

طراحی آماری - اقتصادی نمودار کنترل بیزی مبتنی بر توزیع پیشگو برای مشاهدات انفرادی با توزیع مشخصه‌ی کیفی نمایی

راضیه سیرانی

دانشجوی دکتری، گروه آمار، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران. seiranir@gmail.com

محسن ترابیان*

(نویسنده مسئول) استادیار، گروه ریاضی، واحد قزوین، دانشگاه آزاد اسلامی، قزوین، ایران. torabianmohsen@gmail.com

محمدحسن بهزادی

دانشیار، گروه آمار، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران. behzadi@srbiau.ac.ir

اصغر سیف

دانشیار، گروه آمار، دانشکده ی علوم پایه، دانشگاه بوعلی سینا، همدان، ایران. erfane.seif@gmail.com

چکیده: در این مقاله، طراحی آماری - اقتصادی نمودار کنترل بیزی مبتنی بر توزیع پیشگو برای مشاهدات انفرادی از توزیع مشخصه‌ی کیفی نمایی ارائه شده است. در انجام این کار، دو نوع توزیع پیشین مزدوج و توزیع جفریز در نظر گرفته شده و بر اساس توزیع مشاهدات در فاز اول، توزیع پیشگو تعیین شده است. سپس با استفاده از مدل اقتصادی لورنزن و وانس، یک طرح آماری - اقتصادی برای داده‌ها به دست آمده است. پارامترهای طراحی بهینه (فاصله‌ی نمونه‌گیری و حدود کنترل) با استفاده از الگوریتم ژنتیک تعیین شده و تجزیه و تحلیل حساسیت برای مقادیر مختلف پارامترهای مدل انجام گرفته است. نتایج این رویکرد با نتایج مدل کلاسیک مقایسه شده است. بر اساس نتایج، این روش نسبت به روش کلاسیک مؤثرتر است.

کلمات کلیدی: نمودار کنترل بیزی، توزیع پیشین، توزیع پیشگو، طراحی آماری - اقتصادی (ESD)، الگوریتم ژنتیک (GA).

فرایند و افزایش کیفیت محصول مفید است و می‌تواند باعث کاهش هزینه‌ها و افزایش سود شرکت شود. در نمودار کنترل با نرخ نمونه‌گیری ثابت (FRS)^۲، نمونه‌هایی با اندازه‌ی ثابت در فواصل نمونه‌گیری ثابت استخراج شده و مقدار آماره‌ی مربوطه رسم می‌شود. هنگامی که مقدار این آماره از کنترل خارج می‌شود، ممکن است فرایند متوقف شود و جستجو برای یافتن انحراف‌های با دلیل^۳ آغاز شود، مگر این که هشدار صادر شده، یک هشدار اشتباه باشد.

برای طراحی یک نمودار کنترل، معمولاً فرض می‌شود که مشخصه‌ی کیفی از توزیع نرمال پیروی می‌کند، اما در عمل، این موضوع همیشه درست نیست. هنگامی که مشخصه‌ی کیفی از توزیع غیرنرمال پیروی می‌کند، استفاده از نمودار کنترل با فرض

۱- مقدمه

نمودارهای کنترل یکی از مهمترین ابزارهای ارزیابی عملکرد و نظارت بر فرایندها هستند. نمودار کنترل یک ابزار آماری است که اطلاعاتی را در مورد زمانی که یک فرایند به حالت خارج از کنترل تغییر می‌کند ارائه می‌دهد که به مهندسان فرایند کمک کند تا آن را به حالت تحت کنترل بازگردانند. بنابراین، استفاده‌ی صحیح از نمودارهای کنترل برای کاهش محصولات معیوب در

¹ تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۶/۱۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۰/۰۴

دوره ۱۲/ شماره ۲

صفحات ۱۵۳-۱۶۹

* Corresponding author: torabianmohsen@gmail.com

² Fix Ratio Sampling

³ Assignable Causes

توزیع نرمال ممکن است مهندسان کیفیت را گمراه کرده و هزینه‌های بازرسی را افزایش دهد. زمانی که مشخصه کیفی نرمال نباشد، اگر واریانس معلوم و یا اندازه‌ی نمونه به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد، طبق قضیه حد مرکزی، \bar{X} تقریباً نرمال خواهد بود، در حالی که در طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل معمولاً از اندازه نمونه‌ی کوچک استفاده می‌شود لذا در چنین مواردی گزاره‌ی فوق معتبر نیست. همانطور که سانتیاگو و اسمیت [۱] اشاره کردند، داده‌هایی که تحت زیرگروه‌های منطقی جمع‌آوری نشده‌اند، می‌توانند بسیار چوله باشند. توزیع نمایی به خوبی با داده‌های بسیار منحرف سازگار است، جزئیات بیشتر در این مورد را می‌توان در شیلینگ و نلسون [۲] یا استومبوس و رینولدز [۳] یافت. سانتیاگو و اسمیت [۱] و اسلم و همکاران [۴]، اشاره کرده‌اند که توزیع‌های نمایی به بهترین وجه برای زمان بین رویدادها در مشخصه‌های کیفی دارای چولگی در نظر گرفته می‌شوند. آن‌ها این نمودار را برای توزیع‌های نمایی با استفاده از تبدیل پیشنهاد شده توسط نلسون [۵] ارائه کردند.

طراحی نمودارهای کنترل دارای پیامدهای آماری و اقتصادی متعددی است که هر دو تحت تأثیر انتخاب پارامترهای نمودار کنترل از جمله اندازه‌ی نمونه (n)، حدود کنترل (L) و فاصله‌ی بین نمونه‌ها (h) هستند. طراحی اقتصادی نمودار کنترل به معنای تعیین پارامترهای نمودار کنترل به گونه‌ای است که هزینه‌ی کل فرایند در واحد زمان به حداقل برسد. دانکن [۶] و لورنزن و وانس [۷] طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل را برای مشخصه‌ی کیفی نرمال بررسی کردند در حالی که مکانیزم شکست فرایند دارای توزیع نمایی است. طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل، اگرچه میانگین هزینه در واحد زمان را به حداقل می‌رساند، اما از نظر معیارهای آماری می‌تواند نقاط ضعف قابل توجهی داشته باشد. به عنوان مثال، تشخیص تغییرات کوچک در میانگین فرایند این نوع طراحی می‌تواند منجر به نرخ خطای بالا یا احتمال بالای خطای نوع I شود. احتمال خطای نوع دوم نیز می‌تواند بسیار زیاد باشد. این دو موضوع می‌تواند منجر به از بین رفتن اعتماد مدیر خط تولید یک شرکت در استفاده از نمودارهای کنترل نظارت بر فرایند شود. سانگا [۸] راه حلی برای این مشکل پیشنهاد کرد که نتیجه‌ی آن را طراحی آماری-اقتصادی (ESD)^۴ نامید. در این نوع طراحی با در نظر گرفتن حد بالا برای احتمال خطاهای نوع اول و دوم، علاوه بر کمینه کردن هزینه، این دو نوع خطا نیز در سطح مورد نظر کنترل می‌شوند. ولکوویچ و همکاران [۹] طراحی آماری-

اقتصادی نمودار کنترل \bar{X} را زمانی که توزیع مشخصه کیفی متقارن اما غیرنرمال است، ارائه کردند.

در استنباط آماری، دو رویکرد متفاوت کلاسیک و بی‌زی وجود دارد. مهمترین و قابل توجه ترین مزیت رویکرد بی‌زی نسبت به سایر روش ها که می توان به آن اشاره کرد این است که با اختصاص توزیع پیشین به پارامترهای مجهول می توان عدم قطعیت در تخمین پارامترهای مجهول را به اندازه کافی کنترل کرد. در رویکرد بی‌زی، یک توزیع پیشین به پارامتر مجهول اختصاص داده می شود. اطلاعات موجود در توزیع پیشین با یک تابع احتمال ترکیب می شود تا توزیع پسین را به دست آورد. استنتاج در مورد پارامتر مجهول بر اساس توزیع پسین است. همچنین در رویکرد بی‌زی، از توزیع پسین می توان برای محاسبه توزیع پیشگو برای نمونه‌های آینده استفاده کرد، اما در رویکرد کلاسیک، پارامترها مقادیر مشخصی دارند. البته لازم به ذکر است که در هر دو رویکرد، مشاهدات نمونه جزء ابزار کار هستند. برای اولین بار، گیرشیک و روبین [۱۰] برآوردهای بی‌زی از پارامترهای ناشناخته‌ی کنترل کیفیت را ارائه کردند. وودوارد و نایلور [۱۱] کاربرد روش‌های بی‌زی را در کنترل فرایندهای آماری که طول مدت آن‌ها کوتاه است و شاید مجموع اقلام تولیدی این فرایند بیش از ۳۰ مورد نباشد توسعه دادند. برخی از محققین ایده‌ی نمودار کنترل بی‌زی بر مبنای توزیع پسین را ملاک عمل قرار داده اند و آماره‌ی کنترل را احتمال پسین تحت کنترل بودن در نظر گرفته اند که از آن جمله می‌توان به تیلور [۱۲] و [۱۳] اشاره کرد که برای اولین بار بیان کرد که این دسته از نمودارهای کنترل بی‌زی در مقایسه با نمودارهای کلاسیک و غیر بی‌زی دارای عملکرد بهتری از نظر خطای کمتر در تعداد هشدارهای اشتباه و صدور هشدار در زمان بروز انحراف بادلیل هستند. همچنین کلابرس [۱۴]، تاگارس [۱۵] و [۱۶]، تاگارس و نیکولایدیس [۱۷] و ماکیس [۱۸] این نوع نمودار کنترل بی‌زی را در مطالعات خود استفاده کرده‌اند. منزفریک [۱۹] برای اولین بار به معرفی نوع جدیدی از نمودارهای کنترل بی‌زی پرداخت. در این ایده، عدم قطعیت پارامتر فرایند در توزیع پیشین لحاظ شده، با در نظر گرفتن داده‌های به دست آمده از فاز I ، توزیع پسین پارامتر به دست می‌آید. سپس مشاهدات فاز II فرایند، به چشم مشاهدات آینده دیده شده و حدود کنترل برای آماره‌ی به دست آمده در فاز II بر اساس توزیع پیشگو ساخته می‌شود. وی در مقاله‌ی خود به معرفی این ایده‌ی جدید برای نمودار کنترل میانگین‌ها و نسبت‌های تک متغیره، زمانی که داده‌ها از یک توزیع

⁴ Economic statistical design

بهینه سازی هزینه‌ی مورد انتظار در واحد زمان یا طراحی اقتصادی و طراحی آماری- اقتصادی نمودارهای کنترل بیزی با این رویکرد در نظر گرفته نشده است. در این مقاله، ما برای اولین بار یک طرح آماری- اقتصادی برای نمودار کنترل مشاهدات انفرادی بر اساس توزیع پیشگو و با قرار دادن محدودیت‌هایی در مدل هزینه بر روی پارامترهای میانگین تعداد هشدارهای اشتباه (ANF)^{۱۰} و میانگین تعدیل شده زمان تا صدور هشدار بعد از تغییر میانگین فرایند ($AATS$)^{۱۱} را ارائه می‌کنیم.

