مقاله پژوهشی

برآورد پارامترهای توزیع نمایی دو پارامتری تحت سانسور تصادفی شده با حضور داده‌ی پرت و تعیین دوره گارانتی مرتبط با کیفیت کالا

پرویز نصیری

(نویسنده عهده‌دار مکاتبات): دانشیار، دکترای تخصصی آمار ریاضی، گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. pnasiri@pnu.ac.ir

فاطمه گودرزی معصومی

دانشجوی دکترای آمار ریاضی، گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. smasoumi92@yahoo.com

مسعود یارمحمدی

دانشیار، دکترای تخصصی آمار ریاضی، گروه آمار، دانشگاه پیام نورتهران، ایران. masyar@pnu.ac.ir

چکیده: توزیع نمایی دو پارامتری با توجه به اینکه نرخ شکست ثابت دارد در بین توزیع‌های آماری از اهمیت خاصی برخوردار است. و علاوه برآن دارای کاربرد در زمینه‌های پزشکی، مهندسی، اقتصاد، جمعیت‌شناسی، داده‌های طول عمر و قابلیت اعتماد می‌باشد. با توجه به اهمیت داده‌های طول عمر، اخیراً توزیع نمایی دوپارامتری با داده‌های سانسور شده مورد توجه محققان زیادی قرار گرفته است. یکی از بحث‌های مهم پارامتر مکانی که از آن به عنوان پارامتر آستانه حداقل زمان عمر یا دوره گارانتی یاد می‌کنند، می‌باشد. و این در حالی است که تاکنون استنباط درباره پارامتر مکان با داده سانسور تصادفی در حضور داده‌ی پرت مورد بحث قرار نگرفته است. در این مقاله پارامترهای توزیع نمایی دو پارامتری تحت سانسور تصادفی شده با حضور k داده‌ی پرت به روش‌های گشتاوری، ماکسیمم درستنمایی و بیزی برآورد می‌شوند. با توجه به اهمیت پارامتر مکانی، در زمان سانسور توزیع نمایی دو پارامتری با حضور داده‌های پرت، پارامتر مکانی یکسان ولی پارامتر مقیاس متفاوت در نظر گرفته می‌شود. برای بهره‌گیری از نمونه‌گیری گیبس و استفاده از شبیه‌سازی برآوردگرهای گشتاوری، ماکسیمم درستنمایی و بیزی تحت تابع زیان مربع خطا برآورد و مقایسه شده‌اند. در انتها واریانس تعمیم‌یافته با توجه به ابعاد پارامترها به روش ماکسیمم درستنمایی آورده شده است.

واژگان کلیدی: سانسور تصادفی، برآورد ماکسیمم درستنمایی، برآورد بیزی، داده‌ی پرت، میانگین توان دوم خطا.

۱. مقدمه

در بررسی داده‌های طول عمر، زمان عمر هر کدام از آیتم‌های آزمایش از اهمیت زیادی برخوردار است، که زمینه‌های کاربردی آن در پزشکی، زیست‌شناسی، آزمایشات بالینی، بهداشت عمومی، اپیدمیولوژی، مهندسی، اقتصاد و جمعیت‌شناسی است و در نظریه قابلیت اعتماد به عنوان داده‌های طول عمر و یا زمان خرابی شناخته می‌شوند. در تجزیه و تحلیل‌های داده‌های طول عمر از توزیع‌های مختلف آماری از جمله توزیع‌های وایبول[1]، بور[2]، توزیع لوماکس معکوس[3] و توزیع لوماکس معکوس هندسی[4] استفاده می‌شود. از آنجا که جمع‌آوری داده‌های طول عمر به طور کامل یک کار پرهزینه و وقت‌گیر است، اخیراً از طرح‌های سانسور، از جمله سانسور معمولی نوع I، نوع II، سانسور فزاینده و سانسور هیبرید استفاده می‌شود که در بسیاری از این طرح‌ها، زمان سانسور شدن یا تعداد آیتم‌های سانسورشده مورد بررسی قرار می‌گیرد. در عمل هنگامی که آیتم‌ها به طور تصادفی در زمان‌های مختلف از آزمایش حذف می‌شوند از آنها به‌عنوان، سانسور تصادفی یاد می‌کنند. برای نمونه در آزمایشات

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۷/۰۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۰/۲۵

دوره ۱۲/ شماره ۱

صفحات ۱۵-۳۸

[1].Corresponding Author: pnasiri@pnu.ac.ir

[1]. Weibull

[2]. burr

[3]. inverse Lomax

[4]. generalized inverse Lomax

بالینی، یک بیمار ممکن است قبل از اتمام درمان با اخطار قبلی از رده خارج شود و یا به طور مشابه، در مهندسی قابلیت اعتماد، ممکن است لازم باشد یک آیتم از یک آزمایش، قبل از خرابی کامل آن، به علت شکستن یا صرفه‌جویی در وقت و هزینه، از آزمایش خارج شود. برای بررسی داده‌ی سانسور تصادفی می‌توان برای اطلاع بیشتر به مقالات گیلبرت[5] [۱]، برسلو وکرولی[6] [۲]، کوزیول و گرین[7] [۳] و کسورگو هورواث[8] [۴] مراجعه کرد. کیم[9] [۵] و اکرم کهنسال و همکاران [۶] با استفاده از آزمون نیکویی برازش داده‌های تصادفی سانسور شده را مورد بحث قرار داده است و در ادامه قیطانی [۷] و احسن الله و همکاران [۸] و قیطانی و الاوادحی [۹]، فریسل و هورت[10] [۱۰]، ابوطالب و همکاران [۱۱]، اسلام و سلیم[11] [۱۲]، سلیم و رضا[12] [۱۳] و اکرم کهنسال و همکاران [۱۴] نیکویی برازش توزیع‌های مختلف از جمله توزیع نمایی، توزیع بور نوع ۲ و غیره را مورد بررسی قرار دادند. اخیراً، دنیش و اسلم[13] [۱۵،۱۶] پارامترهای توزیع نمایی تعمیم‌یافته تحت داده سانسور شده را به روش بیزی برآورد کرده‌اند، کریشنا و ویوکاناند[14] [۱۷]، گارگ و همکاران[15] [۱۸] و کریشنا و گل[16] [۱۹] توزیع نمایی‌دو پارامتری با سانسور مورد توجه قرار دادند و متذکر شدند که پارامتر مکانی در این توزیع که از آن به عنوان پارامتر آستانه حداقل زمان عمر یا گارانتی یاد می‌کنند، از اهمیت خاصی برخوردار است. قابل ذکر است که در بعضی از کارهای تحقیقاتی در بررسی داده‌های آماری داده‌ی پرت مشاهده می‌شود و از آن به‌عنوان داده‌ی دورافتاده یاد می‌کنند. یکی از مباحث مهم آماری داده‌های دور افتاده است که در عمل بعضی از مشاهدات در مقایسه با بقیه داده‌ها دارای انحراف هستند و این ایده به ذهن می‌رسد که ممکن است اساساً متعلق به توزیع متفاوتی باشند. در این صورت بررسی توزیع مربوط به داده‌ها و برآورد پارامترها با در نظر گرفتن داده‌های دور افتاده از اهمیت خاصی برخورد است. دیکشیت و نصیری[17] [۲۰]، تابع چگالی توام یک نمونه n تایی که k تا از آن‌ها دارای تابع چگالی $f_1(x)$ و $n-k$ دارای تابع چگالی $f_2(x)$ و Φ بردار پارامتر است را به صورت

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n,\Phi) = \frac{1}{\binom{n}{k}}\prod_{i=1}^{n} f_1(x_i,\Phi)\cdot\sum_{\underline{A}}\prod_{j=1}^{k}\frac{f_2(x_{Aj},\Phi)}{f_1(x_{Aj},\Phi)} \qquad (۱)$$

ارائه داد، که در آن

$$\sum_{\underline{A}} = \sum_{A_1=1}^{n-k+1}\sum_{A_2=A_1+1}^{n-k+2}\cdots\sum_{A_2=A_{k-1}+1}^{n}$$

است. در حالت خاص برای $k=2$ می‌توان تابع چگالی توأم را به صورت زیر نوشت:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_1(x_i)\sum_{A_1=1}^{n-1}\sum_{A_2=A_1+1}^{n}\prod_{j=1}^{2}\frac{f_2(x_{Aj})}{f_1(x_{Aj})} = \frac{2}{n(n-1)}\prod_{i=1}^{n} f_1(x_i)\sum_{A_1=1}^{n-1}\sum_{A_2=A_1+1}^{n}\frac{f_2(x_{A1})\,f_2(x_{A2})}{f_1(x_{A1})\,f_1(x_{A2})} \qquad (۲)$$

با توجه به رابطه‌ی (۱) تابع چگالی حاشیه‌ای $f(x)$ برابر با:

$$f(x) = \frac{k}{n}f_1(x) + \frac{n-k}{n}f_2(x) \qquad (۳)$$

است. با توجه به اهمیت تابع توزیع نمایی دو پارامتری در مدل‌بندی داده‌ها از جمله زمان سرویس‌دهی عوامل در یک سیستم، زمان فروپاشی ذره رادیواکتیو، طول عمر یا زمان خرابی، فاصله جهش در یک رشته DNA، مطالعات پزشکی، اقتصاد و جمعیت‌شناسی مورد استفاده قرار می‌گیرد. متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی دو پارامتری است، اگر دارای تابع چگالی

$$f(x\mid\mu,\theta) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\ ;\ \theta>0,\ 0\le\mu\le x\le\infty \qquad (۴)$$

باشد، که در آن به ترتیب μ و θ پارامترهای مکان و مقیاس هستند. در تمام مطالعات، زمان شکست و همچنین زمان سانسور از صفر شروع می‌شود. در عمل، اکثر موارد دارای زمان شکست کمتری نسبت به طول عمر و زمان سانسور، هستند که به عنوان دوره گارانتی شناخته می‌شوند. بنابراین معرفی حداقل دوره گارانتی در قالب یک پارامتر مکان در مدل‌سازی داده‌های بقا بسیار مهم است. در این مقاله با توجه به کاربرد این توزیع در مدل‌بندی

5. Gilbert
6. Breslow, Crowley
7. Koziol, Green
8. Csorgo, Horvath
9. Kim
10. Friesl, Hurt
11. Saleem, Aslam
12. Saleem, Raza
13. Danish, Aslam
14. Krishna, Vivekanand
15. Garg, Dube
16. Krishna, Goel
17. Dixit, Nasiri

داده‌های طول عمر، کاربرد آن برای داده‌های سانسور شده و داده‌های سانسور شده در حضور داده‌ی پرت مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در صدد آن هستیم که پارامترهای توزیع نمایی دو پارامتری با داده‌ی سانسور شده در حضور داده‌ی پرت را به روش‌های گشتاوری، ماکسیمم درستنمایی و بیزی برآورد و مورد مقایسه قرار دهیم. برای این منظور در ادامه مقاله، در بخش ۲ توزیع نمایی دو پارامتری با داده‌های پرت با عنوان شکست و توزیع زمان سانسور داده معرفی می‌شوند. در بخش ۳ برآوردهای گشتاوری و ماکسیمم درستنمایی مورد بحث قرار می‌گیرد. در بخش ۴ فرمول‌بندی روش برآورد بیزی تحت تابع زیان مربع خطا با توزیع پیشین گاما معکوس ارائه می‌شود و در بخش ۵ با مطالعه شبیه‌سازی عملکرد برآوردگرهای مختلف مورد بحث قرار می‌گیرد. ضمناً لازم به ذکر است برای محاسبات در طول مقاله از نرم‌افزار آماری R استفاده شده است.

۲. توزیع نمایی دو پارامتری تحت سانسور تصادفی شده با حضور داده‌ی پرت

در این بخش برای معرفی توزیع نمایی دو پارامتری تحت سانسور تصادفی شده با حضور داده پرت، اگر توابع چگالی $f_1(x;\mu,\theta)$ و $f_2(x;\mu,\alpha)$ به‌صورت

$$f_1(x,\mu;\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-(x-\mu)/\theta}\quad ,\theta>0\ ,\ 0\le\mu\le x\le\infty \qquad (۵)$$

$$f_2(x,\mu;\alpha)=\frac{1}{\alpha}e^{-(x-\mu)/\alpha}\quad ,\alpha>0\ ,\ 0\le\mu\le x\le\infty \qquad (۶)$$

در نظر گرفته شود، با توجه به رابطه (۳) تابع چگالی حاشیه‌ای برابر است با:

$$\begin{aligned} &f(x;\mu,\theta,\alpha)\\ &\quad=\frac{k}{n\theta}e^{-(x-\mu)/\theta}+\frac{n-k}{n\alpha}e^{-(x-\mu)/\alpha}\\ &\quad;\ \theta,\ \alpha>0,\ \ 0\le\mu\le x\le\infty \end{aligned} \qquad (۷)$$

حال فرض کنید n آیتم با طول عمرهای آزمون $X_1,X_2,\ldots,X_n$ مستقل و دارای تابع چگالی (۷) هستند، همچنین فرض کنید $T_1,T_2,\ldots,T_n$ زمان سانسور تصادفی آنها، به ترتیب دارای تابع چگالی و توزیع $f_T(t,\mu,\lambda)$ و $F_T(t,\mu,\lambda)$ و علاوه بر آن X_i و T_iها مستقل و ناسازگار باشند. با توجه به تعریف متغیرهای تصادفی، اگر بین X_i ها و T_i ها، فقط یک واقعیت مشاهده و زمان واقعی مشاهده با $Y_i=\min(X_i,T_i)$ نشان داده شود، با تعریف متغیر نشانگر D_i به صورت

$$D_i=\begin{cases}1 & if \quad x_i\le T_i\\ 0 & if \quad x_i>T_i\end{cases}$$

نتیجه می‌شود که متغیر تصادفی D_i دارای تابع چگالی احتمال

$$P[D_i=j]=p^j(1-p)^{(1-j)}\ ;\ j=0,1$$

است، به طوری که $p=P[X_i\le T_i]$ است. اگر متغیر تصادفی زمان بقا X دارای توزیع نمایی دوپارامتری با حضور داده‌ی پرت باشد آنگاه با توجه به رابطه‌ی (۷) دارای تابع چگالی

$$\begin{aligned} &f(x\mid\mu,\theta,\alpha)\\ &\quad=\frac{k}{n\theta}e^{-(x-\mu)/\theta}+\frac{n-k}{n\alpha}e^{-(x-\mu)/\alpha}\\ &\quad;\ \theta,\alpha>0,\ \ 0\le\mu\le x\le\infty \end{aligned}$$

