مقاله پژوهشی

اخذ تصمیمات بهینه سطح کیفیت و طول دوره وارانتی و تبلیغات در یک زنجیره‌تأمین دو سطحی

علی حسین‌زاده کاشان

(نویسنده‌ی مسؤل)، دانشیار دانشکده مهندسی صنایع و سیستم ها، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران. a.kashan@modares.ac.ir

تینا سردشتی

دانشجوی کارشناسی ارشد دانشکده مهندسی صنایع و سیستم ها، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران. tina.sardashti@modares.ac.ir

چکیده: اهمیت و تأکید بر رقابت و همکاری در زنجیره‌های تأمین باعث تجدید حیات نظریه‌بازی‌ها به‌عنوان یک ابزار مناسب برای تحلیل فعل و انفعالات در یک زنجیره‌تأمین شده‌است. همچنین توسعه حجم تجارت و پیچیدگی خرده‌فروشی، تغییر رویکرد در تبلیغات را می‌طلبد. تبلیغات مشارکتی یکی از راه‌هایی است که تولیدکنندگان و توزیع‌کنندگان می‌توانند در برنامه‌های تبلیغاتی به صورت مشترک مشارکت کنند. بنابراین یافتن و بررسی استراتژی اجرائی مناسب، با توجه به افزایش سود هریک از اعضای زنجیره در کنار ارائه خدمات مناسب و حفظ کیفیت محصول از اولویت‌های اصلی این تحقیق می‌باشد. در این تحقیق، همکاری در تبلیغات، طی دو مدل تابع تبلیغات متفاوت همراه با تصمیمات قیمت‌گذاری و مدت وارانتی و سطح کیفت، در زنجیره‌تأمین دوسطحی در نظر گرفته می‌شود. تولیدکننده و خرده‌فروش می‌توانند تبلیغات مشارکتی داشته‌باشند. نظریه بازی‌ها بدون همکاری و با همکاری که تصمیم‌گیری متوالی یا هم زمان چند بازی‌کننده را در نظر می‌گیرد، ابزاری است که برای حل این مسئله به کار برده می‌شود. به دلیل پیچیدگی مدل نیز برای حل مسئله از الگوریتم فراابتکاری الهام گرفته از اپتیک (OIO) که الگوریتمی‌تصادفی و مبتنی بر جمعیت است، استفاده می‌شود. روش این پژوهش توسعه‌ای _کاربردی است. در این پژوهش مشاهده شد مجموع سودهایی که هر دو طرف در بازی غیر همکاری ادعا می‌کنند و همچنین سود هر یک به صورت جداگانه، کوچکتر از سود کل سیستم و سود هر یک از اعضا در بازی همکاری است. بنابراین همکاری بین دو بازیکن باعث افزایش سود آن‌ها می‌شود. همچنین در دو مدل مقادیر بدست آمده از طریق الگوریتم اپتیک جواب‌های بهتری را نشان دادند. تحلیل حساسیت روی برخی پارامترها از جمله پارامترهای مرتبط با کیفیت محصول انجام شده‌است.

واژگان کلیدی: قیمت گذاری، تبلیغات، سطح کیفیت، وارانتی، نظریه‌بازی‌ها، الگوریتم ملهم از اپتیک (OIO).

۱. مقدمه

مدیریت زنجیره‌تأمین رویکرد جدیدی است که در سال‌های اخیر بر مدیریت عملیات حاکم شده‌است. یکی از وظایف زنجیره‌تأمین تبدیل مواد خام به محصولات نهایی و توزیع آنها در میان مشتریان است. مدیریت زنجیره‌تأمین فعالیت‌ها را طوری هماهنگ می‌کند که مشتریان بتوانند محصولات را با کیفیت بالا و با حداقل هزینه به دست آورند. مدیریت زنجیره‌تأمین شامل هدایت تمام اعضای زنجیره به بصورت یکپارچه و هماهنگ است و هدف آن بهبود عملکرد جهت ارتقاء بهره‌وری و سود بیشتر زنجیره است. همچنین استراتژی‌های مختلف را برای سیستم تولید هماهنگ می‌کند [۷]. تقاضای بازار به عوامل مختلفی از جمله کیفیت محصول، زمان عرضه، برند و غیره بستگی دارد[۸]. یک زنجیره‌تأمین جهت افزایش و بهبود عملکرد نیاز به ابزارهایی دارد. تبلیغات یکی از ابزارها جهت شناخت بیشتر برند و نوع محصول یک تولیدکننده و در نهایت بهبود فروش و سود نهایی است و این تبلیغات می‌تواند به صورت محلی و ملی و با مشارکت صورت گیرد. هوانگ و لی[1] در مطالعات خود بیان کرده‌اند که تولیدکنندگان و خرده‌فروشان از برنامه‌های تبلیغاتی برای متقاعد کردن مشتریان برای خرید محصول خود استفاده می‌کنند و تلاش آن‌ها در جهت تبلیغات ملی تولیدکننده برای نفوذ در مشتریان بالقوه و افزایش آگاهی از نام تجاری آن‌ها متفاوت است، در حالی که تبلیغات محلی خرده‌فروش در مشتریان نقطه‌ای از

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۷/۰۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۲/۲۵

دوره ۱۲/ شماره ۲

صفحات ۲۲۱-۲۵۰

(Corresponding author): a.kashan@modares.ac.ir

[1] Huang & li

تمایل و عمل را به ارمغان می‌آورد[۱۰]. وضعیت جدید بازارها ما را مجاب می‌کند که تبلیغات جهت پیشبرد فروش محصولات مورد نیاز است. مشتریان معمولا به محصولات شناخته شده تمایل بیشتری دارند و تقاضای مشتریان حساس به طرح‌های تبلیغاتی است [۵]. با توجه به شرایط رقابت در بازار، ارائه‌ی محصولات با شرایط بهتر نسبت به سایر رقبا موجب سودآوری در کسب و کار می‌گردد. بنابراین یک زنجیره نیاز به قیمت‌گذاری مناسب و حفظ سطح کیفیت بالاتر جهت کسب رضایت مشتری و در نتیجه افزایش تعداد مشتری و سود حاصل دارد. کیفیت ارتباط نزدیکی با بازگشت محصول دارد. محصولات با سطح خدمات و سطح کیفیت پایین، رضایت مشتری را کاهش می‌دهد و منجر به بازگشت مکرر محصول می‌شود. در حالی که محصولات با سطح کیفیت و سطح خدمات بالا می‌توانند نیاز مشتری را برآورده سازند و تعداد بازگشت محصول را کاهش دهند. در همان زمان، محصولات با کیفیت بالا و خدمات شایسته، به دلیل کیفیت بهتر قیمت فروش بالاتری دارند [۱۵] و [۲۵]. با این حال، قیمت‌های بالاتر نیز می‌تواند منجر به کاهش تقاضای مشتری شود، به ویژه هنگامی که تقاضای مشتری حساس به قیمت است. وقتی که مصرف‌کنندگان به قیمت خیلی حساس نمی‌باشند، در توزیع محصول می‌توان یک سیاست " کیفیت بالا، قیمت بالا" اتخاذ کرد، و حتی در زمانی که کیفیت درحال بهبود می‌باشد. در مطالعه‌ای نشان داده شده‌است که استراتژی قیمت گذاری خرده‌فروشان وابسته به کیفیت محصول و خدمات است[۲۰]. مسئله رقابت اولین مسئله‌ای است که شرکت‌ها در شرایط واقع بینانه با آن دست و پنجه نرم می‌کنند و سیاست‌های آن‌ها و رقبای آن‌ها سهم وسودشان از بازار را تعیین می‌کند. در سال‌های اخیر، یک روند رو به رشد در تحقیقات بر روی رقابت متمرکز شده است [۲۱].

در راستا بهبود کسب و کار و سود بهتر زنجیره، کسب اطمینان مشتری نسبت به خدمت ارائه شده اهمیت به‌سزایی دارد و وارانتی ابزاری است که می‌تواند باعث حصول این اطمینان گردد. طول مدت وارانتی ارائه شده در جهت بهبود هرچه بیشتر این اطمینان اهمیت فراوانی دارد. با این حال، وارانتی جذاب‌تر، هزینه‌های خدمات بالاتر را برای تولیدکنندگان نیز به همراه دارد[۶]. با توجه به مطالعات جی[۲] در یک زنجیره‌تأمین دو سطحی رهبر و پیرو، تئوری‌هایی را با توجه به تابع تقاضای محصول و وارانتی محصول ارائه داده است که در این تئوری‌ها وارانتی می‌تواند هم از سوی تولیدکننده و هم از سوی خرده‌فروش ارائه شود[۱۲]. زی[۳] و همکاران مدلی را برای بهینه‌سازی سود یک محصول جدید با در نظر گرفتن سیاست وارانتی دوبعدی پیشنهاد کردند. در این مدل محدودیت استفاده از وارانتی، قیمت محصول و محدودیت زمانی وارانتی به‌عنوان سه متغیر تصمیم‌گیری در نظر گرفته شد. همچنین، آنها فرض کردند که نرخ ورود ادعاهای وارانتی از فرآیند پواسون غیرهمگن پیروی می‌کند[۲۶]. ژانگ[۴] و همکاران مبادله بین هزینه وارانتی و افزایش تقاضا برای بهینه‌سازی سیاست ضمانت دو بعدی را در نظر گرفتند. برای این منظور، آنها تابع تقاضا را بر اساس شاخص جذابیت برای مدل‌سازی تابع تقاضای مشتری پیشنهاد کردند و مدل خود را در بازار خودرو اعتبار سنجی کردند[۳۰]. طالعی‌زاده و همکارش موردی را بررسی کردندکه یک تولیدکننده محصولات خود را از طریق کانال‌های آنلاین و آفلاین به فروش می‌رساند و یک خط مشی وارانتی دو بعدی شامل مدت زمان وارانتی و بسته استفاده از وارانتی برای محصولات فروخته‌شده از طریق کانال آنلاین ارائه می‌دهد. اثر سطح سرویس روی زنجیره‌تامین و انتخاب حالت فروش وارانتی محصول توسط تولیدکننده تأثیر می‌گذارد[۲]. اخیراً، کوشنیک و هارتمن[۵] یک سیاست وارانتی مبتنی بر عملکرد را معرفی کرده‌اند، که در آن سازنده ممکن است مقدار هزینه‌های عملیاتی را پیشنهاد کند که مصرف‌کننده در هر دوره برای مدت معینی پرداخت می‌کند و آن را محدود کند[۱۶].

امروزه یکی از چالش‌های مهم مدیریت زنجیره‌تأمین، ایجاد همکاری در زنجیره‌تأمین با وجود تضاد در اهداف و خواسته‌ها، تنوع در محصولات و خدمات و همچنین سبک‌های مدیریتی متفاوت است. یکی از عوامل بروزکننده حاصل عدم همکاری در زنجیره‌تأمین اثر شلاقی[۶] خواهد بود. که در گذر زمان سودآوری زنجیره‌تأمین و همچنین تمام سطوح را کاهش خواهد داد [۳]. یوسف نژاد و همکاران اثر شلاقی را در زنجیره تأمین چندسطحی و چندمحصولی مورد بررسی قرار دادند و استراتژی‌های مقابله با آن را طی شبیه‌سازی بیان نمودند [۱۹].

تبلیغات می‌تواند به صورت همکاری صورت گیرد. تبلیغات همکاری یک استراتژی بازاریابی است که در آن خرده‌فروش تبلیغات محلی را اجرا می‌کند و تولیدکننده با بخشی از هزینه

[2] Jie
[3] Xie
[4] Zhang
[5] Koschnick and Hartman
[6] bullwhip effect

کل تبلیغات خرده‌فروش موافقت می‌کند. به درصد هرینه‌ی تبلیغات محلی که تولیدکننده موافقت به پرداخت آن می‌کند، نرخ مشارکت می‌گویند [۴]. کارای[۷] و همکاران به تازگی به بررسی چگونگی تخصیص منابع به طور بهینه به تبلیغات خرده‌فروش از طریق برنامه‌های تبلیغاتی مشارکتی و تبلیغات تولیدکننده در یک انحصار دوجانبه پرداختند[۱۳]. سید اصفهانی و همکاران تبلیغات همکاری عمودی را همراه با تصمیمات قیمت‌گذاری در یک زنجیره‌تأمین در نظر می‌گیرند که شامل یک تولیدکننده و یک خرده‌فروش است و تقاضا تحت تأثیر قیمت و تبلیغات است، چهار مدل نظریه‌بازی‌ها را به منظور مطالعه اثر توازن قدرت زنجیره‌تامین بر روی تصمیمات بهینه اعضای زنجیره‌تامین در نظر می‌گیرند و در آخر هر دو تولیدکننده و خرده‌فروش به آخرین سطح سود خود رسیده‌اند و در این مطالعه امکان بازی چانه‌زنی را نیز بررسی کرده اند و در مورد یک طرح برای اشتراک گذاری سود اضافی مشترک بحث شده‌است [۲۳]. سانگ[۸] و همکارانش تحقیقاتی را در مورد تأثیر بازگشت محصول معیوب بر مدیریت کانال دوگانه زنجیره‌تأمین حلقه بسته انجام داد و اثربخشی مکانیسم هماهنگی را در کاهش رقابت قیمت خرده‌فروشی و بهبود سود کل زنجیره‌تأمین حلقه بسته دو کاناله تأیید کرد [۲۲]. لیو[۹] و همکاران استراتژی سود و قیمت‌گذاری را برای وارانتی تمدید تکمیلی بررسی کردند. [۱۵].

با بررسی یک زنجیره‌تأمین دو مرحله‌ای با تابع تقاضای مصرف‌کننده وابسته به کیفیت و وارانتی و قیمت فروش نشان داده شده است که سود مشترک در سیستم‌های همکاری بیشتر از غیر همکاری است و سود مازاد در سیستم‌های همکاری طبق سودهای آن‌ها در سیستم‌های غیر همکاری تقسیم شده است [۱۸]. از این رو یک مدیریت زنجیره خوب باید در راستا این ابزارها و تصمیمات جهت بهبود منافع کل زنجیره گام‌های درستی برداشته و تصمیمات صحیحی اتخاذ کند.

در پژوهش‌های گذشته در نظر گرفتن همه ابعاد مؤثر که پیش‌تر بیان شد، در تقاضا باعث پیچیدگی آن می‌شدند و نرم‌افزارها توان پاسخگویی به آن را نداشتند. در این تحقیق همه ابعاد در نظر گرفته می شود و به دلیل پیچیدگی حاصل، از الگوریتم فراابتکاری استفاده خواهدشد. الگوریتم (OIO)، یک الگوریتم تکاملی مبتنی بر جمعیت است که از علم اپتیک الهام گرفته است. در این الگوریتم فرض بر این است که تعدادی نقاط نور مصنوعی (نقاطی از R^{n+1} که در R^n نگاشته می‌شود جواب های بالقوه برای مسأله هستند)، در مقابل یک آینه مواج مصنوعی قرار دارند که تصویر آن‌ها را منعکس می‌کند. [۱۱]. (OIO) برای بهینه‌سازی، سطح تابع را به‌عنوان یک آینه بازتاب کننده مورد عمل قرار می‌دهد که متشکل از قله‌ها و دره‌هاست. هر قله (برآمدگی) به‌عنوان یک سطح بازتاب محدب و هر دره (فرورفتگی) به‌عنوان یک سطح بازتاب مقعر رفتار می‌کند. به این ترتیب پرتو مصنوعی ساطع شده از نقطه نور مصنوعی توسط سطح تابع، بسته به اینکه سطح بازتاب قسمتی از قله یا دره است منعکس می‌شود و نقطه تصویر مصنوعی (یک نقطه جدید در R^{n+1} که به‌عنوان یک جواب جدید در دامنه جستجو در R^n نگاشته می‌شود)، یا به صورت مستقیم (در جهت موقعیت نقطه نور در فضای جستجو) و یا به صورت وارونه (برعکس موقعیت نقطه نور در فضای جستجو) شکل می‌گیرد [۱۴]و[۱].