۲- ساخت و ارزیابی نمودار کنترل بیزی مبتنی بر توزیع پیشگو

ساختار اصلی این مقاله بر اساس اطلاعات به دست آمده در فازهای I و II است، بنابراین، لازم است ابتدا این دو فاز را به اختصار معرفی کنیم. استفاده از نمودارهای کنترل استاندارد مستلزم آشنایی با فاز I و فاز II نمودارهای کنترل است که هر فاز هدف کاملاً متفاوتی را دنبال می‌کند. در فاز I ، مجموعه‌ای از داده‌های فرایند در قالب یک تحلیل گذشته‌نگر جمع‌آوری و تجزیه و تحلیل می‌شود و محدودیت‌های کنترل آزمایشی ایجاد می‌شود تا مشخص شود که آیا فرایند در طول دوره‌ی جمع‌آوری داده‌ها تحت کنترل است یا خیر. فاز II پس از وجود مجموعه‌ای از داده‌های "تمیز" که تحت شرایط پایدار تهیه شده و بیانگر عملکرد تحت کنترل فرایند است، آغاز می‌شود. در فاز II ، با مقایسه‌ی آماره‌ی هر یک از نمونه‌های متوالی انتخاب شده از فرایند با حدود کنترل، عملکرد فرایند پایش می‌شود.

فرض کنید $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n_c})$ یک نمونه‌ی تصادفی با اندازه‌ی n_c است که از یک فرایند پایدار در فاز I تولید می‌شود.

تابع درستنمایی برای این نمونه به صورت زیر است:

$$L(\theta) = f(x|\theta) = \prod_{i=1}^{n_c} f(x_i|\theta) \quad (1)$$

آماره‌ی بسنده^{۱۲} شامل تمام اطلاعات به دست آمده از نمونه‌ها است، بنابراین، اطلاعات مربوط به θ در داده‌ها در آماره‌ی بسنده‌ی $T_c = T(x_1, x_2, \dots, x_{n_c})$ خلاصه می‌شود. توزیع

نرمال تولید می‌شدند، پرداخت. سپس وی در [۲۰]، [۲۱]، [۲۲] و [۲۳] این نوع نمودارهای کنترل بیزی را برای واریانس و ضریب تغییرات، واریانس تعمیم یافته و میانگین متحرک موزون نمایی چند متغیره ($MEWMA$)^۵، میانگین و میانگین متحرک موزون ($EWMA$) ترکیبی^۶، میانگین و واریانس ارائه کرد. بر اساس توزیع پیشگو رابنهایمر و وندرمرو [۲۴] و [۲۵] با معیارهای تعریف شده توسط منزفریک [۱۹] نمودارهای کنترل را با استفاده از پیشین جفریز برای عدم انطباق‌ها ایجاد کردند و روش بیزی را برای نمودار p نوع شوهارت فاز دوم معرفی کردند. کومار و چاکرابورتی [۲۶] یک نمودار t_r بیزی (یک نمودار از نوع شوهارت که عدم قطعیت پارامتر را از طریق توزیع پیشین و پسین در خود دارد) را زمانی که پارامتر نرخ نمایی ناشناخته بود پیشنهاد کردند. مزیت این روش این است که هر گونه اطلاعات موجود در مورد فرایند از هر تجربه گذشته را می‌توان به همراه توزیع پیشین برای پارامتر، وارد سیستم نمودار کنترل فاز دوم کرده و محدودیت‌های کنترل را بر اساس توزیع پیشگو ایجاد کرد. سوریا نور و همکاران [۲۷] نمودارهای کنترل بیزی $EWMA$ را برای میانگین توزیع‌های طول عمر غیر نرمال بر اساس توزیع‌های نمایی و نمایی تبدیل شده به توزیع‌های رایلی و وایبول معکوس با استفاده از توزیع پیشین ناآگاهی بخش^۷ تحت پنج تابع زیان^۸ مختلف ارائه نمودند. مرادیان و همکاران [۲۸] طراحی آماری- اقتصادی نمودارهای کنترلی برای پایش میانگین فرایند با انحراف معیار معلوم بر اساس چگالی پیشگوی بیزی را با به کارگیری مدل هزینه‌ی لورنزن و وانس ارائه کردند. توکلی و حیدری [۲۹] نیز طراحی آماری- اقتصادی نمودار کنترلی برای مشاهدات انفرادی از توزیع نمایی را با استفاده از مدل هزینه‌ی کاستا و رحیم مطرح کردند.

در برخی از مقالات مربوط به نمودارهای کنترل بیزی مبتنی بر توزیع پیشگو، تنها طراحی انواع نمودارهای کنترل و نحوه‌ی محاسبه‌ی پارامترهایی مانند میانگین طول اجرا (ARL)^۹ بررسی شده و در برخی از آن‌ها به طراحی آماری این نمودارها پرداخته شده است. در برخی دیگر، توابع زیان و تأثیر آن‌ها بر نمودارهای کنترل مورد مطالعه قرار گرفته است، اما در هیچ یک از آن‌ها

⁵ Multivariate exponentially weighted moving average

⁶ Combined exponentially weighted moving average

⁷ Noninformative prior distribution

⁸ Loss function

⁹ Average run length

¹⁰ Average number of false alarms

¹¹ Adjusted average time to signal

¹² Sufficient statistics

برای هر مقدار مفروض پارامتر θ و بر اساس پایداری فرایند، با توجه به مستقل بودن نمونه‌های گرفته شده در فاز II ، "طول اجرا" یعنی تعداد نقاط رسم شده تا رسیدن به یک نقطه خارج از کنترل یک متغیر تصادفی هندسی با پارامتر زیر است:

$$\psi_{\theta} = P_{\theta}(T \in R(\alpha, t_c)) = \int_{R(\alpha, t_c)} f(t|\theta) dt \quad (۶)$$

۳- نمودار کنترل بی‌زی برای مشاهدات انفرادی بر اساس توزیع پیشین مزدوج^{۱۳}

در موقعیت‌هایی مانند زمانی که در فرایند از فناوری بازرسی و اندازه‌گیری خودکار استفاده شود یا روند تولید محصول کند باشد یا انحراف معیار کوچکی در اندازه‌گیری‌ها ایجاد شود و در حالت کلی هر زمان که به نوعی جمع‌آوری اطلاعات در زیرگروه‌های منطقی امکان پذیر نباشد، اندازه‌ی نمونه‌ی مورد استفاده برای نظارت بر فرایند $n = 1$ در نظر گرفته می‌شود. فرض کنید توزیع مشخصه‌ی کیفی نمایی با میانگین $\frac{1}{\theta}$ و تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f_{\bar{X}}(x|\theta) = \theta e^{-\theta x} I_{(0,+\infty)}(x) \quad (۷)$$

در فاز I یک نمونه به اندازه‌ی n_c انتخاب می‌کنیم. آماره‌ی بسنده $T_c = \bar{X}$ است که توزیع آن گاما با پارامترهای n_c و $n_c \theta$ با چگالی احتمال زیر خواهد بود:

$$f_{\bar{X}}(\bar{x}) = \frac{(n_c \theta)^{n_c}}{\Gamma(n_c)} \bar{x}^{\alpha-1} e^{-n_c \theta \bar{x}} I_{(0,+\infty)}(\bar{x}) \quad (۸)$$

حال اگر فرض کنیم چگالی پیشین پارامتر θ ، توزیع پیشین مزدوج گاما با پارامترهای v و ω و تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$\pi(\theta) = \frac{\omega^v}{\Gamma(v)} \theta^{v-1} e^{-\omega \theta} I_{(0,+\infty)}(\theta) \quad (۹)$$

در این صورت چگالی پسین^{۱۴} بنا بر رابطه (۳) دارای توزیع گاما با پارامترهای $(n_c + v)$ و $(\omega + n_c \bar{x})$ خواهد بود.

$$\pi(\theta|\bar{x}) \propto \theta^{(n_c+v)-1} e^{-\theta(\omega+n_c \bar{x})} I_{(0,+\infty)}(\theta) \quad (۱۰)$$

احتمال این آماره با $f(t_c|\theta)$ نشان داده می‌شود. در رویکرد بی‌زی، فرض بر این است که θ خود یک متغیر تصادفی با توزیع شناخته شده‌ای به نام توزیع پیشین است که با $\pi(\theta)$ نشان داده می‌شود. چگالی پسین که با $\pi(\theta|\mathbf{x})$ نشان داده می‌شود با ترکیب چگالی پیشین و تابع احتمال به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto \pi(\theta) \cdot f(\mathbf{x}|\theta) \quad (۲)$$

و یا برای آماره‌ی بسنده داریم:

$$\pi(\theta|t_c) \propto \pi(\theta) \cdot f(t_c|\theta) \quad (۳)$$

فرض کنید که $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ یک نمونه‌ی تصادفی با اندازه‌ی n از فاز II فرایند است. با در نظر گرفتن یک مقدار خاص برای پارامتر θ ، می‌توانیم تابع درستنمایی را برای \mathbf{y} به صورت زیر به دست آوریم:

$$f(\mathbf{y}|\theta) = \prod_{i=1}^n f(y_i|\theta) \quad (۴)$$

آماره‌ی بسنده برای \mathbf{y} را با $T = T(y_1, y_2, \dots, y_n)$ و تابع احتمال آن را با $f(t|\theta)$ نمایش می‌دهیم. حال توزیع پیشگو برای T به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f(t|t_c) = \int f(t|\theta) \pi(\theta|t_c) d\theta \quad (۵)$$

ما ناحیه رد نمودار کنترل برای T را بر اساس این توزیع پیشگو با $R(\alpha, t_c)$ نشان می‌دهیم که به α و مقدار مشاهده شده‌ی T_c بستگی دارد. اگر $t \in R(\alpha, t_c)$ از نمودار کنترل هشدار دریافت می‌کنیم و باید به دنبال انحراف‌های با دلیل و غیره باشیم و اگر $t \notin R(\alpha, t_c)$ نتیجه می‌گیریم که پارامتر فرایند یعنی θ تغییر نکرده و هنوز فرایند تحت کنترل است.