است و متغیر تصادفی زمان سانسور T دارای تابع چگالی

$$f(t\mid\mu)=e^{-(t-\mu)};\quad 0\le\mu\le t\le\infty \qquad (۸)$$

باشد و نظر به اینکه از هم مستقل هستند، به طوری که پارامتر μ، پارامتر آستانه حداقل زمان عمر یا دوره گارانتی را مشخص کند. احتمال شکست یک مورد قبل از سانسور شدن برابر است با:

$$\begin{aligned} p&=P[\text{مورد یک شکست}]=P[D=1]=P[X\le T]\\ &=\int_{\mu}^{\infty}P[X\le T\mid T=t]f_T(t)dt\\ &=1-\frac{(n-k)\alpha}{n(\alpha+1)}-\frac{k\theta}{n(\theta+1)} \end{aligned} \qquad (۹)$$

چون متغیرهای X_i **و** T_i از هم مستقل‌اند، نتیجه می‌شود متغیرهای Y_i و D_i هم مستقل و دارای تابع چگالی توأم

$$\begin{aligned} &f_{Y,D}(y_i,d_i,\mu,\theta,\alpha)\\ &\quad=\left\{f_X(y_i,\mu,\theta,\alpha)\left(1-F_T(y_i,\mu)\right)\right\}^{di} \end{aligned}$$

$$\times\left\{f_T\left(y_i,\mu\right)\left(1-F_X\left(y_i,\mu,\theta,\alpha\right)\right)\right\}^{(1-di)}$$
$$=\left\{\frac{k}{n\theta}e^{-\frac{(y_i-\mu)(\theta+1)}{\theta}}+\frac{n-k}{n\alpha}e^{-\frac{(y_i-\mu)(\alpha+1)}{\alpha}}\right\}^{di}$$
$$\times\left\{\frac{k}{n}e^{-\frac{(y_i-\mu)(\theta+1)}{\theta}}+\frac{n-k}{n}e^{-\frac{(y_i-\mu)(\alpha+1)}{\alpha}}\right\}^{1-di} \quad (۱۰)$$
$$,\ y_i\ge\mu\ ,\ d_i=0,1$$

هستند، که در آن y_i دارای توزیع نمایی دو پارامتری در حضور داده‌های پرت با پارامترهای $\left(\frac{(\alpha+1)}{\alpha}\right)$ و $\left(\frac{(\theta+1)}{\theta}\right)$ و توزیع حاشیه‌ای D_i دارای توزیع برنولی با پارامتر P است به‌طوریکه تابع چگالی آنها به ترتیب برابر است با:

$$f\left(y\,|\,\mu,\theta,\alpha\right)=\frac{k(\theta+1)}{n\theta}e^{-\frac{(y_i-\mu)(\theta+1)}{\theta}}+\frac{(n-k)(\alpha+1)}{n\alpha}e^{-\frac{(y_i-\mu)(\alpha+1)}{\alpha}}\quad y_i\ge\mu \quad (۱۱)$$

$$P(D_i=d_i)=\left(\frac{k}{n(1+\theta)}+\frac{(n-k)}{n(1+\alpha)}\right)^{d_i}\times\left(\frac{k\theta}{n(1+\theta)}+\frac{(n-k)\alpha}{n(\alpha+1)}\right)^{(1-d_i)}\ ;\ d_i=0,1 \quad (۱۲)$$

در حالت خاص اگر $k=0$ باشد آنگاه رابطه (۱۰) برابر است با:

$$f_{Y,D}\left(y_i,d_i,\mu,\theta,\lambda\right)$$
$$=\left\{f_X\left(y_i,\mu,\theta\right)\left(1-F_T\left(y_i,\mu,\lambda\right)\right)\right\}^{d_i}$$
$$\times\left\{f_T\left(y_i,\mu,\lambda\right)\left(1-F_X\left(y_i,\mu,\theta\right)\right)\right\}^{(1-d_i)}$$
$$=\left(\frac{1}{\alpha^{d_i}}\right)e^{-\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)(y_i-\mu)}=\left(\frac{1}{\alpha^{d_i}}\right)e^{-\beta(y_i-\mu)}$$
$$y_i>\mu\ ,\ \alpha\ge 0\ ,$$
$$d_i=0,1\ ,\ \beta=\frac{1}{\alpha}+1$$

است که همان تابع چگالی توزیع نمایی دوپارامتری است که توسط کریشنا[18] (۲۰۱۸) داده شده است. بنا به رابطه‌ی (۱۱) گشتاور r ام به صورت زیر محاسبه می‌شود؛

$$E(Y^r)=\int_\mu^\infty y^r\left(\frac{k(\theta+1)}{n\theta}e^{-\frac{(y-\mu)(\theta+1)}{\theta}}+\frac{(n-k)(\alpha+1)}{n\alpha}e^{-\frac{(y-\mu)(\alpha+1)}{\alpha}}\right)dy$$
$$=\frac{k}{n}\sum_{t=0}^{r}\binom{r}{t}\mu^{r-t}\left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)^t\Gamma(t+1)+\frac{n-k}{n}\sum_{t=0}^{r}\binom{r}{t}\mu^{r-t}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^t\Gamma(t+1) \quad (۱۳)$$

با توجه به روابط (۱۲) و (۱۱) امید ریاضی و واریانس متغیرهای Y و D به ترتیب به صورت زیر محاسبه می‌شوند،

$$E(Y)=\int_\mu^\infty y\left(\frac{k(\theta+1)}{n\theta}e^{-\frac{(y-\mu)(\theta+1)}{\theta}}+\frac{(n-k)(\alpha+1)}{n\alpha}e^{-\frac{(y-\mu)(\alpha+1)}{\alpha}}\right)dy$$
$$=\frac{k(\theta+1)}{n\theta}\int_\mu^\infty y\left(e^{-\frac{(y-\mu)(\theta+1)}{\theta}}\right)dy+\frac{(n-k)(\alpha+1)}{n\alpha}\int_\mu^\infty y\left(e^{-\frac{(y-\mu)(\alpha+1)}{\alpha}}\right)dy$$
$$=\mu+\frac{k\theta}{n(1+\theta)}+\frac{(n-k)\alpha}{n(1+\alpha)} \quad (۱۴)$$

$$E(D)=\sum_{d_i=0}^{1}\left(\frac{k}{n(1+\theta)}+\frac{(n-k)}{n(1+\alpha)}\right)^{d_i}\times\left(\frac{k\theta}{n(1+\theta)}+\frac{(n-k)\alpha}{n(\alpha+1)}\right)^{(1-d_i)}$$
$$=\frac{k}{n(1+\theta)}+\frac{(n-k)}{n(1+\alpha)}=p \quad (۱۵)$$

---
[18]. Krishna

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(Y) &= 2\left(\frac{k}{n}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^2+\frac{(n-k)}{n}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^2\right)\\ &-\left(\frac{k\theta}{n(1+\theta)}+\frac{(n-k)\alpha}{n(\alpha+1)}\right)^2\end{aligned} \qquad (۱۶)$$

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(D) &= \left(\frac{k}{n(1+\theta)}+\frac{(n-k)}{n(1+\alpha)}\right)\\ &\times\left(\frac{k\theta}{n(1+\theta)}+\frac{(n-k)\alpha}{n(\alpha+1)}\right)\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

۳- برآورد

در این بخش پارامترهای توزیع نمایی دوپارامتری سانسور شده با حضور داده‌ی پرت به روش‌های گشتاوری، ماکسیمم درستنمایی و بیزی برآورد می‌شوند.

۳-۱. برآورد گشتاوری

در این بخش از برابری گشتاورهای جامعه و نمونه، پارامترهای توزیع نمایی دو پارامتری سانسور شده با حضور داده‌ی پرت برآورد می‌شوند. برای این منظور اگر

$$\bar{d}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_i \quad و \quad \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i \quad و \quad s_y^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y}) \quad و$$

$$s_d^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(d_i-\bar{d})$$

$$E(Y)=\mu+\frac{k\theta}{n(1+\theta)}+\frac{(n-k)\alpha}{n(1+\alpha)}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(Y) &= 2\left(\frac{k}{n}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^2+\frac{(n-k)}{n}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^2\right)\\ &-\left(\frac{k\theta}{n(1+\theta)}+\frac{(n-k)\alpha}{n(\alpha+1)}\right)^2\end{aligned}$$

$$E(D)=\frac{k}{n(1+\theta)}+\frac{(n-k)}{n(1+\alpha)}=p$$

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(D) &= \left(\frac{k}{n(1+\theta)}+\frac{(n-k)}{n(1+\alpha)}\right)\left(\frac{k\theta}{n(1+\theta)}+\frac{(n-k)\alpha}{n(\alpha+1)}\right)\end{aligned}$$

به ترتیب گشتاورهای نمونه و جامعه باشند، از برابری آنها می‌توان نتیجه گرفت:

$$E(D)=\frac{k}{n(1+\theta)}+\frac{(n-k)}{n(1+\alpha)}=\bar{d}$$

از طرفی

$$\frac{k\theta}{n(1+\theta)}+\frac{(n-k)\alpha}{n(\alpha+1)}=1-\bar{d}$$

در نتیجه:

$$E(Y)=\bar{y}=\mu+\frac{k\theta}{n(1+\theta)}+\frac{(n-k)\alpha}{n(1+\alpha)}=\mu+1-\bar{d}$$

بنابراین

$$\hat{\mu}=\bar{y}+\bar{d}-1 \qquad (۱۸)$$

با توجه به رابطه‌ی (۱۴) برآوردگر θ برابراست با:

$$\hat{\theta}=\frac{\dfrac{n(\bar{y}-\mu)}{k}-\dfrac{(n-k)\alpha}{k(1+\alpha)}}{1-\dfrac{n(\bar{y}-\mu)}{k}+\dfrac{(n-k)\alpha}{k(1+\alpha)}} \qquad (۱۹)$$

با توجه به روابط (۱۹)، (۱۶) و (۱۷) داریم:

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(D) &= \left(\frac{k}{n(1+\theta)}+\frac{(n-k)}{n(1+\alpha)}\right)\left(\frac{k\theta}{n(1+\theta)}+\frac{(n-k)\alpha}{n(1+\alpha)}\right)\\ &=\left(1-(\bar{y}-\mu)\right)(\bar{y}-\mu)=(\bar{y}-\mu)-(\bar{y}-\mu)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(Y) &= S_y^2\\ &=2\left(\frac{k}{n}\left(\frac{\hat{\theta}}{1+\hat{\theta}}\right)^2+\frac{(n-k)}{n}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^2\right)-(\bar{y}-\mu)^2\end{aligned}$$

$$S_y^2-S_d^2=2\left(\frac{k}{n}\left(\frac{\hat{\theta}}{1+\hat{\theta}}\right)^2+\frac{(n-k)}{n}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^2\right)-(\bar{y}-\mu)$$

$$=2\left(\frac{k}{n}\left(\frac{n\left(\bar{y}-\mu\right)}{k}-\frac{(n-k)\alpha}{k(1+\alpha)}\right)^{2}+\frac{n-k}{n}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{2}\right)-\left(\bar{y}-\mu\right)$$

$$\begin{aligned} & f(\alpha) \\ & =s_{y}^{2}-s_{d}^{2}+\bar{y}-\mu \\ & -2\left(\frac{k}{n}\left(\frac{n\left(\bar{y}-\mu\right)}{k}-\frac{(n-k)\alpha}{k(1+\alpha)}\right)^{2}+\frac{n-k}{n}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{2}\right) \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

از آنجا که معادلات نرمال تابع صریحی از پارامترها نیستند می‌توان برای برآورد آنها از روش نیوتن-رافسون، که یک روش مماس برای ریشه‌یابی است استفاده کرد. در این صورت برآوردگر α را به صورت زیر تخمین می‌زنیم:

$$\alpha_{i+1}=\alpha_{i}-\frac{f\left(\alpha_{i}\right)}{f'\left(\alpha_{i}\right)}$$

که در آن

$$\begin{aligned} & f'\left(\alpha_{i}\right) \\ & =-4\left[\frac{(n-k)\alpha}{n(1+\alpha)^{3}}+\left(\frac{n\left(\bar{y}-\mu\right)}{k}-\frac{(n-k)\alpha}{k(1+\alpha)}\right)\right. \\ & \left.\left(\frac{(n-k)}{k(1+\alpha)^{2}}\right)\times\frac{k}{n}\right] \end{aligned}$$

است.

