

معرفی شاخص توانایی تابعی جدید (پروفایل) C_p''' برای پروفایل خطی ساده با تلورانس نامتقارن

آیلین پاکزاد¹

(نویسنده مسئول) استادیار، گروه مهندسی صنایع، دانشگاه کوثر بجنورد، بجنورد، ایران. a.pakzad@kub.ac.ir

فهیمة تنهایی

استادیار، گروه مهندسی صنایع، دانشگاه کوثر بجنورد، بجنورد، ایران. fahimeh.tanhaie@kub.ac.ir

چکیده: در بسیاری از شرایط، کیفیت یک محصول یا فرآیند به وسیله رابطه‌ای بین متغیر پاسخ و یک یا چند متغیر مستقل توصیف می‌شود که به این رابطه پروفایل گویند. پروفایل‌های خطی ساده یکی از انواع مختلف پروفایل‌ها بوده که در آن‌ها یک رابطه خطی بین یک متغیر پاسخ و یک متغیر مستقل وجود دارد. در این مقاله، شاخص توانایی تابعی برای پروفایل خطی ساده با تلورانس نامتقارن معرفی می‌شود. عملکرد شاخص تابعی ارائه شده با شاخص‌های موجود C_{ppM}''' و C_{pp}'' (Profile) با استفاده از مثال عددی و مطالعات شبیه‌سازی مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج ارزیابی‌ها نشان دهنده این است که شاخص ارائه شده نسبت به شاخص‌های موجود در بیان توانایی فرآیند بهتر عمل می‌کند. همچنین فواصل اطمینان بر اساس سه روش بوت‌استرپ^۲ برای شاخص پیشنهادی ارائه می‌شود و عملکرد آن‌ها از طریق مطالعات شبیه‌سازی ارزیابی می‌گردد. برای نشان دادن کاربرد شاخص پیشنهادی، یک مطالعه موردی واقعی ارائه می‌شود.

واژگان کلیدی: پروفایل خطی ساده، شاخص‌های توانایی فرآیند، تلورانس نامتقارن، رویکرد تابعی.

۱. مقدمه

توسط محققان بسیاری مورد مطالعه قرار گرفته است [۳]؛ موجب می‌شود تا با حذف انحرافات با دلیل، فرآیند مربوطه تحت کنترل قرار گیرد. اما علاوه بر آن، می‌بایست توانایی چنین فرآیندی به منظور تولید محصولات منطبق با مشخصات فنی مورد ارزیابی قرار گیرد. بدین منظور لازم است تا شاخص‌های توانایی فرآیند در پروفایل‌ها به عنوان معیار توانمندی این نوع فرآیندها مورد توجه قرار گیرند. در زمینه شاخص‌های توانایی فرآیند برای پروفایل‌های خطی ساده مطالعاتی انجام شده که می‌توان به تحقیقات عبادی و شهریاری [۱]، حسینی فرد و عباسی [۴، ۵]، عبادی و امیری [۶] ونگ [۲]، نعمتی و همکاران [۷]، کریمی قارتمنی و همکاران [۸]، چیانگ و همکاران [۹]، عباسی گنجی و صادق پور گیلده [۱۰] پاکزاد و همکاران [۱۱] و پاکزاد و بصیری [۱۲] اشاره کرد. همچنین تحقیقات زیادی در زمینه توسعه شاخص‌های توانایی فرآیند برای سایر انواع پروفایل‌ها از جمله

در بسیاری از کاربردهای عملی، کیفیت یک محصول یا فرآیند از طریق رابطه تابعی بین متغیر پاسخ و یک یا چند متغیر مستقل به نحو مناسب‌تری توصیف می‌شود. این رابطه تابعی که در طول زمان مورد شناسایی و پایش قرار می‌گیرد، "پروفایل" نامیده می‌شود. با توجه به کاربردهای عملی، انواع مختلفی از پروفایل‌ها شامل پروفایل‌های خطی ساده، غیرخطی^۳، خطی تعمیم‌یافته^۴ و ناپارامتریک^۵ وجود دارد. پروفایل‌های خطی ساده از جمله رایج‌ترین انواع پروفایل‌ها هستند که اکثر مطالعات مربوط به پایش پروفایل بر روی آن‌ها انجام شده است [۱، ۲]. پایش پروفایل که

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۰/۰۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۲/۰۹

دوره ۱۲/ شماره ۳
صفحات ۳۵۷-۳۸۴

¹ Corresponding author: a.pakzad@kub.ac.ir

² Bootstrap

³ Non-linear Profile (NLP)

⁴ Generalized Linear Model (GLM)

⁵ Nonparametric Profile

را برای پروفایل خطی ساده ارائه کردند که انحراف میانگین فرآیند از مقدار هدف را بخوبی نشان می‌دهند و عملکرد بهتری در مقایسه با شاخص‌های معرفی شده توسط نعمتی و همکاران [۷] بر اساس مطالعات شبیه‌سازی انجام شده در این مطالعه دارند. در مطالعه‌ای دیگر، پاکزاد و بصیری [۱۲] شاخص ناتوانایی تابعی $C_{pp}''(Profile)$ را برای پروفایل خطی ساده با تلورانس نامتقارن ارائه کردند و عملکرد بهتر این شاخص را نسبت به شاخص $C_{pp}(Profile)$ (شاخص ناتوانایی معادل شاخص $C_{pm}(Profile)$ با استفاده از مثال مقایسه‌ای و مطالعات شبیه‌سازی نشان دادند. اگرچه شاخص $C_{pp}''(Profile)$ در ارزیابی توانایی پروفایل خطی ساده علاوه بر اختلاف بین میانگین فرآیند و مقدار هدف، مکان قرارگیری میانگین نسبت به هدف را در نظر می‌گیرد؛ مشکل عمده در استفاده از این شاخص در حالتی است که میانگین فرآیند بر روی یکی از حدود مشخصات طراحی باشد. برای رفع این مشکل، در این تحقیق توسعه شاخص توانایی سنتی تک‌متغیره $C_p'''(u, v)$ معرفی شده توسط عباسی گنجی و صادق‌پور گیلده [۲۲]، برای پروفایل خطی ساده بر اساس رویکرد تابعی انجام می‌شود. شاخص توانایی $C_p'''(u, v)$ مطابق رابطه (۱) تعریف می‌شود.

$$C_p'''(u, v) = \frac{d^* - uA^*}{3\sqrt{\sigma^2 + A^2}}; u, v \geq 0 \quad (1)$$

که در آن $d^* = \min\{D_L, D_U\}$ و $D_u = T - LSL$ و $D_l = USL - T$

$$A^* = \frac{(\mu - T)^2}{D_u} I\{\mu > T\} + \frac{(T - \mu)^2}{D_l} I\{\mu \leq T\}, \quad (2)$$

$$A^2 = \frac{d^2(\mu - T)^2}{D_u^2} I\{\mu > T\} + \frac{d^2(T - \mu)^2}{D_l^2} I\{\mu \leq T\}. \quad (3)$$

در روابط (۲) و (۳)، تابع نشانگر $I\{x\}$ به صورت $I\{x\} = \begin{cases} 1; & x \geq 0, \\ 0; & x < 0. \end{cases}$ تعریف می‌شود. LSL و USL به ترتیب حد پایین^۱ و بالای مشخصات طراحی^۲ محصول می‌باشند. σ, μ

پروفایل دایره‌ای، غیرخطی، لجستیک، رگرسیون پواسون و گاما ارائه شده‌است که برای مطالعه بیشتر می‌توان به [۱۸-۱۳] رجوع کرد. جدول ۱ روند مطالعات در حوزه شاخص‌های توانایی فرآیند در پروفایل‌ها را نشان می‌دهد.

جدول ۱- مروری بر مطالعات شاخص‌های توانایی فرآیند در پروفایل‌ها

ردیف	نویسندگان	نوع پروفایل
۱	حسینی‌فرد و عباسی [۴]	خطی ساده
۲	حسینی‌فرد و عباسی [۵]	خطی ساده
۳	عبادی و امیری [۶]	خطی ساده
۴	عبادی و شهریاری [۱]	خطی ساده
۵	ونگ [۲]	خطی ساده
۶	نعمتی و همکاران [۷]	خطی ساده
۹	نعمتی و همکاران [۱۳]	دایره‌ای
۱۰	ونگ [۱۴]	دایره‌ای
۱۱	جواری و همکاران [۱۵]	غیرخطی
۱۲	رضایی عباسی چرخ و همکاران [۱۶]	لجستیک
۱۳	کریمی قارتمنی و همکاران [۸]	خطی ساده
۱۴	چیانگ و همکاران [۹]	خطی ساده
۱۵	آلویزاکاس و همکاران [۱۷]	پواسون
۱۶	آلویزاکاس و همکاران [۱۸]	لجستیک
۱۷	آلویزاکاس و کوکوینس [۱۹]	گاما
۱۸	عباسی گنجی و صادق‌پور گیلده [۱۰]	خطی ساده
۱۹	جواری و وارگاس [۲۰]	غیرخطی
۲۰	پاکزاد و همکاران [۱۱]	خطی ساده
۲۱	جواری و وارگاس [۲۱]	غیرخطی
۲۲	پاکزاد و بصیری [۱۲]	خطی ساده

از آنجایی که روش‌های ارائه شده در حوزه شاخص‌های توانایی فرآیند در پروفایل‌های خطی ساده، عمدتاً بر اطلاعات متغیر پاسخ تنها در برخی از سطوح متغیر مستقل تمرکز دارند، نعمتی و همکاران [۷]، دو شاخص تابعی $C_p(Profile)$ و $C_{pk}(Profile)$ را بر اساس رویکرد تابعی برای ارزیابی توانایی فرآیند پروفایل‌های خطی ساده ارائه نمودند که از اطلاعات ارائه شده بوسیله پروفایل‌های نمونه در کل دامنه متغیر مستقل استفاده می‌کند. با توجه به اینکه این شاخص‌های تابعی بر اساس دو شاخص سنتی C_p و C_{pk} بوده و در بیان انحراف میانگین فرآیند از هدف نارسا می‌باشند، پاکزاد و همکاران [۱۱]، دو شاخص تابعی زبان‌محور $C_{pm}(Profile)$ و $C_{pmk}(Profile)$

² Upper Specification Limit (USL)

¹ Lower Specification Limit (LSL)

$$Y_{ij} = A_0 + A_1 X_i + \varepsilon_{ij}, \quad (۴)$$

در رابطه (۴)، A_0 و A_1 به ترتیب پارامترهای عرض از مبدأ و شیب پروفایل می‌باشند. ε_{ij} نشان‌دهنده خطای تصادفی هستند و فرض می‌شود که مستقل بوده و از توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 پیروی می‌کنند. بنابراین پروفایل مرجع (پروفایل تحت کنترل) از توزیع نرمال با میانگین $A_0 + A_1 X$ ($X \in A_0 + A_1 X$) که x_l و x_u به ترتیب کمترین و بیشترین مقدار متغیر مستقل می‌باشند) و واریانس σ^2 پیروی می‌کند. برآوردهای A_0 و A_1 بر اساس پروفایل‌های نمونه تحت کنترل، طبق رابطه (۵) محاسبه می‌شوند.

$$\hat{A}_0 = a_0 = \frac{\sum_{j=1}^m a_{0j}}{m}, \quad (۵)$$

$$\hat{A}_1 = a_1 = \frac{\sum_{j=1}^m a_{1j}}{m}.$$

که در آن برآوردهای کمترین توان‌های دوم^۱ خطای پارامترهای پروفایل در \hat{J} آمین نمونه از طریق رابطه (۶) محاسبه می‌شوند [۳۲].

$$a_{0j} = \bar{Y}_j - a_{1j} \bar{X}, \quad a_{1j} = \frac{S_{XY(j)}}{S_{XX}}. \quad (۶)$$

$$S_{XY(j)} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_{ij}}{n}, \quad \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}, \quad \bar{Y}_j = \frac{\sum_{i=1}^n Y_{ij}}{n}$$

$$S_{XX} = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ و } \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) Y_{ij}$$

بنابراین، $\hat{Y}_{ij} = a_{0j} + a_{1j} X_i$ به ازاء $i = 1, 2, \dots, n$ بیانگر مقادیر پیش‌بینی متغیر پاسخ نمونه \hat{J} ام در i آمین سطح از متغیر مستقل می‌باشند. واریانس فرآیند σ^2 با استفاده از میانگین توان‌های دوم خطای پروفایل‌های تحت کنترل، $MSE = \frac{\sum_{j=1}^m MSE_j}{m}$ برآورد می‌شود؛ به طوری که:

$$MSE_j = \frac{\sum_{i=1}^n e_{ij}^2}{(n-2)}, \quad e_{ij} = Y_{ij} - \hat{Y}_{ij}. \quad (۷)$$

T نیز به ترتیب میانگین، انحراف معیار و مقدار هدف فرآیند می‌باشند. در رابطه (۳)، $d^2 = \left(\frac{USL - LSL}{2} \right)^2$

همچنین از آنجایی که برآوردهای نقطه‌ای شاخص‌های توانایی فرآیند، متغیرهای تصادفی بوده و تغییرپذیری نمونه برای برآورد شاخص‌ها را نمی‌توان نادیده گرفت، بنابراین یافتن برآورد فاصله‌ای آن‌ها ضرورت دارد. در این راستا، مطالعات بسیاری برای ایجاد فواصل اطمینان برای انواع شاخص‌های توانایی فرآیند انجام شده است [۲۵-۲۳]. با توجه به ناشناخته بودن توزیع احتمالی شاخص‌های توانایی فرآیند، محققین به ارائه فواصل اطمینان به روش‌های مختلف بوت‌استرپ برای شاخص‌های توانایی فرآیند پرداختند [۳۱-۲۶]. در این تحقیق، برای شاخص پیشنهادی فواصل اطمینان به سه روش بوت‌استرپ ارائه می‌شود.

ساختار مقاله بدین صورت است که در بخش دوم جدیدترین شاخص‌های ارائه شده برای ارزیابی توانایی پروفایل خطی ساده معرفی می‌شود. بخش سوم به معرفی شاخص توانایی تابعی جدید پرداخته و در بخش چهارم عملکرد شاخص توانایی جدید و موجود با استفاده از مثال عددی و مطالعات شبیه‌سازی مورد بررسی قرار گرفته شده است. نحوه ساخت فواصل اطمینان به سه روش بوت‌استرپ برای شاخص پیشنهادی در بخش پنجم ارائه می‌شود و عملکرد آن‌ها با استفاده از مطالعات شبیه‌سازی ارزیابی می‌شود. در بخش ششم برای نشان دادن کاربرد شاخص پیشنهادی، یک مطالعه موردی واقعی ارائه می‌شود. در بخش پایانی، بخش هفتم، نتیجه‌گیری و تحقیقات آتی بیان می‌شود.

۲. شاخص‌های توانایی موجود برای پروفایل خطی ساده

در یک پروفایل خطی ساده، مجموعه داده شامل m نمونه تصادفی است $j = 1, 2, \dots, m$ که طی زمان از فرآیند مورد بررسی به صورت $\{(X_i, Y_{ij}), i = 1, 2, \dots, n\}$ جمع‌آوری شده است. مقادیر متغیر مستقل از نمونه‌ای به نمونه دیگر ثابت فرض شده است. ضمناً فرض می‌شود هنگامی که فرآیند تحت کنترل است، مدلی که متغیرهای مستقل و پاسخ را به هم مرتبط می‌کند از رابطه (۴) پیروی می‌کند [۳].