از آنجا که فرض بر این است که داده‌های فاز I از یک فرایند پایدار می‌آیند، به طور موقت فرض می‌کنیم که داده‌های فاز II نیز از همان فرایند پایدار می‌آیند. دلیل اصلی پایه‌گذاری نمودار کنترل بر روی توزیع پیشگوی T این است که به طور رسمی شامل عدم قطعیت در مورد مقدار پارامتر فرایند پایدار یعنی θ است.

به طور معمول، نمونه‌ی $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ به طور مکرر از فرایند گرفته می‌شود و $T = T(\mathbf{y})$ روی نمودار کنترل رسم می‌شود و توزیع "طول اجرا" یعنی تعداد نقاط ترسیم شده تا مشاهده‌ی اولین نقطه‌ای که خارج از یکی از حدود کنترل باشد، مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

¹³ Conjugate prior distribution

¹⁴ Posterior density

در این صورت اگر یک نمونه‌ی تصادفی انفرادی در فاز II گرفته شود، بنابر رابطه (۵) (محاسبات در پیوست ۱) توزیع پیشگو^{۱۵} به صورت زیر خواهد بود:

$$f(y|\bar{x}) = \frac{(n_c + v)}{(\omega + n_c \bar{x})} \times \left(1 + \frac{y}{\omega + n_c \bar{x}}\right)^{-(n_c + v + 1)} I_{(\omega, +\infty)}(y) \quad (11)$$

که همان توزیع لوماکس با پارامترهای $(n_c + v)$ و $(\omega + n_c \bar{x})$ است.

با توجه به اینکه توزیع پیشگوی به دست آمده از خانواده‌ی توزیع‌های پارتوی نوع II و توزیعی با دم‌سنگین است حدود کنترل متقارن شوهارتی اطراف میانگین این توزیع کارایی نداشته و لذا از روش چندی برای یافتن حدود کنترل بهره می‌گیریم. در این روش برای تعیین ناحیه‌ی پذیرش به اندازه‌ی $(1 - \alpha)$ بر اساس این توزیع پیشگو، می‌توان مقادیر t_1 و t_2 را به گونه‌ای تعیین کرد که $\int_{t_1}^{t_2} f(y|\bar{x}) dy = 1 - \alpha$ شود. لذا t_1 و t_2 در واقع چندکهای $\frac{\alpha}{2}$ و $(1 - \frac{\alpha}{2})$ این توزیع هستند و با حل دستگاه زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} \int_0^{t_1} f(y|\bar{x}) dy = \frac{\alpha}{2} \\ \int_{t_2}^{+\infty} f(y|\bar{x}) dy = \frac{\alpha}{2} \end{cases} \quad (12)$$

با جایگذاری چگالی پیشگوی به دست آمده در رابطه‌ی (۱۲) (محاسبات در پیوست ۲) و با تعریف $L = \ln\left(\frac{t_2}{\alpha}\right)$ ناحیه‌ی پذیرش به اندازه‌ی $(1 - \alpha)$ به صورت $A(\alpha, \bar{x}) = (t_1, t_2)$ خواهد بود که در آن داریم:

$$\begin{cases} t_1 = (\omega + n_c \bar{x}) \left(\frac{e^L}{e^L - 1} \right)^{\frac{1}{n_c + v}} - 1 \\ t_2 = (\omega + n_c \bar{x}) \left(e^{\frac{L}{n_c + v}} - 1 \right) \end{cases} \quad (13)$$

و ناحیه رد به اندازه α به صورت $R(\alpha, \bar{x})$ متمم $A(\alpha, \bar{x})$ است.

بر اساس توزیع مشخصه‌ی کیفی نمایی، حدود کنترل فوق و بر اساس رابطه‌ی (۶) برای هر θ معین داریم:

$$\begin{aligned} \psi_\theta &= P_\theta(Y \in R(\alpha, \bar{x})) \\ &= 1 - P(t_1 < Y < t_2) \\ &= 1 - \int_{t_1}^{t_2} \theta e^{-\theta y} dy \\ &= 1 + e^{-\theta t_2} - e^{-\theta t_1} \end{aligned} \quad (14)$$

بنابراین

$$ARL_0 = E(RL|\theta = \theta_0) = \frac{1}{\psi_{\theta_0}} \quad (15)$$

اکنون عملکرد ناحیه‌ی رد برای داده‌های فاز II را زمانی که مدل فرایند به $Exp\left(\frac{1}{\theta_1}\right)$ تغییر می‌کند، بررسی می‌کنیم که در آن $\frac{1}{\theta_1} = (1 + \delta) \frac{1}{\theta_0}$, $\delta > 0$. می‌دانیم که اگر y در ناحیه رد قرار گیرد، باید بررسی شود که آیا فرایند خارج از کنترل است؟ یعنی میانگین از $\frac{1}{\theta_0}$ به $\frac{1}{\theta_1}$ تغییر کرده است یا فقط یک هشدار اشتباه صادر شده است و فرایند هنوز تحت کنترل است. بنابراین داریم:

$$ARL_1 = E(RL|\theta = \theta_1) = \frac{1}{\psi_{\theta_1}} \quad (16)$$

۴- نمودار کنترل بیزی برای مشاهدات انفرادی بر اساس توزیع پیشین جفریز^{۱۶}

فرض کنید هیچ اطلاعاتی در مورد پارامتر مورد نظر در توزیع در دسترس نیست، در این صورت توزیع پیشین ناآگاهی بخش، مانند توزیع پیشین جفریز، می‌تواند مناسب باشد. توزیع پیشین جفریز با ریشه دوم دترمینان ماتریس اطلاع فیشر متناسب است.

$$\pi(\theta) \propto |I(\theta)|^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

هنگامی که θ یک بعدی است، از معادله زیر برای محاسبه‌ی اطلاع فیشر استفاده می‌شود:

$$I(\theta) = E \left(\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \quad (18)$$

فرض کنید در فاز I، $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n_c})$ از یک فرایند پایدار که توزیع مشخصه‌ی کیفی آن نمایی با میانگین $\frac{1}{\theta}$ است به دست آمده باشد. بنابراین:

$$L(\theta) = f(\mathbf{x}|\theta) = \prod_{i=1}^{n_c} f(x_i|\theta) = \theta^{n_c} e^{-\theta \sum_{i=1}^{n_c} x_i} \quad (19)$$

حال توزیع پیشین جفریز برای θ به کمک روابط (۱۷) و (۱۸) به صورت زیر دست می‌آید:

$$\pi(\theta) \propto \frac{1}{\theta} \quad \theta > 0 \quad (20)$$

¹⁵ Predictive distribution

¹⁶ Jeffrey's prior distribution

که در آن

$$\alpha = 1 - \int_{t_1}^{t_2} \theta_0 e^{-\theta_0 x} dx = 1 + e^{-\theta_0 t_2} - e^{-\theta_0 t_1}$$

$$\beta = \int_{t_1}^{t_2} \theta_1 e^{-\theta_1 x} dx = e^{-\theta_1 t_1} - e^{-\theta_1 t_2} \quad \text{و}$$

۵- مدل هزینه

در کنترل آماری فرایند، چرخه‌ی کیفیت به چهار مرحله‌ی مجزا تقسیم می‌شود:

۱- زمان تحت کنترل

۲- زمان خارج از کنترل تا صدور هشدار

۳- زمان اخذ، بررسی و تفسیر نمونه‌ی خارج از کنترل

۴- زمان جستجو و حذف انحراف با دلیل

این چهار مرحله، اساس فرایند تجدید-پاداش است که برای محاسبه‌ی درآمد خالص در هر ساعت برای مجموعه‌ی مشخصی از پارامترهای طراحی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در این مقاله ما از مدل هزینه لورنزن و وانس (۱۹۸۶) استفاده می‌کنیم.

۵-۱- مفروضات مدل هزینه

برای طراحی مدل هزینه برای نمودار کنترل بر اساس توزیع پیشگو پذیره‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. مشخصه‌ی کیفی دارای توزیع نمایی است.
۲. یک انحراف با دلیل باعث تغییر میانگین فرایند $(\frac{1}{\theta_0})$ به اندازه‌ی δ برابر انحراف معیار مشخصه‌ی کیفی می‌شود $(\frac{1}{\theta_0}(1 + \delta))$.
۳. هنگامی که یک نقطه، خارج از حدود کنترل واقع می‌شود، وجود یک انحراف با دلیل هشدار داده می‌شود.
۴. فرض می‌شود که انحراف با دلیل براساس یک فرایند پواسون با میزان متوسط λ مشاهده در ساعت رخ می‌دهد. به عبارت دیگر با فرض این که فرایند در حالت تحت کنترل شروع به کار می‌کند، مدت زمانی که فرایند در حالت تحت کنترل باقی می‌ماند یک متغیر تصادفی نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ ساعت خواهد بود.