۲- بیان مسئله

در این مطالعه یک زنجیره‌تامین دو سطحی شامل یک تولیدکننده و یک خرده‌فروش که به صورت انحصاری محصول تولیدکننده را می فروشد، در نظر گرفته شده است. تولیدکننده روی قیمت فروش به خرده‌فروش w، سطح کیفیت θ، مدت وارانتی ρ، هزینه تبلیغات ملی a_m، نرخ مشارکت t تصمیم‌گیری می‌کند و از طرف دیگر خرده‌فروش در مورد هزینه تبلیغات محلی a_r و قیمت فروش به مشتری p_r، تصمیم می‌گیرد. در این تحقیق همکاری در تبلیغات همراه با تصمیمات قیمت، سطح کیفیت و وارانتی در یک زنجیره‌تأمین دو سطحی بررسی می‌شود. روشی که برای حل این مسئله به‌کاربرده می‌شود نظریه‌بازی‌های بدون همکاری و با همکاری است. بنابراین در این تحقیق به‌منظور مطالعه اثر توازن قدرت‌زنجیره‌تأمین بر تصمیم‌گیری بهینه‌ی اعضای زنجیره دو بازی ایجاد می‌شود، که بازی غیر همکاری شامل استکلبرگ تولیدکننده است و همچنین یک بازی همکاری در نظر گرفته می‌شود. مدل تحت دو رویکرد نظریه‌بازی‌ها، مدل‌سازی، حل و مقایسه می‌شوند. متغیرهای تصمیم به ازای بیشینه شدن تابع سود محاسبه خواهند شد. تابع تقاضا تحت عوامل مؤثر بر روی تقاضای مصرف‌کننده، بر اساس مروری بر ادبیات پیشین و تابع‌های مربوطه عوامل مؤثر و نیز ارتباط این عوامل با هم فرموله خواهد شد. به منظور فرموله کردن تابع سود

[7] karray
[8] Sang
[9] Liu

در هر مدل شناخت هزینه‌ها و درآمد الزامیست. لذا ابتدا هزینه‌های متصور در هر مدل شناسایی می‌شود و در نهایت تابع سود بر اساس هزینه‌ها و درآمدهای شناسایی شده، فرموله می‌شود. این پژوهش قصد دارد نقطه بهینه تابع هدف را با روش‌های ریاضی محاسبه نماید ولی به دلیل پیچیدگی مدل و بزرگی مسأله در مراحلی از حل الگوریتم فرا ابتکاری (OIO) نیز استفاده خواهد شد.

متغیرهای تصمیم

ρ : طول مدت وارانتی

θ : سطح کیفیت

p_r : قیمت فروش خرده‌فروش

w : قیمت فروش تولیدکننده به خرده‌فروش

a_m : هزینه تبلیغات ملی

a_r : هزینه تبلیغات محلی

t : نرخ مشارکت تولیدکننده در هزینه‌های تبلیغات خرده‌فروش

F_r : سود خرده‌فروش مدل اول

F_m : سود تولیدکننده مدل اول

F_{m+r} : سود کل زنجیره‌تأمین مدل اول

π_r : سود خرده‌فروش مدل دوم

π_m : سود تولیدکننده مدل دوم

π_{m+r} : سود کل زنجیره‌تأمین مدل دوم

پارامترها

ρ_{max} : بیشترین طول مدت وارانتی

θ_{min} : حداقل سطح کیفیت

p_m : قیمت فروش پیشنهادی توسط تولیدکننده به خرده‌فروش

k_0 : تقاضای پایه

k_1 : منعکس کننده اثربخشی سطح کیفیت در تقاضا

k_2 : منعکس کننده اثربخشی قیمت در تقاضا

k_r : منعکس کننده اثربخشی تبلیغات محلی در تقاضای مدل اول

k_m : منعکس کننده اثربخشی تبلیغات ملی در تقاضای مدل اول

α_2 : درپوش بازار جهت تبلیغات

C_0 : هزینه تعمیر یک واحد محصول معیوب

C_1 : هزینه تکنولوژی (انرژی مصرفی مانند برق، ....)

B_0 : هزینه ناشی از حفظ کیفیت پایه یک واحد محصول

B_1 : منعکس‌کننده اثربخشی سطح کیفیت در هزینه‌های حفظ کیفیت یک واحد محصول

β_2: تأثیرسرمایه گذاری ملی و تبلیغات محلی در مدل دوم

γ :کشش تبلیغات محلی در مدل دوم

δ :کشش سرمایه گذاری ملی در مدل دوم

ε : ضریب حساسیت تأثیر تعداد کالا معیوب در تابع هدف

α : ضریب حساسیت تأثیر تعداد کالا معیوب در تابع تقاضا

مفروضات

* یک زنجیره‌تأمین دو سطحی شامل یک تولیدکننده و یک خرده‌فروش در نظر گرفته‌شده‌است.
* تولیدکننده تک محصول است.
* خرده‌فروش به صورت انحصاری فقط محصول تولیدکننده را می‌فروشد.
* تولیدکننده محصولش را فقط از طریق این خرده‌فروش به فروش می‌رساند.
* همیشه حداقلی از تقاضا موجود می‌باشد. به عبارتی تقاضا مثبت می‌باشد.
* تولیدکننده و خرده‌فروش می‌توانند در برنامه‌های تبلیغاتی به صورت مشترک مشارکت کنند.
* در همه‌ی بازی‌ها اثرات قیمت، تبلیغات، مدت وارانتی و سطح کیفیت در نظر گرفته‌شده‌است.
* در این مدل فعل و انفعالات بین اعضای زنجیره‌تأمین در یک دوره مورد بحث قرار می‌گیرد و از نظر نظریه‌بازی‌ها، مدل ایستا را بررسی می‌کنیم.
* همیشه حداقلی از سطح کیفیت (θ_{min}) جهت حفظ رضایت مشتری و اعتبار تولیدکننده موجود است.
* حداکثر طول مدت وارانتی (ρ_{max}) قابل ارائه از سوی تولیدکننده به مشتری جهت یک محصول مشخص می‌باشد.
* α_2، در پوش بازار سقفی جهت تقبل حداکثر هزینه برای تبلیغات در سطح بازار می‌باشد.

۳- مدل‌سازی

با در نظر گرفتن فرض‌های رایج و با مرور تحقیقات انجام شده و مقایسه پژوهش حاضر، مدل‌سازی تحت دو تابع تقاضا متفاوت

در تابع تبلیغات، در دو مدل مجزا، و در دو استراتژی متفاوت بررسی می‌شود.

مدل اول

در این زنجیره متغیرهای تصمیم‌گیری قیمت فروش تولیدکننده w، سطح کیفیت θ، مدت وارانتی ρ، تبلیغات ملی a_m، نرخ مشارکت t، قیمت خرده‌فروشی p و تبلیغات محلی a_r است. فرض می‌شود تقاضای مشتری با در نظر گرفتن اثر قیمت، تبلیغات ملی و محلی، سطح کیفیت و وارانتی به صورت معادله زیر می‌باشد.

$$D(\rho,\theta,a_m,a_r,p_r) = (1+Z(\rho)) * (k_0 + J(\theta) - g(p_r)) * h(a_r,a_m) \quad (۱)$$

که در این معادله k_0 تقاضای پایه مشتری، $Z(\rho)$ تأثیرات وارانتی، $J(\theta)$ تأثیرات سطح کیفیت، $g(p_r)$ تأثیرات قیمت و $h(a_r,a_m)$ تأثیرات تبلیغات بر روی تابع تقاضا می‌باشد. با مرور تحقیقات انجام شده در جدول (۱) تابع تبلیغات با مدل‌های متفاوتی بررسی شده است که در این تحقیق تابع تبلیغات اول را با توجه به مقاله‌های زای و همکاران[۲۶]، سید اصفهانی و همکاران [۲۳]، گیری و شارما[10] [۹] به صورت معادله (۲) و تابع تبلیغات دوم به صورت معادله (۲۹) در نظر گرفته شده است.

$$h(a_r,a_m) = k_r\sqrt{a_r} + k_m\sqrt{a_m} \quad (۲)$$

همچنین در مقاله ی موداک و همکاران [۱۸] تابع تقاضای متاثر از قیمت، وارانتی، سطح کیفیت را به صورت رابطه(۳) در نظر گرفتند. که در آن تأثیرات مدت وارانتی، $Z(\rho) = \frac{\rho}{\rho_{max}}$ است که در این تابع، نسبت مدت وارانتی به بیشینه مدت وارانتی، نسبتی برای بدست آوردن درصد معیوب بودن محصول فرض شده است که در آن α، ضریب حساسیت تأثیر تعداد کالا معیوب در تابع تقاضا و مقداری بین صفر و یک در نظر گرفته شده است که به صورت معادله (۳) است.

$$D(\rho,\theta,p_r) = \left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)(k_0 + k_1(\theta-\theta_{min}) - k_2(p_r-p_m)) \quad (\alpha<1) \quad (۳)$$

با توجه به اینکه یک محصول معیوب پس از بازسازی به تعداد تقاضا آن محصول افزوده می‌شود، بنابراین در تابع تقاضا به صورت ضرب این نسبت در کل تقاضای ناشی از سایر عوامل آورده شده‌است و در نهایت به کل تقاضا افزوده شده‌است. تأثیرات سطح کیفیت به صورت $J(\theta) = k_1(\theta-\theta_{min})$ و تأثیرات قیمت به صورت $g(p_r) = k_2(p_r-p_m)$ آورده شده‌است. باتوجه به مقاله‌ی موداک و همکاران [۱۸] و معادله (۱) و(۲)، تابع تقاضا متاثر از قیمت، وارانتی، سطح کیفیت و تبلیغات را به صورت معادله (۴) در نظر گرفته می‌شود.

$$D(\rho,\theta,a_m,a_r,p_r) = (1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}})(k_0 + k_1(\theta-\theta_{min}) - k_2(p_r-p_m))(k_r\sqrt{a_r} + k_m\sqrt{a_m}) \quad (۴)$$

که در آن $0<\alpha<1$ و k_0، k_1، k_2، k_r و k_m دارای مقادیری مثبت می‌باشند. که در ابتدا برای ساده‌سازی تابع تقاضا از تغییر متغیر به صورت معادله (۵) استفاده می‌شود.

$$k_3 = k_0 - k_1\theta_{min} + k_2p_m \quad (۵)$$

بنابراین با توجه به این تغییر متغیر، در نهایت تابع تقاضا به صورت معادله (۶) خواهد شد.

$$D(p_r,\theta,\rho,a_m,a_r) = \left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)(k_3 + k_1\theta - k_2p_r)(k_r\sqrt{a_r} + k_m\sqrt{a_m}) \quad (۶)$$

بنابراین توابع سود اعضای زنجیره و کل زنجیره بر اساس هزینه‌ها و قیمت فروش به صورت زیر خواهند بود.

$$F_r(p_r,a_r) = (p_r-w)D(p_r,\theta,\rho,a_m,a_r) - (1-t)a_r \quad (۷)$$

$$F_m(w,\theta,\rho,a_m,t) = wD(p_r,\theta,\rho,a_m,a_r) - \frac{\varepsilon\rho}{\rho_{max}}D(p_r,\theta,\rho,a_m,a_r)C_0 - (B_0 + B_1(\theta - \theta_{min}))D(p_r,\theta,\rho,a_m,a_r) - C_1 - a_m - ta_r \quad (۸)$$

$$F_{m+r}(w,\theta,\rho,a_m,a_r,t,p_r) = p_rD(p_r,\theta,\rho,a_m,a_r) - \frac{\varepsilon\rho}{\rho_{max}}D(p_r,\theta,\rho,a_m,a_r) - (B_0+B_1(\theta-\theta_{min}))D(p_r,\theta,\rho,a_m,a_r) - C_1 - a_m - a_r \quad (۹)$$

که در آن، m + r , m, r به ترتیب دلالت بر خرده‌فروش، تولیدکننده و کل زنجیره دارند و $0<\varepsilon<1$ و B_0، B_1 دارای مقادیری مثبت می‌باشند. در نهایت با جایگزینی تابع تقاضا، به ترتیب توابع سود خرده‌فروش (رابطه۱۰)، تولیدکننده (رابطه۱۱) و کل زنجیره‌تأمین (رابطه۱۲) را به صورت زیر خواهیم داشت.

[10] Giri & Sharma

جدول ۱: تابع تبلیغات به کار برده شده در برخی از مطالعات

پژوهشگران	تأثیر تبلیغات $h(a_r, a_m)$	تأثیر قیمت$g(p)$
Huang & Li [۱۰]	$\alpha_2 - \beta_2 a_r^{-\gamma} a_m^{\delta}$ $(\alpha_2, \beta_2, \gamma, \delta > 0)$	p
Szmerekovsky & Zhang [۲۴]	$\alpha_2 - \beta_2 a_r^{-\gamma} a_m^{\delta}$ $(\alpha_2, \beta_2, \gamma, \delta > 0)$	p^{-e} $(e > 1)$
Xie & Neyret [۲۷]	$\alpha_2 - \beta_2 a_r^{-\gamma} a_m^{\delta}$ $(\alpha_2, \beta_2, \gamma, \delta > 0)$	$k_0 - k_2 p$ $(k_0, k_2 > 0)$
Xie & et al[۲۶]	$k_r\sqrt{a_r} + k_m\sqrt{a_m})$	$k_0 - k_2 p$ $(k_0, k_2 > 0)$
Seyedesfahani & et al [۲۳]	$k_r\sqrt{a_r} + k_m\sqrt{a_m})$	$k_0 - k_2 p$ $(k_0, k_2 > 0)$
Yue & et al. [۲۹]	$\alpha_2 - \beta_2 a_r^{-\gamma} a_m^{\delta}$ $(\alpha_2, \beta_2, \gamma, \delta > 0)$	$\frac{p^{-e}}{p_0}$ $(e > 1)$
Giri & sharma [۹]	$k_{ri}\sqrt{a_{ri}} - k_{rj}\sqrt{a_{rj}}$	.....

$$F_r(p_r, a_r) = \left(1 + \frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)(k_3 + k_1\theta - k_2 p_r)(k_r\sqrt{a_r} + k_m\sqrt{a_m})(p_r - w) - (1-t)a_r \quad (۱۰)$$

$$F_m(w, \theta, \rho, a_m, t) = \left(w - \frac{\varepsilon\rho}{\rho_{max}} C_0 - (B_0 + B_1(\theta - \theta_{min}))\right)\left(1 + \frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)(k_3 + k_1\theta - k_2 p_r)(k_r\sqrt{a_r} + k_m\sqrt{a_m}) - C_1 - a_m - t a_r \quad (۱۱)$$

$$F_{m+r}(\theta, \rho, a_m, a_r, t) = \left(p_r - \frac{\varepsilon\rho}{\rho_{max}} C_0 - (B_0 + B_1(\theta - \theta_{min}))\right)\left(1 + \frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)(k_3 + k_1\theta - k_2 p_r)(k_r\sqrt{a_r} + k_m\sqrt{a_m}) - C_1 - a_m - a_r \quad (۱۲)$$

همیشه حداقلی از تقاضا موجود است، بنابراین تابع تقاضا باید همواره بزرگتر از صفر باشد. این شرط (رابطه۱۳) در مدل همواره برقرار است.

$$k_3 + k_1\theta - k_2 p_r > 0 \quad (۱۳)$$

و سایر شروط مدل به شرح ذیل می باشد:

$$0 \le \theta_{min} \le \theta \le 1 \quad (۱۴)$$

$$C_0 \le w \le p_m \quad (۱۵)$$

$$0 \le \rho \le \rho_{max} \quad (۱۶)$$

$$0 \le t \le 1 \quad (۱۷)$$

$$0 \le a_m \le \alpha_2 \quad (۱۸)$$

$$0 \le a_r \le \alpha_2 \quad (۱۹)$$

$$w \le p_r \quad (۲۰)$$

با توجه به رابطه (۱۳)، حداکثر مقدار p_r به صورت زیر است.

$$k_3 + k_1\theta - k_2 p_r > 0 \implies k_3 + k_1\theta > k_2 p_r \implies p_r < \frac{k_3 + k_1\theta}{k_2} \quad (۲۱)$$

در ادامه با در نظر گرفتن فرض $\theta \le 1$ در رابطه (۲۱)، در نهایت حداکثر مقدار p_r به صورت زیر می باشد.

$$p_r < \frac{k_3 + k_1\theta}{k_2} \text{ و } \theta \le 1 \implies p_r < \frac{k_3 + k_1}{k_2} \quad (۲۲)$$

با توجه به روابط (۲۰) و (۲۲) محدودیت حداقل و حداکثر متغیر p_r را به صورت زیر خواهیم داشت.

$$w \le p_r < \frac{k_3 + k_1}{k_2} \quad (۲۳)$$

حال توابع سود فوق تحت دو رویکرد نظریه‌بازی‌ها، مدل‌سازی، حل و مقایسه می‌شوند.