۳-۲. برآورد ماکسیمم درستنمایی

برای برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها، اگر $\left(Y_{1},d_{1}\right),\ldots,\left(Y_{n},d_{n}\right)$ یک نمونه تصادفی از رابطه (۱۰) باشد، با استفاده از رابطه (۱) می‌توان تابع توأم را به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} & L=f\left(\underset{\sim}{Y},\underset{\sim}{d}\right) \\ & =\left[\frac{1}{\binom{n}{k}}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{\theta}\right)^{k}e^{-n\left(y_{(1)}-\mu\right)\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}e^{-\sum_{j=1}^{n}\left(y_{(j)}-y_{(1)}\right)\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right. \\ & \left.\times\sum_{\underset{\sim}{A}}\left(e^{-\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(Ar)}-y_{(1)}\right)\left(\frac{\theta+1}{\theta}-\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}e^{-\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(1)}-\mu\right)\left(\frac{\theta+1}{\theta}-\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right)\right]^{\sum_{j=1}^{n}d_{j}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\binom{n}{k}}e^{-n\left(y_{(1)}-\mu\right)\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}e^{-\sum_{j=1}^{n}\left(y_{(j)}-y_{(1)}\right)\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right. \\ & \left.\times\sum_{\underset{\sim}{A}}\left(e^{-\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(1)}-\mu\right)\left(\frac{\theta+1}{\theta}-\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}e^{-\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(Ar)}-y_{(1)}\right)\left(\frac{\theta+1}{\theta}-\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right)\right]^{n-\sum_{1}^{n}d_{j}} \\ & =\left[\frac{1}{\binom{n}{k}}\right]^{n}\left[\frac{1}{\alpha}\right]^{(n-k)d_{i}}\left[\frac{1}{\theta}\right]^{kd_{i}} \\ & \times e^{-n^{2}\left(y_{(1)}-\mu\right)\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}e^{-n\sum_{j=1}^{n}\left(y_{(j)}-y_{(1)}\right)\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)} \\ & \left[\sum_{\underset{\sim}{A}}e^{-\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(Ar)}-y_{(1)}\right)\left(\frac{\theta+1}{\theta}-\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}e^{-\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(1)}-\mu\right)\left(\frac{\theta+1}{\theta}-\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right]^{n} \\ & \times\left\{I_{(\mu,\infty)}\left(y_{(1)}\right)\right\} \quad \theta,\alpha>0 \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

اگر $l(\mu,\theta,\alpha)$ لگاریتم تابع درستنمایی رابطه (۲۱) باشد، آنگاه می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} & l(\mu,\theta,\alpha)= \\ & -n\log\binom{n}{k}-\left(\sum_{j=1}^{n}d_{j}\right)\times(n-k)\log(\alpha)-\left(\sum_{j=1}^{n}d_{j}\right)k\log(\theta) \\ & -n\sum_{j=1}^{n}\left(y_{(j)}-y_{(1)}\right)\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)-n^{2}\left(y_{(1)}-\mu\right)\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) \qquad (22) \\ & +n\log\left[\sum_{A}\left(e^{-\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(Ar)}-y_{(1)}\right)\left(\frac{\theta+1}{\theta}-\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\times e^{-\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(1)}-\mu\right)\left(\frac{\theta+1}{\theta}-\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right)\right] \end{aligned}$$

فرض کنید

$$w\left(y_{A};\theta,\alpha\right)=e^{-\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(Ar)}-y_{(1)}\right)\left(\frac{\theta+1}{\theta}-\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}$$

مشتق‌های $w\left(y_{A},\theta,\alpha\right)$ نسبت به α و θ به ترتیب برابرند با:

$$w_{\theta}=\frac{\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(Ar)}-y_{(1)}\right)}{\theta^{2}}e^{-\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(Ar)}-y_{(1)}\right)\left(\frac{\theta+1}{\theta}-\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}$$

$$w_{\alpha}=\frac{\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(Ar)}-y_{(1)}\right)}{\alpha^{2}}e^{-\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(Ar)}-y_{(1)}\right)\left(\frac{\theta+1}{\theta}-\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}$$

همان‌طور که می‌دانیم برآورد ماکسیمم درستنمایی μ برابر با $\hat{\mu}=y_{(1)}$ است و برای برآورد پارامترهای θ و α از رابطه (۲۲) نسبت به پارامترها مشتق و برابر صفر قرار داد تا معادلات نرمال به‌صورت:

$$L_{\theta}=\frac{dl(\mu,\theta,\alpha)}{d\theta}=\frac{-\left(\sum_{1}^{n}d_j\right)k}{\theta}+\frac{n\sum_{A}w_{\theta}}{\sum_{A}w(y_A,\theta,\alpha)}=0 \tag{۲۳}$$

$$L_{\alpha}=\frac{dl(\mu,\theta,\alpha)}{d\alpha}=\frac{-\left(\sum_{1}^{n}d_j\right)(n-k)}{\alpha}+\frac{n\sum_{j=1}^{n}\left(y_{(j)}-y_{(1)}\right)}{\alpha^2}+\frac{n\sum_{A}w_{\alpha}}{\sum_{A}w(y_A,\theta,\alpha)}=0 \tag{۲۴}$$

به‌دست آیند. از آنجا که معادلات نرمال تابع صریحی از پارامترها نیستند، پارامترهای α و θ با استفاده از روش نیوتن – رافسون برآورد می‌شوند برای این منظور برآوردگر $\beta=(\theta,\alpha)$ به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$\hat{\beta}_{i+1}=\hat{\beta}_i-G^{-1}g \tag{۲۵}$$

که در آن g برداری از معادلات نرمال است. به طوری‌که $g=[g_1\ g_2]$ که $g_1=L_{\theta}$ و $g_2=L_{\alpha}$ و G ماتریس مشتق دوم است.

$$G=\begin{bmatrix}\frac{dg_1}{d\theta} & \frac{dg_1}{d\alpha}\\ \frac{dg_2}{d\theta} & \frac{dg_2}{d\alpha}\end{bmatrix}$$

درایه‌های ماتریس g به‌صورت زیر است

$$\frac{dg_1}{d\theta}=L_{\theta\theta}=\frac{k\left(\sum d_i\right)}{\theta^2}+\frac{n\sum_{A}w_{\theta\theta}}{\sum_{A}w(y_A,\theta,\alpha)}-n\left(\frac{\sum_{A}w_{\theta}}{\sum_{A}w(y_A,\theta,\alpha)}\right)^2 \tag{۲۶}$$

$$\frac{dg_1}{d\alpha}=L_{\theta\alpha}=\frac{n\sum_{A}w_{\theta\alpha}}{\sum_{A}w(y_A,\theta,\alpha)}-n\frac{\sum_{A}w_{\theta}\sum_{A}w_{\alpha}}{\left(\sum_{A}w(y_A,\theta,\alpha)\right)^2} \tag{۲۷}$$

$$\frac{dg_2}{d\theta}=L_{\alpha\theta}=n\frac{\sum_{A}w_{\alpha\theta}}{\sum_{A}w(y_A,\theta,\alpha)}-n\frac{\sum_{A}w_{\theta}\sum_{A}w_{\alpha}}{\left(\sum_{A}w(y_A,\theta,\alpha)\right)^2} \tag{۲۸}$$

$$\frac{dg_2}{d\alpha}=L_{\alpha\alpha}=\frac{\sum_{j=1}^{n}d_j(n-k)}{\alpha^2}-\frac{2n\sum_{j=1}^{n}\left(y_{(j)}-y_{(1)}\right)}{\alpha^3}+n\frac{\sum_{A}w_{\alpha\alpha}}{\sum_{A}w(y_A,\theta,\alpha)}-n\left(\frac{\sum_{A}w_{\alpha}}{\sum_{A}w(y_A,\theta,\alpha)}\right)^2 \tag{۲۹}$$

که در آن

$$w_{\theta\theta}=\left[\frac{\left[\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(Ar)}-y_{(1)}\right)\right]^2-2\theta\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(Ar)}-y_{(1)}\right)}{\theta^4}\right]e^{-\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(Ar)}-y_{(1)}\right)\left(\frac{\theta+1}{\theta}-\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}$$

$$w_{\theta\alpha}=\frac{-\left[\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(Ar)}-y_{(1)}\right)\right]^2}{\theta^2\alpha^2}e^{-\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(Ar)}-y_{(1)}\right)\left(\frac{\theta+1}{\theta}-\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}=w_{\alpha\theta}$$

$$w_{\alpha\alpha}=\left[\frac{\left[\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(Ar)}-y_{(1)}\right)\right]^{2}+2\alpha\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(Ar)}-y_{(1)}\right)}{\alpha^{4}}\right]\times e^{-\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(Ar)}-y_{(1)}\right)\left(\frac{\theta+1}{\theta}-\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}$$

می‌باشد.

۴- برآورد بیزی

در این بخش برآورد بیزی پارامترهای توزیع نمایی دو پارامتری با استفاده از داده‌های تصادفی سانسور شده با حضور داده‌ی پرت، تحت تابع زیان مربع خطا برآورد می‌شوند. برای استفاده از روش بیزی فرض کنید پارامترهای α و θ دارای توزیع‌های پیشین گاما معکوس با پارامترهای (a_1,b_1) و (a_2,b_2) به ترتیب دارای توابع چگالی

$$g_1(\theta,a_1,b_1)\propto\frac{1}{\theta^{a_1+1}}\exp\left(\frac{-b_1}{\theta}\right),\quad \theta>0,\ a_1,b_1>0 \qquad (۳۰)$$

$$g_2(\theta,a_2,b_2)\propto\frac{1}{\alpha^{a_2+1}}\exp\left(\frac{-b_2}{\alpha}\right),\quad \alpha>0,\ a_2,b_2>0 \qquad (۳۱)$$

باشند. علاوه بر در نظر گرفتن توزیع‌های پیشین برای پارامترها، فرض می‌شود که از هم مستقل هستند. در این حالت توزیع پسین توأم دو متغیر را می‌توان به صورت (۳۲) نوشت.

$$\Pi\left(\mu,\theta,\alpha,|\tilde{y},\tilde{d}\right)=\frac{l\left(\tilde{y},\tilde{d}\mid\mu,\theta,\lambda\right)g_1(\theta,a_1,b_1)g_2(\lambda,a_2,b_2)g_3(\mu)}{\iiint l\left(\tilde{y},\tilde{d}\mid\mu,\theta,\lambda\right)g_1(\theta,a_1,b_1)g_2(\lambda,a_2,b_2)g_3(\mu)d\mu d\theta d\lambda}$$
$$=\frac{\left[\sum_{\underline{A}}e^{-\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(Ar)}-y_{(1)}\right)\left(\frac{\theta+1}{\theta}-\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}e^{-\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(1)}-\mu\right)\left(\frac{\theta+1}{\theta}-\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right]^{n}\frac{1}{\theta^{a_1+1}}\exp\left(\frac{-b_1}{\theta}\right)\frac{1}{\alpha^{a_2+1}}\exp\left(\frac{-b_2}{\alpha}\right)}{\left[\sum_{\underline{A}}e^{-\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(Ar)}-y_{(1)}\right)\left(\frac{\theta+1}{\theta}-\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}e^{-\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(1)}-\mu\right)\left(\frac{\theta+1}{\theta}-\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right]^{n}\frac{1}{\theta^{a_1+1}}\exp\left(\frac{-b_1}{\theta}\right)\frac{1}{\alpha^{a_2+1}}\exp\left(\frac{-b_2}{\alpha}\right)d\mu d\theta d\lambda} \qquad (۳۲)$$

از آنجا که رابطه (۳۲) تابع صریحی از پارامترها نیست، از روش تقریب لیندلی[۱۹] [۲۲] استفاده می شود، بنابراین هر نسبتی از انتگرال به صورت:

$$l(x)=E\left[y(\alpha,\theta|x)\right]=\frac{\int y(\alpha,\theta)e^{L(\alpha,\theta)+G(\alpha,\theta)}d(\alpha,\theta)}{\int e^{L(\alpha,\theta)+G(\alpha,\theta)}d(\alpha,\theta)} \qquad (۳۳)$$

نوشته می‌شود (برای اطلاع بیشتر به پذیرا و نصیری ۲۰۱۰ مراجعه شود [۲۳])، که در آن $y(\alpha,\theta)$ تابعی از α و θ، $L(\alpha,\theta)$ لگاریتم ماکزیمم درستنمایی و $G(\alpha,\theta)$ لگاریتم توزیع توام پیشین α و θ است. بنابراین می‌توان رابطه‌ی (۳۳) را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}l(x)=y\left(\hat{\alpha},\hat{\theta}\right)+\frac{1}{2}\Big[&\left(\hat{y}_{\theta\theta}+2\hat{y}_{\theta}\hat{p}_{\theta}\right)\hat{\sigma}_{\theta\theta}\\&+\left(\hat{y}_{\alpha\theta}+2\hat{y}_{\alpha}\hat{p}_{\theta}\right)\hat{\sigma}_{\alpha\theta}\\&+\left(\hat{y}_{\theta\alpha}+2\hat{y}_{\theta}\hat{p}_{\alpha}\right)\hat{\sigma}_{\theta\alpha}\\&+\left(\hat{y}_{\alpha\alpha}+2\hat{y}_{\alpha}\hat{p}_{\alpha}\right)\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}\\&+\left(\hat{y}_{\theta}\hat{\sigma}_{\theta\theta}+\hat{y}_{\alpha}\hat{\sigma}_{\theta\alpha}\right)\\&\times\left(\hat{L}_{\theta\theta\theta}\hat{\sigma}_{\theta\theta}+\hat{L}_{\theta\alpha\theta}\hat{\sigma}_{\theta\alpha}+\hat{L}_{\alpha\theta\theta}\hat{\sigma}_{\alpha\theta}+\hat{L}_{\alpha\alpha\theta}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}\right)\\&+\left(\hat{y}_{\theta}\hat{\sigma}_{\alpha\theta}+\hat{y}_{\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}\right)\\&\times\left(\hat{L}_{\alpha\theta\theta}\hat{\sigma}_{\theta\theta}+\hat{L}_{\theta\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\theta\alpha}+\hat{L}_{\alpha\theta\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\theta}+\hat{L}_{\alpha\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}\right)\Big]\end{aligned} \qquad (۳۴)$$

که در آن $\hat{\alpha}$ و $\hat{\theta}$ به ترتیب برآورد ماکسیمم درستنمایی برای α و θ می‌باشند و همچنین