آماره‌ی بسنده در فاز $I, T_c = \bar{X}$ است که دارای توزیع گاما با پارامترهای $n_c \theta$ و n_c است. در این صورت بر اساس رابطه‌ی (۳) توزیع پسین عبارت است از:

$$\pi(\theta|\bar{x}) \propto \theta^{n_c} e^{-n_c \theta \bar{x}} \times \frac{1}{\theta} \propto \theta^{(n_c-1)} e^{-n_c \bar{x} \theta} I_{(0,+\infty)}(\theta) \quad (21)$$

که همان توزیع گاما با پارامترهای n_c و $n_c \bar{x}$ است. در نتیجه برای یک مشاهده‌ی انفرادی در فاز II توزیع پیشگو بنابر رابطه‌ی (۵) (محاسبات در پیوست ۳) به صورت زیر خواهد بود:

$$f(y|\bar{x}) = \frac{n_c}{n_c \bar{x}} \left(1 + \frac{y}{n_c \bar{x}}\right)^{-(n_c+1)} I_{(0,+\infty)}(y) \quad (22)$$

که همان توزیع لوماکس با پارامترهای n_c و $n_c \bar{x}$ است.

با استفاده از رابطه‌ی (۱۲) و تعریف $L = \ln(\frac{2}{\alpha})$ ناحیه‌ی پذیرش به اندازه‌ی $(1 - \alpha)$ به صورت (t_1, t_2) خواهد بود که در آن داریم:

$$\begin{cases} t_1 = n_c \bar{x} \left(\left(\frac{e^L}{e^L - 1}\right)^{\frac{1}{n_c}} - 1 \right) \\ t_2 = n_c \bar{x} \left(e^{\frac{L}{n_c}} - 1 \right) \end{cases} \quad (23)$$

ناحیه رد به اندازه α به صورت $R(\alpha, \bar{x})$ متمم $A(\alpha, \bar{x})$ است و ARL_0 و ARL_1 از روابط (۱۵) و (۱۶) به دست می‌آیند.

برای نمودار کلاسیک یا همان FRS زمانی که توزیع مشخصه‌ی کیفی، نمایی با میانگین $\frac{1}{\theta_0}$ است نیز حدود کنترل به اندازه‌ی $(1 - \alpha)$ که آن‌ها را با t_1 و t_2 نشان می‌دهیم - مشابه روش چندکی استفاده شده در توزیع پیشگو- به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \int_0^{t_1} f(x|\theta_0) dx = \frac{\alpha}{2} \\ \int_{t_2}^{+\infty} f(x|\theta_0) dx = \frac{\alpha}{2} \end{cases} \quad (24)$$

حدود کنترل به اندازه‌ی $(1 - \alpha)$ با تعریف $L = \ln(\frac{2}{\alpha})$ به صورت زیر خواهد بود:

$$(t_1, t_2) = \left(\frac{1}{\theta_0} (L - \ln(e^L - 1)), \frac{L}{\theta_0} \right) \quad (25)$$

در این صورت

$$\begin{cases} ARL_0 = \frac{1}{\alpha} \\ ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta} \end{cases} \quad (26)$$

ANF : متوسط تعداد هشدارهای اشتباه که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$ANF = \frac{1}{ARL_0} \times \frac{e^{-\lambda h}}{1 - e^{-\lambda h}}$$

E : زمان مورد انتظار تا انتخاب نمونه و رسم نمودار یک مشاهده‌ی انفرادی.

T_1 : زمان مورد انتظار برای کشف انحراف با دلیل.

T_2 : زمان مورد انتظار برای اصلاح انحراف با دلیل.

$AATS$: میانگین زمان تعدیل شده تا صدور هشدار بعد از تغییر در میانگین فرایند که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$AATS = h(ARL_1) - \tau$$

به طوری که اگر فرض شود انحراف با دلیل بین j امین و $(j + 1)$ امین نمونه رخ داده، τ زمان مورد انتظار وقوع انحراف با دلیل در این فاصله‌ی نمونه‌گیری است و به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\tau = \frac{1 - (1 + \lambda h)e^{-\lambda h}}{\lambda(1 - e^{-\lambda h})}$$

C_0 : هزینه‌ی تولید محصول نامنطبق هنگامی که فرایند تحت کنترل است.

$C_1 (> C_0)$: هزینه‌ی تولید محصول نامنطبق هنگامی که فرایند خارج از کنترل است.

Y : هزینه‌ی هر هشدار اشتباه که شامل هزینه‌های بررسی و آزمون برای انحراف به اضافه‌ی هزینه‌های مدت زمان از کار افتادگی تولید در صورتی که تولید در طول جستجو متوقف شود، است.

W : هزینه‌ی شناسایی انحراف با دلیل و اصلاح فرایند که شامل هزینه‌های از کار افتادگی فرایند نیز می‌باشد.

a, b : هزینه‌ی ثابت و متغیر نمونه‌گیری.

γ_1 : تابع نشانگری که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\gamma_1 = \begin{cases} 1 & \text{اگر تولید طی جستجو ادامه یابد} \\ 0 & \text{اگر تولید طی جستجو متوقف شود} \end{cases}$$

γ_2 : تابع نشانگری که به صورت زیر تعریف می‌شود:

۵. هزینه‌ی حذف یک انحراف با دلیل و تعمیر (یا تنظیم) فرایند از درآمد خالص کسر نمی‌شود.

۶. فرایند پیوسته است، بدین معنی که در مدت زمان جستجو برای شناسایی انحراف با دلیل و همچنین در مدت زمان تعمیر یا تنظیم فرایند، فرایند به کار خود ادامه می‌دهد.

۵-۲- زمان و هزینه‌ی مورد انتظار چرخه

در مدل لورنزن و وانس زمان چرخه‌ی کیفیت به پنج دوره‌ی زیر تقسیم می‌شود:

۱. زمان چرخه تا وقوع یک انحراف با دلیل.

۲. مدت زمان صرف شده تا انتخاب نمونه‌ی بعدی.

۳. مدت زمان صرف شده برای تحلیل نمونه و رسم نمودار.

۴. مدت زمان تا صدور هشدار خروج فرایند از کنترل، توسط نمودار.

۵. مدت زمان برای بررسی انحراف با دلیل و اصلاح آن.

بر این اساس زمان مورد انتظار چرخه از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} + (1 - \gamma_1)T_0ANF + AATS + E + T_1 + T_2 \quad (27)$$

در طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل معمولاً سه نوع هزینه در نظر گرفته می‌شود:

- هزینه‌های نمونه‌گیری و آزمایش.
- هزینه‌های مربوط به بررسی علامت خارج از کنترل و تعمیر یا تصحیح انحراف با دلیل.
- هزینه‌های مرتبط با تولید محصول نامنطبق.

در مدل لورنزن و وانس هزینه‌ی مورد انتظار چرخه از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$E(C) = \frac{C_0}{\lambda} + C_1(AATS + E + \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2) + (Y \times ANF) + W + \frac{(a + b)}{h} \left(\frac{1}{\lambda} + AATS + E + \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2 \right) \quad (28)$$

نمادهای به کار رفته در روابط (۲۷) و (۲۸) عبارتند از:

T_0 : متوسط زمان مورد انتظار برای بررسی هر هشدار اشتباه.

مشاهده و شناسایی کرد. یکی از روش‌های طرح آزمایش‌ها روش تاگوچی است. این روش شامل طرح‌ریزی شرایط آزمایش با استفاده از جدول‌های خاصی است که آن را جدول آرایه‌ی متعامد می‌نامند. با به‌کارگیری روش تاگوچی، تعداد بررسی‌های لازم برای توسعه‌ی یک طراحی به صورت قابل توجهی کاهش می‌یابد و زمان و هزینه‌ی آن به حداقل می‌رسد. اگر قرار باشد تمامی حالت‌های ممکن مورد آزمایش قرار گیرد، تعداد کل آزمایش‌ها از فرمول "تعداد سطر پارامتر به توان تعداد پارامترها" به دست می‌آید. از آنجا که انجام این تعداد آزمایش بسیار زمانبر و هزینه‌بر است، بسته به اینکه چند پارامتر وجود دارد و هر پارامتر دارای چند سطح است، با استفاده از جدول آرایه‌های متعامد تاگوچی به جای انجام آزمایش تمامی حالت‌ها تنها کسری از حالت‌ها مورد آزمایش قرار می‌گیرند. این جدول نشان می‌دهد که چه تعداد آزمایش باید انجام شود و در هر آزمایش، هر پارامتر در چه سطحی از مقادیر انتخابی باشد. در روش تاگوچی ابتدا تعداد عوامل مؤثر و سطح هر کدام از آن‌ها را مشخص کرده، سپس با استفاده از جدول آرایه‌ی متعامد، تعداد آزمایش‌های لازم تعیین می‌شوند بعد از مشخص شدن تعداد آزمایش‌ها یک ماتریس تشکیل می‌شود که تعداد سطرهاى آن به اندازه‌ی تعداد آزمایش‌ها و تعداد ستون‌های آن به اندازه‌ی تعداد پارامترها می‌باشد. هر یک از سطرهاى این ماتریس، مشخص‌کننده‌ی شرایط آزمایش یا همان پارامترهای ورودی مسأله‌ی مورد نظر هستند که با انجام آزمایش، تأثیر آن‌ها روی خروجی فرایند مشخص می‌شود که این موضوع می‌تواند در انتخاب مناسب پارامترهای ورودی مسأله به کاربر کمک کند.