بازی استکلبرگ - تولیدکننده مدل اول

در این بازی رابطه بین تولیدکننده و خرده‌فروش به صورت یک بازی غیر همکاری متوالی است که در این مدل تولیدکننده رهبر و خرده‌فروش پیرو است. این راه حلی برای این ساختار است که به آن استکلبرگ تعادلی (بازی رهبر و پیرو تعادلی) می‌گویند، که به منظور بدست آمدن آن باید بهترین پاسخ از پیروها را تعیین کنیم و مشکل تصمیم‌گیری رهبر بر اساس پاسخ پیرو حل می‌شود. بنابراین در ابتدا مقادیر بهینه خرده‌فروش محاسبه خواهد شد و در تابع سود تولیدکننده اعمال می‌شود و سپس مقادیر بهینه تولیدکننده بدست خواهد آمد. که به اصطلاح این بهینگی به روش استقرا معکوس بدست خواهد آمد.

در اولین قدم این بازی، مقادیر بهینه خرده‌فروش را بر اساس متغیرهای تولیدکننده و پارامترها بدست می‌آوریم. بنابراین بهترین پاسخ خرده‌فروش به شرح زیر بدست خواهد آمد.

$$Max\ F_r(p_r,a_r)=\left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)(k_3+k_1\theta-k_2p_r)\left(k_r\sqrt{a_r}+k_m\sqrt{a_m}\right)(p_r-w)-(1-t)a_r \quad (۲۴)$$
$$\text{s.t. } k_3+k_1\theta-k_2p_r>0\ ,C_0\le p_r\le\frac{k_3+k_1}{k_2}\ ,0\le a_r\le\alpha_2$$

در این جا جهت بدست آوردن مقادیر بهینه از روش حل ریاضی استفاده می‌شود که از این روش مقادیر بهینه سراسری بدست خواهد آمد. بنابراین در ابتدا از تابع سود خرده‌فروش نسبت به متغیرهای تصمیم‌گیری خرده‌فروش، (a_r,p_r) مشتق گرفته می‌شود. با مساوی صفر قرار دادن این معادلات، $(\frac{\partial F_r}{\partial p_r}=0،\ \frac{\partial F_r}{\partial a_r}=0)$ نقاط $(a_r،p_r)$ بدست می‌آید.

$$p_r^{sm}=\frac{k_3+k_1\theta+k_2w}{2k_2} \quad (۲۵)$$

$$a_r^{sm}=\frac{k_r^2\left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)^2(k_3+k_1\theta-k_2w)^4}{16\,k_2^2\,(2t-2)^2} \quad (۲۶)$$

برای بررسی بهینگی این نقاط علاوه بر صدق کردن در محدودیت‌های مدل، باید مقعر بودن تابع سود خرده‌فروش بررسی و اثبات شود. برای این منظور از روش ماتریس‌های هشین استفاده خواهد شد. این بررسی در (پیوست) آورده‌شده‌است.

بنابراین با در نظر گرفتن معادلات (۲۵) و(۲۶) و (۸) تابع سود تولیدکننده را که با $F_{m"}$ نمایش می‌دهیم بنابراین مدل نهایی تابع سود تولیدکننده را با در نظر گرفتن شروط روابط بهینه متغیرهای تصمیم، (محدودیت‌ها) به شرح زیر خواهیم‌داشت.
بنابراین به دنبال بهینه سازی مدل زیر هستیم.

$$Max\ F_{m"}(w,\theta,\rho,a_m,t)=\left(w-\frac{\varepsilon\rho}{\rho_{max}}C_0-\left(B_0+B_1(\theta-\theta_{min})\right)\right)\left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)\left(\frac{k_3+k_1\theta-k_2w}{2}\right)\left(\frac{k_r^2\left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)(k_3+k_1\theta-k_2w)^2}{4\,k_2\,(2t-2)}+k_m\sqrt{a_m}\right)-\left(\frac{k_r^2t\left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)^2(k_3+k_1\theta-k_2w)^4}{16\,k_2^2\,(2t-2)^2}\right)--C_1-a_m \quad (۲۷)$$
$$s.t$$
$$,0\le\rho\le\rho_{max}\ ,\theta_{min}\le\theta\le k_3+k_1\theta-k_2p_r>0$$
$$1,0\le t\le1\ ,C_0\le w\le p_m,0\le a_m\le\alpha_2$$

به دلیل پیچیدگی مدل تابع سود تولیدکننده، امکان استفاده از روش اثبات مقعر بودن تابع سود و بدست آوردن بهینگی سراسری متغیرهای تصمیم از روش‌های ریاضی نمی‌باشد. بنابراین در نهایت با حل این مدل به وسیله الگوریتم فراابتکاری (OIO)، مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم تولیدکننده نیز بدست خواهد آمد.

بازی همکاری مدل اول

در این استراتژی رابطه‌ی بین تولیدکننده و خرده‌فروش را به‌عنوان یک بازی همکاری بررسی می‌کنیم. در یک بازی همکاری ارتباط بین بازی‌کنندگان مجاز است. آنها می‌توانند برای اجرا و یا ایفای یک خروجی و نتیجه بهتر توافق کنند، که در آن اعضای زنجیره توافق بر همکاری و افزایش سود کل سیستم را دارند. بنابراین تابع سود کل زنجیره را در نظر می‌گیریم و با توجه به آن مقادیر بهینه را بدست می‌آوریم. بنابراین تابع هدف را به شکل زیر خواهیم داشت:

$$MaxF_{m+r}(\theta,\rho,a_m,a_r,p_r)=(p_r-\frac{\varepsilon\rho}{\rho_{max}}C_0-\left(B_0+B_1(\theta-\theta_{min})\right))\left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)(k_3+k_1\theta-k_2p_r)(k_r\sqrt{a_r}+k_m\sqrt{a_m})\ -C_1-a_m-a_r \quad (۲۸)$$
$$s.t$$
$$k_3+k_1\theta-k_2p_r>0,C_0\le p_r\le\frac{k_3+k_1}{k_2}\ ,0\le a_m\le\alpha_2\ ,0\le\ a_r\le\alpha_2\ ,0\le\rho\le\rho_{max}\ ,\theta_{min}\le\theta\le1$$

همانطور که در تابع هدف مشخص است، زمانی که تولیدکننده و خرده‌فروش همکاری می‌کنند فقط θ، ρ، p_r، a_m و a_r متغیرهای تصمیم‌گیری هستند و متغیرهای w و t بر روی سود کل سیستم تأثیرگذار نیستند و تنها در تقسیم سود بین اعضا تأثیر گذارند. در اینجا نیز به دلیل پیچیدگی مدل، امکان استفاده از روش اثبات مقعر بودن تابع سود و بدست آوردن بهینگی سراسری متغیرهای تصمیم از روش‌های ریاضی نمی‌باشد. بنابراین در نهایت این مدل به وسیله الگوریتم فراابتکاری (OIO)،مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم تولیدکننده نیز بدست خواهد آمد. در بخش مثال‌عددی کاربردی بودن مدل نشان داده خواهدشد.

مدل دوم

در این مدل تأثیرات تبلیغات را به صورت معادله (۲۹) در نظر می‌گیریم.

$$h(a_r,a_m)=(\alpha_2-\beta_2a_r^{-\gamma}a_m^{-\delta}) \quad (۲۹)$$

تابع تقاضا متاثر از قیمت، وارانتی، سطح کیفیت و تبلیغات را به صورت معادله (۳۰) در نظر گرفته می شود.

$$D(\rho,\theta,a_m,a_r,p_r)=(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}})(k_0+k_1(\theta-\theta_{min})-k_2(p_r-p_m))(\alpha_2-\beta_2a_r^{-\gamma}a_m^{-\delta}) \quad (۳۰)$$

که در آن $0 < \alpha < 1$ و k_0، k_1، k_2، γ و δ دارای مقادیری مثبت می‌باشند. که در این مدل نیز ابتدا برای ساده‌سازی تابع تقاضا از تغییر متغیر رابطه(۵) استفاده می‌شود. بنابراین با توجه به این تغییر متغیر، در نهایت تابع تقاضا به صورت معادله (۳۱) خواهد شد.

$$D(\rho,\theta,a_m,a_r,p_r) = \left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)(k_3+k_1\theta-k_2p_r)(\alpha_2-\beta_2a_r^{-\gamma}a_m^{-\delta}) \quad (۳۱)$$

در ادامه توابع سود خرده‌فروش (۷)، تولیدکننده (۸) و کل سیستم (۹) را در نظر می‌گیریم و با جایگزینی تابع تقاضا، به ترتیب توابع سود خرده‌فروش (۳۲)، تولیدکننده(۳۳) و کل زنجیره‌تأمین(۳۴) را به صورت زیر خواهیم داشت.

$$\Pi_r(p_r,a_r) = \left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)(k_3+k_1\theta-k_2p_r)(\alpha_2-\beta_2a_r^{-\gamma}a_m^{-\delta})(p_r-w)-(1-t)a_r \quad (۳۲)$$

$$\Pi_m(w,\theta,\rho,a_m,t) = (w-\frac{\varepsilon\rho}{\rho_{max}}C_0-(B_0+B_1(\theta-\theta_{min})))(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}})(k_3+k_1\theta-k_2p_r)(\alpha_2-\beta_2a_r^{-\gamma}a_m^{-\delta})-C_1-a_m-ta_r \quad (۳۳)$$

$$\Pi_{m+r}(\theta,\rho,a_m,a_r,t) = (p_r-\frac{\varepsilon\rho}{\rho_{max}}C_0-(B_0+B_1(\theta-\theta_{min})))(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}})(k_3+k_1\theta-k_2p_r)(\alpha_2-\beta_2a_r^{-\gamma}a_m^{-\delta})-C_1-a_m-a_r \quad (۳۴)$$

در این مدل نیز تمام شروط (۱۳)، (۱۴)، (۱۵)، (۱۶)، (۱۷)، (۱۸)، (۲۳) مانند مدل اول برقرار می‌باشد. حال توابع سود فوق تحت دو رویکرد نظریه‌بازی‌ها، مدل‌سازی، حل و مقایسه می‌شوند.

بازی استکلبرگ - تولیدکننده مدل دوم

مانند مدل اول در ابتدا مقادیر بهینه خرده‌فروش محاسبه خواهدشد و در تابع سود تولیدکننده اعمال می شود و سپس مقادیر بهینه تولیدکننده بدست خواهدآمد. که به اصطلاح این بهینگی را به روش استقرا معکوس بدست خواهد آمد.

همانند مدل قبل در اولین قدم این بازی، مقادیر بهینه خرده‌فروش را بر اساس متغیرهای تولیدکننده و پارامترها بدست می آوریم. بنابراین بهترین پاسخ خرده‌فروش به شرح زیر بدست خواهد آمد.

$$Max\ \Pi_r(p_r,a_r) = \left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)(k_3+k_1\theta-k_2p_r)(\alpha_2-\beta_2a_r^{-\gamma}a_m^{-\delta})(p_r-w)-(1-t)a_r \quad s.t \quad (۳۵)$$
$$k_3+k_1\theta-k_2p_r>0\ ,C_0\le w\le p_m\ ,0\le a_r\le\alpha_2$$

جهت بدست آوردن مقادیر بهینه از روش حل ریاضی و اثبات مقعر بودن تابع سود استفاده می‌شود. بنابراین در ابتدا از تابع سود خرده‌فروش نسبت به متغیرهای تصمیم‌گیری آن، (a_r,p_r) مشتق گرفته می‌شود و با مساوی صفر قرار دادن این معادلات، $(\frac{\partial\Pi_r}{\partial p_r}=0,\ \frac{\partial\Pi_r}{\partial a_r}=0)$ نقاط (a_r,p_r) بدست می آید. با جایگذاری معادله‌ی بدست آمده برای متغیر p_rدر معادله (۳۶)، معادله متغیر a_r به صورت معادله (۳۸) بدست خواهد آمد. بنابراین، مقادیر بهینه خرده‌فروش به صورت معادله(۳۷) و (۳۸) بدست خواهد آمد.

$$a_r=\left(\frac{\beta_2a_m^{-\delta}\left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)(k_3+k_1\theta-k_2p_r)(p_r-w)}{(1-t)}\right)^{\frac{1}{1+\gamma}} \quad (۳۶)$$

$$p_r^{sm}=\frac{k_3+k_1\theta+k_2w}{2k_2} \quad (۳۷)$$

$$a_r^{sm}=4^{\frac{-1}{1+\gamma}}\left(\frac{\beta_2\gamma a_m^{-\delta}\left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)(k_3+k_1\theta-k_2w)^2}{k_2(1-t)}\right)^{\frac{1}{1+\gamma}} \quad (۳۸)$$

در اینجا نیز برای بررسی بهینگی این نقاط باید مقعر بودن تابع سود خرده‌فروش بررسی شود. برای این منظور از روش ماتریس های هشین استفاده خواهد شد. این بررسی در (پیوست) آورد شده است. با در نظر گرفتن این مقادیر بهینه و اعمال آن در تابع سود تولیدکننده(۳۳)، مقادیر بهینه متغیرهای تولیدکننده بدست خواهد آمد.

تابع سود تولیدکننده با در نظر گرفتن شروط روابط بهینه متغیرهای تصمیم خرده‌فروش به شرح زیر خواهد بود.

$$Max\ \Pi_m(w,\theta,\rho,a_m,t:(p_r^{sm},a_r^{sm}))\ \ s.t$$
$$(p_r^{sm},a_r^{sm})=\{(p_r,a_r)\,|\,(p_r,a_r)=Max\ \Pi_r(p_r,a_r)\} \quad (۳۹)$$
$$k_3+k_1\theta-k_2p_r>0\ ,0\le\rho\le\rho_{max}\ ,\theta_{min}\le\theta\le 1,0\le t\le 1\ ,C_0\le w\le p_m,0\le a_m\le\alpha_2$$

بنابراین با در نظر گرفتن معادلات (۳۳)،(۳۷) و (۳۸) تابع سود تولیدکننده را که با "Π_m نمایش می‌دهیم. بنابراین مدل نهایی تابع سود تولیدکننده را با در نظر گرفتن شروط روابط بهینه متغیرهای تصمیم، (محدودیت‌ها) به شرح زیر خواهیم داشت.

$$Max\ \Pi_{m"}(w,\theta,\rho,a_m,t) = \left(w-\frac{\varepsilon\rho}{\rho_{max}}C_0-(B_0+B_1(\theta-\theta_{min}))\right)\left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)\left(\frac{k_3+k_1\theta-k_2w}{2}\right)\left(\alpha_2-am^{-\delta}\beta_2\left(4^{\frac{-1}{1+\gamma}}\left(\frac{\beta_2\gamma a_m^{-\delta}\left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)(k_3+k_1\theta-k_2w)^2}{k_2(1-t)}\right)^{\frac{1}{1+\gamma}}\right)^{-\gamma}\right) - C_1-a_m-\left(4^{\frac{-1}{1+\gamma}}t\right)\left(\frac{\beta_2\gamma a_m^{-\delta}\left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)(k_3+k_1\theta-k_2w)^2}{k_2(1-t)}\right)^{\frac{1}{1+\gamma}} \quad (۴۰)$$

$s.t$
$k_3 + k_1\theta - k_2 p_r > 0\ ,0 \le \rho \le \rho_{max}\ ,\theta_{min} \le \theta \le 1,\ 0 \le t \le 1\ ,\ C_0 \le w \le p_m, 0 \le\ a_m \le \alpha_2$

در این قسمت از حل، مانند مدل قبل به دلیل پیچیدگی تابع سود تولیدکننده، امکان استفاده از روش اثبات مقعر بودن تابع سود و بدست آوردن بهینگی سراسری متغیرهای تصمیم از روش‌های ریاضی نمی‌باشد. بنابراین در نهایت با حل این مدل به وسیله‌ی الگوریتم فراابتکاری ملهم از اپتیک (optics inspired optimization (OIO))، مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم تولیدکننده نیز بدست خواهد آمد و در بخش مثال عددی کاربردی بودن مدل نشان داده خواهد شد.