¹ Least Square

$$\int_{x_l}^{x_u} D_Y^2(X) dX$$

$$= \frac{1}{9} \min \left\{ \int_{x_l}^{x_u} D_{LY}^2(X) dX, \int_{x_l}^{x_u} D_{UY}^2(X) dX \right\} \quad (12)$$

$$= \frac{1}{9} \min \left\{ \int_{x_l}^{x_u} (T_Y(X) - LSL_Y(X))^2 dX, \int_{x_l}^{x_u} (USL_Y(X) - T_Y(X))^2 dX \right\}$$

و از آنجایی که در رابطه (۱۱)، میانگین فرآیند و مقدار هدف به صورت تابعی هستند، $\hat{A}_Y^2(X)$ به صورت رابطه (۱۳) است.

$$\hat{A}_Y^2(X) = \begin{cases} \frac{d_Y^2(X) (T_Y(X) - \hat{\mu}_Y(X))^2}{D_{LY}^2(X)} & \text{if } \hat{\mu}_Y(X) \leq T_Y(X) \\ \frac{d_Y^2(X) (\hat{\mu}_Y(X) - T_Y(X))^2}{D_{UY}^2(X)} & \text{if } \hat{\mu}_Y(X) > T_Y(X) \end{cases} \quad (13)$$

که در آن $d_Y(X) = \frac{USL_Y(X) - LSL_Y(X)}{2}$. برای اطلاعات بیشتر در مورد تعیین موقعیت $\mu_Y(X)$ نسبت به $T_Y(X)$ در رابطه (۱۳)، به پاکزاد و بصیری [۱۲] رجوع شود.

همان طور که پیش از این اشاره شد، مشکل عمده در استفاده از شاخص $C_{pp}''(Profile)$ هنگامی است که میانگین فرآیند بر روی یکی از حدود مشخصات طراحی باشد. به عنوان مثال، فرض کنید دو فرآیند A و B حدود مشخصات طراحی یکسان داشته باشند و خط هدف به حد بالای مشخصات طراحی نزدیک تر باشد $(D_{UY}(X) < D_{LY}(X))$. حالتی را در نظر بگیرید که میانگین فرآیند A منطبق بر حد بالای مشخصات طراحی $(\mu_{YA}(X) = USL_Y(X))$ و میانگین فرآیند B منطبق بر حد پایین مشخصات طراحی $(\mu_{YB}(X) = LSL_Y(X))$ و انحراف-معیار خطا در هر دو فرآیند برابر σ باشد. واضح است که نسبت اقلام نامنطبق هر دو فرآیند یکسان بوده، در حالی که میانگین فرآیند A در مقایسه با میانگین فرآیند B به خط هدف نزدیک تر است و متعاقباً ناتوانایی فرآیند A بایستی کمتر از ناتوانایی فرآیند B باشد. در حالی که با توجه به رابطه (۱۳)، $\hat{A}_Y^2(X)$ برای هر دو فرآیند برابر $d_Y^2(X)$ شده و بنابراین مقدار ناتوانایی فرآیندهای A و B بر اساس شاخص $C_{pp}''(Profile)$ یکسان برآورد می شود.

در رویکرد تابعی که برای اولین بار توسط نعمتی و همکاران [۷] ارائه شده است، حدود مورد استفاده در روابط شاخص های توانایی فرآیند (حدود تلورانس طبیعی و حدود مشخصات طراحی) به صورت تابعی از متغیر مستقل در محدوده $[x_l, x_u]$ هستند. این توابع در روابط (۸) الی (۱۰) آمده اند.

$$\mu_Y(X) = A_0 + A_1 X, \quad (8)$$

$$USL_Y(X) = A_{0u} + A_{1u} X, \quad (9)$$

$$LSL_Y(X) = A_{0l} + A_{1l} X.$$

$$UNTL_Y(X) = A_0 + A_1 X + 3\sigma, \quad (10)$$

$$LNTL_Y(X) = A_0 + A_1 X - 3\sigma.$$

که در آن A_{1u} و A_{0u} ، به ترتیب عرض از مبدأ و شیب حد بالای مشخصات طراحی و A_{1l} و A_{0l} به طور مشابه، عرض از مبدأ و شیب حد پایین مشخصات طراحی هستند. همچنین σ انحراف معیار فرآیند است. هدف تابعی نیز به صورت $T_Y(X) = A_{0T} + A_{1T} X$ تعریف می شود که در آن A_{0T} و A_{1T} ، به ترتیب عرض از مبدأ و شیب خط هدف تابعی می باشد. در نتیجه، در رویکرد تابعی به جای یک مقدار برای شاخص توانایی فرآیند پروفایلی، یک تابع ارائه شده است که با استفاده از مساحت محصور میان منحنی های حدود تلورانس طبیعی و حدود مشخصات طراحی تابعی، تابع شاخص توانایی فرآیند به یک عدد قابل تفسیر مشابه شاخص توانایی فرآیندهای غیر پروفایلی تبدیل می شود [۷].

۱.۲. شاخص ناتوانایی تابعی $C_{pp}''(Profile)$

پاکزاد و بصیری در سال ۲۰۲۲ [۱۲] بر اساس رویکرد تابعی، شاخص ناتوانایی تابعی $C_{pp}''(Profile)$ را که به صورت رابطه (۱۱) تعریف می شود، معرفی کردند.

$$\hat{C}_{pp}''(Profile) = \left[\frac{\int_{x_l}^{x_u} \hat{A}_Y^2(X) dX + \int_{x_l}^{x_u} \hat{\sigma}^2 dX}{\int_{x_l}^{x_u} D_Y^2(X) dX} \right]. \quad (11)$$

که در آن

۲.۲. شاخص توانایی C'''_{ppm}

فرض کنید USL_i, LSL_i, T_i و μ_i به ترتیب حدود مشخصات طراحی پایین، مقدار هدف و میانگین متغیر پاسخ در $\hat{\mu}_i$ سطح از متغیر مستقل باشند. عباسی گنجی و صادقپور گیلده در سال ۲۰۲۱ [۱۰] بر اساس شاخص توانایی فرآیند تک‌متغیره $C'''_p(u, v)$ [۲۲] و با در نظر گرفتن دو پارامتر u و v معادل یک، شاخص توانایی فرآیند C'''_{ppm} را برای پروفایل خطی ساده به صورت رابطه (۱۴)، ارائه کردند.

$$\hat{C}'''_{ppm} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{C}'''_{ppi}}{n} \quad (14)$$

که در آن \hat{C}'''_{ppi} برآورد شاخص توانایی فرآیند در سطوح مختلف متغیر مستقل است و از طریق رابطه (۱۵) به دست می‌آید.

$$\hat{C}'''_{ppi} = \frac{d_i^* - \hat{A}_i^*}{3 \sqrt{MSE \left(1 + \frac{1}{mn} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{m \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right) + \hat{A}_i^2}}, u, v \quad (15)$$

$$\geq 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

که در آن

$$d_i^* = .D_{u_i} = USL_i - T_i, .D_{l_i} = T_i - LSL_i$$

$$\text{و } d_i = \frac{USL_i - LSL_i}{2} \cdot \min\{D_{l_i}, D_{u_i}\}$$

۳. شاخص توانایی تابعی جدید برای پروفایل خطی

ساده

همان‌طور که در زیر بخش‌های ۱.۲ و ۲.۲ اشاره شد، ایراداتی در رابطه با استفاده از شاخص توانایی فرآیند تابعی $C'''_{pp}(Profile)$ معرفی شده برای پروفایل‌های خطی ساده با تلورانس نامتقارن وجود دارد. از طرفی، شاخص توانایی فرآیند C'''_{ppM} ، توانایی پروفایل را تنها در چند نقطه طراحی شده ثابت از متغیر مستقل ارزیابی می‌کند و بر اساس اطلاعات حاصل از چند نقطه به قضاوت در مورد توانایی پروفایل می‌پردازد. از این رو در این بخش، شاخص توانایی فرآیند تابعی جدید $C'''_{pp}(Profile)$ را به صورت رابطه (۱۷) معرفی می‌کنیم که ایرادهای مذکور در شاخص $C'''_{pp}(Profile)$ را برطرف کرده و بهتر از شاخص توانایی فرآیند C'''_{ppM} عمل می‌کند.

$$\hat{C}'''_{pp}(Profile) = \frac{\int_{x_l}^{x_u} (d_Y^*(X) - \hat{A}_Y^*(X)) dX}{\int_{x_l}^{x_u} \left(3 \sqrt{\hat{\sigma}^2 + \hat{A}_Y^2(X)} \right) dX} \quad (17)$$

$$d_Y^*(X) = \min\{D_{l_Y}(X), D_{u_Y}(X)\}$$

$$= \min \left\{ \left(T_Y(X) - LSL_Y(X) \right), \left(USL_Y(X) - T_Y(X) \right) \right\} \quad (18)$$

$$\hat{A}_Y^*(X) = \begin{cases} \frac{(T_Y(X) - \hat{\mu}_Y(X))^2}{D_{l_Y}(X)} & \text{if } \hat{\mu}_Y(X) \leq T_Y(X) \\ \frac{(\hat{\mu}_Y(X) - T_Y(X))^2}{D_{u_Y}(X)} & \text{if } \hat{\mu}_Y(X) > T_Y(X) \end{cases} \quad (19)$$

$$\hat{A}_Y(X) = \begin{cases} \frac{d_Y(X)(T_Y(X) - \hat{\mu}_Y(X))}{D_{l_Y}(X)} & \text{if } \hat{\mu}_Y(X) \leq T_Y(X) \\ \frac{d_Y(X)(\hat{\mu}_Y(X) - T_Y(X))}{D_{u_Y}(X)} & \text{if } \hat{\mu}_Y(X) > T_Y(X) \end{cases} \quad (20)$$

$$\hat{A}_i^* = \begin{cases} \frac{(T_i - \hat{\mu}_i)^2}{D_{l_i}} & \text{if } \hat{\mu}_i \leq T_i \\ \frac{(\hat{\mu}_i - T_i)^2}{D_{u_i}} & \text{if } \hat{\mu}_i > T_i \end{cases} \quad (16)$$

$$\hat{A}_i^2 = \begin{cases} \frac{d_i^2 (T_i - \hat{\mu}_i)^2}{D_{l_i}^2} & \text{if } \hat{\mu}_i \leq T_i \\ \frac{d_i^2 (\hat{\mu}_i - T_i)^2}{D_{u_i}^2} & \text{if } \hat{\mu}_i > T_i \end{cases}$$

شاخص توانایی فرآیند C'''_{ppM} به دلیل وجود عامل \hat{A}_i^* هنگامی که میانگین فرآیند بر روی یکی از حدود مشخصات طراحی باشد، توانایی فرآیند را به درستی ارزیابی می‌کند. باین حال، از آنجایی که این شاخص تابعی نیست، توانایی پروفایل خطی ساده را تنها در چند مقدار مشخص از متغیر مستقل ارزیابی می‌کند که منجر به از دست دادن حجم زیادی از اطلاعات پروفایل‌های نمونه می‌گردد.

نشریه مهندسی و مدیریت کیفیت

- در صورت عدم تلاقی $T_Y(X)$ و $\mu_Y(X)$ در محدوده متغیر مستقل و $\mu_Y(X) \leq T_Y(X)$ داریم:

$$\hat{C}_p'''(Profile) = \frac{\int_{x_l}^{x_u} \left(d_Y^*(X) - \frac{(T_Y(X) - \hat{\mu}_Y(X))^2}{D_{l_Y}(X)} \right) dX}{\int_{x_l}^{x_u} \left(3\sqrt{\hat{\sigma}^2 + \left(\frac{d_Y(X)(T_Y(X) - \hat{\mu}_Y(X))}{D_{l_Y}(X)} \right)^2} \right) dX}$$

- در صورت تلاقی $T_Y(X)$ و $\mu_Y(X)$ در نقطه X_m و $\mu_Y(X) > T_Y(X), X \in [x_l, x_m]$ و $\mu_Y(X) \leq T_Y(X), X \in [x_m, x_u]$ داریم:

$$\hat{C}_p'''(Profile) = \frac{\int_{x_l}^{x_m} \left(d_Y^*(X) - \frac{(\hat{\mu}_Y(X) - T_Y(X))^2}{D_{u_Y}(X)} \right) dX + \int_{x_m}^{x_u} \left(d_Y^*(X) - \frac{(T_Y(X) - \hat{\mu}_Y(X))^2}{D_{l_Y}(X)} \right) dX}{\int_{x_l}^{x_m} \left(3\sqrt{\hat{\sigma}^2 + \left(\frac{d_Y(X)(\hat{\mu}_Y(X) - T_Y(X))}{D_{u_Y}(X)} \right)^2} \right) dX + \int_{x_m}^{x_u} \left(3\sqrt{\hat{\sigma}^2 + \left(\frac{d_Y(X)(T_Y(X) - \hat{\mu}_Y(X))}{D_{l_Y}(X)} \right)^2} \right) dX}$$

- در صورت تلاقی $T_Y(X)$ و $\mu_Y(X)$ در نقطه X_m و $\mu_Y(X) \leq T_Y(X), X \in [x_l, x_m]$ و $\mu_Y(X) > T_Y(X), X \in [x_m, x_u]$ داریم:

$$\hat{C}_p'''(Profile) = \frac{\int_{x_l}^{x_m} \left(d_Y^*(X) - \frac{(T_Y(X) - \hat{\mu}_Y(X))^2}{D_{l_Y}(X)} \right) dX + \int_{x_m}^{x_u} \left(d_Y^*(X) - \frac{(\hat{\mu}_Y(X) - T_Y(X))^2}{D_{u_Y}(X)} \right) dX}{\int_{x_l}^{x_m} \left(3\sqrt{\hat{\sigma}^2 + \left(\frac{d_Y(X)(T_Y(X) - \hat{\mu}_Y(X))}{D_{l_Y}(X)} \right)^2} \right) dX + \int_{x_m}^{x_u} \left(3\sqrt{\hat{\sigma}^2 + \left(\frac{d_Y(X)(\hat{\mu}_Y(X) - T_Y(X))}{D_{u_Y}(X)} \right)^2} \right) dX}$$

۱.۴. مثال مقایسه‌ای

برای ارزیابی شاخص پیشنهادی در مقایسه با شاخص‌های موجود، مدل مطرح‌شده در مثال مقاله کنگ و آلباین [۳۵] بررسی می‌شود. در این مثال فرض شده است کیفیت محصول یا فرآیند توسط پروفایل خطی ساده $Y = 3 + 2X + \varepsilon$ مدل می‌شود؛ که در آن $\varepsilon \sim N(0, 1)$ و مقادیر متغیر مستقل برابر ۲، ۴، ۶ و ۸ و از نمونه‌ای به نمونه دیگر ثابت می‌باشند. فرض بر آن است فرآیند تحت کنترل آماری قرار دارد. حدود مشخصات طراحی در سطوح مختلف متغیر مستقل به صورت جدول ۲ می‌باشند.

در روابط (۱۹) و (۲۰)، نیاز به تعیین موقعیت $\mu_Y(X)$ نسبت به $T_Y(X)$ است. با توجه به آن که میانگین و مقدار هدف تابعی فرآیند در محدوده متغیر مستقل، تلاقی دارند یا خیر با چهار حالت زیر مواجه هستیم.