۵-۴-۲- مثال عددی

در این مثال، مقادیر برخی پارامترهای هزینه و زمان چرخه و پارامترهای فرایند ثابت فرض شده که این مقادیر به شرح جدول زیر هستند:

$a = 0.4$	$T_0 = 1$	$n_c = 70$	$\omega = 5$
$b = 0.1$	$\gamma_1 = 1$	$\bar{x} = 0.8$	$\nu = 5$
$\theta_0 = 1$	$\gamma_2 = 1$		

همچنین، برخی پارامترها بر اساس روش طراحی تاگوچی ترکیب و مورد استفاده قرار گرفته است. ترکیب این طراحی در جدول ۱ آمده است.

$$\gamma_2 = \begin{cases} 1 & \text{اگر تولید طی تعمیر و اصلاح فرایند ادامه یابد} \\ 0 & \text{اگر تولید طی تعمیر و اصلاح فرایند متوقف شود} \end{cases}$$

در نهایت، با توجه به فرایند تجدید-پاداش، هزینه‌ی مورد انتظار در واحد زمان به صورت نسبت هزینه‌ی مورد انتظار در هر چرخه به زمان مورد انتظار چرخه به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E(A) = \frac{E(C)}{E(T)} \quad (۲۹)$$

۳-۵- طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترل مشاهدات انفرادی

در طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترل مشاهدات انفرادی، هدف، تعیین مقادیر پارامترهای نمودار کنترل (L, h) است، به قسمی که رابطه‌ی (۲۹) با اعمال محدودیت‌های آماری کمینه شود. پارامترهای نمودار، همواره مقادیری پیوسته اختیار می‌کنند. بنابراین، مسأله‌ی بهینه‌سازی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \min E(A) \\ 0.09 < h \leq 8 \\ L > \ln 2 \\ AATS \leq 5 \\ ANF \leq 0.5 \end{aligned} \quad (۱۶)$$

برای عملیات بهینه‌سازی فوق از الگوریتم ژنتیک^{۱۷} (GA) به‌عنوان یک روش جستجوی فراابتکاری در نرم‌افزار متلب استفاده شده است.

۵-۴-۱- اجرای طراحی با استفاده از یک مثال عددی

در این بخش به مسأله‌ی تعیین پارامترهای بهینه‌ی طرح آماری-اقتصادی معرفی شده در بخش قبل با استفاده از یک مثال عددی می‌پردازیم.

از آنجا که برخی پارامترهای این مثال بر اساس روش طراحی تاگوچی تعیین گردیده‌اند، در ابتدا به معرفی اجمالی این روش می‌پردازیم.

۵-۴-۱- روش طراحی تاگوچی

یکی از اهداف طراحی آزمایش این است که با تغییراتی آگاهانه در متغیرهای ورودی فرایند، بتوان تغییرات خروجی فرایند را

¹⁷ Genetic algorithm

نتایج بهینه‌سازی در حالت پیشین مزدوج، پیشین جفریز و حالت کلاسیک به ترتیب در جداول ۲، ۳ و ۴ آمده است.

۶- نتیجه گیری

در این مقاله، یک طرح آماری- اقتصادی از نمودار کنترل بیزی برای مشاهدات انفرادی بر اساس توزیع پیشگو ارائه شده و پارامترهای طراحی بهینه بر اساس آن تعیین شده اند. همچنین، توزیع پیشین مزدوج و توزیع پیشین ناآگاهی بخش جفریز در مواردی که اطلاعات خاصی در مورد پارامتر ناشناخته توزیع مشخصه‌ی کیفی فرایند وجود ندارد با رویکرد بیزی استفاده شد. میانگین هندسی مقدار مورد انتظار هزینه در واحد زمان در جداول ۲، ۳ و ۴ به ترتیب ۶۲/۳۵، ۶۲/۲۹ و ۶۳/۵۴ است که نشان‌دهنده‌ی کاهش حدود ۲ درصدی هزینه‌ها در رویکرد بیزی با توزیع پیشین جفریز و مزدوج نسبت به حالت کلاسیک است. این نتیجه نشان می‌دهد که رویکرد بیزی که مبتنی بر چگالی پیشگو است، بهتر از رویکرد کلاسیک عمل می‌کند، در حالی که در رویکرد بیزی، تفاوت معنی‌داری بین نتایج استفاده از توزیع‌های پیشین جفریز و مزدوج وجود ندارد. نمودار ۱ هزینه‌های به‌دست آمده در حالات پیشین مزدوج، پیشین جفریز و حالت کلاسیک را نشان می‌دهد.

۵-۵- تحلیل حساسیت مدل

یکی از مشکلات در پیاده‌سازی مدل‌های آماری- اقتصادی برای نمودارهای کنترل، تعیین مقادیر پارامترهای ورودی است. تحلیل حساسیت می‌تواند به عنوان ابزاری برای کنترل این مشکل استفاده شود. داشتن ایده‌ای از حساسیت $E(A)$ به تغییرات در پارامترهای ورودی بسیار مهم است.

اکنون یک تحلیل حساسیت پارامترهای ورودی برای حل مدل آماری- اقتصادی، برای نمودار کنترل بیزی مشاهدات انفرادی ارائه می‌کنیم.

با توجه به مقادیر جداول ۲ و ۳ برخی از نتایج به شرح زیر است:
۱- تغییرات در λ یا در میانگین فاصله زمانی که فرایند در کنترل باقی می‌ماند ($\frac{1}{\lambda}$) بر فاصله‌ی نمونه‌گیری (h) تأثیر می‌گذارد، به طوری که λ کوچکتر یا $\frac{1}{\lambda}$ بزرگتر منجر به انتخاب مقادیر بهینه‌ی بزرگتر برای فاصله‌ی نمونه‌گیری می‌شود.

۲- با افزایش λ میانگین زمان تعدیل شده تا صدور هشدار ($AATS$) کاهش می‌یابد.

۳- افزایش مقدار λ باعث کاهش حدود کنترل (L) می‌شود.

۴- برای δ های بزرگتر از ۲، میانگین تعداد هشدارهای اشتباه (ANF) کاهش می‌یابد.

جدول ۱- طراحی تاگوچی برخی پارامترهای فرایند و هزینه

δ	λ	W	Y	E	C_1	C_0	T_1	T_2
۰.۷۵	۰.۰۵	۵۰	۲۵	۰.۰۵	۱۰۰	۱۰	۰.۵	۱
۰.۷۵	۰.۱	۱۰۰	۵۰	۰.۱	۲۰۰	۵۰	۲	۲
۱	۰.۰۵	۵۰	۲۵	۰.۰۵	۲۰۰	۵۰	۲	۲
۱	۰.۱	۱۰۰	۵۰	۰.۱	۱۰۰	۱۰	۰.۵	۱
۱.۲۵	۰.۰۵	۵۰	۵۰	۰.۱	۱۰۰	۱۰	۲	۲
۱.۲۵	۰.۱	۱۰۰	۲۵	۰.۰۵	۲۰۰	۵۰	۰.۵	۱
۱.۵	۰.۰۵	۵۰	۵۰	۰.۱	۲۰۰	۵۰	۰.۵	۱
۱.۵	۰.۱	۱۰۰	۲۵	۰.۰۵	۱۰۰	۱۰	۲	۲
۲	۰.۰۵	۱۰۰	۲۵	۰.۱	۱۰۰	۵۰	۰.۵	۲
۲	۰.۱	۵۰	۵۰	۰.۰۵	۲۰۰	۱۰	۲	۱
۲.۲۵	۰.۰۵	۱۰۰	۲۵	۰.۱	۲۰۰	۱۰	۲	۱
۲.۲۵	۰.۱	۵۰	۵۰	۰.۰۵	۱۰۰	۵۰	۰.۵	۲
۲.۵	۰.۰۵	۱۰۰	۵۰	۰.۰۵	۱۰۰	۵۰	۲	۱
۲.۵	۰.۱	۵۰	۲۵	۰.۱	۲۰۰	۱۰	۰.۵	۲
۳	۰.۰۵	۱۰۰	۵۰	۰.۰۵	۲۰۰	۱۰	۰.۵	۲
۳	۰.۱	۵۰	۲۵	۰.۱	۱۰۰	۵۰	۲	۱

جدول ۲- پارامترهای بهینه‌ی طراحی آماری- اقتصادی نمودار کنترل بی‌زی مشاهدات انفرادی با پیشین مزدوج