[19]. Approximation Lindley

$$\hat{y}_{\theta}=\frac{\partial_y\left(\hat{\alpha},\hat{\theta}\right)}{\partial\hat{\theta}};\ \ \hat{y}_{\alpha}=\frac{\partial_y\left(\hat{\alpha},\hat{\theta}\right)}{\partial\hat{\alpha}};$$

$$\hat{p}_{\alpha}=\frac{\partial_G\left(\hat{\alpha},\hat{\theta}\right)}{\partial\hat{\alpha}};\ \ \hat{p}_{\theta}=\frac{\partial_G\left(\hat{\alpha},\hat{\theta}\right)}{\partial\hat{\theta}};$$

$$\hat{y}_{\theta\theta}=\frac{\partial_y^2\left(\hat{\alpha},\hat{\theta}\right)}{\partial\hat{\theta}};\ \ \hat{y}_{\alpha\alpha}=\frac{\partial_y^2\left(\hat{\alpha},\hat{\theta}\right)}{\partial\hat{\alpha}};$$

$$\hat{y}_{\alpha\theta}=\frac{\partial_y^2\left(\hat{\alpha},\hat{\theta}\right)}{\partial\hat{\alpha}\partial\hat{\theta}};\ \ \hat{y}_{\theta\alpha}=\frac{\partial_y^2\left(\hat{\alpha},\hat{\theta}\right)}{\partial\hat{\theta}\partial\hat{\alpha}};$$

$$\hat{L}_{\theta\theta\alpha}=\frac{\partial^3L\left(\hat{\alpha},\hat{\theta}\right)}{\partial\hat{\theta}\partial\hat{\theta}\partial\hat{\alpha}};\ \ \hat{L}_{\theta\theta\theta}=\frac{\partial^3L\left(\hat{\alpha},\hat{\theta}\right)}{\partial\hat{\theta}\partial\hat{\theta}\partial\hat{\theta}};$$

$$\hat{L}_{\alpha\alpha\theta}=\frac{\partial^3L\left(\hat{\alpha},\hat{\theta}\right)}{\partial\hat{\alpha}\partial\hat{\alpha}\partial\hat{\theta}};\ \ \hat{L}_{\theta\alpha\theta}=\frac{\partial^3L\left(\hat{\alpha},\hat{\theta}\right)}{\partial\hat{\theta}\partial\hat{\alpha}\partial\hat{\theta}};$$

$$\hat{L}_{\alpha\theta\theta}=\frac{\partial^3L\left(\hat{\alpha},\hat{\theta}\right)}{\partial\hat{\alpha}\partial\hat{\theta}\partial\hat{\theta}};\ \ \hat{L}_{\theta\alpha\alpha}=\frac{\partial^3L\left(\hat{\alpha},\hat{\theta}\right)}{\partial\hat{\theta}\partial\hat{\alpha}\partial\hat{\alpha}};$$

$$\hat{L}_{\alpha\alpha\alpha}=\frac{\partial^3L\left(\hat{\alpha},\hat{\theta}\right)}{\partial\hat{\alpha}\partial\hat{\alpha}\partial\hat{\alpha}};\ \ \hat{L}_{\alpha\theta\alpha}=\frac{\partial^3L\left(\hat{\alpha},\hat{\theta}\right)}{\partial\hat{\alpha}\partial\hat{\theta}\partial\hat{\alpha}};$$

هستند. با توجه به تابع زیان مربع خطا برآوردگرهای بیزی α و θ به‌صورت زیر برآورد می‌شوند:

$$\hat{\alpha}_s=E_{\alpha}(\alpha)$$
$$E_{\alpha}(\alpha)=\int_{(\alpha,\theta)}\alpha\pi\left(\alpha,\theta\mid y\right)d\left(\alpha,\theta\right)$$

بعد از جایگذاری $\pi\left(\alpha,\theta\mid x\right)$ با (۳۳) می‌توان نوشت:

$$E_{\alpha}(\alpha)=\frac{\int y\left(\alpha,\theta\right)e^{L(\alpha,\theta)+G(\alpha,\theta)}d\left(\alpha,\theta\right)}{\int e^{L(\alpha,\theta)+G(\alpha,\theta)}d\left(\alpha,\theta\right)} \qquad (۳۵)$$

که در آن

$$y\left(\alpha,\theta\right)=\alpha$$

$$l\left(\alpha,\theta\right)=\log L=$$
$$-\log\binom{n}{k}-\left(\sum_1^n d_i\right)(n-k)\log(\alpha)-\left(\sum_1^n d_i\right)k\log(\theta)$$
$$-n\sum_1^n\left(y_{(j)}-y_{(1)}\right)\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)-n^2\left(y_{(1)}-\mu\right)\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)$$
$$+n\log\left[\sum_A\left(e^{-\sum_{r=1}^k\left(y_{(Ar)}-y_{(1)}\right)\left(\frac{\theta+1}{\theta}-\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}e^{-\sum_{r=1}^k\left(y_{(1)}-\mu\right)\left(\frac{\theta+1}{\theta}-\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right)\right]$$

$$G\left(\alpha,\theta\right)=-\left[\left(a_1+1\right)\log\left(\theta\right)+\left(a_2+1\right)\log\left(\alpha\right)+\frac{b_1}{\theta}+\frac{b_2}{\alpha}\right]$$

$$y_{\alpha}=1\,;\ y_{\alpha\theta}=y_{\theta\alpha}=y_{\alpha\alpha}=y_{\theta}=y_{\theta\theta}=0$$

$$p_{\theta}=-\frac{\alpha_1+1}{\theta}+\frac{b_1}{\theta^2}$$

$$p_{\theta}=-\frac{\alpha_2+1}{\alpha}+\frac{b_2}{\alpha^2}$$

$$L_{\theta}=\frac{dL(\mu,\theta,\alpha)}{d\theta}=\frac{-\left(\sum_1^n d_i\right)k}{\theta}+\frac{n\sum_A w_{\theta}}{\sum_A w(y_A,\theta,\alpha)}$$

$$L_{\alpha}=\frac{dL(\mu,\theta,\alpha)}{d\alpha}$$
$$=\frac{-\left(\sum_1^n d_i\right)(n-k)}{\alpha}+\frac{n\sum_{j=1}^n\left(y_{(j)}-y_{(1)}\right)}{\alpha^2}+\frac{n\sum_A w_{\alpha}}{\sum_A w(y_A,\theta,\alpha)}$$

$$L_{\theta\theta}=\frac{k\left(\sum d_i\right)}{\theta^2}+\frac{n\sum_A w_{\theta\theta}}{\sum_A w(y_A,\theta,\alpha)}-n\left(\frac{\sum_A w_{\theta}}{\sum_A w(y_A,\theta,\alpha)}\right)^2$$

$$L_{\alpha\alpha}=\frac{\sum_{j=1}^n d_j\left(n-k\right)}{\alpha^2}-\frac{2n\sum_{j=1}^n\left(y_{(j)}-y_{(1)}\right)}{\alpha^3}$$
$$+n\frac{\sum_A w_{\alpha\alpha}}{\sum_A w(y_A,\theta,\alpha)}-n\left(\frac{\sum_A w_{\alpha}}{\sum_A w(y_A,\theta,\alpha)}\right)^2$$

$$L_{\theta\alpha}=\frac{n\sum_A w_{\theta\alpha}}{\sum_A w(y_A,\theta,\alpha)}-n\frac{\sum_A w_{\theta}\sum_A w_{\alpha}}{\left(\sum_A w(y_A,\theta,\alpha)\right)^2}=L_{\alpha\theta}$$

$$l_{\theta\theta\theta}=\left(\frac{-2\left(\sum_{j=1}^{n}d_j\right)k}{\theta^3}\right)+\frac{n\sum_{\underline{A}}w_{\theta\theta\theta}}{\sum_{A}W\left(y_A;\alpha,\theta\right)}$$

$$-\frac{3n\sum_{\underline{A}}w_{\theta}\cdot\sum_{\underline{A}}w_{\theta\theta}}{\left(\sum_{A}W\left(y_A;\alpha,\theta\right)\right)^2}+\left(\frac{2n\sum_{\underline{A}}w_{\theta}}{\sum_{A}W\left(y_A;\alpha,\theta\right)}\right)^3 \tag{۳۶}$$

(۳۷)

$$l_{\alpha\alpha\alpha}=\frac{-2(n-k)\left(\sum_{j=1}^{n}d_j\right)}{\alpha^3}+\left(\frac{6n\left(\sum_{j=1}^{n}y_{(j)}-y_{(1)}\right)k}{\alpha^4}\right)$$

$$+n\left[\frac{\sum_{\underline{A}}w_{\alpha\alpha\alpha}}{\left(\sum_{\underline{A}}W\left(y_A;\alpha,\theta\right)\right)}-\frac{3\sum_{\underline{A}}w_{\alpha}\sum_{\underline{A}}w_{\alpha\alpha}}{\left(\sum_{\underline{A}}W\left(y_A;\alpha,\theta\right)\right)^2}+2\left(\frac{\sum_{\underline{A}}w_{\alpha}}{\sum_{\underline{A}}W\left(y_A;\alpha,\theta\right)}\right)^3\right]$$

$$l_{\alpha\alpha\theta}=l_{\alpha\theta\alpha}=l_{\theta\alpha\alpha}=n\left[\frac{\sum_{\underline{A}}w_{\alpha\alpha\theta}}{\sum_{\underline{A}}W\left(y_A;\alpha,\theta\right)}\right.$$

$$\left.-\frac{\sum_{\underline{A}}w_{\theta}\sum_{\underline{A}}w_{\alpha\alpha}+2\sum_{\underline{A}}w_{\alpha}\sum_{\underline{A}}w_{\alpha\theta}}{\left(\sum_{\underline{A}}W\left(y_A;\alpha,\theta\right)\right)^2}+\frac{2\sum_{\underline{A}}w_{\theta}\left(\sum_{\underline{A}}w_{\alpha}\right)^2}{\left(\sum_{\underline{A}}W\left(y_A;\alpha,\theta\right)\right)^3}\right] \tag{۳۸}$$

$$l_{\theta\theta\alpha}=l_{\alpha\theta\theta}=l_{\theta\alpha\theta}=n\left[\frac{\sum_{\underline{A}}w_{\theta\theta\alpha}}{\sum_{\underline{A}}W\left(y_A;\alpha,\theta\right)}\right.$$

$$\left.-\frac{\sum_{\underline{A}}w_{\alpha}\sum_{\underline{A}}w_{\theta\theta}+2\sum_{\underline{A}}w_{\theta}\sum_{\underline{A}}w_{\alpha\theta}}{\left(\sum_{\underline{A}}W\left(y_A;\alpha,\theta\right)\right)^2}+\frac{2\sum_{\underline{A}}w_{\alpha}\left(\sum_{\underline{A}}w_{\theta}\right)^2}{\left(\sum_{\underline{A}}W\left(y_A;\alpha,\theta\right)\right)^3}\right] \tag{۳۹}$$

است. در روابط (۳۶)، (۳۷)، (۳۸) و (۳۹) مقادیر ثابت برابرند با:

$$w_{\alpha\theta\theta}=w_{\theta\alpha\theta}$$

$$=\frac{2\theta\left[\sum_{r=1}^{k}\left(y_{AR}-y_{(1)}\right)\right]^2-\left[\sum_{r=1}^{k}\left(y_{AR}-y_{(1)}\right)\right]^3}{\alpha^2\theta^4}$$

$$\times e^{-\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(AR)}-y_{(1)}\right)\left(\frac{\theta+1}{\theta}-\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}$$

$$w_{\alpha\theta\alpha}=w_{\theta\alpha\alpha}$$

$$=\frac{2\alpha\left[\sum_{r=1}^{k}\left(y_{AR}-y_{(1)}\right)\right]^2+\left[\sum_{r=1}^{k}\left(y_{AR}-y_{(1)}\right)\right]^2}{\alpha^4\theta^2}$$

$$\times e^{-\left[\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(AR)}-y_{(1)}\right)\left(\frac{\theta+1}{\theta}-\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\right]}$$

$$w_{\theta\theta\alpha}$$

$$=\frac{2\theta\left[\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(AR)}-y_{(1)}\right)\right]^2-\left[\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(AR)}-y_{(1)}\right)\right]^3}{\theta^4\alpha^2}$$

$$\times e^{-\left[\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(AR)}-y_{(1)}\right)\left(\frac{\theta+1}{\theta}-\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\right]}$$

$$w_{\alpha\alpha\theta}$$

$$=\frac{2\alpha\left[\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(AR)}-y_{(1)}\right)\right]^2+\left[\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(AR)}-y_{(1)}\right)\right]^3}{\alpha^4\theta^2}$$

$$\times e^{-\left[\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(AR)}-y_{(1)}\right)\left(\frac{\theta+1}{\theta}-\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\right]}$$

$$w_{\theta\theta\theta}=$$

$$\left[\frac{6\theta^4\left(\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(AR)}-y_{(1)}\right)\right)-4\theta^3\left[\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(AR)}-y_{(1)}\right)\right]^2}{\theta^8}\right.$$

$$\left.-\frac{2\theta\left[\sum_{r=1}^{k}\left(y_{AR}-y_{(1)}\right)\right]^2-\left[\sum_{r=1}^{k}\left(y_{AR}-y_{(1)}\right)\right]^3}{\theta^6}\right]$$

$$\times e^{-\left[\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(AR)}-y_{(1)}\right)\left(\frac{\theta+1}{\theta}-\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\right]}$$

$$w_{\alpha\alpha\alpha}$$

$$=\left[\frac{-6\alpha^4\left(\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(A_r)}-y_{(1)}\right)\right)-4\alpha^3\left[\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(A_r)}-y_{(1)}\right)\right]^2}{\alpha^8}\right.$$

$$\left.-\frac{2\alpha\left[\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(A_r)}-y_{(1)}\right)\right]^2+\left[\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(A_r)}-y_{(1)}\right)\right]^3}{\alpha^6}\right]$$

$$\times e^{-\sum_{r=1}^{k}\left(y_{(A_r)}-y_{(1)}\right)\left(\frac{\theta+1}{\theta}-\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}$$

$$\sigma_{\theta\alpha}=\sigma_{\alpha\theta}=0\qquad\sigma_{\alpha\alpha}=\frac{-1}{L_{\alpha\alpha}}\qquad\sigma_{\theta\theta}=\frac{-1}{L_{\theta\theta}}$$

با توجه به روابط فوق می‌توان رابطه (۳۵) را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$E_\alpha(\alpha)=\hat{\alpha}+\frac{\hat{\alpha}\left(a_2+1\right)-b_2}{\hat{\alpha}^2\hat{L}_{\alpha\alpha}}+\frac{\hat{L}_{\alpha\theta\theta}}{2\hat{L}_{\alpha\alpha}\hat{L}_{\theta\theta}}+\frac{\hat{L}_{\alpha\alpha\alpha}}{2\hat{L}_{\alpha\alpha}^2} \tag{۴۰}$$