مثال عددی

برای نشان دادن کاربردی بودن مدل‌های طراحی شده از مثال عددی استفاده شده‌است که به این منظور از برخی داده‌ها مربوط به پژوهش از مقاله موداک و همکاران [۱۸] استخراج شده است و برخی دیگر با توجه به پژوهش‌های انجام شده و در نظر گرفتن حدود نسبت تأثیر بر تابع تقاضا، بابت نوآوری در پژوهش نیز به طور مثال عددگذاری شده است که در جدول (۲) آورده شده است.

با توجه به پیچیدگی و بزرگ بودن ابعاد مسئله،حل چهار معادله و چهار مجهول بدست آمده از مشتق تابع هدف نسبت به هر یک از متغیرهای تصمیم مسئله با استفاده از نرم‌افزارهای مختلف از جمله Mathematica دشوار است. در این مرحله با استفاده از الگوریتم فراابتکاری(OIO)، مقادیر بهینه را بدست می‌آوریم. پاسخ‌های بهینه مدل اول با نرم افزار Mathematica را در جداول (۳) و (۵) مشاهده می‌کنید و پاسخ‌های بهینه مدل اول با استفاده از الگوریتم OIO در جداول(۴)و(۶) آمده‌است. پاسخ‌های بهینه مدل دوم با نرم افزار Mathematica را در جداول (۷) و (۹) مشاهده می‌کنید و پاسخ‌های بهینه مدل اول با استفاده از الگوریتم OIO در جداول (۸) و(۱۰) آمده‌است.

مقایسه نتایج نشان می‌دهد که در هر دو مدل با استفاده از الگوریتم OIO، پاسخ‌های بهتری حاصل می‌شود.

همچنین مشاهده می‌شود که مجموع حداقل سودهایی که هر دو طرف ادعا می‌کنند در هر دو مدل از سود کل همکاری که بین دو بازیکن تقسیم می‌شود، کوچکتر است ($\Pi_m{}^{sm} + \Pi_r{}^{sm} < \Pi^c_{m+r}$)($F_m{}^{sm} + F_r{}^{sm} < F^c_{m+r}$). بنابراین همکاری بین دو بازیکن در هر دو مدل وجود خواهد داشت و عدم همکاری به نفع هیچ یک از بازیکنان نخواهد بود.

جدول ۲: مقادیر پارامترها

پارامتر	θ_{min}	ρ_{max}	p_m	k_0	k_1	k_2	k_r	k_m	C_0
مقدار	۰/۵	۱۲	۳۰۰	۲۰۰	۵۰۰	۴/۶	۲/۶	۱/۸	۱۰۰
پارامتر	γ	δ	B_0	B_1	β_2	α	ε	α_2	C_1
مقدار	۲/۶	۱/۸	۴۰	۸۰	۵۰۰۰۰	۰/۴	۰/۲	۲۰۰۰۰۰۰۰۰	۵۰۰۰

جدول۳: نتایج حل عددی بهینه‌سازی نرم افزار Mathematica، بازی استکلبرگ – تولیدکننده مدل اول

متغیرهای تصمیم تولیدکننده						متغیرهای تصمیم خرده‌فروش		
$F_m{}^{sm}$	w^{sm}	θ^{sm}	ρ^{sm}	$a_m{}^{sm}$	t^{sm}	$F_r{}^{sm}$	$p_r{}^{sm}$	$a_r{}^{sm}$
۳۰۹۶۵۸۲۴۰	۳۰۰	۰/۵	۱۲	۱۹۹۹۹۹۹۹	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۱۶	۹۳۱۰۹۰۰۰	۳۲۱/۷۳۹	۱۵۶۵۴۱۰۰

جدول ۴ : نتایج حل عددی الگوریتم OIO، بازی استکلبرگ – تولیدکننده مدل اول

متغیرهای تصمیم تولیدکننده						متغیرهای تصمیم خرده‌فروش		
$F_m{}^{sm}$	w^{sm}	θ^{sm}	ρ^{sm}	$a_m{}^{sm}$	t^{sm}	$F_r{}^{sm}$	$p_r{}^{sm}$	$a_r{}^{sm}$
۳۰۹۶۶۸۵۹۰	۲۹۹/۹۹	۰/۵	۱۱/۹۹۷۹	۲۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۵۹۵۳	۹۳۱۲۲۹۰۰	۳۲۱/۷۳۹	۱۵۶۵۲۵۰۰

جدول۵: نتایج حل عددی بهینه سازی نرم افزار Mathematica، بازی همکاری مدل اول

متغیرهای تصمیم کل زنجیره‌تأمین					
$F_{m+r}{}^{c}$	$p_r{}^{c}$	θ^{c}	ρ^{c}	$a_m{}^{c}$	$a_r{}^{c}$
۸۴۸۶۲۵۵۰۳۴	۲۴۸/۹۱۵	۱	۱۱/۹۹	۱۹۹۹۹۹۹۷۰	۱۹۹۹۹۹۹۷۰

جدول۶: نتایج حل عددی الگوریتم OIO در متلب، بازی همکاری مدل اول

متغیرهای تصمیم کل زنجیره‌تأمین					
$F_{m+r}{}^{c}$	$p_r{}^{c}$	θ^{c}	ρ^{c}	$a_m{}^{c}$	$a_r{}^{c}$
۸۴۸۶۲۵۵۰۵۷	۲۴۸/۹۱۳	۱	۱۲	۱۹۹۹۹۹۹۹۹/۹۳	۱۹۹۹۹۹۹۹۹/۷۹

جدول۷:نتایج حل عددی بهینه سازی نرم افزار Mathematica، بازی استکلبرگ – تولیدکننده مدل دوم

متغیرهای تصمیم تولیدکننده						متغیرهای تصمیم خرده‌فروش		
$\Pi_m{}^{sm}$	w^{sm}	θ^{sm}	ρ^{sm}	$a_m{}^{sm}$	t^{sm}	$\Pi_r{}^{sm}$	$p_r{}^{sm}$	$a_r{}^{sm}$
۱۴۲۸۰۵۶۰۳۴۹۹۱۱	۲۴۸/۹۳	۱	۱۲	۱۹۹۹۹۹۹۹۹	۰/۰۱۲۳	۷۰۳۵۰۳۱۳۱۷۱۹۲	۳۲۲/۸۳۴	۰/۰۳۴۲۴

جدول۸: نتایج حل عددی الگوریتم OIO، بازی استکلبرگ – تولیدکننده مدل دوم

متغیرهای تصمیم تولیدکننده						متغیرهای تصمیم خرده‌فروش		
$\Pi_m{}^{sm}$	w^{sm}	θ^{sm}	ρ^{sm}	$a_m{}^{sm}$	t^{sm}	$\Pi_r{}^{sm}$	$p_r{}^{sm}$	$a_r{}^{sm}$
۱۴۲۸۰۷۶۰۰۳۶۶۷۳	۲۴۸/۹۱۳	۱	۱۲	۳۲/۵۸۸	۰/۰۰۰۰۰۷۶۹	۷۱۴۰۳۷۵۰۱۴۲۳۱	۳۲۳/۳۷	۸۴/۸۴۹۴

جدول۹:نتایج حل عددی بهینه سازی نرم‌افزار Mathematica، بازی همکاری مدل دوم

متغیرهای تصمیم کل زنجیره‌تأمین					
$\Pi_{m+r}{}^{c}$	$p_r{}^{c}$	θ^{c}	ρ^{c}	$a_m{}^{c}$	$a_r{}^{c}$
۲۸۵۵۴۳۴۸۲۶۸۸۶۶	۲۴۸/۲۴۸	۰/۹۹۸	۱۱/۹۹۷۳	۳۱۲۹۵۱	۹۹۸۷۶/۳

جدول۱۰: نتایج حل عددی الگوریتم OIO در متلب، بازی همکاری مدل دوم

متغیرهای تصمیم کل زنجیره‌تأمین					
$\Pi_{m+r}{}^{c}$	$p_r{}^{c}$	θ^{c}	ρ^{c}	$a_m{}^{c}$	$a_r{}^{c}$
۲۸۵۶۰۷۱۵۸۶۴۹۴۰	۲۴۸/۸۹۳	۱	۱۱/۹۹۸۶	۶۱/۶۸۶۱	۸۹/۹۴۶۷

تحلیل حساسیت

تحلیل حساسیت بازی استکلبرگ – تولیدکننده مدل اول

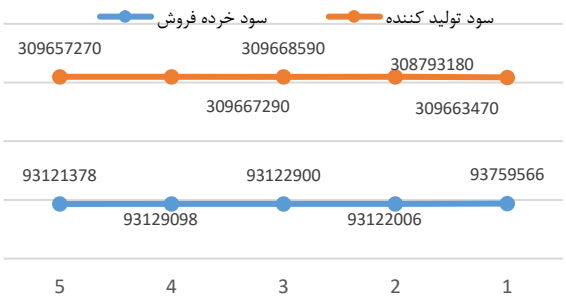
هزینه تبلیغات ملی اصلا و قیمت خرده‌فروشی، قیمت عمده فروشی و سطح کیفیت خیلی نسبت به تغییرات k_1 حساس نیستند و نرخ مشارکت، هزینه تبلیغات محلی و وارانتی نسبت به تغییرات k_1 کمی‌حساس هستند و با افزایش k_1، هزینه تبلیغات محلی افزایش و وارانتی نیز کاهش می‌یابد و نرخ مشارکت تغییرات نوسانی دارد. با توجه به شکل ۱، سود تولیدکننده و سود خرده‌فروش خیلی نسبت به تغییرات k_1 حساس نیستند و با افزایش k_1، بسیار کم افزایش دارند.

هزینه تبلیغات ملی اصلا و قیمت عمده فروشی و سطح کیفیت خیلی نسبت به تغییرات k_2 حساس نیستند و نرخ مشارکت نسبت به تغییرات k_2 کمی‌حساس هستند و با افزایش k_2 در ابتدا خیلی و سپس کمی‌کاهش دارد. هزینه تبلیغات محلی، وارانتی، قیمت خرده‌فروشی و نیز با توجه به شکل۲، سود تولیدکننده و خرده‌فروش نسبت به تغییرات k_2 خیلی حساس هستند. با افزایش k_2 سود خرده‌فروش، هزینه تبلیغات محلی و قیمت خرده‌فروشی کاهش و همچنین سود تولیدکننده و وارانتی نیز افزایش می‌یابند. هزینه تبلیغات ملی و قیمت عمده فروشی و سطح کیفیت خیلی نسبت به تغییرات k_m حساس نیستند و خیلی خیلی کم نوسان دارند و نرخ مشارکت و قیمت خرده‌فروشی نسبت به تغییرات k_m کمی‌حساس هستند و با افزایش k_m نوسان دارند. هزینه تبلیغات محلی، وارانتی و نیز با توجه به شکل ۳، سود تولیدکننده و خرده‌فروش نسبت به تغییرات k_m خیلی حساس هستند. با افزایش k_m هزینه تبلیغات محلی، وارانتی، سود خرده‌فروش و سود تولیدکننده افزایش می‌یابند.

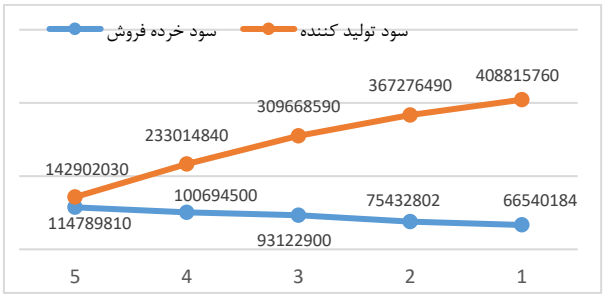
هزینه تبلیغات ملی نسبت به تغییرات k_r حساس نیست و همواره ثابت است. نرخ مشارکت و قیمت عمده‌فروشی نسبت به تغییرات k_r کمی‌حساس هستند و با افزایش k_r، نرخ مشارکت نوسان دارد و قیمت عمده فروشی کمی‌افزایش می‌یابد. سطح کیفیت نسبت به این تغییرات کمی‌حساس است و قیمت خرده‌فروشی، وارانتی و هزینه تبلیغات محلی و نیز با توجه به شکل۴، سود تولیدکننده و سود خرده‌فروش نسبت به تغییرات k_r به شدت حساس هستند و با افزایش k_r، کاهش می‌یابند.

هزینه تبلیغات ملی و سطح کیفیت نسبت به تغییرات ε حساس نیستند و همواره ثابت هستند. قیمت خرده‌فروشی نسبت به تغییرات ε خیلی کم حساس هستند و با افزایش ε، کمی‌کاهش دارد و سپس ثابت است. قیمت عمده فروشی نسبت به تغییرات ε کمی‌حساس هستند و با افزایش ε، کمی‌افزایش دارد. وارانتی، هزینه تبلیغات محلی، نرخ مشارکت و نیز با توجه به شکل۵، سود تولیدکننده و سود خرده‌فروش نسبت به تغییرات ε خیلی حساس هستند و با افزایش ε، کاهش می‌یابند.

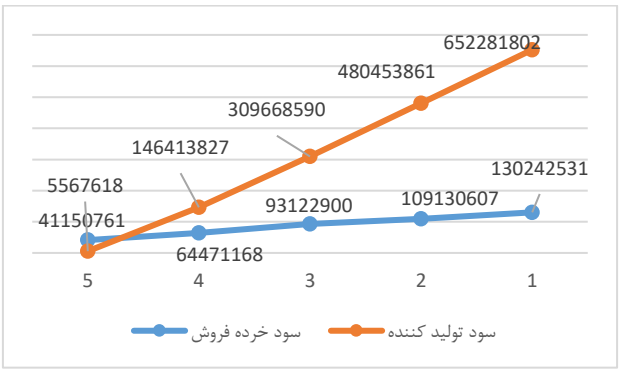
هزینه تبلیغات ملی و سطح کیفیت نسبت به تغییرات α حساس نیستند و تقریبا ثابت هستند. قیمت خرده‌فروشی، قیمت عمده فروشی، وارانتی و نرخ مشارکت نسبت به تغییرات α کمی‌حساس است و با افزایش α، کمی‌نوسان دارند. هزینه تبلیغات محلی و نیز با توجه به جدول و شکل۶، سود تولیدکننده و سود خرده‌فروش نسبت به تغییرات α حساس هستند. با افزایش α، افزایش می‌یابند.