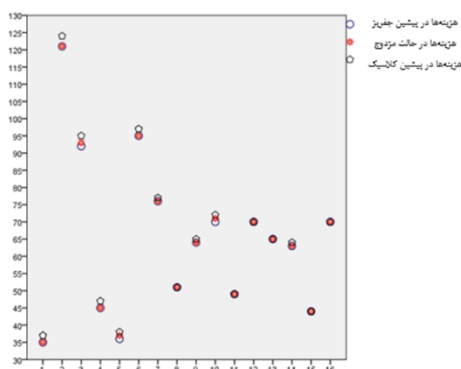
δ	λ	W	Y	E	C_1	C_0	T_1	T_2	ANF	AATS	h	L	E(A)
۰/۷۵	۰/۰۵	۵۰	۲۵	۰/۰۵	۱۰۰	۱۰	۰/۵	۱	۰/۵	۳/۶۷۸	۰/۱۱۷	۷/۱۳۰	۳۵/۴۰۴
۰/۷۵	۰/۱	۱۰۰	۵۰	۰/۱	۲۰۰	۵۰	۲	۲	۰/۵	۲/۳۱۴	۰/۱	۶/۵۳۶	۱۲۱/۲۰۴
۱	۰/۰۵	۵۰	۲۵	۰/۰۵	۲۰۰	۵۰	۲	۲	۰/۵	۲/۲۵۴	۰/۱۰۵	۷/۲۴۳	۹۳/۰۷۱
۱	۰/۱	۱۰۰	۵۰	۰/۱	۱۰۰	۱۰	۰/۵	۱	۰/۵	۱/۷۸۰	۰/۱۳۳	۶/۲۲۴	۴۵/۸۲۶
۱/۲۵	۰/۰۵	۵۰	۵۰	۰/۱	۱۰۰	۱۰	۲	۲	۰/۵	۲/۰۹۲	۰/۱۷۵	۶/۶۹۰	۳۷/۰۰۳
۱/۲۵	۰/۱	۱۰۰	۲۵	۰/۰۵	۲۰۰	۵۰	۰/۵	۱	۰/۵	۱/۱۰۳	۰/۰۹۶	۶/۵۸۳	۹۵/۵۳۶
۱/۵	۰/۰۵	۵۰	۵۰	۰/۱	۲۰۰	۵۰	۰/۵	۱	۰/۵	۱/۲۸۱	۰/۱۱۹	۷/۱۱۴	۷۶/۳۸۰
۱/۵	۰/۱	۱۰۰	۲۵	۰/۰۵	۱۰۰	۱۰	۲	۲	۰/۵	۱/۳۰۱	۰/۲	۵/۷۷۴	۵۱/۱۹۹
۲	۰/۰۵	۱۰۰	۲۵	۰/۱	۱۰۰	۵۰	۰/۵	۲	۰/۵	۱/۵۹۷	۰/۳۲۳	۶/۰۱۱	۶۴/۸۶۸
۲	۰/۱	۵۰	۵۰	۰/۰۵	۲۰۰	۱۰	۲	۱	۰/۵	۰/۶۶۳	۰/۱۲۱	۶/۳۳۲	۷۱/۰۴۷
۲/۲۵	۰/۰۵	۱۰۰	۲۵	۰/۱	۲۰۰	۱۰	۲	۱	۰/۵	۰/۸۰۴	۰/۱۴۴	۶/۹۰۶	۴۹/۲۲۲
۲/۲۵	۰/۱	۵۰	۵۰	۰/۰۵	۱۰۰	۵۰	۰/۵	۲	۰/۲۵۷	۱/۳۱۲	۰/۲۷۰	۶/۱۷۵	۷۰/۰۸۹
۲/۵	۰/۰۵	۱۰۰	۵۰	۰/۰۵	۱۰۰	۵۰	۲	۱	۰/۳۲۶	۱/۴۴۹	۰/۳۴۲	۶/۴۲۱	۶۵/۳۹۲
۲/۵	۰/۱	۵۰	۲۵	۰/۱	۲۰۰	۱۰	۰/۵	۲	۰/۵	۰/۵۲۶	۰/۱۳۰	۶/۲۵۱	۶۳/۸۵۱
۳	۰/۰۵	۱۰۰	۵۰	۰/۰۵	۲۰۰	۱۰	۰/۵	۲	۰/۵	۰/۶۱۲	۰/۱۶۵	۶/۷۵۱	۴۴/۳۵۹
۳	۰/۱	۵۰	۲۵	۰/۱	۱۰۰	۵۰	۲	۱	۰/۳۳۸	۰/۹۳۴	۰/۳۳۷	۵/۶۲۷	۷۰/۰۲۳

جدول ۳- پارامترهای بهینه‌ی طراحی آماری- اقتصادی نمودار کنترل بی‌زی مشاهدات انفرادی با پیشین جفریز

δ	λ	W	Y	E	C_1	C_0	T_1	T_2	ANF	AATS	h	L	E(A)
۰/۷۵	۰/۰۵	۵۰	۲۵	۰/۰۵	۱۰۰	۱۰	۰/۵	۱	۰/۵	۳/۶۴۳	۰/۱۱۸	۷/۱۸۸	۳۵/۲۸۷
۰/۷۵	۰/۱	۱۰۰	۵۰	۰/۱	۲۰۰	۵۰	۲	۲	۰/۵	۲/۲۹۳	۰/۱۰۱	۶/۵۸۹	۱۲۱/۰۶۹
۱	۰/۰۵	۵۰	۲۵	۰/۰۵	۲۰۰	۵۰	۲	۲	۰/۵	۲/۲۳۷	۰/۱۰۶	۷/۳۰۲	۹۲/۹۷۰
۱	۰/۱	۱۰۰	۵۰	۰/۱	۱۰۰	۱۰	۰/۵	۱	۰/۵	۱/۷۶۵	۰/۱۳۴	۶/۲۷۵	۴۵/۷۴۶
۱/۲۵	۰/۰۵	۵۰	۵۰	۰/۱	۱۰۰	۱۰	۲	۲	۰/۵	۲/۰۷۹	۰/۱۷۶	۶/۷۴۴	۳۶/۹۵۲
۱/۲۵	۰/۱	۱۰۰	۲۵	۰/۰۵	۲۰۰	۵۰	۰/۵	۱	۰/۵	۱/۰۹۶	۰/۰۹۷	۶/۶۳۶	۹۵/۴۴۴
۱/۵	۰/۰۵	۵۰	۵۰	۰/۱	۲۰۰	۵۰	۰/۵	۱	۰/۵	۱/۲۷۴	۰/۱۱۹	۷/۱۷۲	۷۶/۳۱۷
۱/۵	۰/۱	۱۰۰	۲۵	۰/۰۵	۱۰۰	۱۰	۲	۲	۰/۵	۱/۲۹۳	۰/۲۰۱	۵/۸۲۰	۵۱/۱۶۱
۲	۰/۰۵	۱۰۰	۲۵	۰/۱	۱۰۰	۵۰	۰/۵	۲	۰/۵	۱/۵۸۹	۰/۳۲۵	۶/۰۶۰	۶۴/۸۴۹
۲	۰/۱	۵۰	۵۰	۰/۰۵	۲۰۰	۱۰	۲	۱	۰/۵	۰/۶۶	۰/۱۲۱	۶/۳۸۴	۷۰/۹۹۸
۲/۲۵	۰/۰۵	۱۰۰	۲۵	۰/۱	۲۰۰	۱۰	۲	۱	۰/۵	۰/۸۰۱	۰/۱۴۴	۶/۹۶۳	۴۹/۱۸۵
۲/۲۵	۰/۱	۵۰	۵۰	۰/۰۵	۱۰۰	۵۰	۰/۵	۲	۰/۲۵۶	۱/۲۰۸	۰/۲۷۱	۶/۲۳۱	۷۰/۰۶۹
۲/۵	۰/۰۵	۱۰۰	۵۰	۰/۰۵	۱۰۰	۵۰	۲	۱	۰/۳۲۵	۱/۴۴۴	۰/۳۴۳	۶/۴۷۹	۶۵/۳۷۷
۲/۵	۰/۱	۵۰	۲۵	۰/۱	۲۰۰	۱۰	۰/۵	۲	۰/۵	۰/۵۲۴	۰/۱۳۱	۶/۳۰۳	۶۳/۸۱۳
۳	۰/۰۵	۱۰۰	۵۰	۰/۰۵	۲۰۰	۱۰	۰/۵	۲	۰/۵	۰/۶۱	۰/۱۶۶	۶/۸۰۸	۴۴/۳۳۳
۳	۰/۱	۵۰	۲۵	۰/۱	۱۰۰	۵۰	۲	۱	۰/۳۳۷	۰/۹۳۱	۰/۳۳۸	۵/۶۷۸	۷۰/۰۱۰

جدول ۴- پارامترهای بهینه‌ی طراحی آماری- اقتصادی نمودار کنترل مشاهدات انفرادی در حالت کلاسیک

δ	λ	W	Y	E	C_1	C_0	T_1	T_2	ANF	AATS	h	L	E(A)
۰/۷۵	۰/۰۵	۵۰	۲۵	۰/۰۵	۱۰۰	۱۰	۰/۵	۱	۰/۵	۴/۴۸۳	۰/۱۰۷	۶/۶۱۳	۳۷/۹۲۴
۰/۷۵	۰/۱	۱۰۰	۵۰	۰/۱	۲۰۰	۵۰	۲	۲	۰/۵	۲/۸	۰/۰۹۳	۶/۰۵۸	۱۲۴/۰۰۹
۱	۰/۰۵	۵۰	۲۵	۰/۰۵	۲۰۰	۵۰	۲	۲	۰/۵	۲/۶۵۹	۰/۰۹۵	۶/۷۳۴	۹۵/۲۸۲
۱	۰/۱	۱۰۰	۵۰	۰/۱	۱۰۰	۱۰	۰/۵	۱	۰/۵	۲/۰۹۴	۰/۱۲۳	۵/۷۷۵	۴۷/۴۵۴
۱/۲۵	۰/۰۵	۵۰	۵۰	۰/۱	۱۰۰	۱۰	۲	۲	۰/۵	۲/۴۰۸	۰/۱۵۹	۶/۲۱۵	۳۸/۰۶۴
۱/۲۵	۰/۱	۱۰۰	۲۵	۰/۰۵	۲۰۰	۵۰	۰/۵	۱	۰/۵	۱/۲۸۵	۰/۰۹۰	۶/۰۹۱	۹۷/۴۴۹
۱/۵	۰/۰۵	۵۰	۵۰	۰/۱	۲۰۰	۵۰	۰/۵	۱	۰/۵	۱/۴۵۲	۰/۱۰۸	۶/۶۰۴	۷۷/۷۳۷
۱/۵	۰/۱	۱۰۰	۲۵	۰/۰۵	۱۰۰	۱۰	۲	۲	۰/۵	۱/۴۶۹	۰/۱۸۶	۵/۳۶۴	۵۱/۹۴۹
۲	۰/۰۵	۱۰۰	۲۵	۰/۱	۱۰۰	۵۰	۰/۵	۲	۰/۵	۱/۷۶۵	۰/۳۰۱	۵/۵۷۵	۶۵/۲۳۶
۲	۰/۱	۵۰	۵۰	۰/۰۵	۲۰۰	۱۰	۲	۱	۰/۵	۰/۷۳۲	۰/۱۱۲	۵/۸۷۲	۷۲/۰۴۵
۲/۲۵	۰/۰۵	۱۰۰	۲۵	۰/۱	۲۰۰	۱۰	۲	۱	۰/۵	۰/۸۸۲	۰/۱۳۳	۶/۳۹۷	۴۹/۹۹۸
۲/۲۵	۰/۱	۵۰	۵۰	۰/۰۵	۱۰۰	۵۰	۰/۵	۲	۰/۲۸۲	۱/۳۰۸	۰/۲۵۸	۵/۶۰۴	۷۰/۴۸۶
۲/۵	۰/۰۵	۱۰۰	۵۰	۰/۰۵	۱۰۰	۵۰	۲	۱	۰/۳۵۶	۱/۵۵۴	۰/۳۲۵	۵/۸۳۸	۶۵/۶۸۱
۲/۵	۰/۱	۵۰	۲۵	۰/۱	۲۰۰	۱۰	۰/۵	۲	۰/۵	۰/۵۷۲	۰/۱۲۲	۵/۷۹۰	۶۴/۶۱۴
۳	۰/۰۵	۱۰۰	۵۰	۰/۰۵	۲۰۰	۱۰	۰/۵	۲	۰/۵	۰/۶۵۹	۰/۱۵۵	۶/۲۴۳	۴۴/۸۸۲
۳	۰/۱	۵۰	۲۵	۰/۱	۱۰۰	۵۰	۲	۱	۰/۳۶۷	۰/۹۹۴	۰/۳۲۴	۵/۱۱۱	۷۰/۲۶۷



شکل ۱: نمودار مقایسه‌ی هزینه‌های به دست آمده در جداول ۲ تا ۴

[4]Aslam, M., Azam, M., Khan, N., & Jun, C.-H. (2015). A control chart for an exponential distribution using multiple dependent state sampling. *Quality & Quantity*, 49(2), 455-462.