- در صورت عدم تلاقی $T_Y(X)$ و $\mu_Y(X)$ در محدوده متغیر مستقل و $\mu_Y(X) > T_Y(X)$ داریم:

$$\hat{C}_p'''(Profile) = \frac{\int_{x_l}^{x_u} \left(d_Y^*(X) - \frac{(\hat{\mu}_Y(X) - T_Y(X))^2}{D_{u_Y}(X)} \right) dX}{\int_{x_l}^{x_u} \left(3\sqrt{\hat{\sigma}^2 + \left(\frac{d_Y(X)(\hat{\mu}_Y(X) - T_Y(X))}{D_{u_Y}(X)} \right)^2} \right) dX}$$

با استفاده از پروفایل‌های نمونه جمع‌آوری‌شده از فرآیند تحت کنترل، ابتدا تمام پارامترهای مدل برآورد و سپس مقدار شاخص توانایی فرآیند تابعی $C_p'''(Profile)$ برآورد می‌شود. تفسیر شاخص‌های تابعی ارائه‌شده، مشابه شاخص‌های سنتی انجام می‌گردد. به عبارتی دیگر، اگر $C_p'''(Profile) \geq 1$ ، فرآیند به صورت توانا و چنانچه $C_p'''(Profile) < 1$ ، به صورت ناتوان تفسیر می‌شود [۳۳، ۳۴].

۴. ارزیابی عملکرد شاخص پیشنهادی

در این بخش عملکرد شاخص تابعی پیشنهادی $C_p'''(Profile)$ در مقایسه با شاخص‌های موجود C_{ppM}'' و C_{ppM}''' با استفاده از مثال مقایسه‌ای و مطالعه شبیه‌سازی ارزیابی می‌شود.

شاخص ناتوانایی $C_{pp}''(Profile)$ برای هر دو فرآیند A و B برابر $17/2911$ است؛ درحالی که شاخص توانایی C_{ppM}''' به ترتیب مقادیر -0.4 و $8/0.488e$ و -0.1637 و شاخص توانایی $C_p''(Profile)$ مقادیر $17-4/68E$ و -0.1632 را برآورد کرده- اند.

در واقع بر اساس شاخص‌های توانایی C_{ppM}''' و $C_p''(Profile)$ توانایی فرآیند A تقریباً صفر و توانایی فرآیند B عددی منفی است. نتایج مشابهی از مثال ارائه شده در جدول ۴ نیز مشاهده می‌شود. بنابراین مقادیر شاخص‌های توانایی C_{ppM}''' و $C_p''(Profile)$ در تمام حالات جداول ۳ و ۴ منطقی‌تر به نظر می‌رسند.

۲.۴. مطالعات شبیه‌سازی

در این بخش، عملکرد شاخص‌های توانایی C_{ppM}''' و $C_p''(Profile)$ که در بخش ۱.۴ به درستی توانایی پروفایل خطی ساده را در تمام حالات ارزیابی می‌کردند، بر اساس سه معیار میانگین قدر مطلق خطا^۱ (MAE)، میانگین توان دوم خطا^۲ (MSE) و درصد مطلق خطا^۳ (APE)، با استفاده از شبیه‌سازی بررسی می‌شود. تمام شبیه‌سازی‌ها با استفاده از نرم‌افزار MATLAB انجام شده است. برای تولید داده‌های شبیه‌سازی، مدل پروفایل خطی ساده کنگ و آلباین [۳۵] به صورت $Y_{ij} = 3 + 2X_i + \varepsilon_{ij}$, $\varepsilon_{ij} \sim N(0, 1)$ در نظر گرفته شده است. همان‌طور که پیش‌ازاین اشاره شد، در این مدل چهار سطح از متغیر مستقل با مقادیر ثابت عبارت‌اند از: ۲، ۴، ۶ و ۸ می‌باشند. همچنین فرض بر آن است فرآیند تحت کنترل آماری قرار دارد. حدود مشخصات طراحی مطابق روابط آمده در زیر بخش ۱.۴ می‌باشند و خط هدف به صورت $T_Y(X) = 2/5 + 2/2825 X$ در نظر گرفته شده است.

جدول ۲- حدود مشخصات طراحی متغیر پاسخ در سطوح مختلف

متغیر مستقل [۲]			
USL_i	LSL_i	X_i	i
۱۰	۲/۵	۲	۱
۱۴/۳۵	۶/۸۵	۴	۲
۱۸/۷۵	۱۱/۲۵	۶	۳
۲۳/۷۵	۱۶/۲۵	۸	۴

بر اساس مقادیر جدول ۲، حدود پایین و بالای مشخصات طراحی تابعی $LSL_Y(X) = -2/2 + 2/2825 X$ و $USL_Y(X) = 5/3 + 2/2825 X$ به دست می‌آیند. همچنین دو خط هدف تابعی $T_Y(X) = 0.5 + 2/2825 X$ و $T_Y(X) = 2/5 + 2/2825 X$ که به ترتیب به حد پایین و بالای مشخصات طراحی نزدیک است، در نظر گرفته شده است. مقایسه بین شاخص جدید و موجود برای مقادیر مختلف میانگین فرآیند تحت انحراف معیار خطا معادل یک، انجام شده و نتایج در جداول ۳ و ۴ آمده است. مقادیر جداول ۳ و ۴ نشان می‌دهد که بیشترین مقدار شاخص‌های توانایی C_{ppM}''' و $C_p''(Profile)$ و کمترین مقدار شاخص ناتوانایی $C_{pp}''(Profile)$ در حالتی که میانگین فرآیند بر روی مقدار هدف منطبق است ($\mu_Y(X) = T_Y(X)$)، رخ داده است که در جداول ۳ و ۴ به صورت پررنگ مشخص شده است. از طرفی، هر چه میانگین فرآیند از مقدار هدف دورتر می‌شود، مقادیر شاخص‌های توانایی C_{ppM}''' و $C_p''(Profile)$ کوچک‌تر و مقادیر شاخص ناتوانایی $C_{pp}''(Profile)$ بزرگ‌تر می‌شود. همچنین با انحراف میانگین از هدف به سمت حد مشخصه‌ای که به هدف نزدیک‌تر است، کاهش در مقادیر شاخص‌های توانایی و افزایش در مقادیر شاخص ناتوانایی به درستی با شدت بیشتری انجام می‌شود.

همان‌طور که نتایج جداول ۳ و ۴ نشان می‌دهند، در حالتی که میانگین فرآیند بر حدود مشخصات طراحی منطبق است، بر اساس شاخص ناتوانایی $C_{pp}''(Profile)$ برای هر دو فرآیند $\mu_Y(X) = USL_Y(X)$ و $\mu_Y(X) = LSL_Y(X)$ عددی یکسان برآورد شده است. به‌عنوان مثال، در جدول ۳، هنگامی که $T_Y(X) = 2/5 + 2/2825 X$ است، دو فرآیند A به صورت $\mu_{Y_A}(X) = 5/3 + 2/2825 X$ و B به صورت $\mu_{Y_B}(X) = -2/2 + 2/2825 X$ را در نظر می‌گیریم. مقدار

³ Absolute Percentage Error (APE)

¹ Mean Absolute Error (MAE)

² Mean Square Error (MSE)

جدول ۳- مقایسه بین شاخص‌های C_{ppM}''' ، $C_{pp}''(Profile)$ و $C_p'''(Profile)$ ، خط هدف نزدیک به حد بالای مشخصات طراحی

$T_Y(X) = 2/5 + 2/2825 X$			σ^2	A_1	A_0
شاخص جدید	شاخص‌های موجود				
$C_p'''(Profile)$	$C_{pp}''(Profile)$	C_{ppM}'''			
۴/۶۸E-۱۷	۱۷/۲۹۱۱	۸/۰۴۸۸ e-۰۴	۱	۲/۲۸۲۵	۵/۳
۰/۰۰۸۷	۱۶/۷۱۹۷	۰/۰۰۹۵	۱	۲/۲۸۲۵	۵/۲۵
۰/۰۵۴۲	۱۴/۰۱۷۲	۰/۰۵۵۰	۱	۲/۲۸۲۵	۵
۰/۱۰۴۱	۱۱/۵۷۲۰	۰/۱۰۵۰	۱	۲/۲۸۲۵	۴/۷۵
۰/۱۵۹۹	۹/۳۸۴۳	۰/۱۶۰۸	۱	۲/۲۸۲۵	۵/۴
۰/۲۲۳۲	۷/۴۵۳۹	۰/۲۲۴۱	۱	۲/۲۸۲۵	۴/۲۵
۰/۲۹۶۶	۵/۷۸۰۹	۰/۲۹۷۵	۱	۲/۲۸۲۵	۴
۰/۳۸۳۲	۴/۳۶۵۳	۰/۳۸۴۱	۱	۲/۲۸۲۵	۳/۷۵
۰/۴۸۷۲	۳/۲۰۷۰	۰/۴۸۷۸	۱	۲/۲۸۲۵	۳/۵
۰/۶۱۱۲	۲/۳۰۶۲	۰/۶۱۱۶	۱	۲/۲۸۲۵	۳/۲۵
۰/۷۵۰۸	۱/۶۶۲۷	۰/۷۵۰۷	۱	۲/۲۸۲۵	۳
۰/۸۷۸۰	۱/۲۷۶۷	۰/۸۷۷۸	۱	۲/۲۸۲۵	۲/۷۵
۰/۹۲۳۳	۱/۱۴۸۰	۰/۹۲۳۳	۱	۲/۲۸۲۵	۲/۵
۰/۹۱۱۰	۱/۱۹۳۶	۰/۹۱۰۸	۱	۲/۲۸۲۵	۲/۲۵
۰/۸۵۰۴	۱/۳۳۰۷	۰/۸۴۹۹	۱	۲/۲۸۲۵	۲
۰/۷۶۶۷	۱/۵۵۹۰	۰/۷۶۵۸	۱	۲/۲۸۲۵	۱/۷۵
۰/۶۷۴۱	۱/۸۷۸۸	۰/۶۷۳۱	۱	۲/۲۸۲۵	۱/۵
۰/۵۸۲۴	۲/۲۸۹۸	۰/۵۸۱۳	۱	۲/۲۸۲۵	۱/۲۵
۰/۴۹۶۱	۲/۷۹۲۲	۰/۴۹۵۰	۱	۲/۲۸۲۵	۱
۰/۴۱۷۰	۳/۳۸۶۰	۰/۴۱۵۹	۱	۲/۲۸۲۵	۰/۷۵
۰/۳۴۵۰	۴/۰۷۱۱	۰/۳۴۴۰	۱	۲/۲۸۲۵	۰/۵
۰/۲۷۹۵	۴/۸۴۷۶	۰/۲۷۸۵	۱	۲/۲۸۲۵	۰/۲۵
۰/۲۱۹۶	۵/۷۱۵۴	۰/۲۱۸۷	۱	۲/۲۸۲۵	۰
۰/۱۶۴۶	۶/۶۷۴۶	۰/۱۶۳۸	۱	۲/۲۸۲۵	-۰/۲۵
۰/۱۱۳۷	۷/۷۲۵۱	۰/۱۱۳۰	۱	۲/۲۸۲۵	-۰/۵
۰/۰۶۶۳	۸/۸۶۶۹	۰/۰۶۵۶	۱	۲/۲۸۲۵	-۰/۷۵
۰/۰۲۱۸	۱۰/۱۰۰۲	۰/۰۲۱۱	۱	۲/۲۸۲۵	-۱
-۰/۰۲۰۳	۱۱/۴۲۴۷	-۰/۰۲۰۹	۱	۲/۲۸۲۵	-۱/۲۵
-۰/۰۶۰۲	۱۲/۸۴۰۶	-۰/۰۶۰۸	۱	۲/۲۸۲۵	-۱/۵
-۰/۰۹۸۳	۱۴/۳۴۷۹	-۰/۰۹۸۹	۱	۲/۲۸۲۵	-۱/۷۵
-۰/۱۳۴۹	۱۵/۹۴۶۵	-۰/۱۳۵۵	۱	۲/۲۸۲۵	-۲
-۰/۱۶۳۲	۱۷/۲۹۱۱	-۰/۱۶۳۷	۱	۲/۲۸۲۵	-۲/۲

جدول ۴- مقایسه بین شاخص‌های C_{ppM}''' ، C_{pp}'' (Profile) و C_p''' (Profile)، خط هدف نزدیک به حد پایین مشخصات طراحی

$T_Y(X) = 0.5 + 2/2825 X$			σ^2	A_1	A_0
شاخص جدید	شاخص‌های موجود				
C_p''' (Profile)	C_{pp}'' (Profile)	C_{ppM}'''			
-0/1104	11/5957	-0/1109	1	2/2825	5/3
-0/1666	11/2359	-0/1740	1	2/2825	5/25
-0/1385	16/4934	-0/1391	1	2/2825	5
-0/1022	14/8450	-0/1028	1	2/2825	4/75
-0/0643	13/2909	-0/0650	1	2/2825	5/4
-0/0247	11/8309	-0/0254	1	2/2825	4/25
0/0169	10/4652	0/0163	1	2/2825	4
0/0610	9/1936	0/0603	1	2/2825	3/75
0/1079	8/0163	0/1071	1	2/2825	3/5
0/1582	6/9331	0/1573	1	2/2825	3/25
0/2124	5/9441	0/2115	1	2/2825	3
0/2712	5/0493	0/2702	1	2/2825	2/75
0/3354	4/2486	0/3344	1	2/2825	2/5
0/4058	3/5422	0/4047	1	2/2825	2/25
0/4828	2/9300	0/4817	1	2/2825	2
0/5663	2/4119	0/5652	1	2/2825	1/75
0/6545	1/9881	0/6535	1	2/2825	1/5
0/7428	1/6584	0/7420	1	2/2825	1/25
0/8221	1/4229	0/8217	1	2/2825	1
0/8791	1/2817	0/8789	1	2/2825	0/75
0/9000	1/2346	0/9000	1	2/2825	0/5
0/8429	1/3834	0/8428	1	2/2825	0/25
0/7139	1/8299	0/7138	1	2/2825	0
0/5752	2/5742	0/5755	1	2/2825	-0/25
0/4537	3/6161	0/4544	1	2/2825	-0/5
0/3529	4/9557	0/3538	1	2/2825	-0/75
0/2693	6/5929	0/2702	1	2/2825	-1
0/1986	8/5279	0/1995	1	2/2825	-1/25
0/1376	10/7606	0/1385	1	2/2825	-1/5
0/0838	13/2909	0/0847	1	2/2825	-1/75
0/0355	16/1189	0/0364	1	2/2825	-2
-1/3090e-17	11/5957	1/3060 e-04	1	2/2825	-2/2

جدول ۵- نتایج شبیه‌سازی برای $\varepsilon_{ij} \sim N(0, (1/\sigma)^2)$ و مقادیر مختلف B_0