بعد از جایگذاری روابط (۲۶)، (۲۹)، (۳۷) و (۳۹) در (۴۰) برآورد بیزی برابر است با:

$$\hat{\alpha}_s=\hat{\alpha}+\frac{\hat{\alpha}\left(a_2+1\right)-b_2}{\hat{\alpha}^2\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}d_j\left(n-k\right)}{\alpha^2}-\frac{2n\sum_{j=1}^{n}\left(y_{(j)}-y_{(1)}\right)}{\alpha^3}+n\frac{\sum_{\underline{A}}w_{\alpha\alpha}}{\sum_{\underline{A}}w\left(y_A,\theta,\alpha\right)}-n\left(\frac{\sum_{\underline{A}}w_{\alpha}}{\sum_{\underline{A}}w\left(y_A,\theta,\alpha\right)}\right)^2\right)}$$

$$+\frac{n\left[\frac{\sum_{\underline{A}}w_{\theta\theta\alpha}}{\sum_{\underline{A}}W\left(y_A;\alpha,\theta\right)}-\frac{\sum_{\underline{A}}w_{\alpha}.\sum_{\underline{A}}w_{\theta\theta}+2\sum_{\underline{A}}w_{\theta}.\sum_{\underline{A}}w_{\alpha\theta}}{\left(\sum_{\underline{A}}W\left(y_A;\alpha,\theta\right)\right)^2}+\frac{2\sum_{\underline{A}}w_{\alpha}.\left(\sum_{\underline{A}}w_{\theta}\right)^2}{\left(\sum_{\underline{A}}W\left(y_A;\alpha,\theta\right)\right)^3}\right]}{2\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}d_j\left(n-k\right)}{\alpha^2}-\frac{2n\sum_{j=1}^{n}\left(y_{(j)}-y_{(1)}\right)}{\alpha^3}+n\frac{\sum_{\underline{A}}w_{\alpha\alpha}}{\sum_{\underline{A}}w\left(y_A,\theta,\alpha\right)}-n\left(\frac{\sum_{\underline{A}}w_{\alpha}}{\sum_{\underline{A}}w\left(y_A,\theta,\alpha\right)}\right)^2\right)\left(\frac{k\left(\sum d_i\right)}{\theta^2}+\frac{n\sum_{\underline{A}}w_{\theta\theta}}{\sum_{\underline{A}}w\left(y_A,\theta,\alpha\right)}-n\left(\frac{\sum_{\underline{A}}w_{\theta}}{\sum_{\underline{A}}w\left(y_A,\theta,\alpha\right)}\right)^2\right)}$$

$$+\frac{\left(\frac{-2\left(n-k\right)\left(\sum_{j=1}^{n}d_j\right)}{\alpha^3}+\left(\frac{6n\left(\sum_{j=1}^{n}y_{(j)}-y_{(1)}\right)k}{\alpha^4}\right)+n\left[\frac{\sum_{\underline{A}}w_{\alpha\alpha\alpha}}{\left(\sum_{\underline{A}}W\left(y_A;\alpha,\theta\right)\right)}-\frac{3\sum_{\underline{A}}w_{\alpha}\sum_{\underline{A}}w_{\alpha\alpha}}{\left(\sum_{\underline{A}}W\left(y_A;\alpha,\theta\right)\right)^2}+2\left(\frac{\sum_{\underline{A}}w_{\alpha}}{\sum_{\underline{A}}W\left(y_A;\alpha,\theta\right)}\right)^3\right]\right)}{2\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}d_j\left(n-k\right)}{\alpha^2}-\frac{2n\sum_{j=1}^{n}\left(y_{(j)}-y_{(1)}\right)}{\alpha^3}+n\frac{\sum_{\underline{A}}w_{\alpha\alpha}}{\sum_{\underline{A}}w\left(y_A,\theta,\alpha\right)}-n\left(\frac{\sum_{\underline{A}}w_{\alpha}}{\sum_{\underline{A}}w\left(y_A,\theta,\alpha\right)}\right)^2\right)^2}$$

همچنین برآوردگر بیزی پارامتر θ تحت تابع زیان خطا برابر است با

$$\hat{\theta}=E_\theta(\theta)$$

$$E_\theta(\theta)=\int\theta\pi\left(\alpha,\theta\,|\,y\right)d\left(\alpha,\theta\right) \tag{۴۱}$$

بعد از جایگذاری $\pi\left(\alpha,\theta\,|\,x\right)$ در رابطه (۳۲) می‌توان نوشت:

$$E_\theta(\theta)=\frac{\int y\left(\alpha,\theta\right)e^{L(\alpha,\theta)+G(\alpha,\theta)}d\left(\alpha,\theta\right)}{\int e^{L(\alpha,\theta)+G(\alpha,\theta)}d\left(\alpha,\theta\right)}$$

$$E_\theta(\theta)=\hat{\theta}_s=\hat{\theta}+\frac{\hat{\theta}\left(a_1+1\right)-b_1}{\hat{\theta}^2\hat{L}_{\theta\theta}}+\frac{\hat{L}_{\alpha\alpha\theta}}{2\hat{L}_{\alpha\alpha}\hat{L}_{\theta\theta}}+\frac{\hat{L}_{\theta\theta\theta}}{2\hat{L}_{\theta\theta}^2} \tag{۴۲}$$

بعد از جایگذاری روابط (۲۶)، (۲۹)، (۳۶) و (۳۸) در (۴۲) برآورد بیزی برابر است با:

$$\hat{\theta}_s=\hat{\theta}+\frac{\hat{\theta}(a_1+1)-b_1}{\hat{\theta}^2\left(\frac{k\left(\sum d_i\right)}{\theta^2}+\frac{n\sum_{\underline{A}} w_{\theta\theta}}{\sum_{\underline{A}} w(y_A,\theta,\alpha)}-n\left(\frac{\sum_{\underline{A}} w_\theta}{\sum_{\underline{A}} w(y_A,\theta,\alpha)}\right)^2\right)}$$

$$+\frac{n\left[\frac{\sum_{\underline{A}} w_{\alpha\alpha\theta}}{\sum_{\underline{A}} W(y_A;\alpha,\theta)}-\frac{\sum_{\underline{A}} w_\theta.\sum_{\underline{A}} w_{\alpha\alpha}+2\sum_{\underline{A}} w_\alpha.\sum_{\underline{A}} w_{\alpha\theta}}{\left(\sum_{\underline{A}} W(y_A;\alpha,\theta)\right)^2}+\frac{2\sum_{\underline{A}} w_\theta.\left(\sum_{\underline{A}} w_\alpha\right)^2}{\left(\sum_{\underline{A}} W(y_A;\alpha,\theta)\right)^3}\right]}{2\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} d_j(n-k)}{\alpha^2}-\frac{2n\sum_{j=1}^{n}\left(y_{(j)}-y_{(1)}\right)}{\alpha^3}+n\frac{\sum_{\underline{A}} w_{\alpha\alpha}}{\sum_{\underline{A}} w(y_A,\theta,\alpha)}-n\left(\frac{\sum_{\underline{A}} w_\alpha}{\sum_{\underline{A}} w(y_A,\theta,\alpha)}\right)^2\right)\left(\frac{k\left(\sum d_i\right)}{\theta^2}+\frac{n\sum_{\underline{A}} w_{\theta\theta}}{\sum_{\underline{A}} w(y_A,\theta,\alpha)}-n\left(\frac{\sum_{\underline{A}} w_\theta}{\sum_{\underline{A}} w(y_A,\theta,\alpha)}\right)^2\right)}$$

$$+\frac{\left(\frac{-2\left(\sum_{j=1}^{n} d_j\right)k}{\theta^3}\right)+\frac{n\sum_{\underline{A}} w_{\theta\theta\theta}}{\sum_{A} W(y_A;\alpha,\theta)}-\frac{3n\sum_{\underline{A}} w_\theta.\sum_{\underline{A}} w_{\theta\theta}}{\left(\sum_{A} W(y_A;\alpha,\theta)\right)^2}+\left(\frac{2n\sum_{\underline{A}} w_\theta}{\sum_{A} W(y_A;\alpha,\theta)}\right)^3}{2\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} d_j(n-k)}{\alpha^2}-\frac{2n\sum_{j=1}^{n}\left(y_{(j)}-y_{(1)}\right)}{\alpha^3}+n\frac{\sum_{\underline{A}} w_{\alpha\alpha}}{\sum_{\underline{A}} w(y_A,\theta,\alpha)}-n\left(\frac{\sum_{\underline{A}} w_\alpha}{\sum_{\underline{A}} w(y_A,\theta,\alpha)}\right)^2\right)^2}$$

۵. مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش، مطالعه‌ی شبیه‌سازی برای مقایسه کارایی برآوردگرهای گشتاوری، ماکسیمم درستنمایی و بیز برای نمونه‌های سانسورشده با داده‌های دور افتاده که به طور تصادفی تولید شده‌اند، برای مقادیر μ، θ و λ مورد بحث قرار می‌گیرد. برای این منظور مراحل گام به گام به شرح زیر انجام می‌شود:

۱) مقادیر مختلف پارامترها را با استفاده از توزیع‌های پیشین با مقادیر ابر پارامترها (a_1,b_1) و (a_2,b_2) را به طوری که $\theta=b_1/(a_1-1)$ و $\alpha=b_2/(a_2-1)$ باشد، محاسبه می‌شود.

۲) با داشتن مقادیر مختلف پارامترها از رابطه ی (۱۱) و (۱۲) نمونه های تصادفی مختلف تولید می‌شود.

۳) برای هر برآورد و میانگین توان دوم خطا (MSE) برآوردگرها مرحله‌ی ۲ را، $N=1000$ بار برای مقادیر مختلف پارامترها تکرار شده است. و تمام محاسبات با استفاده از نرم‌افزار R انجام شده است. نتایج مطالعه شبیه‌سازی در جداول ۱ تا ۱۴ آورده شده است، که با توجه به نتایج جداول می‌توان نتیجه گرفت که:

- در همه موارد برآوردگرهای بیزی بهتر از برآوردگر ماکسیمم درستنمایی هستند.
- با افزایش اندازه نمونه، میانگین توان دوم خطا تمام برآوردگرها کاهش می‌یابد.
- برآوردگرها با استفاده از روش گشتاوری به آسانی محاسبه می‌شود، علیرغم اینکه در مقایسه با سایر روش‌ها دارای میانگین توان دوم خطا بیشتری است.
- برآوردگر بیزی در مقایسه با برآوردگر ماکسیمم درستنمایی با توجه به توزیع پیشین مناسب بهتر عمل می‌کند.
- تغییر k بر میانگین توان دوم خطا برآوردگرهای α و θ نیز مورد مطالعه قرار گرفته است. با افزایش k میانگین توان دوم خطا برآوردگرهای α و θ در برآورد بیزی دارای مقدار کمتری نسبت به برآورد روش ماکسیمم درستنمایی است.
- با توجه به نتایج جدول ۱۳ و ۱۴ می توان گفت با افزایش اندازه نمونه واریانس تعمیم‌یافته کاهش و با افزایش مقدار θ و یا α وقتی که μ ثابت است، یافته کاهش می‌یابد.

جدول ۱ - برآورد و میانگین توان دوم خطا برای $\mu = 0/5$ ، $\theta = 1$ ، $\alpha = 2$ و $k = 2$

n	پارامتر	برآورد گشتاوری		برآورد ماکسیمم درستنمایی		برآورد بیزی	
		برآورد	میانگین توان دوم خطا	برآورد	میانگین توان دوم خطا	برآورد	میانگین توان دوم خطا
10	μ	0.497854	0.052546	0.554582	0.002641	0.554582	0.002641
	α	0.592848	2.553295	0.964372	0.550688	1.901233	0.063125
	θ	1.58091	1.577028	1.437634	2.27E-01	0.764125	0.107444
15	μ	0.497616	0.034448	0.535801	0.001343	0.535801	0.001343
	α	1.577424	1.713208	1.353802	0.321162	1.947334	0.02902
	θ	1.366687	0.931377	1.347938	1.59E-01	1.161684	6.11E-02
20	μ	0.507645	0.025004	0.525735	0.000635	0.525735	0.000635
	α	1.68617	1.927567	1.653359	0.082514	1.990858	0.00404
	θ	1.144579	0.486783	0.776813	0.134081	0.962005	0.037158
25	μ	0.500941	0.020202	0.520005	0.000432	0.520005	0.000432
	α	1.774327	1.591593	1.840747	0.014944	2.008113	0.000216
	θ	1.223383	0.679259	1.189858	8.44E-02	1.090556	0.026687
30	μ	0.498741	0.017545	0.515759	0.000239	0.515759	2.39E-04
	α	1.742787	1.728228	1.912327	0.002451	2.011211	2.70E-05
	θ	1.152874	0.402119	0.932298	0.050847	1.045311	0.008657
35	μ	0.504318	0.014767	0.514961	0.000241	0.514961	2.41E-04
	α	1.952373	1.292526	1.945523	0.000315	2.011393	2.41E-06
	θ	1.151098	0.456284	1.093578	0.026716	1.014295	0.002781
40	μ	0.496691	0.011866	0.511905	1.34E-04	0.511905	1.34E-04
	α	1.821823	1.515572	1.960014	8.00E-05	2.01051	4.16E-07
	θ	1.112482	0.233558	1.022993	0.014005	1.023545	0.000724

جدول ۲- برآورد و میانگین توان دوم خطا برای $\mu = 0/5$ ، $\theta = 1$ ، $\alpha = 2$ و $k = 1$

n	پارامتر	برآورد گشتاوری		برآورد ماکسیمم درستنمایی		برآورد بیزی	
		برآورد	میانگین توان دوم خطا	برآورد	میانگین توان دوم خطا	برآورد	میانگین توان دوم خطا
10	μ	0.49657	0.054955	0.55641	0.00283	0.55641	0.00283
	α	0.27999	2.012772	1.272548	0.32173	1.968234	0.037745
	θ	1.438094	0.914781	1.480934	2.73E-01	0.746587	0.131818
15	μ	0.488122	0.032678	0.535344	0.001283	0.535344	0.001283
	α	0.929039	2.57358	1.522382	0.099658	1.986814	0.009784
	θ	1.596291	1.484811	1.412997	2.01E-01	1.252985	1.11E-01
20	μ	0.494024	0.024918	0.527002	0.000726	0.527002	0.000726
	α	1.370331	2.222157	1.746223	0.023276	2.004533	0.000562
	θ	1.316476	0.889408	0.822071	0.142303	1.136837	0.045044
25	μ	0.50703	0.019814	0.520464	0.000435	0.520464	4.35E-04
	α	1.67585	1.710137	1.872482	0.004961	2.011878	6.32E-05
	θ	1.293202	0.709802	1.269125	1.22E-01	0.987003	0.021358
30	μ	0.500939	0.018086	0.517609	0.000332	0.517609	3.32E-04
	α	1.735496	1.584007	1.920636	0.001517	2.012191	1.62E-05
	θ	1.149782	0.315748	1.165875	6.34E-02	1.068628	0.020342
35	μ	0.50507	0.013412	0.514269	0.000195	0.514269	1.95E-04
	α	1.895629	1.307588	1.947893	0.000159	2.011655	8.21E-07
	θ	1.169571	0.468108	0.990687	0.033772	1.039663	0.005269
40	μ	0.506616	0.012073	0.512039	1.39E-04	0.512039	1.39E-04
	α	1.780842	1.403894	1.961151	6.79E-05	2.010603	2.97E-07
	θ	1.136918	0.382806	1.064546	0.019024	1.022608	0.001854

