Reliability and Cost in Series-Parallel-

Repairable Systems with Bathtub-Shaped Failure Rate. Journal of Statistical Sciences, 14(2), 351-366. (In Persian).

[14] Kim, S., & Ahn, N. (2021). An Optimal Algorithm for the Reliability Optimization Problem of a Series System with Selectable Alternatives. Industrial Engineering & Management Systems, 20(1), 61-68.

[15] Garg, H. (2021). Bi-objective reliability-cost interactive optimization model for series-parallel system. International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences, 6(5), 1331.

# Design of a Series-Parallel System Based on the Problem of Optimization of Reliability and Cost

Elham Basiri[1]

Department of Statistics, Kosar University of Bojnord, Bojnord, Iran

**Abstract**

Reliability is one of the most important issues in the engineering design process. When we use a system, we often want to determine the reliability of this system. Clearly, higher reliability systems are more valuable. On the other hand, the reliability of each system depends on the structure and reliability of its components. Therefore, to increase the reliability of the system, the reliability of its components can be improved. In addition, to increase the reliability of the components of a system, it is necessary to consider its costs. This study, by considering a series-parallel system, determines the amount of increase required for the reliability of system components so that the reliability of the whole system is maximized and the cost of this increasing does not exceed a predetermined value. The following is a numerical example for reviewing the results. Finally, a summary of the results of the article is given.

***Keywords***: Series-parallel system, Optimization, Reliability, Cost

**Main Results**

In this paper, we consider a series-parallel system with $m$ series subsystems that each of them contains $n_i$ parallel components. Also, we assume that
$R_i$: the reliability of subsystems components, $i=1,..,m$,
$c_i$: the costs related to increasing the reliability of subsystems components, $i=1,..,m$,
$R_{sys}$: the reliability of whole system,
$C_{total}$: the total cost related to designing system,
$c^*$: the maximum budget
and the decision variable is
$x_i$: the required amount of increasing reliability for each of subsystems.

The aim is maximizing the reliability of system so that the related cost does not exceed a pre-determined value, c*. It means

$$\begin{aligned} &Max \quad && R_{sys}, \\ &s.t. && C_{total} \le c^*. \end{aligned}$$

For the series-parallel system we can write

$$\begin{aligned} &Max \quad && \prod_{i=1}^{m}[1-(1-(R_i+x_i))^{n_i}], \\ &s.t. && C_{total} \le c^*, \;\; 0 \le R_i + x_i \le 1, \end{aligned}$$

[1] elhambasiri@kub.ac.ir

Which is equivalent to

$$\begin{aligned} & Max \quad \sum_{i=1}^{m} ln[1-(1-(R_i+x_i))^{n_i}]\,, \\ & s.t. \quad C_{total} \le c^*, \;\; 0 \le R_i + x_i \le 1, \end{aligned}$$

Five special cases for the cost we consider as

$$C_{total}^{I} = \sum_{i=1}^{m} c_i n_i (R_i + x_i)\,,$$
$$C_{total}^{II} = \sum_{i=1}^{m} c_i n_i (R_i + x_i)^2\,,$$
$$C_{total}^{III} = \sum_{i=1}^{m} c_i n_i e^{(R_i + x_i)}\,,$$
$$C_{total}^{IV} = \sum_{i=1}^{m} c_i n_i ln\big(1 + (R_i + x_i)\big)\,,$$
$$C_{total}^{V} = \sum_{i=1}^{m} c_i n_i \sqrt{1 + (R_i + x_i)}\,.$$

Now, assuming$y_i = R_i + x_i$, Lagrange method optimization is utilized for solving the problem. So, we write

$$H\left(\underline{y}, \lambda\right) = \sum_{i=1}^{m} ln[1-(1-y_i)^{n_i}] - \lambda\{C_{total}^{k} - c^*\},$$