شاخص جدید		شاخص موجود		m	حالت‌های شبیه‌سازی
C_p''' (Profile)		C_{ppm}'''			
مقدار واقعی	برآورد شده (MAE, MSE, APE)	مقدار واقعی	برآورد شده (MAE, MSE, APE)		
۰/۷۱۶	(۰/۰۴۸, ۰/۰۰۴, ۰/۰۶۷)	۰/۷۲۶	(۰/۰۵۰, ۰/۰۰۴, ۰/۰۶۹)	۲۵	$Y_{ij} = 3/15 + 2X_i + \varepsilon_{ij}$
۰/۷۱۴	(۰/۰۳۴, ۰/۰۰۲, ۰/۰۴۷)	۰/۷۲۵	(۰/۰۳۵, ۰/۰۰۲, ۰/۰۴۸)	۵۰	
۰/۷۱۴	(۰/۰۲۴, ۰/۰۰۱, ۰/۰۳۳)	۰/۷۲۵	(۰/۰۲۴, ۰/۰۰۱, ۰/۰۳۳)	۱۰۰	
۰/۷۱۳	(۰/۰۱۷, ۰/۰۰۱, ۰/۰۲۴)	۰/۷۲۴	(۰/۰۱۸, ۰/۰۰۱, ۰/۰۲۴)	۲۰۰	
۰/۷۰۰	(۰/۰۴۹, ۰/۰۰۴, ۰/۰۶۹)	۰/۷۱۵	(۰/۰۵۰, ۰/۰۰۴, ۰/۰۷۲)	۲۵	
۰/۶۹۹	(۰/۰۳۶, ۰/۰۰۲, ۰/۰۵۰)	۰/۷۱۵	(۰/۰۳۷, ۰/۰۰۲, ۰/۰۵۳)	۵۰	$Y_{ij} = 3/1 + 2X_i + \varepsilon_{ij}$
۰/۶۹۸	(۰/۰۲۷, ۰/۰۰۱, ۰/۰۳۸)	۰/۷۱۴	(۰/۰۲۸, ۰/۰۰۱, ۰/۰۴۰)	۱۰۰	
۰/۶۹۷	(۰/۰۲۲, ۰/۰۰۱, ۰/۰۳۱)	۰/۷۱۴	(۰/۰۲۲, ۰/۰۰۱, ۰/۰۳۲)	۲۰۰	
۰/۶۶۸	(۰/۰۴۴, ۰/۰۰۳, ۰/۰۶۶)	۰/۶۹۳	(۰/۰۴۷, ۰/۰۰۴, ۰/۰۶۸)	۲۵	
۰/۶۶۶	(۰/۰۳۱, ۰/۰۰۲, ۰/۰۴۶)	۰/۶۹۱	(۰/۰۳۲, ۰/۰۰۲, ۰/۰۴۷)	۵۰	
۰/۶۶۶	(۰/۰۲۲, ۰/۰۰۱, ۰/۰۳۳)	۰/۶۹۰	(۰/۰۲۳, ۰/۰۰۱, ۰/۰۳۴)	۱۰۰	$Y_{ij} = 3 + 2X_i + \varepsilon_{ij}$
۰/۶۶۵	(۰/۰۱۵, ۰/۰۰۰, ۰/۰۲۳)	۰/۶۹۰	(۰/۰۱۶, ۰/۰۰۰, ۰/۰۲۴)	۲۰۰	
۰/۶۳۴	(۰/۰۴۹, ۰/۰۰۴, ۰/۰۷۴)	۰/۶۶۵	(۰/۰۵۱, ۰/۰۰۴, ۰/۰۸۱)	۲۵	
۰/۶۳۳	(۰/۰۳۹, ۰/۰۰۲, ۰/۰۵۹)	۰/۶۶۵	(۰/۰۴۱, ۰/۰۰۳, ۰/۰۶۴)	۵۰	
۰/۶۳۲	(۰/۰۳۴, ۰/۰۰۲, ۰/۰۵۱)	۰/۶۶۳	(۰/۰۳۴, ۰/۰۰۲, ۰/۰۵۵)	۱۰۰	
۰/۶۳۲	(۰/۰۳۱, ۰/۰۰۱, ۰/۰۴۷)	۰/۶۶۳	(۰/۰۳۲, ۰/۰۰۱, ۰/۰۵۱)	۲۰۰	$Y_{ij} = 2/9 + 2X_i + \varepsilon_{ij}$
۰/۶۱۷	(۰/۰۴۹, ۰/۰۰۴, ۰/۰۷۵)	۰/۶۵۲	(۰/۰۵۱, ۰/۰۰۴, ۰/۰۸۳)	۲۵	
۰/۶۱۶	(۰/۰۴۰, ۰/۰۰۲, ۰/۰۶۲)	۰/۶۵۱	(۰/۰۴۲, ۰/۰۰۳, ۰/۰۶۷)	۵۰	
۰/۶۱۶	(۰/۰۳۵, ۰/۰۰۲, ۰/۰۵۵)	۰/۶۵۰	(۰/۰۳۶, ۰/۰۰۲, ۰/۰۵۹)	۱۰۰	
۰/۶۱۶	(۰/۰۳۴, ۰/۰۰۱, ۰/۰۵۲)	۰/۶۴۹	(۰/۰۳۴, ۰/۰۰۲, ۰/۰۵۵)	۲۰۰	

جدول ۶- نتایج شبیه‌سازی برای $\varepsilon_{ij} \sim N(0, (1/0)^2)$ و مقادیر مختلف B_1

شاخص جدید		شاخص موجود		m	حالت‌های شبیه‌سازی
C_p''' (Profile)		C_{ppM}'''			
مقدار واقعی	برآورد شده (MAE, MSE, APE)	مقدار واقعی	برآورد شده (MAE, MSE, APE)		
	۰/۹۰۶ (۰/۰۷۰, ۰/۰۰۸, ۰/۰۷۹)		۰/۸۹۰ (۰/۰۷۰, ۰/۰۰۸, ۰/۰۷۹)	۲۵	$Y_{ij} = 3 + 2/15X_i + \varepsilon_{ij}$
	۰/۹۰۳ (۰/۰۵۱, ۰/۰۰۴, ۰/۰۵۷)	۰/۹۰۲	۰/۸۸۷ (۰/۰۵۱, ۰/۰۰۴, ۰/۰۵۷)	۵۰	
	۰/۹۰۳ (۰/۰۳۷, ۰/۰۰۲, ۰/۰۴۲)		۰/۸۸۸ (۰/۰۳۷, ۰/۰۰۲, ۰/۰۴۱)	۱۰۰	
	۰/۹۰۳ (۰/۰۲۸, ۰/۰۰۱, ۰/۰۳۱)		۰/۸۸۷ (۰/۰۲۷, ۰/۰۰۱, ۰/۰۳۰)	۲۰۰	
	۰/۸۵۰ (۰/۰۶۳, ۰/۰۰۷, ۰/۰۷۷)		۰/۸۳۷ (۰/۰۶۳, ۰/۰۰۶, ۰/۰۷۴)	۲۵	
	۰/۸۴۷ (۰/۰۴۵, ۰/۰۰۳, ۰/۰۵۴)	۰/۸۴۴	۰/۸۳۴ (۰/۰۴۵, ۰/۰۰۳, ۰/۰۵۳)	۵۰	
	۰/۸۴۵ (۰/۰۳۲, ۰/۰۰۲, ۰/۰۳۹)		۰/۸۳۳ (۰/۰۳۲, ۰/۰۰۲, ۰/۰۳۸)	۱۰۰	
	۰/۸۴۵ (۰/۰۲۴, ۰/۰۰۱, ۰/۰۲۸)		۰/۸۳۳ (۰/۰۲۳, ۰/۰۰۱, ۰/۰۲۸)	۲۰۰	
	۰/۶۶۸ (۰/۰۴۴, ۰/۰۰۳, ۰/۰۶۶)		۰/۶۹۳ (۰/۰۴۷, ۰/۰۰۴, ۰/۰۶۸)	۲۵	$Y_{ij} = 3 + 2X_i + \varepsilon_{ij}$
	۰/۶۶۶ (۰/۰۳۱, ۰/۰۰۲, ۰/۰۴۶)	۰/۶۶۵	۰/۶۹۱ (۰/۰۳۲, ۰/۰۰۲, ۰/۰۴۷)	۵۰	
	۰/۶۶۶ (۰/۰۲۲, ۰/۰۰۱, ۰/۰۳۳)		۰/۶۹۰ (۰/۰۲۳, ۰/۰۰۱, ۰/۰۳۴)	۱۰۰	
	۰/۶۶۵ (۰/۰۱۵, ۰/۰۰۰, ۰/۰۲۳)		۰/۶۹۰ (۰/۰۱۶, ۰/۰۰۰, ۰/۰۲۴)	۲۰۰	
	۰/۴۸۲ (۰/۰۶۸, ۰/۰۰۶, ۰/۱۲۴)		۰/۵۵۰ (۰/۰۷۱, ۰/۰۰۷, ۰/۱۴۸)	۲۵	
	۰/۴۸۲ (۰/۰۶۶, ۰/۰۰۵, ۰/۱۲۱)	۰/۴۸۱	۰/۵۴۹ (۰/۰۶۹, ۰/۰۰۶, ۰/۱۴۳)	۵۰	
	۰/۴۸۲ (۰/۰۶۷, ۰/۰۰۵, ۰/۱۲۱)		۰/۵۴۹ (۰/۰۶۸, ۰/۰۰۵, ۰/۱۴۱)	۱۰۰	
	۰/۴۸۱ (۰/۰۶۷, ۰/۰۰۵, ۰/۱۲۲)		۰/۵۴۸ (۰/۰۶۷, ۰/۰۰۵, ۰/۱۴۰)	۲۰۰	
	۰/۳۹۹ (۰/۰۸۴, ۰/۰۰۸, ۰/۱۷۴)		۰/۴۸۵ (۰/۰۸۸, ۰/۰۰۹, ۰/۲۲۰)	۲۵	$Y_{ij} = 3 + 1/85X_i + \varepsilon_{ij}$
	۰/۳۹۸ (۰/۰۸۵, ۰/۰۰۸, ۰/۱۷۵)	۰/۳۹۸	۰/۴۸۴ (۰/۰۸۶, ۰/۰۰۸, ۰/۲۱۶)	۵۰	
	۰/۳۹۹ (۰/۰۸۵, ۰/۰۰۷, ۰/۱۷۵)		۰/۴۸۴ (۰/۰۸۶, ۰/۰۰۸, ۰/۲۱۵)	۱۰۰	
	۰/۳۹۸ (۰/۰۸۵, ۰/۰۰۷, ۰/۱۷۶)		۰/۴۸۳ (۰/۰۸۵, ۰/۰۰۷, ۰/۲۱۴)	۲۰۰	

جدول ۷- نتایج شبیه‌سازی برای $Y_{ij} = 3 + 2X_i + \varepsilon_{ij}$ و انحراف معیار مختلف خطا

شاخص جدید		شاخص موجود		حالت‌های شبیه‌سازی m	
$C_p'''(Profile)$		C_{ppm}'''			
مقدار واقعی	برآورد شده (MAE, MSE, APE)	مقدار واقعی	برآورد شده (MAE, MSE, APE)		
	۰/۷۵۹		۰/۸۱۲	۲۵	
	(۰/۰۶۳, ۰/۰۰۶, ۰/۰۷۸)		(۰/۰۶۷, ۰/۰۰۷, ۰/۰۸۹)		
	۰/۷۵۹		۰/۸۱۲	۵۰	
	(۰/۰۵۶, ۰/۰۰۴, ۰/۰۶۹)	۰/۷۵۷	(۰/۰۶۰, ۰/۰۰۵, ۰/۰۷۸)	۰/۸۱۰	$\varepsilon_{ij} \sim N(0, (0.18)^2)$
	۰/۷۵۷		۰/۸۱۱	۱۰۰	
	(۰/۰۵۳, ۰/۰۰۴, ۰/۰۶۶)		(۰/۰۵۵, ۰/۰۰۴, ۰/۰۷۲)		
	۰/۷۵۷		۰/۸۱۰	۲۰۰	
	(۰/۰۵۳, ۰/۰۰۳, ۰/۰۶۵)		(۰/۰۵۴, ۰/۰۰۳, ۰/۰۷۱)		
	۰/۷۱۲		۰/۷۴۸	۲۵	
	(۰/۰۵۳, ۰/۰۰۴, ۰/۰۷۱)		(۰/۰۵۷, ۰/۰۰۵, ۰/۰۸۰)		
	۰/۷۰۹		۰/۷۴۶	۵۰	
	(۰/۰۴۴, ۰/۰۰۳, ۰/۰۵۹)	۰/۷۰۹	(۰/۰۴۵, ۰/۰۰۳, ۰/۰۶۴)	۰/۷۴۵	$\varepsilon_{ij} \sim N(0, (0.19)^2)$
	۰/۷۱۰		۰/۷۴۶	۱۰۰	
	(۰/۰۳۸, ۰/۰۰۲, ۰/۰۵۱)		(۰/۰۴۰, ۰/۰۰۲, ۰/۰۵۶)		
	۰/۷۰۹		۰/۷۴۵	۲۰۰	
	(۰/۰۳۷, ۰/۰۰۲, ۰/۰۴۹)		(۰/۰۳۷, ۰/۰۰۲, ۰/۰۵۲)		
	۰/۶۶۸		۰/۶۹۳	۲۵	
	(۰/۰۴۴, ۰/۰۰۳, ۰/۰۶۶)		(۰/۰۴۷, ۰/۰۰۴, ۰/۰۶۸)		
	۰/۶۶۶		۰/۶۹۱	۵۰	
	(۰/۰۳۱, ۰/۰۰۲, ۰/۰۴۶)	۰/۶۶۵	(۰/۰۳۲, ۰/۰۰۲, ۰/۰۴۷)	۰/۶۸۹	$\varepsilon_{ij} \sim N(0, (0.10)^2)$
	۰/۶۶۶		۰/۶۹۰	۱۰۰	
	(۰/۰۲۲, ۰/۰۰۱, ۰/۰۳۳)		(۰/۰۲۳, ۰/۰۰۱, ۰/۰۳۴)		
	۰/۶۶۵		۰/۶۹۰	۲۰۰	
	(۰/۰۱۵, ۰/۰۰۰, ۰/۰۲۳)		(۰/۰۱۶, ۰/۰۰۰, ۰/۰۲۴)		
	۰/۶۲۸		۰/۶۴۵	۲۵	
	(۰/۰۴۵, ۰/۰۰۳, ۰/۰۷۰)		(۰/۰۴۶, ۰/۰۰۴, ۰/۰۷۴)		
	۰/۶۲۷		۰/۶۴۴	۵۰	
	(۰/۰۳۴, ۰/۰۰۲, ۰/۰۵۳)	۰/۶۲۵	(۰/۰۳۵, ۰/۰۰۲, ۰/۰۵۶)	۰/۶۴۲	$\varepsilon_{ij} \sim N(0, (0.11)^2)$
	۰/۶۲۶		۰/۶۴۳	۱۰۰	
	(۰/۰۲۵, ۰/۰۰۱, ۰/۰۴۰)		(۰/۰۲۶, ۰/۰۰۱, ۰/۰۴۲)		
	۰/۶۲۵		۰/۶۴۲	۲۰۰	
	(۰/۰۲۱, ۰/۰۰۱, ۰/۰۳۳)		(۰/۰۲۱, ۰/۰۰۱, ۰/۰۳۳)		
	۰/۵۹۲		۰/۶۰۳	۲۵	
	(۰/۰۴۳, ۰/۰۰۳, ۰/۰۷۲)		(۰/۰۴۴, ۰/۰۰۳, ۰/۰۷۵)		
	۰/۵۹۱		۰/۶۰۲	۵۰	
	(۰/۰۳۱, ۰/۰۰۲, ۰/۰۵۲)	۰/۵۸۹	(۰/۰۳۲, ۰/۰۰۲, ۰/۰۵۴)	۰/۶۰۰	$\varepsilon_{ij} \sim N(0, (0.12)^2)$
	۰/۵۸۹		۰/۶۰۱	۱۰۰	
	(۰/۰۲۳, ۰/۰۰۱, ۰/۰۳۸)		(۰/۰۲۳, ۰/۰۰۱, ۰/۰۳۹)		
	۰/۵۸۹		۰/۶۰۰	۲۰۰	
	(۰/۰۱۸, ۰/۰۰۱, ۰/۰۲۹)		(۰/۰۱۷, ۰/۰۰۱, ۰/۰۳۰)		

شامل ۲۵، ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ برای مقادیر مختلف پارامترهای عرض از مبدأ و شیب، $A_1 \in \{2/185, 2/9, 3, 3/1, 3/15\}$ و $A_0 \in \{2/185, 2/9, 3, 3/1, 3/15\}$

در این مطالعه، بر اساس مدل معرفی شده، مقادیر متغیر پاسخ در هر یک از سطوح متغیر مستقل، به تعداد نمونه‌های مختلف (m)

برآورد شده شاخص را نشان می‌دهند. $\hat{C}_p'''(Profile)$ و $C_p'''(Profile)$ به ترتیب مقادیر واقعی و

۵. تعیین فواصل اطمینان بوت‌استرپ برای $C_p'''(Profile)$

در این بخش، به دلیل نامعلوم بودن توزیع شاخص $C_p'''(Profile)$ ، برای ساخت فواصل اطمینان از روش بوت-استرپ نا پارامتری معرفی شده توسط افرون [۳۶] استفاده می‌شود. این روش بر اساس بازنمونه‌گیری است و برای اهداف برآورد یابی استفاده می‌شود.