جدول ۳- برآورد و میانگین توان دوم خطا برای $\mu=1$، $\theta=1$، $\alpha=2$ و $k=2$

n	پارامتر	برآورد گشتاوری		برآورد ماکسیمم درستنمایی		برآورد بیزی	
		برآورد	میانگین توان دوم خطا	برآورد	میانگین توان دوم خطا	برآورد	میانگین توان دوم خطا
10	μ	0.997959	0.051911	1.053026	0.002813	1.053026	0.002813
	α	0.626726	2.63053	0.985053	0.564605	1.913242	0.058785
	θ	1.536156	1.478377	1.462841	2.56E-01	0.755979	0.112288
15	μ	1.008279	0.035643	1.034949	0.001239	1.034949	0.001239
	α	1.469609	1.633875	1.343958	0.334219	1.951399	0.027342
	θ	1.403736	1.018036	0.765386	0.144194	0.961491	0.038805
20	μ	1.003005	0.025529	1.026118	0.000679	1.026118	0.000679
	α	1.665185	1.836561	1.651418	0.095993	1.990317	0.004358
	θ	1.182956	0.458058	1.299596	1.42E-01	1.013988	0.004295
25	μ	1.001591	0.02099	1.018837	0.000321	1.018837	0.000321
	α	1.770806	1.573916	1.843125	0.011864	2.008468	0.000148
	θ	1.250311	0.752997	0.92528	0.066217	1.023656	0.000938
30	μ	1.004175	0.018804	1.017861	0.000337	1.017861	3.37E-04
	α	1.788532	1.358887	1.912332	0.002497	2.011212	2.80E-05
	θ	1.210202	0.531972	1.178513	6.08E-02	1.04164	0.008538
35	μ	1.001619	0.014623	1.015024	0.000246	1.015024	2.46E-04
	α	2.024007	1.176313	1.94406	0.000364	2.01127	2.94E-06
	θ	1.159913	0.488551	1.088553	0.022397	1.088903	0.028588
40	μ	0.997612	0.012999	1.012533	1.61E-04	1.012533	1.61E-04
	α	1.743529	1.641708	1.959816	8.53E-05	2.010493	4.46E-07
	θ	1.116598	0.329838	1.023739	0.022284	1.154051	5.23E-02

جدول ۴- برآورد و میانگین توان دوم خطا برای $\mu=1$، $\theta=1$، $\alpha=2$ و $k=1$

n	پارامتر	برآورد گشتاوری		برآورد ماکسیمم درستنمایی		برآورد بیزی	
		برآورد	میانگین توان دوم خطا	برآورد	میانگین توان دوم خطا	برآورد	میانگین توان دوم خطا
10	μ	0.999488	0.049484	1.053885	0.002905	1.053885	0.002905
	α	0.1266	2.221215	1.226317	0.354029	1.942575	0.040682
	θ	1.35783	0.906311	1.479397	2.84E-01	0.746411	0.126416
15	μ	0.999805	0.036454	1.035079	0.001227	1.035079	0.001227
	α	0.8367	2.784657	1.524798	0.106638	1.983435	0.007156
	θ	1.551481	1.359716	1.379097	1.72E-01	1.243836	1.04E-01
20	μ	1.002044	0.027636	1.026924	0.000782	1.026924	0.000782
	α	1.386246	2.484291	1.754562	0.025055	2.005339	0.000632
	θ	1.351566	0.906807	0.820587	0.141099	1.134968	0.048066
25	μ	1.011409	0.019614	1.020114	0.000395	1.020114	3.95E-04
	α	1.820023	1.734596	1.872013	0.004343	2.011872	4.39E-05
	θ	1.259069	0.607933	1.281478	1.30E-01	0.979314	0.0282
30	μ	0.998001	0.01899	1.017431	0.000324	1.017431	3.24E-04
	α	1.692245	1.806928	1.921684	0.00105	2.012307	8.77E-06
	θ	1.20182	0.503712	0.978295	0.055574	1.064929	0.00811
35	μ	0.998448	0.015114	1.01407	0.00021	1.01407	2.10E-04
	α	1.847761	1.366504	1.947271	0.000201	2.011609	1.14E-06
	θ	1.239589	0.578627	1.155543	4.92E-02	1.038155	0.002841
40	μ	0.998074	0.013457	1.013199	1.81E-04	1.013199	1.81E-04
	α	1.769613	1.383483	1.961026	5.84E-05	2.010607	2.07E-07
	θ	1.203108	0.47817	1.071073	0.02011	1.023898	0.002719

جدول ۵- برآورد و میانگین توان دوم خطا برای $\mu=0/5$، $\theta=1$، $\alpha=3$ و $k=2$

n	پارامتر	برآورد گشتاوری		برآورد ماکسیمم درستنمایی		برآورد بیزی	
		برآورد	میانگین توان دوم خطا	برآورد	میانگین توان دوم خطا	برآورد	میانگین توان دوم خطا
10	μ	0.49301	0.054243	0.552936	0.002701	0.552936	0.002701
	α	1.856476	2.917917	0.720176	0.550602	2.934557	0.024931
	θ	1.553985	1.527671	1.63241	0.322126	1.331267	2.88E-01
15	μ	0.505022	0.036452	0.534123	0.001133	0.534123	0.001133
	α	2.803272	1.388359	1.380771	0.420773	2.994595	0.003369
	θ	1.397388	0.848856	1.4469	0.263529	1.414635	2.53E-01
20	μ	0.500708	0.024913	0.525413	0.000522	0.525413	0.000522
	α	2.645319	2.293098	2.128307	0.13167	3.012859	0.000287
	θ	1.221171	0.563425	1.186809	2.02E-01	1.215138	0.107453
25	μ	0.498848	0.020717	0.519455	0.000349	0.519455	3.49E-04
	α	3.003286	1.040242	2.485247	0.027301	3.016908	3.77E-05
	θ	1.264624	0.720946	1.36965	1.91E-01	0.753798	0.079138
30	μ	0.503777	0.018025	0.517378	0.000308	0.517378	3.08E-04
	α	2.777466	1.852569	2.664404	0.005492	3.01692	4.73E-06
	θ	1.169293	0.431183	0.865584	0.153501	1.082324	0.033919
35	μ	0.503238	0.014738	0.513756	0.000194	0.513756	1.94E-04
	α	3.00571	0.70374۰	2.759318	0.002005	3.015737	1.35E-06
	θ	1.161575	0.430968	1.226069	0.104834	0.940146	0.029789
40	μ	0.500736	0.013718	0.512604	0.000148	0.512604	1.48E-04
	α	2.85523	1.653419	2.816471	0.001001	3.014436	6.14E-07
	θ	1.134395	0.32179۰۰	1.076752	0.079297	1.027038	0.016998

جدول ۶- برآورد و میانگین توان دوم خطا برای $\mu=0/5$، $\theta=1$، $\alpha=3$ و $k=1$

n	پارامتر	برآورد گشتاوری		برآورد ماکسیمم درستنمایی		برآورد بیزی	
		برآورد	میانگین توان دوم خطا	برآورد	میانگین توان دوم خطا	برآورد	میانگین توان دوم خطا
10	μ	0.491۰۰۰	0.059673	0.556621	0.00337	0.556621	0.00337۰
	α	1.321258	2.964437	0.707775	0.487447	2.968967	0.01491۰
	θ	1.553873	1.130054	1.415453	2.99E-01	1.700423	0.352712
15	μ	0.491869	0.033529	0.534494	0.0012۰۰	0.534494	0.0012۰۰
	α	2.367522	2.301881	1.540891	0.279746	3.005328	0.003021
	θ	1.607787	1.354672	1.272375	2.62E-01	1.529883	0.280178
20	μ	0.500321	0.027505	0.527228	0.00073	0.527228	0.00073
	α	2.571955	2.368968	2.199271	0.077247	3.017177	0.000191
	θ	1.409624	1.011655	1.415529	2.38E-01	1.324994	0.192024
25	μ	0.504232	0.022573	0.520077	0.000405	0.520077	4.05E-04
	α	2.853517	1.637664	2.520377	0.017578	3.018325	1.71E-05
	θ	1.291432	0.579611	0.961556	0.17528	1.170045	0.092111
30	μ	0.495423	0.018404	0.517091	0.00026	0.517091	2.60E-04
	α	2.75695	1.718723	2.672924	0.004664	3.017258	3.29E-06
	θ	1.231972	0.476558	1.339109	0.1573۰۰	0.735145	0.080872
35	μ	0.494245	0.014782	0.514384	0.00019۰	0.514384	1.90E-04
	α	3.030309	0.881345	2.762553	0.001763	3.015861	1.09E-06
	θ	1.22411	0.436291	1.113407	1.40E-01	0.958447	0.02309
40	μ	0.49693	0.012558	0.511797	0.000143	0.511797	1.43E-04
	α	2.820343	1.889319	2.818608	0.000908	3.0145	5.33E-07
	θ	1.164676	0.36669	1.18747	0.114066	1.051603	0.018444

جدول ۷. برآورد و میانگین توان دوم خطا برای $\mu=1$، $\theta=1$، $\alpha=3$ و $k=2$

n	پارامتر	برآورد گشتاوری		برآورد ماکسیمم درستنمایی		برآورد بیزی	
		برآورد	میانگین توان دوم خطا	برآورد	میانگین توان دوم خطا	برآورد	میانگین توان دوم خطا
10	μ	0.998395	0.056649	1.051968	0.002838	1.051968	0.002838
	α	1.948288	2.781498	0.767247	0.595096	2.915893	0.03296
	θ	1.61163	1.582524	1.337865	3.00E-01	1.634359	0.337655
15	μ	1.003715	0.036881	1.036493	0.001251	1.036493	0.001251
	α	2.825506	1.291832	1.379532	0.40588	2.990209	0.003889
	θ	1.45559	1.177431	1.421134	2.63E-01	1.447917	0.258999
20	μ	1.003513	0.027296	1.027362	0.00077	1.027362	0.00077
	α	2.674028	2.047777	2.124216	0.126828	3.012757	0.000451
	θ	1.201977	0.512745	1.181262	1.94E-01	1.229128	0.13618
25	μ	1.005324	0.021613	1.020989	0.000449	1.020989	4.49E-04
	α	2.902279	1.456346	2.496978	0.023332	3.017315	2.75E-05
	θ	1.219575	0.55463	1.359576	1.83E-01	0.760812	0.080043
30	μ	0.998457	0.018547	1.01723	0.000293	1.01723	2.93E-04
	α	2.79037	1.82959	2.663263	0.006486	3.016886	5.76E-06
	θ	1.210255	0.490833	0.875917	0.159178	1.107254	0.054945
35	μ	1.002596	0.015562	1.014341	0.000216	1.014341	2.16E-04
	α	3.059161	0.707118	2.761248	0.001865	3.015798	1.19E-06
	θ	1.173333	0.414948	1.051289	0.110272	0.92971	0.041638
40	μ	0.998738	0.013296	1.013244	0.00018	1.013244	1.80E-04
	α	2.786914	1.60524۰	2.816248	0.000935	3.014434	5.47E-07
	θ	1.112364	0.185462۰	1.22859۰	0.109517	1.021748	0.013364

جدول ۸- برآورد و میانگین توان دوم خطا برای $\mu=1$، $\theta=1$، $\alpha=3$ و $k=1$

n	پارامتر	برآورد گشتاوری		برآورد ماکسیمم درستنمایی		برآورد بیزی	
		برآورد	میانگین توان دوم خطا	برآورد	میانگین توان دوم خطا	برآورد	میانگین توان دوم خطا
10	μ	1.045432	0.042635	1.054963	0.001993	1.054963	0.001993
	α	1.19313۰	2.773244	0.621579	0.217165	2.945374	0.046926
	θ	1.557217	1.58796۰	1.392387	2.90E-01	1.651327	0.360147
15	μ	1.008453	0.037915	1.035827	0.001188	1.035827	0.001188
	α	2.375875	2.193109	1.550169	0.297754	3.007418	0.003999
	θ	1.581983	1.312208	1.275825	2.63E-01	1.529527	0.275216
20	μ	0.993864	0.026774	1.025701	0.000659	1.025701	0.000659
	α	2.424708	2.797568	2.19241	0.084217	3.016368	0.000132
	θ	1.388972	0.879897	1.425832	2.43E-01	1.334902	0.185042
25	μ	1.001366	0.021468	1.020477	0.000394	1.020477	3.94E-04
	α	2.862861	1.598018	2.518981	0.016744	3.018284	1.66E-05
	θ	1.353339	0.821128	1.334401	0.169801	1.159614	0.078153
30	μ	1.002431	0.016641	1.017673	0.000298	1.017673	2.98E-04
	α	2.824514	1.559431	2.674847	0.004971	3.017283	3.83E-06
	θ	1.213086	0.484175	1.133637	1.63E-01	0.739189	0.072296
35	μ	0.995425	0.014615	1.014828	0.000203	1.014828	2.03E-04
	α	3.091703	0.733251	2.760661	0.002166	3.0158۰۰	1.50E-06
	θ	1.211817	0.487731	1.024715	0.1418۰۰	1.055741	0.032569
40	μ	1.002216	0.012799	1.01215	0.000147	1.01215۰	1.47E-04
	α	2.847168	1.18111۰	2.81873	0.00093۰	3.014499	5.48E-07
	θ	1.149674	0.266025	1.196456	0.129664	0.964006	0.02633