that leads to

$$C_{total}^{k} = c^*, \qquad k = I, \cdots, V,$$

and

$$\begin{cases} \quad (1-y_i)^{n_i-1} - \lambda c_i & \\ +\lambda(1-y_i)^{n_i} = 0, & k = I \\ \quad (1-y_i)^{n_i-1} - 2\lambda c_i y_i & \\ +2\lambda c_i y_i (1-y_i)^{n_i} = 0, & k = II, \\ \quad (1-y_i)^{n_i-1} - \lambda c_i e^{y_i} & \\ +\lambda c_i e^{y_i}(1-y_i)^{n_i} = 0, & k = III, \\ \quad (1-y_i)^{n_i-1}(1+y_i) - \lambda c_i & \\ +\lambda c_i (1-y_i)^{n_i} = 0, & k = IV, \\ \quad (1-y_i)^{n_i-1}\sqrt{1+y_i} - \lambda c_i & \\ +\lambda c_i (1-y_i)^{n_i} = 0, & k = V. \end{cases}$$

For finding the decision variables, the following algorithm can be applied:

**Algorithm:** Let values of $R_i$, $n_i$, $c_i$, $i$-$1,..,m$ and $c^*$ are known. Then

1- Choose a desired value for $\lambda$

2- Determine values of $y_i$, $i=1,..,m$

3- Compute the value of $C_{total}$.

4- If $C_{total} = c^*$ then the process is finished, else change the value of λ and go to Step 2.

## References

[1] Barlow, R. E., & Proschan, F. (1975), Statistical theory of reliability and life testing: probability models. Florida State Univ Tallahassee.
[2] Meeker, W. Q., & Escobar, L. A. (1998), Statistical methods for reliability data John Wiley & Sons. Inc., New York.
[3] Karbasian, M., & Tabatabai, L. (2009), Introduction to Reliability, Arkan Danesh Publications, Isfahan, Volume 1. (In Persian).
[4] Asadi, M. (2016), Introduction to Reliability Theory, University Publishing Center, Isfahan, Second Edition. (In Persian).
[5] Heydari, A., & Shahrokhi, M. (2021), Optimizing the program of preventive maintenance of the series-parallel system: A case study of the water supply system of power plants. *Journal of Quality Engineering and Management*, *11*(1), 45-60. (In Persian).
[6] Aghaei, M., Amiri, M., Taghavifard, M. T., & Azimi, P. (2019), Developing a Mathematical Model to Determine the Optimum Buffer Size and Redundancy Allocation in Series-Parallel Production Systems . *Journal of Quality Engineering and Management*, *9*(2), 101-123. (In Persian).
[7] Khatami FirouzAbadi, S.M.A., & Javanshir, H. (2018). Risk and Reliability Assessment, Second Edition. (In Persian).
[8] Coit, D. W., & Smith, A. E. (1996), Reliability optimization of series-parallel systems using a genetic algorithm. IEEE Transactions on reliability, 45(2), 254-260.
[9] Tavakkoli-Moghaddam, R., Safari, J., & Sassani, F. (2008), Reliability optimization of series-parallel systems with a choice of redundancy strategies using a genetic algorithm. Reliability Engineering & System Safety, 93(4), 550-556.

[10] Karbasian, M., Ghandehary, M., & Abedi, S. (2010), Optimization of Reliability Centered Maintenance Bassed on Maintenance Costs and Reliability with Consideration of Location of Components. Journal of Production and Operations Management, 1(1), 19-30. (In Persian).

[11] Chambari, A., Rahmati, S. H. A., & Najafi, A. A. (2012), A bi-objective model to optimize reliability and cost of system with a choice of redundancy strategies. Computers & Industrial Engineering, 63(1), 109-119.

[12] Safaei, F., & Ahmadi, J. (2015), Comparison of Optimal Replacement Times in Repairable Systems Based on Failure Rate Functions and Probability of Minimal Repair Times. Journal of Statistical Sciences, 9(1), 61-76. (In Persian).

[13] Basiri, E. (2021), Optimization of Reliability and Cost in Series-Parallel-Repairable Systems with Bathtub-Shaped Failure Rate. Journal of Statistical Sciences, 14(2), 351-366. (In Persian).
[14] Kim, S., & Ahn, N. (2021), An Optimal Algorithm for the Reliability Optimization Problem of a Series System with Selectable Alternatives. Industrial Engineering & Management Systems, 20(1), 61-68.
[15] Garg, H. (2021), Bi-objective reliability-cost interactive optimization model for series-parallel system. International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences, 6(5), 1331.