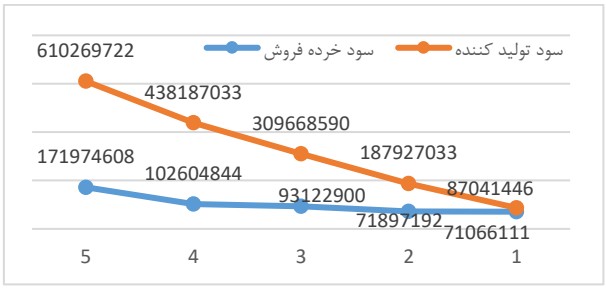
شکل ۱- توابع سود حاصل از تحلیل حساسیت k_1 در بازی استکلبرگ – تولیدکننده مدل اول



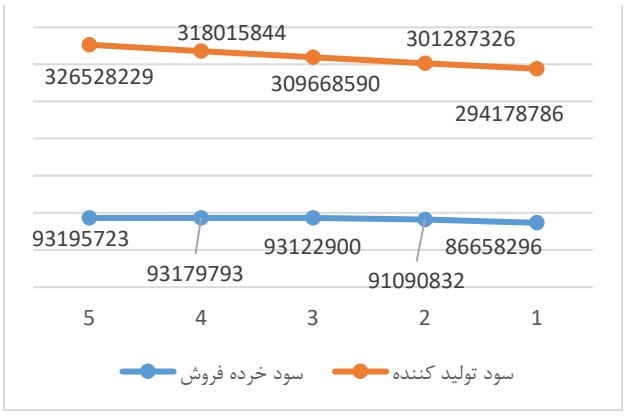
شکل ۲- توابع سود حاصل از تحلیل حساسیت k_2 در بازی استکلبرگ – تولیدکننده مدل اول



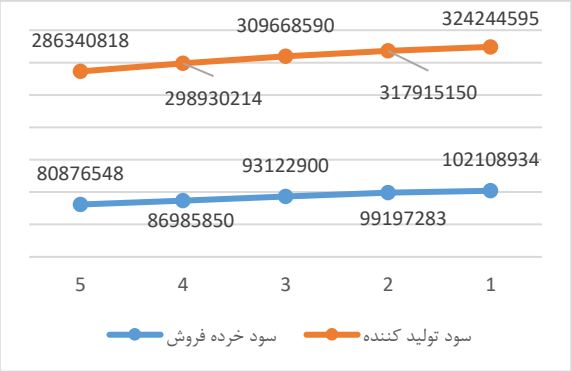
شکل ۳- توابع سود حاصل از تحلیل حساسیت k_m در بازی استکلبرگ – تولیدکننده مدل اول



شکل ۴- توابع سود حاصل از تحلیل حساسیت k_r در بازی استکلبرگ– تولیدکننده مدل اول



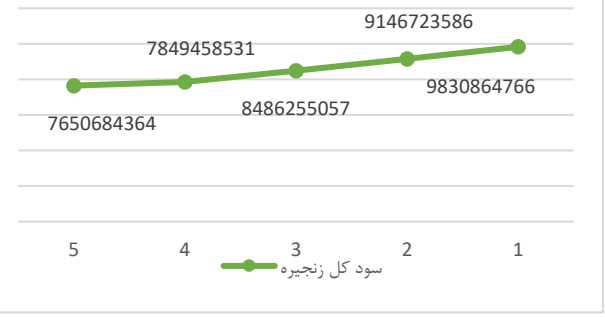
شکل ۵- توابع سود حاصل از تحلیل حساسیت ε در بازی استکلبرگ – تولیدکننده مدل اول



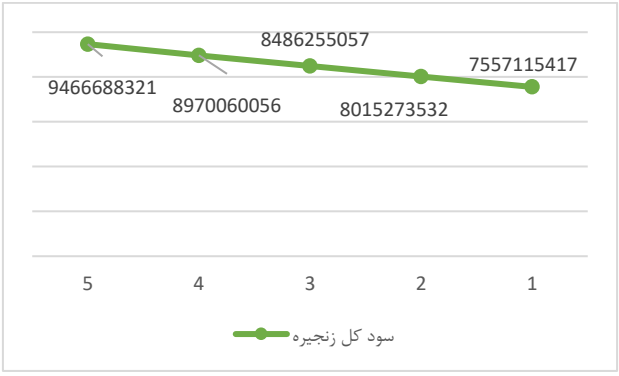
شکل ۶- توابع سود حاصل از تحلیل حساسیت α در بازی استکلبرگ – تولیدکننده مدل اول

نتایج تحلیل حساسیت بازی همکاری مدل اول

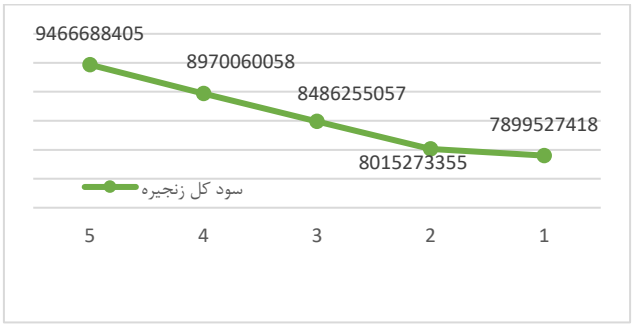
به طور کلی سطح کیفیت، وارانتی، هزینه تبلیغات ملی و هزینه تبلیغات محلی نسبت به تغییرات پارامترها حساس نیستند و ثابت هستند. قیمت خرده‌فروشی نسبت به تغییرات k_r ،k_m و α حساس نیست و ثابت است، اما نسبت به تغییرات k_0، k_1، k_2، ε، B_0 و B_1 خیلی حساس است و با افزایش k_0، k_1، ε، B_0 و B_1، قیمت خرده‌فروشی افزایش می‌یابد و با افزایش k_2، قیمت خرده‌فروشی کاهش می‌یابد. برای مثال سه شکل ۷، ۸ و ۹ تحلیل حساسیت پارامترهای مرتبط با کیفیت یعنی k_1 ،B_0 و B_1 در بازی همکاری را نشان می‌دهند. در شکل ۷ نشان داده می‌شود که با افزایش پارامتر k_1، مقدار ${F_{m+r}}^c$ افزایش می‌یابد. در شکل ۸ نشان داده می‌شود که با افزایش پارامتر B_0، مقدار ${F_{m+r}}^c$ کاهش می‌یابد و در این شکل۹ نشان داده می‌شود که با افزایش پارامتر B_1، مقدار ${F_{m+r}}^c$ کاهش می‌یابد.



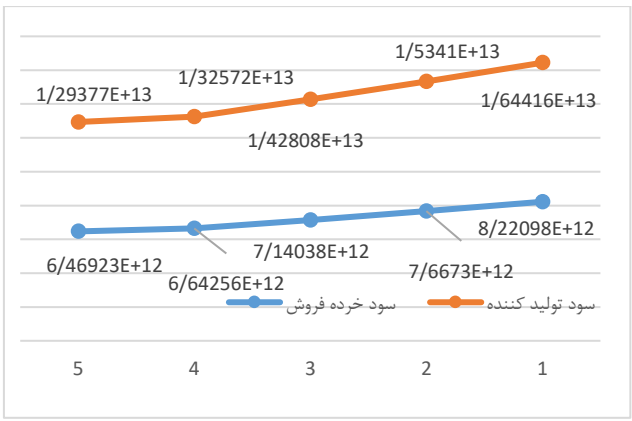
شکل۷- تابع سود کل زنجیره حاصل از تحلیل حساسیت k_1 در بازی همکاری



شکل ۸- تابع سود کل زنجیره حاصل از تحلیل حساسیت B_0 بازی همکاری



شکل۹- تابع سود کل زنجیره حاصل از تحلیل حساسیت B_1 بازی همکاری



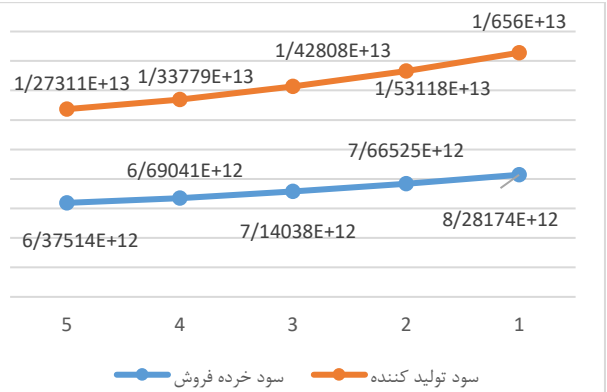
شکل ۱۰- توابع سود حاصل از تحلیل حساسیت k_1 در بازی استکلبرگ – تولیدکننده در مدل دوم

تحلیل حساسیت بازی استکلبرگ – تولیدکننده مدل دوم

وارانتی و نرخ مشارکت نسبت به تغییرات k_1 کمی حساس اند و با افزایش k_1، به حالت سینوسی نوسان دارند. سطح کیفیت، قیمت خرده‌فروشی، قیمت عمده فروشی، هزینه تبلیغات ملی و هزینه تبلیغات محلی و نیز با توجه به جدول و شکل ۱۰، سود تولیدکننده و سود خرده‌فروش نسبت به تغییرات k_1 بسیارحساس هستند و با افزایش k_1، افزایش می یابند.

وارانتی و نرخ مشارکت نسبت به تغییرات k_2 کمی حساس اند و با افزایش k_2، به حالت سینوسی نوسان دارند. سطح کیفیت، قیمت خرده‌فروشی و قیمت عمده فروشی، نسبت به تغییرات k_2 خیلی خیلی حساس هستند و با افزایش k_2، کاهش می یابند. هزینه تبلیغات ملی و هزینه تبلیغات محلی و نیز با توجه به جدول و شکل ۱۱، سود تولیدکننده و سود خرده‌فروش نسبت به تغییرات k_2 خیلی حساس هستند و با افزایش k_2، افزایش می یابند.

در شکل۱۲ مشاهده می‌شود وارانتی و سطح کیفیت نسبت به تغییرات ε حساس نیست و ثابت است. نرخ مشارکت نسبت به تغییراتε خیلی کم حساس است و با افزایش ε، کمی نوسان دارد. قیمت عمده‌فروشی و قیمت خرده‌فروشی کمی نسبت به تغییراتε خیلی حساس‌اند و با افزایشε، افزایش می‌یابند. هزینه تبلیغات ملی نسبت به تغییراتε کمی حساس است و نیز هزینه تبلیغات محلی، سود خرده‌فروش و سود تولیدکننده نسبت به تغییراتε خیلی حساس اند و با افزایشε، کاهش می یابند زیرا تأثیر تعداد کالا معیوب در تابع هدف و در نتیجه سود هر دو بازیکن بیشتر می‌شود.



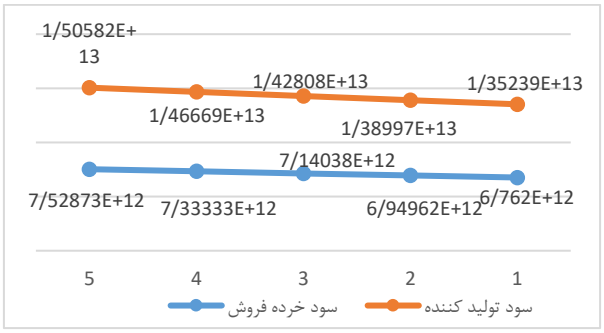
شکل ۱۱- توابع سود حاصل از تحلیل حساسیت k_2 در بازی استکلبرگ – تولیدکننده در مدل دوم

وارانتی و سطح کیفیت نسبت به تغییرات α حساس نیستند و ثابت هستند. قیمت عمده فروشی، خرده‌فروشی و نرخ مشارکت نسبت به تغییرات α خیلی حساس نیستند و نوسانات خیلی جزئی دارند. هزینه تبلیغات ملی، هزینه تبلیغات محلی و نیز با توجه به شکل۱۳، سود تولیدکننده و سود خرده‌فروش نسبت به تغییرات α حساس هستند و با افزایش α، افزایش می یابند زیرا تأثیر تعداد کالا معیوب در تقاضا و در نتیجه سود هر دو بازیکن بیشتر می‌شود.

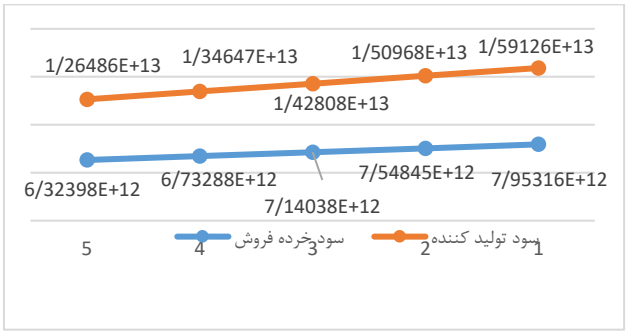
سطح کیفیت نسبت به تغییرات α_2 حساس نیست و ثابت است. نرخ مشارکت، وارانتی، قیمت عمده فروشی، قیمت خرده‌فروشی و هزینه تبلیغات ملی نسبت به تغییرات α_2کمی حساس هستند و هزینه تبلیغات محلی نسبت به این تغییرات حساس است و با افزایشα_2، نوسان جزئی دارند. با توجه به شکل ۱۴، سود تولیدکننده و سود خرده‌فروش نسبت به تغییرات α_2 خیلی حساس هستند و با افزایش α_2، افزایش می یابند.

نتایج تحلیل حساسیت بازی همکاری مدل دوم

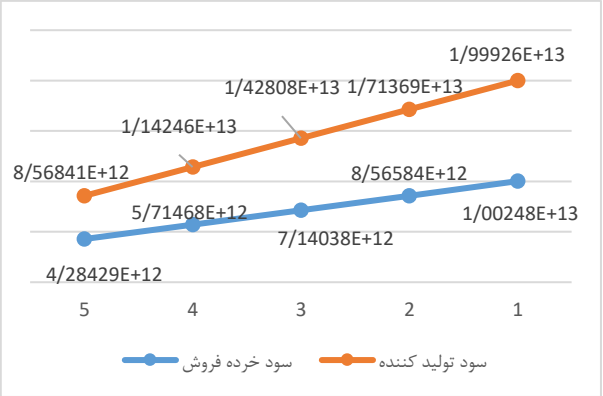
در شکل ۱۵ و ۱۷ مشاهده می‌شود که با افزایش پارامتر k_1 و B_1، مقدار $\Pi_{m+r}{}^{c}$ افزایش می یابد و در شکل ۱۶ افزایش B_0، مقدار $\Pi_{m+r}{}^{c}$ را کاهش می‌دهد زیرا برای که برای حفظ کیفیت پایه به ازای هر محصول باید هزینه‌ای پرداخت شود که طبیعتا باعث کاهش سود کل می‌شود.



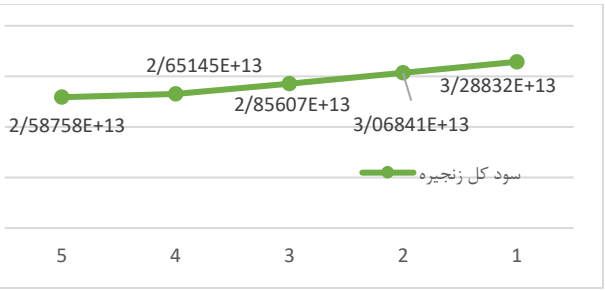
شکل ۱۲- توابع سود حاصل از تحلیل حساسیت ε در بازی استکلبرگ – تولیدکننده در مدل دوم



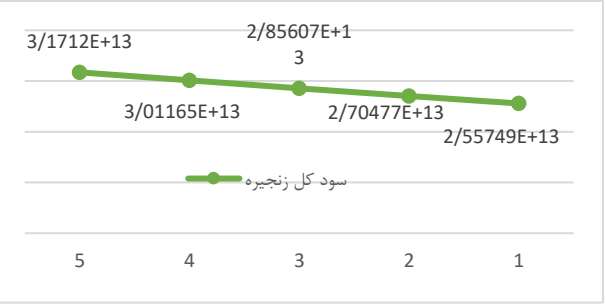
شکل۱۳- توابع سود حاصل از تحلیل حساسیت α در بازی استکلبرگ – تولیدکننده در مدل دوم



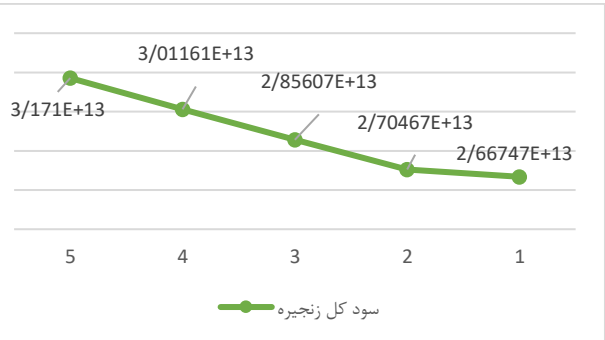
شکل ۱۴- توابع سود حاصل از تحلیل حساسیت α_2 در بازی استکلبرگ – تولیدکننده در مدل دوم



شکل ۱۵- تابع سود کل زنجیره حاصل از تحلیل حساسیت k_1 در بازی همکاری مدل دوم



شکل ۱۶-تابع سود کل زنجیره حاصل از تحلیل حساسیت B_0 در بازی همکاری مدل دوم



شکل ۱۷- تابع سود کل زنجیره حاصل از تحلیل حساسیت B_1 بازی همکاری مدل دوم

۴- نتیجه‌گیری

در این پژوهش مسئله یکپارچه سازی اخذ قیمت فروش محصول، وارانتی، سطح کیفیت و تبلیغات همکاری با هدف بیشینه سازی سود تولیدکننده و خرده فروش مورد مطالعه قرار گرفت.

تبلیغات همکاری یک استراتژی بازاریابی است که در آن خرده‌فروش تبلیغات محلی را اجرا می‌کند و تولیدکننده با بخشی از هزینه کل تبلیغات خرده‌فروش موافقت می‌کند.در این پژوهش فرض شده است تقاضا تحت تأثیر قیمت، تبلیغات همکاری، وارانتی و سطح کیفیت است.

در این تحقیق کارایی مدل که همان سود کل زنجیره‌تأمین است با استفاده از مقایسه استراتژی همکاری با استراتژی غیر همکاری استکلبرگ – تولیدکننده سنجیده شد. مجموع حداقل سودهایی که هر دو طرف ادعا می کردند از سود کل همکاری که بین دو بازیکن تقسیم می‌شود کوچکتر بودند. بنابراین همکاری بین دو بازیکن وجود خواهد داشت و به نفع اعضای زنجیره و کل سیستم است و عدم همکاری به نفع هیچ یک از بازیکنان نخواهد بود. در این پژوهش با آوردن مثال عددی کاربردی بودن مدل نشان داده شد. در ادبیات موجود از الگوریتم فرابتکاری برای بدست آوردن نتایج و بیشینه کردن سود اعضا استفاده نشده است، در این تحقیق در حل مثال عددی نکته قابل توجه این بود که در هر دو مدل استفاده از الگوریتم OIO، پاسخ‌های بهتری نسبت به نرم‌افزار را به‌دست آورد.