جدول ۹- برآورد و میانگین توان دوم خطا برای $\mu = 0/5$ ، $\theta = 3$ ، $\alpha = 2$ و $k = 2$

n	پارامتر	برآورد گشتاوری		برآورد ماکسیمم درستنمایی		برآورد بیزی	
		برآورد	میانگین توان دوم خطا	برآورد	میانگین توان دوم خطا	برآورد	میانگین توان دوم خطا
10	μ	0.507334	0.072902	0.575937	0.005348	0.575937	0.005348
	α	0.090518	1.856169	0.42915	0.037678	1.907969	0.05842
	θ	3.082466	1.42918	2.488561	0.282105	2.932293	0.078743
15	μ	0.493631	0.047912	0.549235	0.002614	0.549235	0.002614
	α	0.533972	2.808441	0.308372	0.025414	2.448654	0.001118
	θ	3.565386	2.929198	2.558789	0.15107	2.976789	0.055836
20	μ	0.513746	0.033725	0.537483	0.001218	0.537483	0.001218
	α	0.935507	2.752244	0.307679	0.008783	2.82533	3.24E-05
	θ	3.20199	2.049925	2.580667	0.065121	2.995971	0.03907
25	μ	0.495583	0.029304	0.530002	0.000862	0.530002	0.000862
	α	0.983754	2.876839	0.486654	0.003038	3.043508	1.22E-05
	θ	3.327226	1.733029	2.669462	0.177946	3.000503	0.048024
30	μ	0.49949	0.024388	0.526036	0.00062	0.526036	6.20E-04
	α	1.426496	2.57601	0.628723	0.002051	2.874888	5.24E-06
	θ	3.213328	1.588747	2.768451	5.07E-01	3.002202	0.046832
35	μ	0.504715	0.02139	0.521723	0.000487	0.521723	4.87E-04
	α	1.587191	1.93748	0.60809	0.001052	2.457865	3.17E-06
	θ	3.188243	1.466659	2.834827	5.32E-01	3.002898	0.028909
40	μ	0.496294	0.019067	0.520035	0.000436	0.520035	4.36E-04
	α	1.530925	2.306586	0.482236	2.06E-01	2.13192	0.021907
	θ	3.101496	1.289165	2.982236	0.048024	3.10192	2.06E-01

جدول ۱۰- برآورد و میانگین توان دوم خطا برای $\mu = 0/5$ ، $\theta = 3$ ، $\alpha = 2$ و $k = 1$

n	پارامتر	برآورد گشتاوری		برآورد ماکسیمم درستنمایی		برآورد بیزی	
		برآورد	میانگین توان دوم خطا	برآورد	میانگین توان دوم خطا	برآورد	میانگین توان دوم خطا
10	μ	0.498129	0.068641	0.572237	0.004455	0.572237	0.004455
	α	0.525199	2.761308	0.529823	0.067984	2.47063	0.123413
	θ	2.980976	0.913485	2.29496	5.27E-01	2.884401	0.121936
15	μ	0.494468	0.04878	0.548833	0.002261	0.548833	0.002261
	α	0.040735	2.095128	0.889016	0.044134	2.803534	0.002744
	θ	3.3818	2.347774	2.400804	5.06E-01	2.964062	0.07321
20	μ	0.492979	0.038322	0.535585	0.001074	0.535585	0.001074
	α	0.152906	2.639092	0.442925	0.011876	2.939689	6.71E-05
	θ	3.563551	2.910554	2.495206	2.53E-01	2.992571	0.065315
25	μ	0.493469	0.027849	0.529371	0.00088	0.529371	8.80E-04
	α	0.50949	2.591912	0.942448	0.005526	1.769419	1.43E-05
	θ	3.463551	2.340651	2.64609	8.48E-02	2.999707	0.056983
30	μ	0.510743	0.026617	0.524254	0.000598	0.524254	5.98E-04
	α	0.800725	3.121641	0.341893	0.002557	2.751729	6.43E-06
	θ	3.486943	2.178777	2.766245	0.248856	3.002134	0.056911
35	μ	0.504303	0.021639	0.521406	0.000462	0.521406	4.62E-04
	α	1.125826	2.733251	1.056205	0.001009	2.211128	3.38E-06
	θ	3.30423	1.713011	2.832697	0.080819	3.002798	0.019092
40	μ	0.498014	0.0186	0.517893	0.000331	0.517893	3.31E-04
	α	1.288932	2.555386	0.942448	0.050347	2.47063	0.017648
	θ	3.326313	1.77513	1.059475	0.056983	2.504901	5.27E-01

جدول ۱۱- برآورد و میانگین توان دوم خطا برای $\mu=1$، $\theta=3$، $\alpha=2$ و $k=2$

n	پارامتر	برآورد گشتاوری		برآورد ماکسیمم درستنمایی		برآورد بیزی	
		برآورد	میانگین توان دوم خطا	برآورد	میانگین توان دوم خطا	برآورد	میانگین توان دوم خطا
10	μ	1.001298	0.082552	1.074115	0.004847	1.074115	0.004847
	α	0.220123	1.993837	0.326193	0.042932	1.898106	0.059625
	θ	3.12627	1.548991	2.501084	0.301843	2.93367	0.075575
15	μ	1.01546	0.05191	1.053395	0.00283	1.053395	0.00283
	α	0.480732	2.849405	0.618241	0.026754	2.469111	0.002847
	θ	3.581041	2.986358	2.554012	0.146399	2.978565	0.056264
20	μ	1.010663	0.040005	1.037743	0.001388	1.037743	1.39E-03
	α	0.788866	2.828491	0.419907	0.00702	2.81938	4.80E-05
	θ	3.325661	2.053751	2.580942	8.00E-02	2.995698	0.045775
25	μ	0.997182	0.031901	1.029998	0.000896	1.029998	0.000896
	α	0.907829	2.847385	0.477101	0.003077	3.036182	1.24E-05
	θ	3.346534	1.850271	2.674223	0.200918	3.000384	0.042728
30	μ	0.98575	0.025043	1.024752	0.000599	1.024752	5.99E-04
	α	1.312132	2.669364	0.492862	0.002001	2.924558	5.70E-06
	θ	3.303947	1.683121	2.765764	4.90E-01	3.002039	0.046765
35	μ	0.994966	0.02009	1.022598	0.000486	1.022598	4.86E-04
	α	1.529543	2.106989	0.330044	0.000924	2.468272	3.16E-06
	θ	3.239867	1.537891	2.833558	5.48E-01	3.002777	0.025492
40	μ	1.001074	0.018258	1.018319	0.000317	1.018319	3.17E-04
	α	1.472563	2.277188	0.63129	0.000743	2.134412	2.09E-06
	θ	3.08348	1.393989	2.877642	2.15E-01	3.003063	0.020123

جدول ۱۲- برآورد و میانگین توان دوم خطا برای $\mu=1$، $\theta=3$، $\alpha=2$ و $k=1$

n	پارامتر	برآورد گشتاوری		برآورد ماکسیمم درستنمایی		برآورد بیزی	
		برآورد	میانگین توان دوم خطا	برآورد	میانگین توان دوم خطا	برآورد	میانگین توان دوم خطا
10	μ	1.013775	0.087151	1.082055	0.007005	1.082055	0.007005
	α	0.534812	2.548928	0.446281	0.046987	1.750458	0.096861
	θ	3.055124	1.005977	2.256943	0.228879	2.911746	0.071368
15	μ	0.990373	0.047496	1.049749	0.002971	1.049749	0.002971
	α	0.003381	2.114544	0.347022	0.045154	2.218495	0.017937
	θ	3.382356	2.380114	2.389347	0.066532	2.955957	0.056314
20	μ	1.002626	0.035983	1.036534	0.001338	1.036534	1.34E-03
	α	0.261285	3.066616	0.536589	0.011258	2.504913	5.44E-05
	θ	3.38069	2.203786	2.480431	0.112002	2.993349	3.45E-02
25	μ	1.005522	0.030527	1.029198	0.000897	1.029198	8.97E-04
	α	0.510048	2.896874	0.900351	0.005508	2.756508	1.63E-05
	θ	3.535638	2.442168	2.653558	9.41E-02	2.999867	0.055258
30	μ	1.00082	0.022595	1.024286	0.000629	1.024286	6.29E-04
	α	0.853203	2.987095	0.941774	0.002119	2.968664	5.74E-06
	θ	3.45705	2.086908	2.765685	5.33E-01	3.002043	0.072381
35	μ	0.988601	0.019594	1.020461	0.000388	1.020461	3.88E-04
	α	1.164727	2.74228	1.074502	0.000924	2.875496	3.18E-06
	θ	3.322499	1.764048	2.828884	4.59E-01	3.002748	0.014424
40	μ	0.994367	0.018924	1.018209	0.000329	1.018209	3.29E-04
	α	1.196913	2.412775	1.07252	0.000537	2.476207	2.19E-06
	θ	3.319292	1.899805	2.873242	2.13E-01	3.002957	0.013027

جدول ۱۳- واریانس تعمیم‌یافته برای $k=1$

n	$\alpha=1,\theta=3,$ $\mu=1$	$\alpha=1,\theta=3,$ $\mu=0.5$	$\alpha=1,\theta=2,$ $\mu=1$	$\alpha=1,\theta=2,$ $\mu=0.5$	$\alpha=2,\theta=3,$ $\mu=1$	$\alpha=2,\theta=3,$ $\mu=0.5$
10	0.000235	0.000702	3.33E-05	0.000161	0.013620	0.009626
15	5.62E-05	7.25E-05	1.15E-05	1.28E-05	0.000806	0.002015
20	2.18E-05	5.31E-05	1.03E-05	1.05E-05	0.000161	0.000362
25	7.64E-06	1.02E-05	2.04E-06	3.71E-06	0.000125	0.00033۰
30	2.39E-06	3.94E-06	3.81E-07	3.00E-06	7.00E-05	0.000144
35	2.03E-06	1.98E-06	3.39E-07	6.56E-07	2.86E-05	0.000129
40	8.95E-07	1.83E-06	9.36E-08	5.32E-07	1.34E-05	4.25E-05

جدول ۱۴- واریانس تعمیم‌یافته وقتی که $k=2$

n	$\alpha=1,\theta=3,$ $\mu=1$	$\alpha=1,\theta=3,$ $\mu=0.5$	$\alpha=1,\theta=2,$ $\mu=1$	$\alpha=1,\theta=2,$ $\mu=0.5$	$\alpha=2,\theta=3,$ $\mu=1$	$\alpha=2,\theta=3,$ $\mu=0.5$
10	5.26E-05	0.000412	1.80E-05	0.000239	0.004862	0.016086
15	1.23E-05	2.90E-05	6.84E-06	1.46E-05	0.000555	0.002467
20	9.74E-06	2.22E-05	2.52E-06	6.69E-06	0.000239	0.001795
25	4.66E-06	7.25E-06	4.18E-07	2.57E-06	7.32E-05	5.26E-05
30	1.54E-06	4.20E-06	2.79E-07	6.37E-07	5.04E-05	5.58E-05
35	7.80E-07	1.18E-06	2.15E-07	5.98E-07	1.96E-05	5.17E-05
40	6.03E-07	6.66E-07	1.47E-07	2.52E-07	1.82E-05	1.03E-05

۶. نتیجه‌گیری

داده‌های تصادفی سانسور شده اغلب در تجزیه و تحلیل بقا و نظریه‌ی قابلیت اعتماد رخ می‌دهد. در نوشته‌ها با توزیع‌های آماری مختلف، داده‌های سانسور شده به منظور برآورد پارامترها مورد بررسی قرار گرفته‌اند، ولی تاکنون هیچگونه پژوهشی برای حداقل زمان بقا با داده‌های سانسور شده در حضور داده‌های پرت را مد نظر قرار نداده‌اند. شناسایی پارامتر مکان، بر برآوردهایی که بر اساس داده‌های طول عمر هستند تأثیر خواهد گذاشت. بنابراین هدف این مقاله بررسی پارامتر مکان در طول عمر و مدل‌های سانسور شده در حضور داده‌های پرت است.

در این مقاله روش‌های مختلف برآورد پارامترهای مکان و مقیاس توزیع نمایی دو پارامتری با داده‌های سانسور در حضور داده‌های پرت را مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج پژوهش انجام‌شده آن است که روش ماکسیمم درستنمایی، روش گشتاوری و روش بیز برای پارامترها تحت تابع زیان کمترین مربعات خطا آورده شده است. مقایسه‌ی برآوردگرهای مختلف به طور عمده با توجه به خطا و میانگین دوم توان خطا است. با افزایش حجم نمونه میانگین دوم توان خطا برآوردگرها کاهش می‌یابد. از طرفی با توجه به اطلاعات پیشین برآوردگر بیزی برآوردی بهتری را نسبت به برآوردگر ماکسیمم درستنمایی فراهم می‌کند.

سپاسگزاری

بر خود لازم می‌دانیم مراتب تشکر صمیمانه خود را، از مسئولان محترم پژوهشی و هیئت داوران مجله مهندسی و مدیریت کیفیت که ما را در انجام و ارتقای کیفی این پژوهش یاری دادند، اعلام داریم. همچنین قابل به ذکر است که این پژوهش هیچ کمک هزینه خاصی از هیچ مؤسسه سرمایه‌گذار در بخش عمومی، تجاری یا غیرانتفاعی دریافت نکرده است.

تعارض منافع

این جانبان پرویز نصیری، فاطمه گودرزی معصومی و مسعود یارمحمدی اعلام می‌کنیم که هیچ تعارض منافعی وجود ندارد.

۷. منابع

[1] Gilbert, J. P. (1962). Random censorship. The University of Chicago.

[2] Breslow, N., & Crowley, J. (1974). A large sample study of the life table and product limit estimates under random censorship. The Annals of statistics, 437-453.

[3] Koziol, J. A., & Green, S. B. (1976). A Cramer-von Mises statistic for randomly censored data. Biometrika, 63(3), 465-474.

[4] CSÖRGÓ, S., & Horvath, L. (1981). On the Koziol—Green model for random censorship. Biometrika, 68(2), 391-401.

[5] Kim, J. H. (1993). Chi-square goodness-of-fit tests for randomly censored data. The Annals of Statistics, 21(3), 1621-1639.