[5]Nelson, L. S. (1994). A control chart for parts-per-million nonconforming items. *Journal of Quality Technology*, 26(3), 239-240.

[6]Duncan, A. J. (1956). The economic design of X charts used to maintain current control of a process. *Journal of the American Statistical Association*, 51(274), 228-242.

[7]Lorenzen, T. J., & Vance, L. C. (1986). The economic design of control charts: a unified approach. *Technometrics*, 28(1), 3-10.

[8]Saniga, E. M. (1989). Economic statistical control-chart designs with an application to and R charts. *Technometrics*, 31(3), 313-320.

۷. مراجع

[1]Santiago, E., & Smith, J. (2014). Control charts based on the exponential distribution: Adapting runs rules for the t chart. *Quality control and applied statistics*, 59(1), 23-24.

[2]Schilling, E. G., & Nelson, P. R. (1976). The effect of non-normality on the control limits of X charts. *Journal of Quality Technology*, 8(4), 183-188.

[3]Stoumbos, Z. G. B., & Reynolds Jr, M. R. (2000). Robustness to non-normality and autocorrelation of individuals control charts. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 66(2), 145-187.

- Communications in Statistics -Theory and Methods*, 39(16), 2942-2960.
- [23]Menzeffricke, U. (2013). Combined exponentially weighted moving average charts for the mean and variance based on the predictive distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 42(22), 4003-4016.
- [24]Raubenheimer, L., & van der Merwe, A. J. (2015). Bayesian control chart for nonconformities. *Quality and Reliability Engineering International*, 31(8), 1359-1366.
- [25]Raubenheimer, L., & van der Merwe, A. J. (2016). Bayesian process control for the phase II Shewart-type p-chart. *Quality Technology & Quantitative Management*, 13(4), 453-472.
- [26]Kumar, N., & Chakraborti, S. (2017). Bayesian monitoring of times between events: The Shewhart tr-chart. *Journal of Quality Technology*, 49(2), 136-154.
- [27]Noor, S., Noor-ul-Amin, M., & Abbasi, S. A. (2021). Bayesian EWMA control charts based on Exponential and transformed Exponential distributions. *Quality and Reliability Engineering International*, 37(4), 1678-1698.
- [28]Moradian, A. Bameni Moghadam, M. and Shojaei Aliabadi, R. (1398). Economic-Statistical Design of Control Charts for monitoring the Process Mean with Known Standard Deviation Based on Bayesian Predictive Distribution, *Journal of Quality Engineering and Management*, Volume (9), 284-294. (In Farsi).
- [29]Tavakoli, M. and Heydari, A. A. (1399). Economic statistical design of control chart for individual observations of exponential distribution, *Journal of Quality Engineering and Management*, Volume (10), 135-144. (In Farsi).
- [30]Montgomery, D., the translator Noor al-Sana. R. (1393), *Statistical Quality Control*, Tehran, University of Science and Technology, 6th edition. (In Farsi).
- [9]Veljkovic, K., Elfaghihe, H., & Jevremovic, V. (2015). Economic statistical design of X bar control chart for non-normal symmetric distribution of quality characteristic. *Filomat*, 29(10), 2325-2338.
- [10]Girshick, M. A., & Rubin, H. (1952). A Bayes approach to a quality control model. *The Annals of mathematical statistics*, 23(1), 114-125.
- [11]Woodward, P. W., & Naylor, J. C. (1993). An application of Bayesian methods in SPC. *Journal of the Royal Statistical Society: Series D (The Statistician)*, 42(4), 461-469.
- [12]Taylor III, H. M. (1965). Markovian sequential replacement processes. *The Annals of mathematical statistics*, 1677-1694.
- [13]Taylor, H. M. (1967). Statistical control of a Gaussian process. *Technometrics*, 9(1), 29-41.
- [14]Calabrese, J. M. (1995). Bayesian process control for attributes. *Management science*, 41(4), 637-645.
- [15]Tagaras, G. (1994). A dynamic programming approach to the economic design of X-charts. *IIE transactions*, 26(3), 48-56.
- [16]Tagaras, G. (1996). Dynamic control charts for finite production runs. *European Journal of Operational Research*, 91(1), 38-55.
- [17]Tagaras, G., & Nikolaidis, Y. (2002). Comparing the effectiveness of various Bayesian X control charts. *Operations Research*, 50(5), 878-888.
- [18]Makis, V. (2009). Multivariate Bayesian process control for a finite production run. *European Journal of Operational Research*, 194(3), 795-806.
- [19]Menzeffricke, U. (2002). On the evaluation of control chart limits based on predictive distributions. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 31(8), 1423-1440.
- [20]Menzeffricke, U. (2007). Control charts for the generalized variance based on its predictive distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 36(5), 1031-1038.
- [21]Menzeffricke, U. (2010a). Control charts for the variance and coefficient of variation based on their predictive distribution. *Communications in Statistics -Theory and Methods*, 39(16), 2930-2941.
- [22]Menzeffricke, U. (2010b). Multivariate exponentially weighted moving average charts for a mean based on its prediction distribution.

$$\int_0^{t_1} f(y|\bar{x}) dy = \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{t_1} \frac{(n_c + v)}{(\omega + n_c \bar{x})} \left(1 + \frac{y}{\omega + n_c \bar{x}}\right)^{-(n_c + v + 1)} dy$$

$$= - \left(1 + \frac{y}{\omega + n_c \bar{x}}\right)^{-(n_c + v)} \Big|_0^{t_1}$$

$$= 1 - \left(1 + \frac{t_1}{\omega + n_c \bar{x}}\right)^{-(n_c + v)} = \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{t_1}{\omega + n_c \bar{x}}\right)^{-(n_c + v)} = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{t_1}{\omega + n_c \bar{x}}\right)^{(n_c + v)} = \frac{2}{2 - \alpha}$$

$$\Rightarrow t_1 = (\omega + n_c \bar{x}) \left(\sqrt{\frac{2}{2 - \alpha}} - 1 \right)$$

$$\xrightarrow{L = \ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)} t_1 = (\omega + n_c \bar{x}) \left(\left(\frac{e^L}{e^L - 1}\right)^{\frac{1}{n_c + v}} - 1 \right)$$

پیوست ۳: چگالی پیشگو در حالت پیشین جفریز به صورت زیر به دست می آید:

$$f(y|\bar{x}) = \int_0^{+\infty} \theta e^{-\theta y} \cdot \frac{(n_c \bar{x})^{n_c}}{\Gamma(n_c)} \theta^{n_c - 1} e^{-n_c \bar{x} \theta} d\theta$$

$$= \frac{(n_c \bar{x})^{n_c}}{\Gamma(n_c)} \int_0^{+\infty} \theta^{n_c} e^{-\theta(y + n_c \bar{x})} d\theta$$

$$= \frac{(n_c \bar{x})^{n_c}}{\Gamma(n_c)} \times \frac{\Gamma(n_c + 1)}{(y + n_c \bar{x})^{n_c + 1}}$$

$$= \frac{n_c}{n_c \bar{x}} \left(1 + \frac{y}{n_c \bar{x}}\right)^{-(n_c + 1)} I_{(0, +\infty)}(y)$$

پیوست ۱: چگالی پیشگو در حالت پیشین مزدوج به صورت زیر به دست می آید:

$$f(y|\bar{x}) = \int_0^{+\infty} \theta e^{-\theta y} \cdot \frac{(n_c \bar{x} + \omega)^{n_c + v}}{\Gamma(n_c + v)} \theta^{n_c + v} e^{-\theta(\omega + n_c \bar{x})} d\theta$$

$$= \frac{(n_c \bar{x} + \omega)^{n_c + v}}{\Gamma(n_c + v)} \int_0^{+\infty} \theta^{n_c + v + 1} e^{-\theta(y + n_c \bar{x} + \omega)} d\theta$$

$$= \frac{(n_c \bar{x} + \omega)^{n_c + v}}{\Gamma(n_c + v)} \times \frac{\Gamma(n_c + v + 1)}{(y + n_c \bar{x} + \omega)^{n_c + v + 1}}$$

$$= \frac{(n_c + v)}{(\omega + n_c \bar{x})} \left(1 + \frac{y}{\omega + n_c \bar{x}}\right)^{-(n_c + v + 1)} I_{(0, +\infty)}(y)$$

پیوست ۲: محاسبه ی چندکهای توزیع پیشگوی لوماکس برای تعیین حدود کنترل به صورت زیر انجام شده است:

$$\int_{t_2}^{+\infty} f(y|\bar{x}) dy = \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{t_2}^{+\infty} \frac{(n_c + v)}{(\omega + n_c \bar{x})} \left(1 + \frac{y}{\omega + n_c \bar{x}}\right)^{-(n_c + v + 1)} dy$$

$$= - \left(1 + \frac{y}{\omega + n_c \bar{x}}\right)^{-(n_c + v)} \Big|_{t_2}^{+\infty}$$

$$= \left(1 + \frac{t_2}{\omega + n_c \bar{x}}\right)^{-(n_c + v)} = \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{t_2}{\omega + n_c \bar{x}}\right)^{(n_c + v)} = \frac{2}{\alpha}$$

$$\Rightarrow t_2 = (\omega + n_c \bar{x}) \left(\sqrt{\frac{2}{\alpha}} - 1 \right)$$

$$\xrightarrow{L = \ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)} t_2 = (\omega + n_c \bar{x}) \left(e^{\frac{L}{n_c + v}} - 1 \right)$$