در دنیای واقعی همانطور که می‌دانیم عوامل بیشتری بر روی تقاضا تأثیر می‌گذارند. بنابراین با در نظر گرفتن عوامل مؤثر دیگر بر روی تقاضا به صورت کلی‌تر، می‌تواند این پژوهش را به واقعیت نزدیک‌تر کند. در این پژوهش عملکرد اعضای زنجیره تنها تحت دو استراتژی همکاری و غیر همکاری بررسی شده است، می‌توان این عملکرد را در سایر استراژی‌های غیر همکاری نیز ارزیابی کرد. همچنین در این پژوهش فرض شده است که زنجیره‌تأمین تک محصول است. می‌توان مسأله را در حالت چند محصولی بررسی کرد.

۵- منابع

[1] Alizadeh, N., & Kashan, A. H. (2019). Enhanced grouping league championship and optics inspired optimization algorithms for scheduling a batch

processing machine with job conflicts and non-identical job sizes. Applied soft computing, 83, 105657

[2] Allah Taleizadeh, A., Mokhtarzadeh, M (2020)., Pricing and two-dimensional warranty policy of multi-products with online and offline channels using a value-at-risk approach, Computers & Industrial Engineering.

[3] amoozad mahdiraji, H., Moddares Yazdi, M., Mohaghar, A., Jaafarnejad, A. (2021). Cooperation Modeling for Unlimited Three Echelon Supply Chain: Game Theory Approach. Management Research in Iran, 18(1), 171-191. (in Persian)

[4] Bergen, M., John, G., (1997). Understanding cooperative advertising participation rates in conventional channels. Journal of Marketing Research 34 (3), 357–369.

[5] Cardenas-Barron,l.E., Sankar Sana,Sh.,(2014). A production-inventory model for a two-echelon supply chain when demand is dependent on sales teams' initiatives. International Journal of Production Economics, 155, 249–258.

[6] Chien, Y. H., Zhang, Z. G., Wang, J., & Sheu, S. H. (2020). A note on optimizing practical product warranty via linear pricing. Quality Technology & Quantitative Management, 17(2), 234-253.

[7] Das, R., De, P. K., & Barman, A. (2021). Pricing and ordering strategies in a two-echelon supply chain under price discount policy: A Stackelberg game approach. Journal of management analytics, 8(4), 646-672.

[8] Dos Santos, R. R., & Guarnieri, P. (2020). Social gains for artisanal agroindustrial producers induced by cooperation and collaboration in agri-food supply chain. Social Responsibility Journal.

[9] Giri, B.C., Sharma, S., (2014). Manufacturer's pricing strategies in cooperative and non-cooperative advertising supply chain under retail competition. International Journal of Industrial Engineering Computations 5 ,475–496.

[10] Huang, Z., Li, S., (2001). Co-op advertising models in manufacturer–retailer supply chains: A game theory approach. European Journal of Operational Research 135 (3), 527–544.

[11] Jalili, S., & Husseinzadeh Kashan, A. (2019). An optics inspired optimization method for optimal design of truss structures. The Structural Design of Tall and Special Buildings, 28(6), e1598

[12] Jie.L, (2014) Sale mode choice of product extended warranty based on the service level International Conference on Management of e-Commerce and e-Government, 341 – 347.

[13] Karray, S., Martín-Herrán, G., & Sigué, S. P. (2022). Managing advertising investments in marketing channels. Journal of Retailing and Consumer Services, 65, 102852.

[14] Kashan, A.H., 2015. A new metaheuristic for optimization: optics inspired optimization (OIO). Computers & Operations Research, 55, pp.99-125

[15] Kirmani, A., Rao, A.R., (2000). No pain, no gain: a critical review of the literature on signaling unobservable quality. Journal of Marketing 64 (2), 66-79.

[16] Koschnick, C., Hartman, J.C., (2020). Using performance-based warranties to influence consumer purchase decisions. Eng. Econ. 65 (1), 1–26.

[17] Liu, B., Shen, L., Xu, J., & Zhao, X. (2020). A complimentary extended warranty: Profit analysis and pricing strategy. International Journal of Production Economics, 229, 107860.

[18] Modak, N. M., Panda, Sh., Sana, Sh. S., (2015). Managing a two-echelon supply chain with price, warranty and quality dependent demand. Cogent Business & Management, 2: 1011014.

[19] Movahedi, M. M., Shayan Nia, S. A., & Yousefnejad, H. (2019). Simulation of a Multi-Stage Whip Effect in a Multi-Product and Multi-Level Supply Chain. Journal of Quality Engineering and Management, 9(4), 295-304. (in Persian)

[20] Rabinovich, E., Maltz, A., Sinha, R.K., (2008). Assessing markups, service quality, and product attributes in music CDs' internet retailing. Production and Operations Management 17 (3), 320–337.

[21] Sadeghi, R., Taleizadeh, A. A., Chan, F. T., & Heydari, J. (2019). Coordinating and pricing

decisions in two competitive reverse supply chains with different channel structures. International Journal of Production Research, 57(9), 2601-2625.

[22] Sang, S.J., Zhang, Q., 2020. Research on optimal decision of green supply chain based on Uncertainty Theory. Chinese Journal of Management Science 28, 127e136,09.

[23] SeyedEsfahani, M. M., Biazaran, M., Gharakhani, M., (2011). A game theoretic approach to coordinate pricing and vertical co-op advertising in manufacturer–retailer supply chains. European Journal of Operational Research 211,263–273.

[24] Szmerekovsky, J., Zhang, J., (2009). Pricing and two-tier advertising with one manufacturer and one retailer. European Journal of Operational Research 192(3), 904–917.

[25] Whitefield, R.I., Duffy, A.H.B., (2012). Extended revenue forecasting within a service industry. International Journal of Production Economics 141 (2), 505-518.

[26] Xie, W. (2017). Optimal pricing and two-dimensional warranty policies for a new product. International Journal of Production Research, 55(22), 6857-6870.

[27] Xie, J., Neyret, A., (2009). Co-op advertising and pricing models in manufacturer –retailer supply chains. Computers & Industrial Engineering 56 (4), 1375–1385.

[28] Xie, J., Jerry, C., Wei. (2009). Coordinating advertising and pricing in a manufacturer–retailer channel. European Journal of Operational Research, 197, 785–791.

[29] Yue, J., Austin, J., Huang, Zh., Chen, B., (2013). Pricing and advertisement in a manufacturer–retailer supply chain. European Journal of Operational Research 231,492–502.

[30] Zhang, Z., He, S., He, Z., & Dai, A. (2019). Two-dimensional warranty period optimization considering the trade-off between warranty cost and boosted demand. Computers & Industrial Engineering, 130, 575-585.

پیوست

اثبات بهینگی متغیرهای خرده‌فروش از طریق ماتریس هشین – مدل اول

ماتریس هشین، ماتریسی تشکیل شده از مشتقات دوم تابع نسبت به متغیرهای تصمیم‌گیری می‌باشد. بنابراین مشتقات دوم تابع هدف خرده‌فروش را نسبت به متغیر های تصمیم خرده‌فروش به شرح زیر خواهیم داشت :

$$\frac{\partial^2 F_r}{\partial^2 a_r} = \frac{-k_r\left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)(p_r-w)(k_3+k_1\theta-k_2p_r)}{4\sqrt[2]{a_r{}^3}} \quad (۱)$$

$$\frac{\partial^2 F_r}{\partial^2 p_r} = -2k_2\left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)\left(k_r\sqrt{a_r}+k_m\sqrt{a_m}\right) \quad (۲)$$

$$\frac{\partial^2 F_r}{\partial a_r \partial p_r} = \frac{\partial^2 F_r}{\partial p_r \partial a_r} = \frac{k_r\left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)(k_3+k_1\theta-k_2(2p_r-w))}{2\sqrt{a_r}} \quad (۳)$$

سپس ماتریس هشین را تشکیل خواهیم داد و این ماتریس را به $H_r{}^{sm}$ نامگذاری می کنیم.

$$H_r{}^{sm} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F_r}{\partial^2 a_r} & \frac{\partial^2 F_r}{\partial a_r \partial p_r} \\ \frac{\partial^2 F_r}{\partial p_r \partial a_r} & \frac{\partial^2 F_r}{\partial^2 p_r} \end{bmatrix} \quad (۴)$$

برای بررسی بهینگی نقاط بدست آمده با استفاده از این ماتریس، باید این نقاط در شروط لازم و کافی به شرح زیر صدق کنند.

شروط لازم و کافی جهت مقعر بودن تابع یا معین مثبت بودن ماتریس هشین بدست آمده از تابع :

۱- $\frac{\partial^2 F_r}{\partial^2 a_r} < 0$ و $\frac{\partial^2 F_r}{\partial^2 p_r} < 0$

۲- $\det H_r{}^{sm} > 0$

به طور کلی شرط لازم و کافی جهت معین مثبت بودن یک ماتریس، این است که دترمینان مینورهای اصلی آن با شروع از کوچکترین بعد مینور اصلی و به ترتیب صعودی بعد های مینور، یکی درمیان با شروع منفی، متغیر العلامت باشند.

اثبات شرط اول : با توجه به معادلات مشتق مرتبه دوم (۱)، (۲) و محدودیت‌های مدل (۱۳) ذکر شد، بنابراین $\frac{\partial^2 F_r}{\partial^2 a_r} < 0$ و $\frac{\partial^2 F_r}{\partial^2 p_r} < 0$ را خواهیم داشت و برقراری شرط اول اثبات می‌شود.

اثبات شرط دوم: با بررسی مقدار دترمینال ماتریس هشین و مثبت بودن آن، شرط دوم برقرار است.

$$\det H_r{}^{sm} = \frac{k_2 k_r\left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)^2(p_r-w)(k_3+k_1\theta-k_2p_r)\left(k_r\sqrt{a_r}+k_m\sqrt{a_m}\right)}{2\sqrt[2]{a_r{}^3}} - \frac{{k_r}^2\left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)^2\left(k_3+k_1\theta-k_2(2p_r-w)\right)^2}{4a_r} \quad (۵)$$

برای اثبات مثبت بودن دترمینال این ماتریس، آن را ساده می‌کنیم.

$$\det H_r{}^{sm} = \frac{k_r}{2a_r}\left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)^2\left(\frac{k_2(p_r-w)(k_3+k_1\theta-k_2p_r)\left(k_r\sqrt{a_r}+k_m\sqrt{a_m}\right)}{\sqrt[2]{a_r}} - \frac{k_r\left(k_3+k_1\theta-k_2(2p_r-w)\right)^2}{2}\right) \quad (۶)$$

با توجه به محدودیت‌های مدل و مثبت بودن پارامترهای مدل قسمت (۱) و(۲) و (۳) معادله (۶) مقداری مثبت است. بنابراین جهت مثبت بودن معادله (۶) رابطه زیر را در نظر می گیریم.

$$\frac{k_2(p_r-w)(k_3+k_1\theta-k_2p_r)\left(k_r\sqrt{a_r}+k_m\sqrt{a_m}\right)}{\sqrt[2]{a_r}} > \frac{k_r\left(k_3+k_1\theta-k_2(2p_r-w)\right)^2}{2} \quad (۷)$$

با در نظر گرفتن فرض (۷) شرط دوم برقرار است و همچنین با برقراری متغیرها در محدودیت‌ها، بهینگی اثبات می گردد.

اثبات بهینگی متغیرهای خرده‌فروش از طریق ماتریس هشین – مدل دوم

جهت تشکیل ماتریس های هشین، مشتقات دوم تابع هدف خرده‌فروش را نسبت به متغیر های تصمیم خرده‌فروش به شرح زیر خواهیم داشت :

$$\frac{\partial^2 \Pi_r}{\partial^2 a_r} = \beta_2 a_r^{-2-\gamma} a_m^{-\delta}(-\gamma-\gamma^2)\left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)(p_r-w)(k_3+k_1\theta-k_2p_r) \quad (۱)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_r}{\partial^2 p_r} = -2k_2\left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)\left(\alpha_2-\beta_2 a_r^{-\gamma} a_m^{-\delta}\right) \quad (۲)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_r}{\partial a_r \partial p_r} = \frac{\partial^2 F_r}{\partial p_r \partial a_r} = \gamma\beta_2 a_r^{-1-\gamma} a_m^{-\delta}\left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)(k_3+k_1\theta-k_2(2p_r-w)) \quad (۳)$$

سپس ماتریس هشین را تشکیل خواهیم داد و این ماتریس $H_r{}^{sm}$ نامگذاری می‌کنیم.

$$H_r{}^{sm} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi_r}{\partial^2 a_r} & \frac{\partial^2 \Pi_r}{\partial a_r \partial p_r} \\ \frac{\partial^2 \Pi_r}{\partial p_r \partial a_r} & \frac{\partial^2 \Pi_r}{\partial^2 p_r} \end{bmatrix} \quad (۴)$$

برای بررسی بهینگی نقاط بدست آمده با استفاده از این ماتریس، باید این نقاط در شروط لازم و کافی به شرح زیر صدق کنند.
شروط لازم و کافی جهت مقعر بودن تابع یا معین مثبت بودن ماتریس هشین بدست آمده از تابع :

۱- $\frac{\partial^2 \Pi_r}{\partial^2 p_r} < 0$ و $0 <$

۲- $\det H_r{}^{sm} > 0$

همانطور که گفته شد، شرط لازم و کافی جهت معین مثبت بودن یک ماتریس، این است که دترمینان مینورهای اصلی آن با شروع از کوچکترین بعد مینور اصلی و به ترتیب صعودی بعدهای مینور، یکی درمیان با شروع منفی، متغیر العلامت باشند.
اثبات شرط اول : با توجه به معادلات مشتق مرتبه دوم (۱)،(۲) و محدودیت‌های مدل که در معادلات (۱۳)، (۱۴)،(۱۵)،(۱۶)، (۱۸) و(۲۳) ذکر شد، بنابراین $\frac{\partial^2 F_r}{\partial^2 a_r} < 0$ و $\frac{\partial^2 F_r}{\partial^2 p_r} < 0$ را خواهیم داشت و برقراری شرط اول اثبات می شود.
اثبات شرط دوم : با بررسی مقدار دترمینان ماتریس هشین و مثبت بودن آن، شرط دوم برقرار می باشد.

$$\det H_r{}^{sm} = -2\,k_2\,\beta_2\,a_r^{-2-\gamma}\,a_m{}^{-\delta}(-\gamma-\gamma^2)\left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)^2(p_r-w)(k_3+k_1\theta-k_2\,p_r)(\alpha_2-\beta_2 a_r^{-\gamma}a_m{}^{-\delta})-\gamma^2{\beta_2}^2 a_r^{-2-2\gamma}a_m{}^{-2\delta}\left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)^2((k_3+k_1\theta-k_2\,(2p_r-w))^2 \quad (۵)$$

برای اثبات مثبت بودن دترمینان این ماتریس، آن را ساده می کنیم.

$$\det H_r{}^{sm} = \beta_2\,a_r^{-2-\gamma}\,a_m{}^{-\delta}\left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)^2(2k_2(\gamma+\gamma^2)(p_r-w)(k_3+k_1\theta-k_2\,p_r)(\alpha_2-\beta_2 a_r^{-\gamma}a_m{}^{-\delta})-\gamma^2\beta_2 a_r^{-\gamma}a_m{}^{-\delta}((k_3+k_1\theta-k_2\,(2p_r-w))^2) \quad (۶)$$

قسمت اول معادله (۶)، با توجه به معادلات (۱۶) و (۱۸) و مثبت بودن پارامترهای مدل مقداری مثبت است و با توجه به معادلات (۱۳)، (۱۴)، (۱۸) و(۲۳)و مثبت بودن پارامترهای مدل، قسمت دوم و سوم معادله (۶) نیز مقداری مثبت است. بنابراین جهت مثبت بودن معادله (۶) رابطه زیر را در نظر می گیریم.

$$2\,k_2(\gamma+\gamma^2)(p_r-w)(k_3+k_1\theta-k_2\,p_r)(\alpha_2-\beta_2 a_r^{-\gamma}a_m{}^{-\delta}) > \gamma^2\beta_2 a_r^{-\gamma}a_m{}^{-\delta}(k_3+k_1\theta-k_2(2p_r-w))^2) \quad (۷)$$

با در نظر گرفتن فرض (۷)، شرط دوم نیز برقرار می‌باشد و همچنین با برقراری متغیرها در محدودیت‌ها، بهینگی اثبات می‌گردد.