فرض کنید داده‌های مشاهده شده m پروفایل نمونه از یک پروفایل تحت کنترل به صورت (X_{ij}, Y_{ij}) ؛ $i = 1, 2, \dots, n$ و $j = 1, 2, \dots, m$ جمع‌آوری شده باشد. یک نمونه تصادفی با جایگذاری از این نمونه اصلی که آن را با (X_i^*, Y_{ij}^*) ؛ $i = 1, 2, \dots, n$ و $j = 1, 2, \dots, m$ نمایش می‌دهیم، نمونه بوت-استرپی نامیده می‌شود. فرض کنید این فرآیند نمونه‌گیری با جایگذاری به تعداد B بار تکرار شود. سپس از این B نمونه برای یافتن B برآورد بوت‌استرپی از شاخص $C_p'''(Profile)$ استفاده می‌کنیم. B برآورد بوت‌استرپ این شاخص را به صورت $\hat{C}_{p1}'''(Profile)$ ، $\hat{C}_{p2}'''(Profile)$ ، \dots ، $\hat{C}_{pB}'''(Profile)$ نمایش می‌دهیم. همچنین برآوردهای بوت‌استرپ مرتب‌شده شاخص $C_p'''(Profile)$ از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین به صورت $\hat{C}_{p(1)}'''(Profile)$ ، $\hat{C}_{p(2)}'''(Profile)$ ، \dots ، $\hat{C}_{p(B)}'''(Profile)$ نشان می‌دهیم. در ادامه سه روش برآورد یابی فاصله اطمینان بوت‌استرپ استاندارد^۱ (SB)، بوت‌استرپ صدکی^۲ (PB) و بوت‌استرپ اریبی تصحیح‌شده^۳ (BCPB) برای شاخص $C_p'''(Profile)$ معرفی می‌شود.

در حالت تحت کنترل، هنگامی که انحراف معیار خطا برابر یک است تولیدشده و متوسط مقادیر شاخص‌های توانایی $C_{ppM}'''(Profile)$ و $C_p'''(Profile)$ به همراه معیارهای ارزیابی (MAE، MSE و APE) برای ۱۰۰۰۰ اجرا محاسبه شده است. همچنین برای انجام مقایسه بیشتر، به ازای انحراف معیارهای مختلف خطا شامل ۰/۸، ۰/۹، ۱، ۱/۱ و ۱/۲ نیز محاسبات برای هر دو شاخص توانایی انجام و نتایج در جداول ۵ الی ۷ نشان داده شده است.

نتایج جداول ۵ الی ۷ حاکی از آن است که، برآوردهای شاخص توانایی $C_p'''(Profile)$ در اکثر حالات شبیه‌سازی نزدیک‌ترین مقادیر را به مقادیر واقعی خود بر اساس هر سه معیار ارزیابی دارند؛ که این امر توسط مقادیر کوچک معیارهای MSE، MAE و APE تأیید می‌شود و البته این مقادیر با افزایش تعداد نمونه‌های پروفایل، نیز بهبود می‌یابند. بنابراین مطالعات شبیه‌سازی نشان می‌دهد که شاخص توانایی تابعی جدید $C_p'''(Profile)$ عملکرد بهتری نسبت به شاخص توانایی موجود $C_{ppM}'''(Profile)$ دارد.

همچنین، همان‌طور که ملاحظه شد، عملکرد شاخص توانایی $C_p'''(Profile)$ با افزایش تعداد نمونه‌های پروفایل (m)، بهبود می‌یابد. باین حال، استفاده از تعداد نمونه‌های پروفایل بیشتر برای رسیدن به برآوردهای بهتر از توانایی فرآیند، همیشه در عمل از نظر اقتصادی ممکن نیست. از این رو، با استفاده از روش ارائه شده در پاکزاد و همکاران [۱۱]، حداقل تعداد نمونه‌های پروفایل که خطای برآورد معینی را با احتمال زیاد تضمین کند را به ازاء حداکثر خطای برآورد قابل قبول (APE^*) و سطوح اطمینان مختلف ($0 \leq \alpha \leq 1$) برای برآورد شاخص توانایی $C_p'''(Profile)$ در جدول ۸ محاسبه شده است.

به‌عنوان مثال، در جدول ۸، به ازای $\alpha = 0/05$ و $APE^* = 0/08$ حداقل تعداد نمونه‌های پروفایل برابر ۱۰۷ است که به ازای آن

$$Pr\left(APE_{C_p'''(Profile)} < 0/08\right) \geq 0/95$$

و

$$APE_{C_p'''(Profile)} = \left| \frac{C_p'''(Profile) - \hat{C}_p'''(Profile)}{C_p'''(Profile)} \right|$$

³ Biased-Corrected Percentile Bootstrap (BCPB)

¹ Standard Bootstrap (SB)

² Percentile Bootstrap (PB)

جدول ۸- حداقل تعداد نمونه‌های پروفایل برای برآورد شاخص $C_p'''(Profile)$

$C_p'''(Profile)$										APE^*
≥ 0.2	0.1	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	≤ 0.2	$1 - \alpha$
<25	30	37	45	57	79	111	>400	>400	>400	٪۸۰
<25	39	45	55	73	101	138	>400	>400	>400	٪۸۵
<25	47	58	72	98	125	168	>400	>400	>400	٪۹۰
<25	68	83	107	133	167	264	400	>400	>400	٪۹۵

۳.۵. فاصله اطمینان بوت‌استرپ اریبی تصحیح شده

روش بوت‌استرپ اریبی تصحیح‌شده، باهدف تصحیح اریبی بالقوه موجود در توزیع بوت‌استرپی ارائه‌شده است. برای تعیین فاصله اطمینان $100(1 - \alpha)\%$ به روش BCPB برای $\widehat{C}_p'''(Profile)_i^*$ ، پس از به دست آوردن $\widehat{C}_p'''(Profile)_i^*$ از مجموعه داده‌های $i = 1, 2, \dots, B$ و برآورد $\widehat{C}_p'''(Profile)$ اصلی، احتمال $P_0 = P(\widehat{C}_p'''(Profile)^* < \widehat{C}_p'''(Profile))$ محاسبه می‌شود. سپس میانه اریبی $\widehat{C}_{pp}'''(Profile)^*$ به صورت $z_0 = \Phi^{-1}(P_0)$ و ضریب اطمینان صدک‌های بالا و پایین به صورت $P_U = \Phi(2z_0 + z_{(1-\frac{\alpha}{2})})$ و $P_L = \Phi(2z_0 - z_{(1-\frac{\alpha}{2})})$ محاسبه می‌شوند. به طوری که $\Phi(\cdot)$ تابع تجمعی نرمال استاندارد است و $\Phi^{-1}(\cdot)$ معکوس آن است. در نهایت با استفاده از مجموعه مرتب شده برآوردهای بوت‌استرپی $\widehat{C}_p'''(Profile)$ ، فاصله اطمینان $\widehat{C}_p'''(Profile)_i^*, i = 1, 2, \dots, B$ به روش BCPB برای $C_p'''(Profile)$ به صورت رابطه (۲۵) بدست می‌آید.

$$(\widehat{C}_{(B.P_L)}^*, \widehat{C}_{(B.P_U)}^*). \tag{25}$$

که در آن در صورت عدم عدد صحیح بودن $(B.P_L)$ و $(B.P_U)$ ، مقادیر جزء صحیح آن‌ها در نظر گرفته می‌شود.

۴.۵. مطالعه شبیه‌سازی و تعیین فواصل اطمینان

در این زیر بخش، عملکرد فواصل اطمینان بوت‌استرپ شاخص $C_p'''(Profile)$ برای مدل پروفایل خطی ساده کنگ و آلباین [۳۵] به صورت $Y_{ij} = 3 + 2X_i + \varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij} \sim N(0, 1)$ که در زیر

۱.۵. فاصله اطمینان بوت‌استرپ استاندارد

در این روش فرض بر آن است که $\widehat{C}_p'''(Profile)_i^*$ ، $i = 1, 2, \dots, B$ از توزیع نرمال استاندارد پیروی می‌کند. فرض کنید $\widehat{C}_p'''(Profile)^*$ و S^* ، میانگین و انحراف‌معیار B برآورد بوت‌استرپ $C_p'''(Profile)$ باشند که به صورت روابط (۲۱) و (۲۲) محاسبه می‌شوند.

$$\widehat{C}_p'''(Profile)^* = \frac{\sum_{i=1}^B \widehat{C}_p'''(Profile)_i^*}{B}, \tag{21}$$

$$S^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^B (\widehat{C}_p'''(Profile)_i^* - \widehat{C}_p'''(Profile)^*)^2}{B - 1}}. \tag{22}$$

بنابراین یک فاصله اطمینان $100(1 - \alpha)\%$ به روش SB برای $C_p'''(Profile)$ به صورت رابطه (۲۳) می‌باشد.

$$\left(\widehat{C}^* - z_{(1-\frac{\alpha}{2})} S^*, \widehat{C}^* + z_{(1-\frac{\alpha}{2})} S^* \right). \tag{23}$$

که در آن $z_{(1-\frac{\alpha}{2})}$ برابر با چندک $(1 - \frac{\alpha}{2})$ از توزیع نرمال استاندارد است.

۲.۵. فاصله اطمینان بوت‌استرپ صدکی

در این روش بر اساس مجموعه مرتب‌شده برآوردهای بوت‌استرپ $C_p'''(Profile)_i^*, i = 1, 2, \dots, B$ ، فاصله اطمینان $100(1 - \alpha)\%$ به روش PB برای $C_p'''(Profile)$ به صورت رابطه (۲۴) می‌باشد.

$$\left(\widehat{C}_{(B(\frac{\alpha}{2}))}^*, \widehat{C}_{(B(1-\frac{\alpha}{2}))}^* \right). \tag{24}$$

محاسبه شد. در نهایت، متوسط برآورد شاخص $C_p'''(Profile)$ ، متوسط فاصله اطمینان (\bar{CI}) ، مقادیر AIL، CP و RC برای سه روش SB، PB و BCPB، در B تکرار و ۱۰۰۰ اجرا محاسبه شد. نتایج در جدول ۹، ارائه شده است. با توجه به نتایج جدول ۹، فواصل اطمینان بوتاسترپ $C_p'''(Profile)$ به روش SB، با پوشش نسبی بالاتر نسبت به دو روش دیگر (در اکثر حالت‌های شبیه‌سازی)، بهتر عمل می‌کند. علاوه بر این مشاهده می‌شود با افزایش تعداد نمونه‌های پروفایل، معیار پوشش نسبی (RC) بهبود می‌یابد.

بخش ۲.۴ بحث شد، برحسب معیار پوشش نسبی^۱ (RC) که به صورت نسبت درصد پوشش دهی^۲ (CP) به متوسط طول فاصله اطمینان^۳ (AIL) تعریف می‌شود، با استفاده از مطالعه شبیه‌سازی بررسی می‌شود. در این مطالعه، بر اساس مدل معرفی شده، مجموعه داده نمونه اصلی به ازای انحراف معیار مختلف خطا شامل هر یک از سطوح متغیر مستقل، به تعداد نمونه‌های مختلف (m) شامل ۲۵، ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ تولید شد. سپس به تعداد $B = ۱۰۰۰$ نمونه بوتاسترپی از نمونه اولیه تولید شد و فواصل اطمینان بوتاسترپ ۹۵٪ به سه روش معرفی شده SB، PB و BCPB