[6] Kohansal, A. Shoaei, sh. (2019). Bayesian Inference Parameter Reliability in Two-Parameter Riley Distribution under Increasingly Censored Bond Samples. 10(2):159-168 (in Persian)

[7] Ghitany, M. E. (2001). A compound Rayleigh survival model and its application to randomly censored data. Statistical Papers, 42(4), 437-450.

[8] Raqab, M. M., & Ahsanullah, M. (2001). Estimation of the location and scale parameters of generalized exponential distribution based on order statistics. Journal of statistical Computation and simulation, 69(2), 109-123.

[9] Ghitany, M. E., & Al-Awadhi, S. (2002). Maximum likelihood estimation of Burr XII distribution parameters under random censoring. Journal of Applied Statistics, 29(7), 955-965.

[10] Friesl, M., & Hurt, J. (2007). On Bayesian estimation in an exponential distribution under random censorship. Kybernetika, 43(1), 45-60.

[11] Abu-Taleb, A. A., Smadi, M. M., & Alawneh, A. J. (2007). Bayes estimation of the lifetime parameters for the exponential distribution. Journal of Mathematics and Statistics, 3(3), 106-108.

[12] Saleem, M., & Aslam, M. (2009). On Bayesian analysis of the Rayleigh survival time assuming the random censor time. Pakistan Journal of Statistics, 25(2).

[13] Saleem, M. Raza, A. (2011). On Bayesian analysis of the exponential survival time assuming the exponential censor time. Pak J Sci. 63(1):44–48.

[14] Kohansal, A. Kazemi, R. Faraji, N. (2019). Estimation of reliability parameter for inverted exponential generalized distribution based on type 2 incremental censorship samples. 10(1):60-74 (in Persian)

[15] Danish, M. Y., & Aslam, M. (2013). Bayesian estimation for randomly censored generalized exponential distribution under asymmetric loss functions. Journal of Applied Statistics, 40(5), 1106-1119.

[16] Danish, M. Y., & Aslam, M. (2014). Bayesian inference for the randomly censored Weibull distribution. Journal of Statistical Computation and Simulation, 84(1), 215-230.

[17] Krishna, H. (2015). Vivekanand, and K. Kumar, "Estimation in Maxwell distribution with randomly censored data,". Journal of Statistical Computation and Simulation, 85(17), 3560-3578.

[18] Garg, R., Dube, M., Kumar, K., & Krishna, H. (2016). On randomly censored generalized inverted exponential distribution. American Journal of Mathematical and Management Sciences, 35(4), 361-379.

[19] Krishna, H., & Goel, N. (2017). Maximum likelihood and Bayes estimation in randomly censored geometric distribution. Journal of Probability and Statistics, 2017.

[20] NASIRI, U. J. D. P. F. (2001). Estimation of parameters of the exponential distribution in the presence of outliers generated from uniform distribution.

[21] Dixit, U. J., & Nasiri, P. (2010). Estimation of the Scale Parameter of the Exponential Distribution in the Presence of Outliers Using Linex Loss Function. American Journal of Mathematical and Management Sciences, 30(3-4), 365-383.

[22] Lindley, D. V. (1980). Approximate Bayesian methods. Trabajos de estadística y de investigation operativa, 31(1), 223-245.

[23] Nasiri, P., & Pazira, H. (2010). Bayesian approach on the generalized exponential distribution in the presence of outliers. Journal of Statistical Theory and Practice, 4(3), 453-475.

Estimation Parameters of Two-Parameter Exponential Distribution Under Random Censoring with the Presence of Outlier Data and Determining the Warranty Period Related To Product Quality

Parviz Nasiri[1]
Associate Professor Department of Statistics, Payame Noor University (PNU), Tehran, Iran.

Fateme Guderzi Masoumi
Ph.D. student Department of Statistics, Payame Noor University (PNU), Tehran, Iran.

Masoud Yarmohammadi
Associate Professor Department of Statistics, Payame Noor University (PNU), Tehran, Iran.

Aim and Introduction

In the study of lifetime data, the lifetime of each test item has great importance, whose application fields are in medicine, biology, clinical trials, public health, engineering, economics and demography. In theory of reliability as data lifetime or failure time are known. Different statistical distributions are used in lifetime data analysis, including: Weibull, Burr, Inverse Lomax distribution and Geometric Inverse Lomax distribution. Since collecting the lifetime data is a costly and time-consuming task, recently censoring schemes have been used in lifetime data, including type I, type II censoring, progressive censoring, and hybrid censoring. Random censored data often occur in survival analysis and reliability theory, for more information on data analysis according to the type of random censoring, can be refer to the articles of Gilbert [3], Breslow and Crowley [1], Koziol and Green [6], Csorgo and Horvath [2]. Kim [4] and Kohansal and Shoaei [5] have discussed the use of goodness-of-fit test of censored random data. It is worth to say that in some research works, outliers are observed in the statistical data analysis and it refer to it as outlier data. One of the important statistical topics is the estimation of parameters by considering outlier data. Two-parameter exponential distribution has particular importance among statistical distributions due to the fact that it has a constant failure rate. This distribution having location and scale parameters has applications in various fields including medicine, engineering, economics, demography, lifetime data and reliability. Due to the importance of lifetime data, two-parameter exponential distribution with censored data has recently attracted the attention of many researchers. So that in the use of statistical distributions for the goodness of fit, one of the important discussions is the location parameter, which is referred to as the threshold parameter of the minimum life time or warranty period, and in most cases.

[1].Corresponding Author: pnasiri@pnu.ac.ir

It is worth mentioning that the estimation of the location parameter affects the estimators of other parameters based on the lifetime data and causes the complexity of the parameter's estimation. Since the inference about the location parameter with random censored data in the presence of outlier data has not been discussed so far, in this article, the parameters of two-parameter exponential distribution under random censoring with the presence of k outlier data are estimated and compared by moment, maximum likelihood and Bayesian methods. Due to the importance of the location parameter, two-parameter exponential distribution under random censoring with the presence of outlier data, the location parameter is considered the same but the scale parameter is different. In estimation parameters, it is very important to compare the estimators according to the amount of error by using statistical criteria. For this purpose, in this article, using Gibbs sampling and using the simulation the estimators have been compared.

Methodology

Now to introduce the two-parameter exponential distribution under randomized censoring with the presence of outlier's model, we consider the following density functions,

$$f_1(x,\mu;\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-(x-\mu)/\theta} \quad ,\theta>0\,,\ 0\le\mu\le x\le\infty$$

$$f_2(x,\mu;\alpha)=\frac{1}{\alpha}e^{-(x-\mu)/\alpha} \quad ,\alpha>0\,,\ 0\le\mu\le x\le\infty$$

according to the joint density function of random sample $X_1,X_2,...,X_n$

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n,\alpha,\mu,\theta)$$
$$=\frac{1}{\binom{n}{k}}\prod_{i=1}^{n}f_1(x_i,\alpha,\mu,\theta)\cdot\sum_{\underline{A}}\prod_{j=1}^{k}\frac{f_2(x_{Aj},\alpha,\mu,\theta)}{f_1(x_{Aj},\alpha,\mu,\theta)}$$

Such that,

$$\sum_{\underline{A}}=\sum_{A_1=1}^{n-k+1}\sum_{A_2=A_1+1}^{n-k+2}\cdots\sum_{A_2=A_{k-1}+1}^{n}$$

See Dixit and Nasiri (2001). The marginal density function is equal to:

$$f(x;\mu,\theta,\alpha)=\frac{k}{n\theta}e^{-(x-\mu)/\theta}+\frac{n-k}{n\alpha}e^{-(x-\mu)/\alpha},;\ \theta,\ \alpha>0,\ 0\le\mu\le x\le\infty$$

Now suppose that the items with test lifetimes are independent and have a density function $f(x;\mu,\theta,\alpha)$, also suppose that random censoring time $T_1,T_2,\ldots,T_n$ has a density and distribution function, $f_T(t,\mu,\lambda)$ and $F_T(t,\mu,\lambda)$ respectively. According to the definition of random variables, $X_1,X_2,...,X_n$

and $T_1,T_2,...,T_n$, Only one reality viewing and real time viewing with $Y_i=\min(X_i,T_i)$, It can be shown that the joint density function of Y and D is equal to

$$f_{Y,D}(y_i,d_i,\mu,\theta,\alpha)=\left\{f_X(y_i,\mu,\theta,\alpha)\left(1-F_T(y_i,\mu)\right)\right\}^{di}\left\{f_T(y_i,\mu)\left(1-F_X(y_i,\mu,\theta,\alpha)\right)\right\}^{(1-di)}$$
$$=\left\{\frac{k}{n\theta}e^{-\frac{(y_i-\mu)(\theta+1)}{\theta}}+\frac{n-k}{n\alpha}e^{-\frac{(y_i-\mu)(\alpha+1)}{\alpha}}\right\}^{di}\left\{\frac{k}{n}e^{-\frac{(y_i-\mu)(\theta+1)}{\theta}}+\frac{n-k}{n}e^{-\frac{(y_i-\mu)(\alpha+1)}{\alpha}}\right\}^{1-di}$$

Such that

$$D_i=\begin{cases}1 & if \quad x_i\le T_i\\ 0 & if \quad x_i>T_i\end{cases},\qquad P[D_i=j]=p^j(1-p)^{(1-j)};j=0,1$$

It easy to show that the marginal distribution of Y given by,

$$f(y|\mu,\theta,\alpha)=\frac{k(\theta+1)}{n\theta}e^{-\frac{(y_i-\mu)(\theta+1)}{\theta}}+\frac{(n-k)(\alpha+1)}{n\alpha}e^{-\frac{(y_i-\mu)(\alpha+1)}{\alpha}}\quad y_i\ge\mu$$

Such that

$$E(Y^r)=\int_\mu^\infty y^r\left(\frac{k(\theta+1)}{n\theta}e^{-\frac{(y-\mu)(\theta+1)}{\theta}}+\frac{(n-k)(\alpha+1)}{n\alpha}e^{-\frac{(y-\mu)(\alpha+1)}{\alpha}}\right)dy$$
$$=[\frac{k}{n}\sum_{t=0}^{r}\binom{r}{t}\mu^{r-t}\left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)^t+\frac{n-k}{n}\sum_{t=0}^{r}\binom{r}{t}\mu^{r-t}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^t]\Gamma(t+1)$$

Findings

According to the density function of random variables, and based on a random sample, the model parameters are estimated using moment, maximum likelihood and Bayesian methods. It is worth mentioning that according to the dimensions of the parameter and the use of estimation methods, it is necessary to consider the criterion of simultaneous comparison for estimators. For this purpose, the generalized variance criterion has been used. The results for the maximum likelihood estimator while the number of outlier data is one and two are shown in Tables 1 and 2.

Table 1: generalized variance criterion for k=1.

n	$\alpha=1,\theta=3,$ $\mu=1$	$\alpha=1,\theta=3,$ $\mu=0.5$	$\alpha=1,\theta=2,$ $\mu=1$	$\alpha=1,\theta=2,$ $\mu=0.5$	$\alpha=2,\theta=3,$ $\mu=1$	$\alpha=2,\theta=3,$ $\mu=0.5$
10	0.000235	0.000702	3.33E-05	0.000161	0.01362٠	0.009626
15	5.62E-05	7.25E-05	1.15E-05	1.28E-05	0.000806	0.002015
20	2.18E-05	5.31E-05	1.03E-05	1.05E-05	0.000161	0.000362
25	7.64E-06	1.02E-05	2.04E-06	3.71E-06	0.000125	0.000330
30	2.39E-06	3.94E-06	3.81E-07	3.00E-06	7.00E-05	0.000144
35	2.03E-06	1.98E-06	3.39E-07	6.56E-07	2.86E-05	0.000129
40	8.95E-07	1.83E-06	9.36E-08	5.32E-07	1.34E-05	4.25E-05

Table 2: generalized variance criterion for k=2.

n	$\alpha=1,\theta=3,$ $\mu=1$	$\alpha=1,\theta=3,$ $\mu=0.5$	$\alpha=1,\theta=2,$ $\mu=1$	$\alpha=1,\theta=2,$ $\mu=0.5$	$\alpha=2,\theta=3,$ $\mu=1$	$\alpha=2,\theta=3,$ $\mu=0.5$
10	5.26E-05	0.000412	1.80E-05	0.000239	0.004862	0.016086
15	1.23E-05	2.90E-05	6.84E-06	1.46E-05	0.000555	0.002467
20	9.74E-06	2.22E-05	2.52E-06	6.69E-06	0.000239	0.001795
25	4.66E-06	7.25E-06	4.18E-07	2.57E-06	7.32E-05	5.26E-05
30	1.54E-06	4.20E-06	2.79E-07	6.37E-07	5.04E-05	5.58E-05
35	7.80E-07	1.18E-06	2.15E-07	5.98E-07	1.96E-05	5.17E-05
40	6.03E-07	6.66E-07	1.47E-07	2.52E-07	1.82E-05	1.03E-05

Discussion and Conclusion

By examining the results, it can be said that:

- In all cases, Bayesian estimators perform better under the error squared loss function compared to the maximum likelihood estimator.
- As the sample size increases, the average square error of all estimators decreases.
- Estimators using the method of moment is easily calculated, despite having a higher mean square error compared to other methods.
- The Bayesian estimator performs better compared to the maximum likelihood estimator according to the appropriate prior distribution.
- By increasing the number of outlier data or k, the mean square error of the maximum likelihood estimator of parameters θ and α decreases.
- According to the results tables 1 and 2, it can be Said that with increasing sample size the generalized variance decreased.

Reference

[1] Breslow, N., & Crowley, J. (1974). A large sample study of the life table and product limit estimates under random censorship. 2:437–453.

[2] Csorgo, S., & Horvath, L. (1981). On the Koziol–Green model for random censorship. Biometrika. 68(2):391–401.

[3] Gilbert, J. P. (1962). Random censorship. Ph.D. thesis, University of Chicago.

[4] Kim, J. H. (1993). Chi-square goodness-of-fit tests for randomly censored data. 21(3):1621–1639.

[5] Kohansal, A., & Shoaei, sh. (2019). Bayesian Inference Parameter Reliability in Two-Parameter Riley Distribution under Increasingly Censored Bond Samples. 10(2):159-168 (in Persian).

[6] Koziol, J. A., & Green, SB. (1976). A Cramer-von Mises statistic for random censored data. Biometrika. 63:465–474.