Making Optimal Decisions on Quality Level, Warranty Period and Advertising in a Two-Level Supply Chain

Ali Husseinzadeh Kashan[11]
(Corresponding Author); Associate Prof. Faculty of Industrial and Systems Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran. a.kashan@modares.ac.ir

Tina Sardashti[2]
MSc. Student in the Faculty of Industrial and Systems Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran. tina.sardashti@modares.ac.ir

Abstract: Emphasizing the importance of competition and cooperation in supply chains caused a resurgence of game theory as a tool for the analysis of interactions in a supply chain. The development of the business and the complexity of retailing requires a change in the advertising approaches. Affiliate advertising is one of the ways that manufacturers and distributors can jointly participate in advertising programs. Therefore, a variable is defined as the participation rate, which is a percentage of local advertising costs that the producer agrees to pay. In this research, we consider cooperation in advertising during two different advertising function models along with pricing decisions, warranty period and quality level, in a two-level supply chain. Therefore, demand will be affected by price, advertising, warranty period and quality level. Manufacturers and retailers can have cooperative advertising. The theory of non-cooperative and cooperative games is the tool used to solve this problem. Due to the complexity of the model, a meta-heuristic algorithm, optics-inspired optimization (OIO), which is a population-based search algorithm, is used to solve the problem. In this research, it was observed that the sum of the profits claimed by both parties in the non-cooperative game is smaller than the profit of the whole system in the cooperative game, and the profit of each individual is also lower in the non-cooperative state than in the cooperative state. Therefore, cooperation between two players increases their profits. Also, sensitivity analysis has been done on some parameters, including parameters related to product quality.

Keywords: Pricing; Advertising; Quality level; Warranty; Game Theory, Optics Inspired Optimization (OIO)

Introduction

Supply chain management is a new approach that has dominated operations management in recent years. One of the duties of the supply chain is to convert raw materials into final products and distribute them to customers. Supply chain management coordinates activities so that customers can obtain products of high quality and at minimum cost. Supply chain management includes guiding all members of the chain in an integrated and coordinated manner, and its purpose is to improve performance in order to improve the productivity and profit of the chain. It also coordinates different strategies for the production system [6]. Market demand depends on various factors such as product quality, supply time, brand, etc. [7]. The new market situation convinces us that

[11] (Corresponding Author): a.kashan@modares.ac.ir

advertising is needed to promote product sales. Customers are usually more interested in well-known products, and customer demand is sensitive to advertising plans [5]. According to the conditions of competition in the market, offering products with better conditions than other competitors will make the business profitable. Therefore, a chain needs appropriate pricing and maintaining a higher quality level in order to obtain customer satisfaction and as a result, increase the number of customers and profits. Quality is closely related to product returns. Products with low service levels and low-quality levels reduce customer satisfaction and lead to frequent product returns. While products with high quality and service levels can meet customer needs and reduce the number of product returns. At the same time, high-quality products and competent services have a higher selling price due to better quality [12] & [16]. The issue of competition is the first issue that companies face in realistic situations, and their policies and those of their competitors determine their market share and profits. In recent years, a growing trend in research has focused on competition [13]. Taleizadeh and his colleagues investigated a case where a manufacturer sells its products through online and offline channels and offers a two-dimensional warranty policy including the warranty period and the warranty usage package for products sold through the online channel. The effect of the service level on the supply chain and the selection of the product warranty sales mode by the manufacturer [2]. Today, one of the most important challenges of supply chain management is to create cooperation in the supply chain despite conflicting goals and demands, diversity in products and services, as well as different management styles. One of the updating factors resulting from non-cooperation in the supply chain will be a whiplash effect. which over time will reduce the profitability of the supply chain as well as all levels [3]. Advertising can be done in cooperation. Collaborative advertising is a marketing strategy in which the retailer runs local advertising and the manufacturer agrees to share a portion of the retailer's total advertising cost. The percentage of local advertising revenue that the producer agrees to pay is called the participation rate [4]. Karai et al recently investigated how to optimally allocate resources to retailer advertising through cooperative advertising programs and manufacturer advertising in a mutual monopoly [10]. In the other researches, considering all the effective dimensions that were mentioned before, caused complexity in the demand and the softwares were not able to respond to it. In this research, all dimensions are considered and due to the resulting complexity, meta-heuristic algorithm will be used. algorithm (OIO) is a population-based evolutionary algorithm that is inspired by the science of optics. An artificial ray emitted from an artificial light point is reflected by the function surface, depending on whether the reflecting surface is a part of a peak or a valley, and the artificial image point (a new point R^{n+1}) is searched as a new answer in the domain. is written in R^{n}), it is formed either directly (in the direction of the position of the light point in the search space) or inversely (against the position of the light point in the search space).[11] & [1]

Problem statement and formulation

In this study, a two-level supply chain including a manufacturer and a retailer who exclusively sells the manufacturer's product is considered. The manufacturer decides on the selling price to the retailer w, the quality level θ, the warranty period ρ, the national advertising costa_m, the participation rate t, and on the other hand, the retailer decides on the local advertising cost a_r and the selling price to the customer p_r. In this research, cooperation in advertising along with price decisions, quality level and warranty in a two-level supply chain is investigated. The method used to solve this problem is non-cooperative and cooperative game theory. Therefore, in this research, in order to study the effect of power balance of the supply chain on the optimal decision making of the chain members, two games are created, the non-cooperative game includes Stackelberg as a producer, and a cooperative game is also considered. The model is solved and compared under two game theory approaches. The decision variables will be calculated to maximize the profit function. The demand function will be formulated under the effective factors on consumer demand, based on a review of the previous literature and the relevant functions of the effective factors, as well as the relationship between these factors. In order to formulate the profit function in each model, it is necessary to know the costs and income. Therefore, first the expected costs in each model are identified and finally the profit function is formulated based on the identified costs and revenues. This research aims to calculate the optimal point of the objective function with mathematical methods, but due to the complexity of the model and the magnitude of the problem, it will also be used in some stages of solving the meta-heuristic algorithm (OIO).

Decision variables

ρ: Warranty duration
θ: quality level
p_r: retail selling price
w: selling price of the manufacturer to the retailer
a_m: cost of national advertising
a_r: local advertising cost
t: producer's participation rate in retailer's advertising costs
F_r: first model retailer's profit
F_m: producer profit of the first model
F_{m+r}: the total profit of the supply chain of the first model

Parameters

ρ_{max}: the longest warranty period
θ_{min} : Minimum quality level
p_m: selling price suggested by the manufacturer to the retailer
k_0: basic demand

k_1: reflecting the effectiveness of the quality level in demand
k_2: reflecting the effectiveness of price in demand
k_r: reflecting the effectiveness of local advertising in the demand of the first model
k_m: reflecting the effectiveness of national advertising in the demand of the first model
α_2: market cap for advertising
C_0: The cost of repairing a defective product unit
C_1: The cost of technology (consumed energy such as electricity, ...)
B_0: The cost of maintaining the basic quality of a product unit
B_1: Reflecting the effectiveness of the quality level in the costs of maintaining the quality of a product unit
ε: sensitivity coefficient of the effect of the number of defective goods on the objective function
α: the sensitivity coefficient of the effect of the number of defective goods on the demand function

Assumptions

* A two-level supply chain including a manufacturer and a retailer is considered.

* It is a single product manufacturer.

* The retailer exclusively sells only the manufacturer's product.

* The manufacturer sells its product only through this retailer.

* There is always a minimum of demand. In other words, the demand is positive.

* Manufacturer and retailer can participate in promotional programs jointly.

* In all games, the effects of price, advertising, warranty period and quality level are taken into account.

* In this model, interactions between members of the supply chain are discussed in a period, and in terms of game theory, we examine the static model.

* There is always a minimum level of quality (θ_{min})to maintain customer satisfaction and manufacturer credit.

* The maximum warranty period (ρ_{max})can be provided by the manufacturer to the customer for a specific product.

* $\alpha_2$there is a ceiling in the market to bear the maximum cost for advertising at the market level.

By reviewing the literature review in table (1), the advertising function has been investigated with different models, in this research, the first advertising function is based on the articles of Xie et al. [17], Seyed Esfahani et al. [14], Giri and Sharma [8].

First model

It is assumed that the customer's demand, taking into account the effect of price, national and local advertising, quality level and warranty, is in the form of the following equation.

$$D(\rho,\theta,a_m,a_r,p_r)=(1+Z(\rho))*(k_0+J(\theta)-g(p_r))*h(a_r,a_m) \quad (1)$$

In table (1), the function of advertising has been examined with different models. In this research, first advertising function is considered as equation (2).

$$h(a_r,a_m)=k_r\sqrt{a_r}+k_m\sqrt{a_m} \quad (2)$$

The demand function affected by price, warranty, quality level and advertising is considered as equation (3).

$$D(\rho,\theta,a_m,a_r,p_r)=\left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)\left(k_0+k_1(\theta-\theta_{min})-k_2(p_r-p_m)\right)\left(k_r\sqrt{a_r}+k_m\sqrt{a_m}\right) \quad (3)$$

where $0<\alpha<1$and k_0 ، k_1 ، k_2 ، k_r and k_m have positive values. which is initially used to simplify the demand function by changing the variable in the form of equation (4).

$$k_3=k_0-k_1\theta_{min}+k_2p_m \quad (4)$$

Therefore, according to this variable change, finally the demand function will be in the form of equation (5).

$$D(p_r,\theta,\rho,a_m,a_r)=\left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)(k_3+k_1\theta-k_2p_r)(k_r\sqrt{a_r}+k_m\sqrt{a_m}) \quad (5)$$

Table1. Advertising function used in some studies

Researchers	The effect of advertising $h(a_r,a_m)$	Price effect $g(p)$
Huang & Li [9]	$\alpha_2-\beta_2a_r^{-\gamma}{a_m}^{\delta}$ $(\alpha_2,\beta_2,\gamma,\delta>0)$	p
Szmerekovsky & Zhang [15]	$\alpha_2-\beta_2a_r^{-\gamma}{a_m}^{\delta}$ $(\alpha_2,\beta_2,\gamma,\delta>0)$	p^{-e} $(e>1)$
Xie & Neyret [18]	$\alpha_2-\beta_2a_r^{-\gamma}{a_m}^{\delta}$ $(\alpha_2,\beta_2,\gamma,\delta>0)$	k_0-k_2p $(k_0,k_2>0)$
Xie & et al [17]	$k_r\sqrt{a_r}+k_m\sqrt{a_m})$	k_0-k_2p $(k_0,k_2>0)$
Seyedesfahani & et al [14]	$k_r\sqrt{a_r}+k_m\sqrt{a_m})$	k_0-k_2p $(k_0,k_2>0)$
Yue & et al. [19]	$\alpha_2-\beta_2a_r^{-\gamma}{a_m}^{\delta}$ $(\alpha_2,\beta_2,\gamma,\delta>0)$	$\frac{p^{-e}}{p_0}(e>1)$
Giri & sharma [8]	$k_{ri}\sqrt{a_{ri}}-k_{rj}\sqrt{a_{rj}}$	.....

Therefore, the profit functions of chain members and the entire chain based on costs and sales prices will be as follows.

$$F_r(p_r, a_r) = (p_r - w)D(p_r, \theta, \rho, a_m, a_r) - (1-t)a_r \quad (6)$$

$$F_m(w, \theta, \rho, a_m, t) = wD(p_r, \theta, \rho, a_m, a_r) - \frac{\varepsilon\rho}{\rho_{max}} D(p_r, \theta, \rho, a_m, a_r)C_0 - \big(B_0 + B_1(\theta - \theta_{min})\big)D(p_r, \theta, \rho, a_m, a_r) - C_1 - a_m - ta_r \quad (7)$$

$$F_{m+r}(w, \theta, \rho, a_m, a_r, t, p_r) = p_r D(p_r, \theta, \rho, a_m, a_r) - \frac{\varepsilon\rho}{\rho_{max}} D(p_r, \theta, \rho, a_m, a_r) - \big(B_0 + B_1(\theta - \theta_{min})\big)D(p_r, \theta, \rho, a_m, a_r) - C_1 - a_m - a_r \quad (8)$$

where m + r, m, r represent the whole chain manufacturer, and the retailer, respectively, and where $0 < \varepsilon < 1$and B_0،B_1 have positive values. Now, the above profit functions are modeled, solved and compared under two game theory approaches.

Stackelberg game - First model

In this game, the relationship between the manufacturer and the retailer is a sequential non-cooperative game, in which the manufacturer is the leader and the retailer is the follower. Therefore, at first, the optimal values of the retailer will be calculated and applied to the producer's profit function, and then the optimal values of the producer will be obtained. In the first step, we obtain the optimal values of the retailer based on the producer variables and parameters. Therefore, the retailer's best response will be as follows:

$$Max\ F_r(p_r, a_r) = \left(1 + \frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)(k_3 + k_1\theta - k_2 p_r)\left(k_r\sqrt{a_r} + k_m\sqrt{a_m}\right)(p_r - w) - (1-t)a_r$$
$$\text{s.t.}\quad k_3 + k_1\theta - k_2 p_r > 0\ ,\ C_0 \le p_r \le \frac{k_3 + k_1}{k_2}\ ,\ 0 \le a_r \le \alpha_2 \quad (9)$$

In this solution method, the concaveness of the function must be proved. Therefore, at first, the retailer's profit function is derived from the retailer's decision changes. By setting it equal to zero, the points a_r،$p_r$are obtained.

$$p_r^{sm} = \frac{k_3 + k_1\theta + k_2 w}{2k_2} \quad (10)$$

$$a_r^{sm} = \frac{k_r^2\left(1 + \frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)^2 (k_3 + k_1\theta - k_2 w)^4}{16\, k_2^2\, (2t-2)^2} \quad (11)$$

By considering these optimal values and applying them to the producer's profit function, the optimal values of the producer's variables will be obtained.

The producer's profit function considering the optimal relationships of the retailer's decision variables will be as follows.

$$F_{m^*}(w, \theta, \rho, a_m, t) = \left(w - \frac{\varepsilon\rho}{\rho_{max}} C_0 - \big(B_0 + B_1(\theta - \theta_{min})\big)\right)\left(1 + \frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)\left(\frac{k_3 + k_1\theta - k_2 w}{2}\right) + (k_m\sqrt{a_m})$$
$$\frac{k_r^2\left(1 + \frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)(k_3 + k_1\theta - k_2 w)^2}{4k_2(2t-2)}) - C_1 - a_m - \left(\frac{k_r^2 t\left(1 + \frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)^2 (k_3 + k_1\theta - k_2 w)^4}{16\, k_2^2\, (2t-2)^2}\right) \quad (12)$$

Therefore, we seek to optimize the following model.

$$Max\ F_{m^{"}}(w,\theta,\rho,a_m,t) = \left(w - \frac{\varepsilon\rho}{\rho_{max}}C_0 - \left(B_0 + B_1(\theta - \theta_{min})\right)\right)\left(1 + \frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)\left(\frac{k_3 + k_1\theta - k_2 w}{2}\right)(k_m\sqrt{a_m} +$$

$$\frac{k_F^2\left(1 + \frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)(k_3 + k_1\theta - k_2 w)^2}{4\ k_2\ (2t-2)}) - \left(\frac{k_F^2\ t\left(1 + \frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)^2 (k_3 + k_1\theta - k_2 w)^4}{16\ k_2^2\ (2t-2)^2}\right) - C_1 - a_m$$

$$s.t\ k_3 + k_1\theta - k_2 p_r > 0\ ,0 \le\ \rho \le \rho_{max}\ ,\theta_{min} \le \theta \le 1,0 \le t \le 1\ , C_0 \le w \le p_m, 0 \le\ a_m \le \alpha_2 \qquad (13)$$

The reason for the complexity of the producer's profit function model is that it is not possible to use the method of proving the concavity of the profit function and obtaining the global optimality of the decision variables from mathematical methods. Therefore, finally, by solving this model by means of heuristic algorithm (OIO), the optimal values of the manufacturer's decision variables will also be obtained.