جدول ۹- نتایج شبیه‌سازی فواصل اطمینان بوتاسترپ ۹۵٪

روش‌های بوتاسترپ						$C_p'''(Profile)$	m	حالت‌های شبیه‌سازی
BCPB		PB		SB				
RC	\bar{CI}	RC	\bar{CI}	RC	\bar{CI}	مقدار واقعی	برآورد شده	
۴/۴۳۰	(۰/۶۶۵، ۰/۸۷۵)	۴/۴۴۸	(۰/۶۶۴، ۰/۸۷۴)	۴/۴۲۹	(۰/۶۵۶، ۰/۸۶۶)	۰/۷۶۱	۲۵	$Y_{ij} = 3 + 2X_i + \epsilon_{ij}$ $\epsilon_{ij} \sim N(0, (0.18)^2)$
۶/۲۱۱	(۰/۶۸۷، ۰/۸۳۹)	۶/۲۴۵	(۰/۶۸۸، ۰/۸۳۹)	۶/۲۲۴	(۰/۶۸۴، ۰/۸۳۵)	۰/۷۵۹	۵۰	
۸/۸۱۴	(۰/۷۰۵، ۰/۸۱۲)	۸/۸۴۴	(۰/۷۰۵، ۰/۸۱۲)	۸/۸۱۸	(۰/۷۰۳، ۰/۸۱۰)	۰/۷۵۷	۱۰۰	
۱۲/۶۴۵	(۰/۷۲۰، ۰/۷۹۶)	۱۲/۵۷۵	(۰/۷۲۰، ۰/۷۹۶)	۱۲/۵۸۶	(۰/۷۱۹، ۰/۷۹۵)	۰/۷۵۷	۲۰۰	
۴/۴۱۵	(۰/۶۱۸، ۰/۸۲۷)	۴/۴۲۸	(۰/۶۱۷، ۰/۸۲۶)	۴/۴۵۴	(۰/۶۰۷، ۰/۸۱۸)	۰/۷۱۳	۲۵	$Y_{ij} = 3 + 2X_i + \epsilon_{ij}$ $\epsilon_{ij} \sim N(0, (0.18)^2)$
۶/۲۹۱	(۰/۶۴۱، ۰/۷۹۱)	۶/۲۹۲	(۰/۶۴۱، ۰/۷۹۱)	۶/۲۹۴	(۰/۶۳۴، ۰/۷۸۷)	۰/۷۱۲	۵۰	
۸/۸۱۸	(۰/۶۵۸، ۰/۷۶۵)	۸/۸۱۴	(۰/۶۵۸، ۰/۷۶۵)	۸/۸۴۴	(۰/۶۵۶، ۰/۷۶۳)	۰/۷۱۰	۱۰۰	
۱۲/۵۳۲	(۰/۶۷۱، ۰/۷۴۷)	۱۲/۴۶۲	(۰/۶۷۱، ۰/۷۴۷)	۱۲/۴۲۶	(۰/۶۷۰، ۰/۷۴۶)	۰/۷۰۸	۲۰۰	
۴/۴۶۶	(۰/۵۷۸، ۰/۷۴۶)	۴/۴۷۹	(۰/۵۷۷، ۰/۷۸۶)	۴/۴۹۳	(۰/۵۶۸، ۰/۷۷۸)	۰/۶۷۳	۲۵	$Y_{ij} = 3 + 2X_i + \epsilon_{ij}$ $\epsilon_{ij} \sim N(0, (1.0)^2)$
۶/۴۰۰	(۰/۵۹۸، ۰/۷۳۵)	۶/۴۰۲	(۰/۵۹۸، ۰/۷۴۶)	۶/۴۳۲	(۰/۵۹۳، ۰/۷۴۲)	۰/۶۶۷	۵۰	
۸/۹۰۱	(۰/۶۱۶، ۰/۷۲۲)	۸/۹۳۶	(۰/۶۱۶، ۰/۷۲۲)	۸/۹۴۸	(۰/۶۱۴، ۰/۷۲۰)	۰/۶۶۷	۱۰۰	
۱۲/۶۹۴	(۰/۶۲۸، ۰/۷۰۳)	۱۲/۷۲۲	(۰/۶۲۸، ۰/۷۰۳)	۱۲/۶۴۷	(۰/۶۲۷، ۰/۷۰۲)	۰/۶۶۵	۲۰۰	
۴/۵۷۸	(۰/۵۴۰، ۰/۷۴۵)	۴/۵۹۸	(۰/۵۳۹، ۰/۷۴۳)	۴/۶۲۷	(۰/۵۳۰، ۰/۷۳۵)	۰/۶۳۳	۲۵	$Y_{ij} = 3 + 2X_i + \epsilon_{ij}$ $\epsilon_{ij} \sim N(0, (1.1)^2)$
۶/۲۸۵	(۰/۵۵۸، ۰/۷۰۴)	۶/۳۱۷	(۰/۵۵۸، ۰/۷۰۴)	۶/۳۳۶	(۰/۵۵۴، ۰/۷۰۰)	۰/۶۲۷	۵۰	
۹/۰۳۳	(۰/۵۷۵، ۰/۶۷۹)	۹/۰۴۴	(۰/۵۷۵، ۰/۶۸۰)	۸/۹۶۷	(۰/۵۷۳، ۰/۶۷۷)	۰/۶۲۵	۱۰۰	
۱۲/۹۰۵	(۰/۵۸۹، ۰/۶۶۳)	۱۲/۸۶۳	(۰/۵۸۹، ۰/۶۶۳)	۱۲/۸۳۴	(۰/۵۸۸، ۰/۶۶۲)	۰/۶۲۵	۲۰۰	
۴/۶۶۹	(۰/۵۰۶، ۰/۷۰۷)	۴/۷۰۲	(۰/۵۰۵، ۰/۷۰۵)	۴/۷۲۶	(۰/۴۹۶، ۰/۶۹۶)	۰/۵۹۶	۲۵	$Y_{ij} = 3 + 2X_i + \epsilon_{ij}$ $\epsilon_{ij} \sim N(0, (1.2)^2)$
۶/۴۲۲	(۰/۵۲۴، ۰/۶۶۶)	۶/۴۵۹	(۰/۵۲۳، ۰/۶۶۶)	۶/۴۵۹	(۰/۵۱۹، ۰/۶۶۲)	۰/۵۹۰	۵۰	
۹/۲۳۷	(۰/۵۴۰، ۰/۶۴۲)	۹/۲۳۷	(۰/۵۴۰، ۰/۶۴۲)	۹/۱۵۹	(۰/۵۳۸، ۰/۶۴۰)	۰/۵۸۹	۱۰۰	
۱۲/۹۹۵	(۰/۵۵۴، ۰/۶۲۷)	۱۳/۰۶۵	(۰/۵۵۴، ۰/۶۲۷)	۱۳/۱۰۳	(۰/۵۵۳، ۰/۶۲۶)	۰/۵۸۹	۲۰۰	

³ Average Interval Length (AIL)

¹ Relative Coverage (RC)

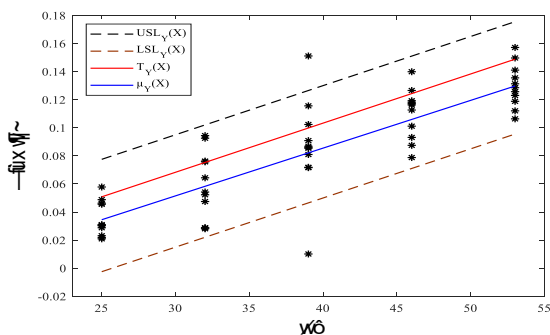
² Coverage Percentage (CP)

جدول ۱۰- داده‌های تحت کنترل صنعت چرم [۳۷]

پروفایل	دما				
	۲۵	۳۲	۳۹	۴۶	۵۳
۱	۰/۰۲۱۸۰	۰/۰۲۸۷۸	۰/۰۹۰۸۳	۰/۱۰۱۱۱	۰/۱۲۵۶۶
۲	۰/۰۳۰۲۰	۰/۰۵۴۲۲	۰/۰۷۱۸۳	۰/۱۱۷۱۶	۰/۱۳۱۲۷
۳	۰/۰۲۸۸۰	۰/۰۲۸۶۸	۰/۰۸۵۷۵	۰/۰۹۳۱۰	۰/۱۳۵۴۹
۴	۰/۰۳۰۶۰	۰/۰۷۵۷۱	۰/۱۰۱۱۱	۰/۱۱۶۲۴	۰/۱۲۸۵۰
۵	۰/۰۴۸۸۰	۰/۰۲۸۰۶	۰/۰۸۵۴۹	۰/۱۱۸۱۲	۰/۱۱۸۸۰
۶	۰/۰۳۱۰۰	۰/۰۹۴۳۸	۰/۰۷۱۵۷	۰/۱۱۹۲۲	۰/۱۴۹۶۵
۷	۰/۰۲۳۱۰	۰/۰۷۶۲۶	۰/۰۸۰۹۳	۰/۱۳۹۸۸	۰/۱۵۷۱۴
۸	۰/۰۴۵۵۰	۰/۰۹۲۵۳	۰/۱۵۱۰۹	۰/۰۸۷۴۶	۰/۱۴۱۰۱
۹	۰/۰۲۰۹۰	۰/۰۴۷۴۶	۰/۱۰۲۳۱	۰/۱۲۶۵۱	۰/۱۲۲۹۹
۱۰	۰/۰۵۷۸۰	۰/۰۵۲۲۷	۰/۱۱۵۵۷	۰/۱۱۲۶۱	۰/۱۱۲۰۲
۱۱	۰/۰۴۶۳۰	۰/۰۶۴۳۵	۰/۰۸۶۷۹	۰/۰۷۸۷۷	۰/۱۰۶۳۲

تنظیم شده است که در آن $D_{LY}(X) = 1/4924$ و $D_{UY}(X) = 0/7476$.

از آنجایی که پساب رنگ کمتر در هر یک از سطوح دما برای تولید کفش‌های چرمی با کیفیت بالا مطلوب است، تلورانس فرآیند نامتقارن است. در واقع انحراف متغیر پاسخ از مقدار هدف به سمت حد بالای مشخصات طراحی نسبت به حد پایین مشخصات طراحی کمتر قابل تحمل است. شکل ۱، حدود تابعی داده‌های فرآیند رنگ‌رزی چرم در تولید کفش را نشان می‌دهد.



شکل ۱- حدود تابعی در فرآیند مثال صنعت چرم

بررسی فرض نرمال بودن داده‌های فرآیند مثال صنعت چرم (جدول ۱۰) از طریق بررسی نرمال بودن باقیمانده‌ها انجام شده است. مقدار P-Value آزمون اندرسون دارلینگ^۱ در سطح اطمینان ۰/۰۵٪، برابر ۰/۲۷۹ به دست آمد که دلیلی برای رد فرض نرمال بودن وجود ندارد. مقدار برآورد نقطه‌ای شاخص توانایی

۶. مثال کاربردی

در این بخش با استفاده از مجموعه داده‌های صنعت چرم جمع‌آوری شده توسط امیری و همکاران [۳۷]، کاربرد شاخص C_p''' (Profile) را نشان می‌دهیم. چرم یک ماده محبوب برای تولید کفش است و کیفیت آن برای رضایت مشتری بسیار مهم است. فرآیند رنگ‌رزی روی این کیفیت تأثیر می‌گذارد؛ زیرا هنگامی که دمای کفش بالا می‌رود، پاها شروع به عرق کردن می‌کنند و رنگ کفش، جوراب‌ها را لکه‌دار و کثیف می‌کند. در نتیجه، ارزیابی عملکرد فرآیند رنگ‌رزی چرم در تولید کفش ضروری است. در فرآیند رنگ‌رزی، رابطه بین پساب رنگ و دما از پروفایل خطی ساده پیروی می‌کند. متغیر پاسخ پساب رنگ و متغیر مستقل دما با پنج سطح ۲۵، ۳۲، ۳۹، ۴۶ و ۵۳ درجه سانتی‌گراد است.

مجموعه‌ای از داده‌های صنعت چرم آمده در جدول ۱۰ نشان می‌دهد که بر اساس ۱۱ نمونه پروفایل تحت کنترل، پروفایل مرجع به صورت $Y = -0/0505 + 0/034X + \epsilon$ است؛ که در آن جملات خطا توزیع نرمال با میانگین صفر و انحراف معیار ۰/۰۰۰۵ دارند. حدود مشخصات طراحی تابعی متغیر پاسخ (پساب رنگ) در سطوح مختلف متغیر مستقل (دما) به صورت $LSL_Y(X) = -0/09 - 0/035X$ و $USL_Y(X) = -0/01 - 0/035X$ تعریف شده است [۷]. خط هدف تابعی به صورت $T_Y(X) = -0/0367 - 0/025X$

¹ Anderson-Darling

- simple linear profiles. *Quality Engineering*, 26(3), 311–318.
- [3] Noorossana, R., Saghaei, A., & Amiri, A. (2011). Statistical Analysis of Profile Monitoring. In *Statistical Analysis of Profile Monitoring*. Hoboken (NJ): John Wiley & Sons.
- [4] Hosseinifard, S. Z., & Abbasi, B. (2012a). Evaluation of process capability indices of linear profiles. *International Journal of Quality and Reliability Management*, 29(2), 162–176.
- [5] Hosseinifard, S. Z., & Abbasi, B. (2012b). Process capability analysis in non normal linear regression profiles. *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, 41(10), 1761–1784.
- [6] Ebadi, M., & Amiri, A. (2012). Evaluation of process capability in multivariate simple linear profiles. *Scientia Iranica*, 19(6), 1960–1968.
- [7] Nemati Keshteli, R., Baradaran Kazemzadeh, R., Amiri, A., & Noorossana, R. (2014a). Developing functional process capability indices for simple linear profile. *Scientia Iranica*, 21(3), 1044–1050.
- [8] Karimi Ghartemani, M., Noorossana, R., & Niaki, S. T. A. (2016). A New Approach in Capability Analysis of Processes Monitored by a Simple Linear Regression Profile. *Quality and Reliability Engineering International*, 32(2), 209–221.
- [9] Chiang, J. Y., Lio, Y. L., & Tsai, T. R. (2017). MEWMA Control Chart and Process Capability Indices for Simple Linear Profiles with Within-profile Autocorrelation. *Quality and Reliability Engineering International*, 33(5), 1083–1094.
- [10] Abbasi Ganji, Z., & Sadeghpour Gildeh, B. (2021). A new process capability index for simple linear profile. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 1–16. <https://doi.org/10.1080/03610926.2021.1980804>
- [11] Pakzad, A., Razavi, H., & Sadeghpour Gildeh, B. (2021). Developing loss-based functional process capability indices for

$C_p'''(Profile)$ برابر $0/۲۶۶۶$ و فواصل اطمینان ۹۵% به سه روش بوتاسترپ SB، PB و BCPB به ترتیب معادل $(0/۳۸۳۰)$ ، $(0/۲۰۵۶)$ ، $(0/۳۸۰۴)$ و $(0/۲۰۹۵)$ و $(0/۳۷۴۸)$ ، $(0/۲۰۲۸)$ می‌باشند. با توجه به شکل ۱، میانگین فرآیند از مقدار هدف خود فاصله دارد. از آنجایی که مقدار شاخص کمتر از یک بوده و هیچ‌کدام از فواصل اطمینان شامل عدد یک نمی‌باشد، نتیجه می‌گیریم که فرآیند ناتوان است. بنابراین متخصصین کیفیت می‌بایست اقداماتی در جهت تنظیم میانگین فرآیند از نقطه‌نظر انحراف از هدف، انجام دهند.

۷. نتیجه‌گیری

در این مقاله، شاخص توانایی $C_p'''(Profile)$ برای پروفایل خطی ساده معرفی شد و عملکرد آن در مقایسه با شاخص‌های موجود مورد بررسی قرار گرفت. نتایج مطالعات شبیه‌سازی نشان می‌دهد شاخص تابعی جدید عملکرد بهتری از نقطه‌نظر معیارهای MAE، MSE و APE دارد. بر اساس مطالعات شبیه‌سازی و با استفاده از معیار APE، حداقل تعداد نمونه‌های پروفایل که می‌تواند خطای برآورد از پیش تعیین‌شده را تحت سطوح مختلف اطمینان ارضاء کند، برای شاخص توانایی $C_p'''(Profile)$ محاسبه شد. همچنین فواصل اطمینان بوتاسترپ به سه روش SB، PB و BCPB برای شاخص پیشنهادی، به دست آمد و عملکرد آن‌ها با استفاده از شبیه‌سازی بررسی شد. نتایج حاکی از آن است که فواصل اطمینان بوتاسترپ به روش SB بهترین عملکرد را از نظر معیار پوشش نسبی دارد. برای نشان دادن کاربرد شاخص پیشنهادی، مثال واقعی ارزیابی توانایی فرآیند رنگرزی در تولید کفش‌های چرمی ارائه شد. تحقیقات آتی شامل توسعه شاخص توانایی $C_p'''(Profile)$ در سایر انواع پروفایل‌ها مانند پروفایل‌های چندمتغیره، چندجمله‌ای، غیرخطی و همچنین در فرآیندهای چندمرحله‌ای با مشخصه کیفی پروفایل است.

