مقاله پژوهشی

نمودارهای کنترلی ناپارامتری بر اساس گردش‌ها و آماره‌های مجموع رتبه‌های ویلکاکسون‌گونه

الهام چنگائی*

(نویسنده مسؤل)، کارشناس ارشد آمار، دانشگاه البرز، قزوین. ایران. saghi1862@yahoo.com

محمد بامنی‌مقدم

استاد، گروه آمار، دانشکده‌ی علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه علامه طباطبایی، تهران. ایران. bamenimoghadam@atu.ac.ir

چکیده: در این مقاله، سه نوع جدید از نمودارهای کنترلی آزاد-توزیع شوهارتی که از گردش‌ها و آماره‌های مجموع-رتبه‌های ویلکاکسون‌گونه برای پی بردن به تغییرهای ممکن یک فرایند کنترل شده استفاده می‌کنند. معرفی می‌شوند. روابط دقیقی برای نرخ هشدار غلط (FAR)، توزیع طول اجرا و متوسط طول اجرا (ARL) بیان شده است. یک امتیاز مهم این نمودارها این است که به دلیل ناپارامتری بودن، نرخ هشدار غلط (FAR) و تحت کنترل بودن توزیع طول اجرا، شبیه فرایند توزیع‌های پیوسته هستند. جدول‌هایی برای نمودارهای کنترلی که به نرخ هشدار غلط (FAR) وابسته هستند، تهیه شده است. بنابر این، یک مطالعه‌ی عددی نشان می‌دهد که نمودارهای کنترلی جدید قابل تغییر و کارامد هستند و برای آشکار ساختن تغییرهای خارج از کنترل نوع لهمن وضع شده‌اند.

واژگان کلیدی: کنترل آماری فرایند (SPC)، نمودارهای کنترلی، نمودارهای کنترلی پارامتری، نمودارهای کنترلی آزاد-توزیع، متوسط طول اجرا (ARL)، آماره‌های پیش‌رو.

۱. مقدمه

کیفیت در جهان رقابتی امروز، به‌عنوان مهم‌ترین عامل پیشبرد اهداف سازمان‌ها مطرح است. امروزه کیفیت به عنوان راهبرد تجاری شناخته می‌شود و عنوان غول صنعتی نه به کشورهایی با تولید انبوه، بلکه به کشورهایی با شاخص‌های رشد صنعتی (امکان ارائه محصول با کیفیت بالاتر، عرضه‌ی محصول به بازارهای بین‌المللی و توان ارائه‌ی محصول با قیمت پایین‌تر) اطلاق می‌شود [۱]. دست‌یابی به شاخص‌های رشد صنعتی، وابسته به استفاده از دانش نوین بشری و رشد فناوری بوده و کشورهای آگاه از وضیعت رقابت، بهینه‌سازی مستمر سامانه‌های (فرایندها و محصول‌ها) خود را به عنوان یک اصل اساسی پذیرفته‌اند و تمرکز بیش‌تر خود را بر بهینه‌سازی سامانه‌ها معطوف داشته‌اند [۲].

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۰/۱۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۲/۱۱
دوره ۱۲/ شماره ۳
صفحات ۳۰۱-۳۲۶

اغلب این سامانه‌ها تأثیرپذیر از عوامل تصادفی (اغتشاش) هستند و تغییرپذیری، جزء ماهیت عملکردی آن‌ها به شمار می‌آید که برای کنترل آن (تغییرپذیری)، روش‌های آماری تحت عنوان کنترل کیفیت آماری مطرح می‌شوند. برای کنترل تغییرپذیری یک فرایند و دست‌یابی به یک فرایند پایدار، مدل‌ها و نظریه‌های فراوانی ارائه شده و برای هر کدام از این مدل‌ها ابزارهای کنترلی مختلفی ابداع شده که به وسیله‌ی آن‌ها می‌توان کیفیت فرایند را پایش و یا بهبود بخشید. یکی از روش‌های کنترل فرایند در حین تولید برای جلوگیری از تولید تعداد زیادی محصول معیوب، استفاده از نمودارهای کنترلی[۱] است که نوعی نظارت و کنترل علمی را بر تغییرپذیری فرایند اعمال می‌کنند. چنانچه تغییرپذیری متغیر یا متغیرهای خروجی از حدود مورد انتظاری که در مرحله‌ی طراحی نمودار تعیین شده تجاوز نماید و روند یا چرخه‌ی غیرطبیعی از خود نشان دهد، نمودارهای کنترلی،

*Corresponding author: saghi1862@yahoo.com
1. Control charts

هشدارهای لازم را دال بر عدم پایداری فرایند به مخاطب ارائه می‌دهند. به عبارت دیگر، روش نمودارهای کنترل آماری فرایند (SPC)[2] به منظور ارائه‌ی اطلاعاتی برای تشخیص این‌که چه وقت پراکندگی توزیع مشخصه(ها)ی کیفیت بیش از آن چیزی است که به تصادف نسبت داده می‌شود و در نتیجه نشان دادن این‌که آیا فرایند مورد نظر دارای وضعیت پایداری در رابطه با مشخصه(ها)ی کیفیت مورد بررسی هست یا نه مورد استفاده قرار می‌گیرند. در واقع، کنترل آماری فرایند (SPC)، روش موثری برای پایش محصول و صرفه جویی در هزینه‌ی تولید در فرایند است [۲].