Economic-Statistical Design of Bayesian Control Chart Based on The Predictive Distribution for Individual Observations with an Exponential Qualitative Characteristic Distribution

Razieh Seirani

Ph. D student, Department of Statistics, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran. seiranir@gmail.com

Mohsen Torabian*

Department of Mathematics, Qazvin Branch, Islamic Azad University, Qazvin, Iran. torabianmohsen@gmail.com

Mohammad Hassan Behzadi

Department of Statistics, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran. behzadi@srbiau.ac.ir

Asghar Seif

Department of statistics, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran.a.seif@basu.ac.ir

Abstract: In this article, the economic-statistical design of the Bayesian control chart based on the predictive distribution for individual observations of the exponential qualitative characteristic distribution is presented. In doing this, two types of the conjugate prior distribution and Jeffrey's distribution are considered, and based on the distribution of observations in phase I, the predictive distribution is determined. Then, using the economic model of Lorenzen and Vance, an economic-statistical design has been obtained for the data. Optimal design parameters (sampling distance and control limits) have been determined using a genetic algorithm and sensitivity analysis has been performed for different values of model parameters. The results of this approach have been compared with the results of the classical model. According to the results, this method is more effective than the classical method.

Keywords: Bayesian control chart, Prior distribution, Predictive distribution, Economic-Statistical Design (ESD), Genetic Algorithm (GA).

Aim and Introduction

The purpose of this paper is to present an economic statistical design for the Bayesian control chart based on the predictive distribution for individual observations with an exponential qualitative characteristic distribution with two types of informative and non-informative prior distributions.

To design a control chart, it is usually assumed that the qualitative characteristic follows the normal distribution, but, in practice, this is not always true. When a quality characteristic follows a non-normal distribution, using a control chart assuming a normal distribution may mislead quality engineers and increase inspection costs. When the quality characteristic is not normal, if the variance is finite and the sample size is large enough, according to the central limit theorem, the \bar{X} distribution will be almost normal, while in the economic design of control charts, small sample sizes are usually used. In such cases, the above proposition is not valid.

* Corresponding author: torabianmohsen@gmail.com

As noted by Santiago and Smith [15], data not collected under rational subgroups can be very skewed. The exponential distribution is well consistent with very skewed data, more details on this can be found in Schilling and Nelson [16] or Stoumbos and Reynolds [17]. Santiago and Smith [1] and Aslam et al. [1], noted that exponential distributions are best considered for the time between events in the skew quality characteristics. The control chart for the exponentially distributed quality characteristic is sometimes called the t-chart. They proposed t-chart for exponential distributions using the transformation proposed by Nelson [10].

During monitoring, a control chart is used to detect the occurrence of an assignable cause. The design of control charts has several statistical and economic consequences, both of which are influenced by the choice of control chart parameters, including sample size (n), control limits (L), and distance between samples (h). Economic design of a control chart means determining the parameters of the control chart in such a way as to minimize the cost of the whole process per unit time. Duncan [2] and Lorenzen & Vance [4] examined the economic design of control charts for the normal quality characteristic while the process failure mechanism has an exponential distribution. However, the economic design of control charts, although minimizing the average cost per unit time, can have significant weaknesses in terms of statistical criteria. For example, to detect small changes in the process average of this type of design can lead to a high error rate or a high probability of type I error. The probability of type II error can also be very high. These two issues can lead to a loss of confidence in a company's production line manager in the use of control charts in-process monitoring. Saniga [14] proposed a solution to this problem, the result of which he called economic-statistical design. In this type of design, by considering the high limit for the possibility of type I and type II errors, in addition to minimizing the cost, these two types of errors are also controlled at the desired level. Veljkovic et al. [18] presented the economic statistical design of the \bar{X} control chart when the quality characteristic distribution is symmetric but non-normal.

Menzefricke [5] first introduced Bayesian control charts based on predictive distribution for univariate means and proportions when the data were generated from a normal distribution. He then presented in [6], [7], [8], [9] of Bayesian control charts for variance and coefficient of variation, generalized variance and Multivariate Exponentially Weighted Moving Average (MEWMA) for the mean and combined Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) for the mean and variance based on predictive distribution. Raubenheimer and Van der Merwe [12], [13] with metrics defined by Menzefricke [5] developed control charts using Jeffrey's prior for nonconformities and introduced the Bayesian method for the Phase-II Shewhart-type p-chart. Kumar and Chakraborty [3] proposed a Bayesian t_r -chart -which is a Shewhart-type chart that incorporates parameter uncertainty via a prior and a posterior distribution- when the exponential rate parameter was unknown. The advantage of this method is that any existing information about the process from any past experience can be entered into the Phase-II control chart system along with the prior distribution for the parameter. Control limits can then be created based on predictive distribution. Soria Noor et al. [11] recommended Bayesian EWMA control charts for mean in non-normal lifetime distributions based on exponential distributions and converted exponentially to inverse Riley and Weibull distributions using noninformative prior under five different loss functions.

In this paper, we present an economic-statistical design for the \bar{X} control chart based on predictive distribution for the first time, and by placing constraints on the Average Number of false Alarms (ANF) and Adjusted Average Time to Signal ($AATS$) parameters in the cost model.

Methodology

The design used in this research is based on determining the limits of the control chart based on the predictive distribution and then its economic statistical design. Due to the extreme asymmetry in the obtained predictive distribution, we have used the mathematical method of finding the quantiles of the resulting distribution in determining the control limits. We have also used the same method for the classic FRS mode so that the results can be compared.

Findings

Numerical results show decreases in costs in this Bayesian approach with both Jeffrey's and conjugate prior distribution compared to the FRS mode. This result shows that the Bayesian approach which is based on predictive density works better than the classical approach. Also, for the Bayesian approach, however, there is no significant difference between the results of using Jeffrey's and conjugate prior distributions. Using sensitivity analysis, the effect of cost parameters and shock model parameters and deviation from the mean on the optimal values of design parameters and related costs have been investigated and discussed.

Discussion and Conclusion

The geometric mean of the expected value of the cost per unit time in the conjugate prior, Jeffrey's prior, and classical mode is $62/35$, $62/29$, and $63/54$, respectively which show that the expected value of the cost per unit time in the Bayesian approach based on predictive distribution with Jeffrey's and conjugate prior distributions is 2% lower than the expected value of the cost per unit time in the classical mode. This result shows that the Bayesian approach based on predictive distribution performs better than the classical approach. Meanwhile, in the Bayesian approach, there is no significant difference between the results of using the prior Jeffrey's and conjugate distributions.

References

- [1] Aslam, M., Azam, M., Khan, N., & Jun, C.-H. (2015). A control chart for an exponential distribution using multiple dependent state sampling. *Quality & Quantity*, 49(2), 455-462.
- [2] Duncan, A. J. (1956). The economic design of X charts used to maintain current control of a process. *Journal of the American Statistical Association*, 51(274), 228-242.
- [3] Kumar, N., & Chakraborti, S. (2017). Bayesian monitoring of times between events: The Shewhart tr-chart. *Journal of Quality Technology*, 49(2), 136-154.
- [4] Lorenzen, T. J., & Vance, L. C. (1986). The economic design of control charts: a unified approach. *Technometrics*, 28(1), 3-10.
- [5] Menzefricke, U. (2002). On the evaluation of control chart limits based on predictive distributions. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 31(8), 1423-1440.
- [6] Menzefricke, U. (2007). Control charts for the generalized variance based on its predictive distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 36(5), 1031-1038.

- [7]Menzefricke, U. (2010a). Control charts for the variance and coefficient of variation based on their predictive distribution. *Communications in Statistics -Theory and Methods*, 39(16), 2930-2941.
- [8]Menzefricke, U. (2010b). Multivariate exponentially weighted moving average charts for a mean based on its prediction distribution. *Communications in Statistics -Theory and Methods*, 39(16), 2942-2960.
- [9]Menzefricke, U. (2013). Combined exponentially weighted moving average charts for the mean and variance based on the predictive distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 42(22), 4003-4016.
- [10]Nelson, L. S. (1994). A control chart for parts-per-million nonconforming items. *Journal of Quality Technology*, 26(3), 239-240.
- [11]Noor, S., Noor-ul-Amin, M., & Abbasi, S. A. (2021). Bayesian EWMA control charts based on Exponential and transformed Exponential distributions. *Quality and Reliability Engineering International*, 37(4), 1678-1698.
- [12]Raubenheimer, L., & van der Merwe, A. J. (2015). Bayesian control chart for nonconformities. *Quality and Reliability Engineering International*, 31(8), 1359-1366.
- [13]Raubenheimer, L., & van der Merwe, A. J. (2016). Bayesian process control for the phase II Shewart-type p-chart. *Quality Technology & Quantitative Management*, 13(4), 453-472.
- [14]Saniga, E. M. (1989). Economic statistical control-chart designs with an application to and R charts. *Technometrics*, 31(3), 313-320.
- [15]Santiago, E., & Smith, J. (2014). Control charts based on the exponential distribution: Adapting runs rules for the t chart. *Quality control and applied statistics*, 59(1), 23-24.
- [16]Schilling, E. G., & Nelson, P. R. (1976). The effect of non-normality on the control limits of X charts. *Journal of Quality Technology*, 8(4), 183-188.
- [17]Stoumbos, Z. G. B., & Reynolds Jr, M. R. (2000). Robustness to non-normality and autocorrelation of individuals control charts. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 66(2), 145-187.
- [18]Veljkovic, K., Elfaghihe, H., & Jevremovic, V. (2015). Economic statistical design of X bar control chart for non-normal symmetric distribution of quality characteristic. *Filomat*, 29(10), 2325-2338.