۸- مراجع

- [1] Ebadi, M., & Shahriari, H. (2013). A process capability index for simple linear profile. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 64(5–8), 857–865.
- [2] Wang, F. K. (2014). A process yield for

- (2021). Process capability vector for multivariate nonlinear profiles. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 1–30.
<https://doi.org/10.1080/00949655.2021.1991926>
- [21] Guevara G, R. D., & Alejandra López, T. (2022). Process capability vector for multivariate nonlinear profiles. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 92(6), 1292–1321.
- [22] Abbasi Ganji, Z., & Sadeghpour Gildeh, B. (2016). A class of process capability indices for asymmetric tolerances. *Quality Engineering*, 28(4), 441–454.
- [23] Zhang, N. F., Stenback, G. A., & Wardrop, D. M. (1990). Interval estimation of process capability index Cpk. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 19(12), 4455–4470.
- [24] Chou, Y. M., Owen, D. B., & Borrego, A. S. A. (1990). Lower confidence limits on process capability indices. *Journal of Quality Technology*, 22(3), 223–229.
- [25] Kushler, R. H., & Hurley, P. (1992). Confidence bounds for capability indices. *Journal of Quality Technology*, 24(4), 188–195.
- [26] Frankllin, L. A., & Wasserman, G. S. (1991). Bootstrap confidence interval estimation of Cpk: an introduction. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 20(1), 231–242.
- [27] Balamurali, S., & Kalyanasundaram, M. (2002). Bootstrap lower confidence limits for the process capability indices Cp, Cpk and Cpm. *International Journal of Quality and Reliability Management*, 19(8), 1088–1097.
- [28] Jafarian, N.S., Raissi, S. & Amiri, A. (2013). Bootstrap confidence intervals for AR(1) autocorrelated process capability indices. *Journal of Quality Engineering and Management*, 2(4), 237–249. (In Persian)
- [29] Jafarian, N.S., & Raissi, S. (2015). Interval estimation of Cpk for autocorrelated data in the presence of measurement error. *Journal of Quality Engineering and Management*, 1–17.
<https://doi.org/10.1080/08982112.2022.2129025>
- [12] Pakzad, A., & Basiri, E. (2022). A new incapability index for simple linear profile with asymmetric tolerances. *Quality Engineering*, 1–17.
<https://doi.org/10.1080/08982112.2022.2129025>
- [13] Nemati Keshteli, R., Baradaran Kazemzadeh, R., Amiri, A., & Noorossana, R. (2014b). Functional process capability indices for circular profile. *Quality and Reliability Engineering International*, 30(5), 633–644.
- [14] Wang, F. K. (2015). Measuring the process yield for circular profiles. *Quality and Reliability Engineering International*, 31(4), 579–588.
- [15] Guevara, R. D., Vargas, J. A., & Castagliola, P. (2016). Evaluation of process capability in non-linear profiles using Hausdorff distance. *Quality Technology & Quantitative Management*, 13(1), 1–15.
- [16] Rezaye Abbasi Charkhi, M., Aminnayeri, M., & Amiri, A. (2016). Process Capability Indices for Logistic Regression Profile. *Quality and Reliability Engineering International*, 32(5), 1655–1661.
- [17] Alevizakos, V., Koukouvinos, C., & Castagliola, P. (2018). Process capability index for Poisson regression profile based on the Spmk index. *Quality Engineering*, 1–9.
<https://doi.org/https://doi.org/10.1080/08982112.2018.1523426>
- [18] Alevizakos, V., Koukouvinos, C., & Lappa, A. (2019). Comparative study of the Cp and Spmk indices for logistic regression profile using different link functions. *Quality Engineering*, 31(3), 453–462.
- [19] Alevizakos, V., & Koukouvinos, C. (2020). Evaluation of process capability in gamma regression profiles. *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, 1–16.
<https://doi.org/10.1080/03610918.2020.1758941>
- [20] Guevara, R. D., & Alejandra López, T.

- [34] Chen, C. C., Lai, C. M., & Nien, H. Y. (2010). Measuring process capability index Cpm with fuzzy data. *Quality and Quantity*, 44(3), 529–535.
- [35] Kang, L., & Albin, S. L. (2000). On-line Monitoring When the Process Yields a Linear Profile. *Journal of Quality Technology*, 32(4), 418–426.
- [36] Efron, B. (1982). *The jackknife, the bootstrap and other resampling plans*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [37] Amiri, A., Zand, A., & Soudbakhsh, D. (2011). Monitoring Simple Linear Profiles in the Leather Industry (A Case Study). *International Conference on Industrial Engineering and Operations Management*, 891–897.
- [30] Jafarian N, S., Raissi, S., & Amiri, A. (2016). Performance comparison of bootstrap techniques in interval estimation of process capability indices in AR(1) processes. *International Journal of Industrial Engineering & Production Management*, 27(3), 419-431. (In Persian)
- [31] Raissi, S., Jafarian Namin, S., & Amiri, A. (2017). Interval Estimation of Cpm & Cpmk in AR(1) Process Using Circular Block Bootstrap Method. *Sharif Journal of Industrial Engineering & Management*, 32.1(2.2), 89-98. (In Persian)
- [32] Kutner, M., C. J. Nachtsheim, J. Neter, & Li, W. (1996). *Applied Linear Regression Models* (Fifth). USA: McGraw-Hill, Boston.
- [33] Kotz, S., & Johnson, N. L. (1993). Process Capability Indices. In *Chapman and Hall*. Chapman and Hall.

Developing a New Functional Capability Index C_p''' (Profile) for a Simple Linear Profile with Asymmetric Tolerance

Aylin Pakzad^{19*}

* Assistant Professor, Department of Industrial Engineering, Kosar University of Bojnord, Bojnord, Iran.

Fahimeh Tanhaie

Assistant Professor, Department of Industrial Engineering, Kosar University of Bojnord, Bojnord, Iran.

Abstract: In some practical applications, the quality of a product or process is defined by a profile, which is a relationship between a response variable and one or more explanatory variables. Simple linear profiles (SLPs) are one of the various types of profiles in which the product or process quality is related to a simple linear function between a response and an explanatory variable. In this article, a functional capability index for a simple linear profile with asymmetric tolerance is introduced. The performance of the proposed index and existing ones (C_{ppM}''' and $C_{pp}''(Profile)$) are studied using numerical examples and simulation studies in terms of mean absolute error (MAE), mean square error (MSE) and absolute percentage error (APE) metrics. The results show that the new index performs better than the two existing indices. Furthermore, confidence intervals for the proposed index are constructed using three bootstrap methods, and their performance is evaluated using simulation studies. A real-world case study is presented to demonstrate the application of the proposed index.

Keywords: Simple linear profile; Process incapability indices; Asymmetric tolerances; Functional approach.

1. Introduction

In some cases, related to the statistical process control, the quality of a process or product is characterized by a simple linear function relationship between a response variable and an explanatory variable. This kind of model is called simple linear profile (SLP). Considering m random samples of size n are taken from the process, the general model of a SLP when the process is under statistical control is represented in equation (1).

$$Y_{ij} = A_0 + A_1 X_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (1)$$

where ε_{ij} are normally and independently distributed with the mean zero and variance σ^2 and X_i is explanatory variable that is assumed to has fix values for each sample. The profile parameters including A_0 , A_1 and σ^2 are unknown and estimated by $a_0 = \frac{\sum_{j=1}^m a_{0j}}{m}$, $a_1 =$

¹⁹ Corresponding author: a.pakzad@kub.ac.ir

$\frac{\sum_{j=1}^m a_{1j}}{m}$, and $\sigma^2 = \frac{\sum_{j=1}^m \sigma_j^2}{m}$, respectively. Where, the values of A_0 , A_1 and, σ^2 for profile sample j could be estimated using maximum likelihood method, which can be seen in [1]. Numerous studies and works have been conducted in the literature on developing process capability indices (PCIs) for SLPs with symmetric tolerance, with few studies on PCIs for SLPs with asymmetric tolerance. C''_{pp} (Profile) and C'''_{ppM} are the most recent process incapability and capability indices for SLP, presented by by Pakzad and basiri (2022) [2] and Abbasi Ganji and Sadeghpour Gildeh (2021) [3], respectively. The main issue with the functional incapability index C''_{pp} (Profile) is when the process mean is on the upper or lower specification limits. Assume that two processes **A** and **B** have the same specification limits (SLs) and the target line is near the upper specification limit (USL). Let these processes have the same standard deviation σ , but **A**'s process mean is on the upper specification limit (USL), i.e., $\mu_{Y_A}(X) = USL_Y(X)$, and **B**'s process mean is on the lower specification limit (LSL), i.e., $\mu_{Y_B}(X) = LSL_Y(X)$. Both processes appear to have the same expected percentage of non-conforming products, but **A**'s process mean is closer to the target line than **B**'s process mean, so process **A** should have a lower incapability score than process **B** while the values of C''_{pp} (Profile) for both of them are equal.

On the other hand, although the process capability index C'''_{ppM} correctly evaluates process capability when the process mean is on one of the SLs due to the presence of the factor \hat{A}_i^* , it is defined by the response variable at only n levels of the explanatory variable, resulting in the loss of a large amount of sample profile information. As a result of the problems associated with the use of the functional process incapability index C''_{pp} (Profile) and the weaknesses mentioned in the process capability index C'''_{ppM} , we propose the new functional capability index C'''_p (Profile) in the following section, which fixes the problems mentioned in the C''_{pp} (Profile) index and outperforms the C'''_{ppM} process capability index.

2. New capability index C'''_p (Profile) for SLP with asymmetric tolerance

Let $\mu_Y(X)$, $LSL_Y(X)$, and $USL_Y(X)$ are functional form of mean, lower SL, and upper SL of response variable, respectively. All of them are functions of explanatory variable $x \in [x_l, x_u]$, where x_l and x_u are the minimum and maximum value of the explanatory variable, respectively. The new index C'''_p (Profile) based on $C'''_p(u, v)$ proposed by Abbasi Ganji and Sadeghpour Gildeh (2016) [4] for SLPs is obtained as equation (2).

$$\hat{C}'''_p(\text{Profile}) = \frac{\int_{x_l}^{x_u} (d_Y^*(X) - \hat{A}_Y^*(X)) dX}{\int_{x_l}^{x_u} \left(3\sqrt{\hat{\sigma}^2 + \hat{A}_Y^2(X)} \right) dX}, \quad (2)$$

where

$$d_Y^*(X) = \min\{D_{lY}(X), D_{uY}(X)\} = \min\{(T_Y(X) - LSL_Y(X)), (USL_Y(X) - T_Y(X))\}, \quad (3)$$

$$\hat{A}^*_Y(X) = \begin{cases} \frac{(T_Y(X) - \hat{\mu}_Y(X))^2}{D_{l_Y}(X)} & \text{if } \hat{\mu}_Y(X) \leq T_Y(X) \\ \frac{(\hat{\mu}_Y(X) - T_Y(X))^2}{D_{u_Y}(X)} & \text{if } \hat{\mu}_Y(X) > T_Y(X) \end{cases}, \hat{A}_Y(X) \tag{4}$$

$$= \begin{cases} \frac{d_Y(X) (T_Y(X) - \hat{\mu}_Y(X))}{D_{l_Y}(X)} & \text{if } \hat{\mu}_Y(X) \leq T_Y(X) \\ \frac{d_Y(X) (\hat{\mu}_Y(X) - T_Y(X))}{D_{u_Y}(X)} & \text{if } \hat{\mu}_Y(X) > T_Y(X) \end{cases}$$

to get the index C_p''' (Profile), we have to determine the location of $\mu_Y(X)$ relative to the $T_Y(X)$. With respect to whether $\mu_Y(X)$ relative to the $T_Y(X)$ intersect within the range of the explanatory variable or not there are following four situations:

- When $\mu_Y(X) > T_Y(X), X \in [x_l, x_u]$, we have \hat{C}_p''' (Profile) =

$$\frac{\int_{x_l}^{x_u} \left(d_Y^*(X) - \frac{(\hat{\mu}_Y(X) - T_Y(X))^2}{D_{u_Y}(X)} \right) dX}{\int_{x_l}^{x_u} \left(3 \sqrt{\hat{\sigma}^2 + \left(\frac{d_Y(X) (\hat{\mu}_Y(X) - T_Y(X))}{D_{u_Y}(X)} \right)^2} \right) dX}$$

- When $\mu_Y(X) \leq T_Y(X), X \in [x_l, x_u]$, we have \hat{C}_p''' (Profile) =

$$\frac{\int_{x_l}^{x_u} \left(d_Y^*(X) - \frac{(T_Y(X) - \hat{\mu}_Y(X))^2}{D_{l_Y}(X)} \right) dX}{\int_{x_l}^{x_u} \left(3 \sqrt{\hat{\sigma}^2 + \left(\frac{d_Y(X) (T_Y(X) - \hat{\mu}_Y(X))}{D_{l_Y}(X)} \right)^2} \right) dX}$$

- When $\mu_Y(X) > T_Y(X), X \in [x_l, x_m]$ and $\mu_Y(X) \leq T_Y(X), X \in [x_m, x_u]$, we have

$$\hat{C}_p'''$$
 (Profile) =
$$\frac{\int_{x_l}^{x_m} \left(d_Y^*(X) - \frac{(\hat{\mu}_Y(X) - T_Y(X))^2}{D_{u_Y}(X)} \right) dX + \int_{x_m}^{x_u} \left(d_Y^*(X) - \frac{(T_Y(X) - \hat{\mu}_Y(X))^2}{D_{l_Y}(X)} \right) dX}{\int_{x_l}^{x_m} \left(3 \sqrt{\hat{\sigma}^2 + \left(\frac{d_Y(X) (\hat{\mu}_Y(X) - T_Y(X))}{D_{u_Y}(X)} \right)^2} \right) dX + \int_{x_m}^{x_u} \left(3 \sqrt{\hat{\sigma}^2 + \left(\frac{d_Y(X) (T_Y(X) - \hat{\mu}_Y(X))}{D_{l_Y}(X)} \right)^2} \right) dX}$$

- When $\mu_Y(X) \leq T_Y(X), X \in [x_l, x_m]$ and $\mu_Y(X) > T_Y(X), X \in [x_m, x_u]$, we have \hat{C}_p''' (Profile) =

$$\frac{\int_{x_l}^{x_m} \left(d_Y^*(X) - \frac{(T_Y(X) - \hat{\mu}_Y(X))^2}{D_{l_Y}(X)} \right) dX + \int_{x_m}^{x_u} \left(d_Y^*(X) - \frac{(\hat{\mu}_Y(X) - T_Y(X))^2}{D_{u_Y}(X)} \right) dX}{\int_{x_l}^{x_m} \left(3 \sqrt{\hat{\sigma}^2 + \left(\frac{d_Y(X) (T_Y(X) - \hat{\mu}_Y(X))}{D_{l_Y}(X)} \right)^2} \right) dX + \int_{x_m}^{x_u} \left(3 \sqrt{\hat{\sigma}^2 + \left(\frac{d_Y(X) (\hat{\mu}_Y(X) - T_Y(X))}{D_{u_Y}(X)} \right)^2} \right) dX}$$

It should be noted that the new functional capability index has the same interpretation as the traditional ones. In other words, if C_p''' (Profile) ≥ 1 , a process is called “capable”, and if C_p''' (Profile) < 1 is “incapable”.

2.1. Comparative example

The numerical example discussed in [5] is used to demonstrate the performance of the proposed index in comparison to $C_{pp}''(Profile)$ and C_{ppM}''' . In this example, the quality of product or process is characterized by a model as $Y = 3 + 2X + \varepsilon$, where $\varepsilon \sim N(0,1)$ and the explanatory variable can take the values 2, 4, 6, and 8; with the SLs and target lines as $LSL_Y(X) = -2.2 + 2.2825 X$, $LSL_Y(X) = 5.3 + 2.2825 X$, and $T_Y(X) = 2.5 + 2.2825 X$, respectively. To compare, different values for the process mean under $\sigma = 1$ are considered, and the values of the C_{ppM}''' , $C_{pp}''(Profile)$ and $C_p'''(Profile)$ are obtained and listed in Table 1.