Cooperation-First model

In a cooperative game, communication between players is allowed. They can agree to implement or fulfill a better output and result, where the chain members agree to cooperate and increase the profit of the whole system. Therefore, we consider the profit function of the entire chain and obtain the optimal values according to it. Therefore, we will have the objective function as follows:

$$MaxF_{m+r}(\theta,\rho,a_m,a_r,p_r) = (p_r - \frac{\varepsilon\rho}{\rho_{max}}C_0 - \left(B_0 + B_1(\theta - \theta_{min})\right))\left(1 + \frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)(k_3 + k_1\theta - k_2 p_r)(k_r\sqrt{a_r} +$$

$$k_m\sqrt{a_m})\ - C_1 - a_m - a_r \qquad s.t.\ \ k_3 + k_1\theta - k_2 p_r > 0,\ C_0 \le p_r \le \frac{k_3 + k_1}{k_2}\ ,\ 0 \le\ a_m \le \alpha_2\ ,0 \le\ a_r \le \alpha_2\ ,$$

$$0 \le \rho \le \rho_{max}\ ,\theta_{min} \le \theta \le 1 \qquad (14)$$

Second model

Second advertising function is considered as equation (15).

$$h(a_r, a_m) = (\alpha_2 - \beta_2 a_r^{-\gamma} {a_m}^{-\delta}) \qquad (15)$$

The demand function affected by price, warranty, quality level and advertising is considered as equation (16).

$$D(\rho,\theta,a_m,a_r,p_r) = (1 + \frac{\alpha\rho}{\rho_{max}})(k_0 + k_1(\theta -\ \theta_{min}) - k_2(p_r - p_m))(\alpha_2 - \beta_2 a_r^{-\gamma} {a_m}^{-\delta}) \qquad (16)$$

According to this variable change, finally the demand function will be in the form of equation (17).

$$D(\rho,\theta,a_m,a_r,p_r)\ = \left(1 + \frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)(k_3 + k_1\theta - k_2 p_r)(\alpha_2 - \beta_2 a_r^{-\gamma} {a_m}^{-\delta}) \qquad (17)$$

Therefore, the profit functions of chain members and the entire chain prices will be as follows.

$$\Pi_r(p_r, a_r) = \left(1 + \frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)\ (k_3 + k_1\theta - k_2\ p_r)(\ \alpha_2 - \beta_2 a_r^{-\gamma} {a_m}^{-\delta}\ )(\ p_r - w\ ) - (1 - t\ )a_r \quad (18)$$

$$\Pi_m(w,\theta,\rho,a_m,t) = (w - \frac{\varepsilon\rho}{\rho_{max}}C_0 - \left(B_0 + B_1(\theta - \theta_{min})\right))(1 + \frac{\alpha\rho}{\rho_{max}})(k_3 + k_1\theta - k_2 p_r)$$

$$(\alpha_2 - \beta_2 a_r^{-\gamma} a_m^{-\delta}) - C_1 - a_m - t a_r \quad (19)$$

$$\Pi_{m+r}(\theta, \rho, a_m, a_r, t) = (p_r - \frac{\varepsilon\, \rho}{\rho_{max}} C_0 - (B_0 + B_1(\theta - \theta_{min}))(1 + \frac{\alpha\rho}{\rho_{max}})(k_3 + k_1\theta - k_2 p_r)(\alpha_2 - \beta_2 a_r^{-\gamma} a_m^{-\delta}) - C_1 - a_m - a_r \quad (20)$$

The above profit functions are modeled, solved and compared under two game theory approaches.

Stackelberg game - second model

As in the previous model, in the first step of this game, we obtain the optimal values of the retailer based on the producer variables and parameters. Therefore, the retailer's best response will be as follows.

$$\text{Max } \Pi_r(p_r, a_r) = \left(1 + \frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)(k_3 + k_1\theta - k_2 p_r)\left(\alpha_2 - \beta_2 a_r^{-\gamma} a_m^{-\delta}\right)(p_r - w) - (1 - t)a_r$$
$$\text{s.t} \quad k_3 + k_1\theta - k_2 p_r > 0\,,\ C_0 \le w \le p_m\ ,0 \le a_r \le \alpha_2 \quad (21)$$

The optimal values of the retailer will be obtained as equations (22), (23) and (24).

$$a_r = \left(\frac{\beta_2 a_m^{-\delta}\left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)(k_3+k_1\theta-k_2 p_r)(p_r-w)}{(1-t)}\right)^{\frac{1}{1+\gamma}} \quad (22)$$

$$p_r^{sm} = \frac{k_3+k_1\theta+k_2 w}{2k_2} \quad (23)$$

$$a_r^{sm} = 4^{\frac{-1}{1+\gamma}}\left(\frac{\beta_2\gamma a_m^{-\delta}\left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)(k_3+k_1\theta-k_2 w)^2}{k_2(1-t)}\right)^{\frac{1}{1+\gamma}} \quad (24)$$

The profit function of the producer, taking into account the optimal relationship conditions of the retailer's decision variables, will be as follows.

$$\text{Max } \Pi_m(w, \theta, \rho, a_m, t : (p_r^{sm}, a_r^{sm}))$$

$$\text{s.t}$$

$$(p_r^{sm}, a_r^{sm}) = \left\{(p_r, a_r) \,\middle|\, (p_r, a_r) = \text{Max } \Pi_r(p_r, a_r)\right\} \quad (25)$$

$$k_3 + k_1\theta - k_2 p_r > 0\ ,0 \le \rho \le \rho_{max}\ ,\theta_{min} \le \theta \le 1,0 \le t \le 1\ ,\ C_0 \le w \le p_m, 0 \le a_m \le \alpha_2$$

Therefore, we will have the final model of the producer's profit function, taking into account the conditions of the optimal relations of the decision variables (constraints) as follows.

$$Max\ \Pi_{m^{sm}}(w,\theta,\rho,a_m,t)=\left(w-\frac{\varepsilon\rho}{\rho_{max}}C_0-\left(B_0+B_1(\theta-\theta_{min})\right)\right)\left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)\left(\frac{k_3+k_1\theta-k_2w}{2}\right)\left(\alpha_2-am^{-\delta}\beta_2\left(4^{\frac{-1}{1+\gamma}}\left(\frac{\beta_2\gamma{a_m}^{-\delta}\left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)(k_3+k_1\theta-k_2w)^2}{k_2(1-t)}\right)^{\frac{1}{1+\gamma}}\right)^{-\gamma}\right)-C_1-a_m-\left(4^{\frac{-1}{1+\gamma}}t\right)\left(\frac{\beta_2\,\gamma\,{a_m}^{-\delta}\left(1+\frac{\alpha\rho}{\rho_{max}}\right)(k_3+k_1\theta-k_2w)^2}{k_2\,(1-t)}\right)^{\frac{1}{1+\gamma}}\quad s.t$$

$$k_3+k_1\theta-k_2p_r>0\ ,0\le\ \rho\le\rho_{max}\ ,\theta_{min}\le\theta\le1,\ 0\le t\le1\ ,\ C_0\le w\le p_m,0\le\ a_m\le\alpha_2 \qquad (26)$$

In this part of the solution, like the previous model, due to the complexity of the producer's profit function, it is not possible to use the method of proving the concaveness of the profit function and obtaining the global optimality of the decision variables from mathematical methods. Therefore, finally, by solving this model by means of the meta-heuristic algorithm inspired by optics (optics inspired optimization (OIO)), the optimal values of the decision making variables will also be obtained.

Numerical examples

To show the applicability of the designed models, a numerical example has been used, and for this purpose, the data of the basic articles have been used.

Due to the complexity and large dimensions of the problem, it is difficult to solve four equations and four unknowns obtained from the derivative of the objective function with respect to each of the decision variables of the problem using different software, including Mathematica. In this step, we obtain the optimal values using meta-heuristic algorithm (OIO). You can see the optimal answers of the first model with Mathematica in tables (3) and (5), and the optimal answers of the first model using the OIO algorithm are in tables (4) and (6). You can see the optimal answers of the second model with Mathematica software in tables (7) and (9), and the optimal answers of the first model using the OIO algorithm are in tables (8) and (10).

Table 2: Parameter values

parameter	$\boldsymbol{\theta_{min}}$	$\boldsymbol{\rho_{max}}$	$\boldsymbol{p_m}$	$\boldsymbol{k_0}$	$\boldsymbol{k_1}$	$\boldsymbol{k_2}$	$\boldsymbol{k_r}$	$\boldsymbol{k_m}$	$\boldsymbol{C_0}$
value	0.5	12	300	200	500	4.6	2.6	1.8	100
parameter	$\boldsymbol{\gamma}$	$\boldsymbol{\delta}$	$\boldsymbol{B_0}$	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{\beta_2}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{\alpha_2}$	$\boldsymbol{C_1}$
value	2.6	1.8	40	80	50000	0.4	0.2	200000000	5000

Table 3: Numerical solution results of optimization of Mathematica, Stackelberg game - producer - First model

Producer decision variables						Retailer decision variables		
${F_m}^{sm}$	w^{sm}	θ^{sm}	ρ^{sm}	${a_m}^{sm}$	t^{sm}	${F_r}^{sm}$	${p_r}^{sm}$	${a_r}^{sm}$
309658240	300	0.5	12	19999999	0.0000000016	93109000	321.739	15654100

Table 4: Numerical solution results of OIO algorithm, Stackelberg-producer game-First model

Producer decision variables						Retailer decision variables		
${F_m}^{sm}$	w^{sm}	θ^{sm}	ρ^{sm}	${a_m}^{sm}$	t^{sm}	${F_r}^{sm}$	${p_r}^{sm}$	${a_r}^{sm}$
309968590	299.99	0.5	11.9979	200000000	0.00005953	93122900	321.739	15652500

Table 5: Numerical solution results of optimization of Mathematica, first model cooperation game-First model

Decision variables of the entire supply chain					
$F_{m+r}{}^{c}$	$p_r{}^{c}$	θ^{c}	ρ^{c}	$a_m{}^{c}$	$a_r{}^{c}$
8486255034	248.915	1	11.99	199999970	199999970

Table 6: Results of numerical solution of OIO algorithm in MATLAB, cooperation game-First model

Decision variables of the entire supply chain					
$F_{m+r}{}^{c}$	$p_r{}^{c}$	θ^{c}	ρ^{c}	$a_m{}^{c}$	$a_r{}^{c}$
8486255057	248.913	1	12	199999999.93	1999999999.79

Table 7: Numerical solution results of optimization of Mathematica, Stackelberg game - producer - Second model

Producer decision variables						Retailer decision variables		
$\Pi_m{}^{sm}$	w^{sm}	θ^{sm}	ρ^{sm}	$a_m{}^{sm}$	t^{sm}	$\Pi_r{}^{sm}$	$p_r{}^{sm}$	$a_r{}^{sm}$
14280560349911	248.93	1	12	199999999	0.0123	7035031317192	322.834	0.03424

Table 8: Numerical solution results of OIO algorithm, Stackelberg-producer game-Second model

Producer decision variables						Retailer decision variables		
$\Pi_m{}^{sm}$	w^{sm}	θ^{sm}	ρ^{sm}	$a_m{}^{sm}$	t^{sm}	$\Pi_r{}^{sm}$	$p_r{}^{sm}$	$a_r{}^{sm}$
14280760036673	248.913	1	12	32.588	0.00000769	7140375014231	323.37	84.8494

Table 9: Numerical solution results of optimization of Mathematica, first model cooperation game-Second model

Decision variables of the entire supply chain					
$\Pi_{m+r}{}^{c}$	$p_r{}^{c}$	θ^{c}	ρ^{c}	$a_m{}^{c}$	$a_r{}^{c}$
28554348268866	248.248	0.998	11.9973	312951	99876.3

Table 10: Results of numerical solution of OIO algorithm in MATLAB, cooperation game-Second model

Decision variables of the entire supply chain					
$\Pi_{m+r}{}^{c}$	$p_r{}^{c}$	θ^{c}	ρ^{c}	$a_m{}^{c}$	$a_r{}^{c}$
28560715864940	248.893	1	11.9986	61.6861	89.9467

The comparison of the results shows that better answers are obtained in both models using the OIO algorithm. It can also be seen that the sum of the minimum profits claimed by both parties in both models is smaller than the total cooperation profit shared between the two. Therefore, there will be cooperation between two players in both models, and non-cooperation will not benefit any of the players. Also, sensitivity analysis has been done on some parameters, including parameters related to product quality.

References

[1] Alizadeh, N., & Kashan, A. H. (2019). Enhanced grouping league championship and optics inspired optimization algorithms for scheduling a batch processing machine with job conflicts and non-identical job sizes. Applied soft computing, 83, 105657

[2] Allah Taleizadeh, A., Mokhtarzadeh, M (2020)., Pricing and two-dimensional warranty policy of multi-products with online and offline channels using a value-at-risk approach, Computers & Industrial Engineering.

[3] amoozad mahdiraji, H., Moddares Yazdi, M., Mohaghar, A., Jaafarnejad, A. (2021). Cooperation Modeling for Unlimited Three Echelon Supply Chain: Game Theory Approach. Management Research in Iran, 18(1), 171-191. (in Persian)
[4] Bergen, M., John, G., (1997). Understanding cooperative advertising participation rates in conventional channels. Journal of Marketing Research 34 (3), 357–369.

[5] Cardenas-Barron,l. E. & Sankar Sana,Sh.,(2014). A production-inventory model for a two-echelon supply chain when demand is dependent on sales teams' initiatives. International Journal of Production Economics, 155, 249–258.
[6] Chien, Y. H., Zhang, Z. G., Wang, J., & Sheu, S. H. (2020). A note on optimizing practical product warranty via linear pricing. Quality Technology & Quantitative Management, 17(2), 234-253.
[6] Das, R., De, P. K., & Barman, A. (2021). Pricing and ordering strategies in a two-echelon supply chain under price discount policy: A Stackelberg game approach. Journal of management analytics, 8(4), 646-672.
[7] Dos Santos, R. R., & Guarnieri, P. (2020). Social gains for artisanal agroindustrial producers induced by cooperation and collaboration in agri-food supply chain. Social Responsibility Journal.
[8] Giri, B.C., Sharma, S., (2014). Manufacturer's pricing strategies in cooperative and non-cooperative advertising supply chain under retail competition. International Journal of Industrial Engineering Computations 5 ,475–496.
[9] Huang, Z., Li, S., (2001). Co-op advertising models in manufacturer–retailer supply chains: A game theory approach. European Journal of Operational Research 135 (3), 527–544.
[10] Karray, S., Martín-Herrán, G., & Sigué, S. P. (2022). Managing advertising investments in marketing channels. Journal of Retailing and Consumer Services, 65, 102852.
[11] Kashan, A.H., 2015. A new metaheuristic for optimization: optics inspired optimization (OIO). Computers & Operations Research, 55, pp.99-125
[12] Kirmani, A., Rao, A.R., (2000). No pain, no gain: a critical review of the literature on signaling unobservable quality. Journal of Marketing 64 (2), 66-79.
[13] Sadeghi, R., Taleizadeh, A. A., Chan, F. T., & Heydari, J. (2019). Coordinating and pricing decisions in two competitive reverse supply chains with different channel structures. International Journal of Production Research, 57(9), 2601-2625.
[14] SeyedEsfahani, M. M., Biazaran, M., Gharakhani, M., (2011). A game theoretic approach to coordinate pricing and vertical co-op advertising in manufacturer–retailer supply chains. European Journal of Operational Research 211,263–273.
[15] Szmerekovsky, J., Zhang, J., (2009). Pricing and two-tier advertising with one manufacturer and one retailer. European Journal of Operational Research 192(3), 904–917.
[16] Whitefield, R.I., Duffy, A.H.B., (2012). Extended revenue forecasting within a service industry. International Journal of Production Economics 141 (2), 505-518.

[17] Xie, W. (2017). Optimal pricing and two-dimensional warranty policies for a new product. International Journal of Production Research, 55(22), 6857-6870.
[18] Xie, J., Neyret, A., (2009). Co-op advertising and pricing models in manufacturer – retailer supply chains. Computers & Industrial Engineering 56 (4), 1375–1385.
[19] Yue, J., Austin, J., Huang, Zh., Chen, B., (2013). Pricing and advertisement in a manufacturer–retailer supply chain. European Journal of Operational Research 231,492–502.