Table 1. A comparison among C_{ppM}''' , $C_{pp}''(Profile)$, and $C_p'''(Profile)$

A_0	A_1	σ^2	$T_Y(X) = 2.5 + 2.2825X$		
			Existing indices		Proposed index
			C_{ppM}'''	$C_{pp}''(Profile)$	$C_p'''(Profile)$
5.3	2.2825	1	8.0488e-04	17.2911	4.68E-17
5.25	2.2825	1	0.0095	16.7197	0.0087
5	2.2825	1	0.0550	14.0172	0.0542
4.75	2.2825	1	0.1050	11.572	0.1041
4.5	2.2825	1	0.1608	9.3843	0.1599
4.25	2.2825	1	0.2241	7.4539	0.2232
4	2.2825	1	0.2975	5.7809	0.2966
3.75	2.2825	1	0.3841	4.3653	0.3832
3.5	2.2825	1	0.4878	3.207	0.4872
3.25	2.2825	1	0.6116	2.3062	0.6112
3	2.2825	1	0.7507	1.6627	0.7508
2.75	2.2825	1	0.8778	1.2767	0.8780
2.5	2.2825	1	0.9333	1.148	0.9333
2.25	2.2825	1	0.9108	1.1936	0.9110
2	2.2825	1	0.8499	1.3307	0.8504
1.75	2.2825	1	0.7658	1.559	0.7667
1.5	2.2825	1	0.6731	1.8788	0.6741
1.25	2.2825	1	0.5813	2.2898	0.5824
1	2.2825	1	0.4950	2.7922	0.4961
0.75	2.2825	1	0.4159	3.386	0.4170
0.5	2.2825	1	0.3440	4.0711	0.3450
0.25	2.2825	1	0.2785	4.8476	0.2795
0	2.2825	1	0.2187	5.7154	0.2196
-0.25	2.2825	1	0.1638	6.6746	0.1646
-0.5	2.2825	1	0.1130	7.7251	0.1137
-0.75	2.2825	1	0.0656	8.8669	0.0663
-1	2.2825	1	0.0211	10.1002	0.0218
-1.25	2.2825	1	-0.0209	11.4247	-0.0203
-1.5	2.2825	1	-0.0608	12.8406	-0.0602
-1.75	2.2825	1	-0.0989	14.3479	-0.0983
-2	2.2825	1	-0.1355	15.9465	-0.1349
-2.2	2.2825	1	-0.1637	17.2911	-0.1632

In Table 1, consider two process **A** and **B** with $\mu_{Y_A}(X) = USL_Y(X)$ and $\mu_{Y_B}(X) = USL_Y(X)$, respectively. As mentioned before, the ratio of non-conforming items of the two processes **A** and **B** is equal, but since process **A** is closer to the target line, is more capable than process **B**. The values of process capability indices C_{ppM}''' are 8.0488e-04 and -0.1637 and the values of $C_p'''(Profile)$ are 4.68E-17 and -0.1632, respectively, while $C_{pp}''(Profile) = 17.2911$ for both of them. In other words, if the capability of process **A** is zero, then the capability of the process **B** correctly has negative value. Therefore, the values of C_{ppM}''' and $C_p'''(Profile)$ seem more reasonable in all cases of Table 1.

2.2. Simulation study

To evaluate and compare the performance of the new index $C_p'''(Profile)$ and existing index C_{ppM}''' , a simulation model is programmed in MATLAB environment. The in-control model given by Kang and Albin [5], i.e. $Y_{ij} = 3 + 2X_i + \varepsilon_{ij}$, $\varepsilon_{ij} \sim N(0,1)$ with four fixed X_i -values of 2, 4, 6, and 8 are considered to generate necessary data. The previous SLs discussed in subsection 2.1 are considered. We investigate the performance of C_{ppM}''' and $C_p'''(Profile)$ under different numbers of profile samples ($m \in \{25, 50, 100, 200\}$) and various values of error term variances, intercept and slope of reference profile based on three criteria: mean absolute error (MAE), mean square error (MSE) and absolute percentage error (APE). For each simulated case, the true values of PCIs are calculated and listed. The number of simulation runs is set to 10000 to yield the estimates. The simulation results are shown in Tables 2 - 4.

Table 2. Simulation results for small shifts in B_0 parameter

Simulated case	Existing index		Proposed index	
	m	C_{ppM}'''	True value	$C_p'''(Profile)$
		True value		Estimated (MAE, MSE, APE)
$Y_{ij} = 13.15 + 2X_i' + \varepsilon_{ij}$	25	0.724	0.726 (0.050, 0.004, 0.069)	0.716 (0.048, 0.004, 0.067)
	50	0.724	0.725 (0.035, 0.002, 0.048)	0.714 (0.034, 0.002, 0.047)
	100	0.724	0.725 (0.024, 0.001, 0.033)	0.714 (0.024, 0.001, 0.033)
	200	0.724	0.724 (0.018, 0.001, 0.024)	0.713 (0.017, 0.001, 0.024)
$Y_{ij} = 13.1 + 2X_i' + \varepsilon_{ij}$	25	0.714	0.715 (0.050, 0.004, 0.072)	0.700 (0.049, 0.004, 0.069)
	50	0.714	0.715 (0.037, 0.002, 0.053)	0.699 (0.036, 0.002, 0.050)
	100	0.714	0.714 (0.028, 0.001, 0.053)	0.698 (0.027, 0.001, 0.038)
	200	0.714	0.714 (0.022, 0.001, 0.032)	0.697 (0.022, 0.001, 0.031)
$Y_{ij} = 13 + 2X_i' + \varepsilon_{ij}$	25	0.689	0.693 (0.047, 0.004, 0.068)	0.668 (0.044, 0.003, 0.066)
	50	0.689	0.691 (0.032, 0.002, 0.047)	0.666 (0.031, 0.002, 0.046)
	100	0.689	0.690 (0.023, 0.001, 0.034)	0.666 (0.022, 0.001, 0.033)
	200	0.689	0.690 (0.016, 0.000, 0.024)	0.665 (0.015, 0.000, 0.023)
$Y_{ij} = 12.9 + 2X_i' + \varepsilon_{ij}$	25	0.663	0.665 (0.051, 0.004, 0.081)	0.634 (0.049, 0.004, 0.074)
	50	0.663	0.665 (0.041, 0.003, 0.064)	0.633 (0.039, 0.002, 0.059)
	100	0.663	0.663 (0.034, 0.002, 0.055)	0.632 (0.034, 0.002, 0.051)
	200	0.663	0.663 (0.032, 0.001, 0.051)	0.632 (0.031, 0.001, 0.047)
$Y_{ij} = 12.85 + 2X_i' + \varepsilon_{ij}$	25	0.649	0.652 (0.051, 0.004, 0.083)	0.617 (0.049, 0.004, 0.075)
	50	0.649	0.651 (0.042, 0.003, 0.067)	0.616 (0.040, 0.002, 0.062)
	100	0.649	0.650 (0.036, 0.002, 0.059)	0.616 (0.035, 0.002, 0.055)
	200	0.649	0.649 (0.034, 0.002, 0.055)	0.616 (0.034, 0.001, 0.052)

Table 3. Simulation results for small shifts in B_1 parameter

Simulated case	Existing index		Proposed index		
	m	C_{ppM}'''		$C_p'''(Profile)$	
		True value	Estimated (MAE, MSE, APE)	True value	Estimated (MAE, MSE, APE)
$Y_{ij} = 13 + 2.15X_i' + \varepsilon_{ij}$	25	0.886	0.890 (0.070, 0.008, 0.079)	0.906 (0.070, 0.008, 0.079)	
	50		0.887 (0.051, 0.004, 0.057)	0.903 (0.051, 0.004, 0.057)	
	100		0.888 (0.037, 0.002, 0.041)	0.903 (0.037, 0.002, 0.042)	
	200		0.887 (0.027, 0.001, 0.030)	0.903 (0.028, 0.001, 0.031)	
$Y_{ij} = 13 + 2.1X_i' + \varepsilon_{ij}$	25	0.833	0.837 (0.063, 0.006, 0.074)	0.850 (0.063, 0.007, 0.077)	
	50		0.834 (0.045, 0.003, 0.053)	0.847 (0.045, 0.003, 0.054)	
	100		0.833 (0.032, 0.002, 0.038)	0.845 (0.032, 0.002, 0.039)	
	200		0.833 (0.023, 0.001, 0.028)	0.845 (0.024, 0.001, 0.028)	
$Y_{ij} = 13 + 2X_i' + \varepsilon_{ij}$	25	0.689	0.693 (0.047, 0.004, 0.068)	0.668 (0.044, 0.003, 0.066)	
	50		0.691 (0.032, 0.002, 0.047)	0.666 (0.031, 0.002, 0.046)	
	100		0.690 (0.023, 0.001, 0.034)	0.666 (0.022, 0.001, 0.033)	
	200		0.690 (0.016, 0.000, 0.024)	0.665 (0.015, 0.000, 0.023)	
$Y_{ij} = 13 + 1.9X_i' + \varepsilon_{ij}$	25	0.548	0.550 (0.071, 0.007, 0.148)	0.482 (0.068, 0.006, 0.124)	
	50		0.549 (0.069, 0.006, 0.143)	0.482 (0.066, 0.005, 0.121)	
	100		0.549 (0.068, 0.005, 0.141)	0.482 (0.067, 0.005, 0.121)	
	200		0.548 (0.067, 0.005, 0.140)	0.481 (0.067, 0.005, 0.122)	
$Y_{ij} = 13 + 1.85X_i' + \varepsilon_{ij}$	25	0.483	0.485 (0.088, 0.009, 0.220)	0.399 (0.084, 0.008, 0.174)	
	50		0.484 (0.086, 0.008, 0.216)	0.398 (0.085, 0.008, 0.175)	
	100		0.484 (0.086, 0.008, 0.215)	0.399 (0.085, 0.007, 0.175)	
	200		0.483 (0.085, 0.007, 0.214)	0.398 (0.085, 0.007, 0.176)	

Table 4. Simulation results for small shifts in σ^2 parameter

Simulated case	Existing index		Proposed index	
	C_{ppM}'''		$C_p'''(Profile)$	
	m	True value	True value	Estimated (MAE, MSE, APE)
$\varepsilon_{ij} \sim N(0, (0.8)^2)$	25	0.810	0.757	0.812 (0.067, 0.007, 0.089)
	50	0.810	0.757	0.812 (0.060, 0.005, 0.078)
	100	0.810	0.757	0.811 (0.055, 0.004, 0.072)
	200	0.810	0.757	0.810 (0.054, 0.003, 0.071)
$\varepsilon_{ij} \sim N(0, (0.9)^2)$	25	0.745	0.709	0.748 (0.057, 0.005, 0.080)
	50	0.745	0.709	0.746 (0.045, 0.003, 0.064)
	100	0.745	0.709	0.746 (0.040, 0.002, 0.056)
	200	0.745	0.709	0.745 (0.037, 0.002, 0.052)
$\varepsilon_{ij} \sim N(0, (1.0)^2)$	25	0.689	0.665	0.693 (0.047, 0.004, 0.068)
	50	0.689	0.665	0.691 (0.032, 0.002, 0.047)
	100	0.689	0.665	0.690 (0.023, 0.001, 0.034)
	200	0.689	0.665	0.690 (0.016, 0.000, 0.024)
$\varepsilon_{ij} \sim N(0, (1.1)^2)$	25	0.642	0.625	0.645 (0.046, 0.004, 0.074)
	50	0.642	0.625	0.644 (0.035, 0.002, 0.056)
	100	0.642	0.625	0.643 (0.026, 0.001, 0.042)
	200	0.642	0.625	0.642 (0.021, 0.001, 0.033)
$\varepsilon_{ij} \sim N(0, (1.2)^2)$	25	0.600	0.589	0.603 (0.044, 0.003, 0.075)
	50	0.600	0.589	0.602 (0.032, 0.002, 0.054)
	100	0.600	0.589	0.601 (0.023, 0.001, 0.039)
	200	0.600	0.589	0.600 (0.017, 0.001, 0.030)

The results of Tables 2 to 4 indicate that the estimates of $C_p'''(Profile)$ in most of the simulation cases have the closer values to their actual values based on all three evaluation criteria. This is confirmed by the smaller values of MAE, MSE and APE metrics, and these values are also improved by increasing the number of profile samples. Therefore, simulation studies show that the new functional capability index $C_p'''(Profile)$ has a better performance than the existing capability index C_{ppM}''' .

3. Illustrative example

In this section, a real data set from the leather industry collected by Amiri et al [6] is used. Leather is a popular material for shoe production and its quality is critical to customer

satisfaction. A dyeing process has an impact on this quality because as the temperature of the shoes rises, the feet start to sweat and the color of the shoes stains the socks and makes them dirty. As a result, it is necessary to evaluate the performance of the leather dyeing process in shoe production. A simple linear profile can be used to describe the relationship between color effluent and temperature in the dyeing process. The response variable is color effluent, and the explanatory variable is temperature, with five levels of 25, 32, 39, 46, and 53 degrees Celsius ($^{\circ}\text{C}$). Based on a set of historical data consisted of 11 in-control profile samples, the calculated reference profile is $Y = -0.0505 + 0.0034X$, where $\varepsilon_{ij} \sim N(0, 0.0005)$. $LSL_Y(X) = -0.09 + 0.0035X$ and $USL_Y(X) = -0.01 + 0.0035X$ are the functional SLs for color effluent at each temperature [7]. The target line is also $T_Y(X) = -0.0367 + 0.0035X$. Because good quality leather shoes have a smaller color effluent at each temperature, asymmetric tolerance indicates that deviations from the target are less tolerable in one direction than in the other. The Anderson-Darling test statistic for residuals was used to validate the normality assumption of in-control leather production data, yielding a p-value of 0.279 at 95% confidence level. The estimated value of $C_p'''(Profile)$ is 0.2666, and the 95% confidence intervals for the three bootstrap methods SB, PB and BCPB are equivalent to (0.2056, 0.3830), (0.2095, 0.3804), and (0.2028, 0.3748). Since the index value is less than one and none of the confidence intervals includes the number one, we conclude that the process is incapable. As a result, quality experts should make adjustments to the process mean.

4. Conclusion

In this article, the functional capability index $C_p'''(Profile)$ for an SLP was introduced and its performance was compared to that of existing indices. The results of simulation studies show that the new functional index performs better in terms of MAE, MSE, and APE metrics. The minimum number of profile samples required to satisfy the predetermined estimation error under different levels of confidence was calculated based on simulation studies and the APE metric. Furthermore, for the proposed index, bootstrap confidence intervals were obtained using three methods: SB, PB, and BCPB, and their performance was evaluated using simulation studies. The results indicate that bootstrap confidence intervals using the SB method have the best performance in terms of the relative coverage metric. A real-world example was provided to demonstrate the application of the proposed index. Future research will focus on $C_p'''(Profile)$ development in other types of profiles, such as multivariate, polynomial, non-linear profiles, as well as in multi-stage processes with profile quality characteristics.

References

- [1] Noorossana, R., Saghaei, A., & Amiri, A. (2011). Statistical Analysis of Profile Monitoring. In *Statistical Analysis of Profile Monitoring*. Hoboken (NJ): John Wiley & Sons.
- [2] Pakzad, A., & Basiri, E. (2022). A new incapability index for simple linear profile with asymmetric tolerances. *Quality Engineering*, 1–17. <https://doi.org/10.1080/08982112.2022.2129025>
- [3] Abbasi Ganji, Z., & Gildeh, B. S. (2021). A new process capability index for simple linear profile. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 1–16. <https://doi.org/10.1080/03610926.2021.1980804>

- [4] Abbasi Ganji, Z., & Sadeghpour Gildeh, B. (2016). A class of process capability indices for asymmetric tolerances. *Quality Engineering*, 28(4), 441–454.
- [5] Kang, L., & Albin, S. L. (2000). On-line Monitoring When the Process Yields a Linear Profile. *Journal of Quality Technology*, 32(4), 418–426.
- [6] Amiri, A., Zand, A., & Soudbakhsh, D. (2011). Monitoring Simple Linear Profiles in the Leather Industry (A Case Study). *International Conference on Industrial Engineering and Operations Management*, 891–897.
- [7] Karimi Ghartemani, M., Noorossana, R., & Niaki, S. T. A. (2016). A New Approach in Capability Analysis of Processes Monitored by a Simple Linear Regression Profile. *Quality and Reliability Engineering International*, 32(2), 209–221.