اساس نمودارهای کنترلی کیفیت آماری در سال۱۹۲۴ توسط شوهارت[3] برای کنترل تغییرهای مهم در فرایند تولید بنیان‌گذاری شد و در سال ۱۹۲۵ به صورت مقاله‌ای انتشار یافت. این نمودار به عنوان ظهور کنترل آماری فرایند در نظر گرفته شده است. این روش یکی از اولین روش‌های تضمین کیفیت در فعالیت‌های حین ساخت بود که در صنعت مدرن معرفی شد. نمودارها و حدود کنترلی طوری طراحی می‌شوند که اگر عملکرد جاری از عملکرد طبیعی خیلی متفاوت نباشد، مقدار آماره‌ی حساب شده از داده‌های جاری، درون حدود کنترلی قرار گیرد. اگر عملکرد جاری تفاوت قابل توجهی با عملکرد طبیعی داشته باشد، آن‌گاه یافته‌ی آماره، خارج از حدود کنترلی قرار می‌گیرد که این وضیعت، به عنوان یک وضیعت خارج از کنترل تلقی می‌شود. در نظریه‌ی کنترل آماری فرایند، وضیعت خارج از کنترل، معمولاً توسط علل قابل تشخیص، یا انحراف با دلیل، مانند تغییر ناگهانی در مواد ورودی، خرابی یا بد عمل کردن دستگاه، تغییر کاربران و غیره ایجاد می‌شود. در این حالت معمولا، تولید متوقف شده و تحقیق و بررسی برای پیدا کردن و بر طرف کردن علل قابل تشخیص شروع می‌شود [۳]. با توجه به اهمیت ضرورت استفاده از نمودارهای کنترلی، برای موارد یک‌متغیره، یعنی زمانی که تنها یک متغیر خروجی برای کنترل و پایش وجود دارد، نمودارهای کنترلی زیادی در دسترس است. برای متغیرهای کیفی (وصفی)، نمودارهای کنترلی متداول عبارت‌اند از: نمودار نسبت یا تعداد اقلام معیوب (نمودارهای P و np)، و نمودار تعداد یا میانگین نقص‌ها (نمودار C وU). برای متغیرهای کمی (متغیر)، از متداول‌ترین آن‌ها می‌توان به نمودارهای $\bar{X}$، R و S اشاره کرد. که این نمودارها به نمودارهای کنترلی شوهارتی معروف هستند.

نمودارهای کنترلی شوهارت به دلیل دارا بودن ویژگی‌هایی نظیر سهولت در تهیه و تفسیر توانایی در شناسایی تغییرهای پایدار در پارامترهای فرایند، نقاط دور افتاده، خطاهای اندازه‌گیری و خطاهای ثبت یا ارسال داده‌ها از اثر بخشی بسیار بالایی برخوردار هستند [۴].

در اغلب نمودارهای کنترلی توزیع معمولاً نرمال فرض می‌شود و تقریباً تمام تحلیل‌های عملکردی موجود در ادبیات نیز فرض می‌کنند مشاهده‌ها از یک توزیع نرمال تهیه شده است. با این وجود، اغلب داده‌های فرایند فاقد توزیع نرمال است و بنابر این استواری و مقاومت نمودارهای کنترلی نسبت به این فرض همیشه یک موضوع اصلی فرایند آماری بوده است. یافته‌های پژوهش‌گران نشان می‌دهد که برخی از نمودارهای کنترلی، شدیداً تحت تأثیر مشاهده‌های غیر نرمال قرار می‌گیرند [۴].

از آن‌جا که مشاهده‌های غیرنرمال می‌تواند عملکرد نمودارهای کنترلی را تحت تأثیر قرار دهد. لذا برخی از مؤلفان به توسعه‌ی نمودارهای کنترلی ناپارامتری پرداخته‌اند. در اغلب روش‌های کنترل فرایند آماری ناپارامتری ($NSPC$)[4] از رتبه استفاده می‌شود و روش‌های جای‌گزین برای اغلب نمودارهای کنترلی نظیر نمودارهای شوهارت، جمع تجمعی و EWMA [5] تهیه شده است [۴]. که یکی از این روش‌ها، روش‌های نمودارهای کنترلی شوهارتی ناپارامتری (آزاد- توزیع) است. نمودارهای کنترلی آزاد- توزیع، کم‌تر معروف بوده و به ندرت در کتاب‌های تخصصی به آن‌ها ارجاع داده می‌شود. با این وجود، نمودارهای کنترلی بدون توزیع امتیازات زیادی دارند و در بعضی موارد حتی کاراتر از دیگر نمودارها هستند [۵].

این نمودارها دارای ویژگی‌های کنترلی پایدار هستند، در برابر نقاط پرت مقاوم می‌باشند و در مقایسه با نمودارهای پارامتری می‌توانند بسیار کارآمد باشند. چاکرابورتی و همکاران در سال ۲۰۱۹ به بررسی نمودارهای کنترلی ناپارامتری تک متغیره و چند متغیره پرداخته‌اند [۶]. پذیرش گسترده نمودارهای کنترل بدون توزیع در بین پزشکان می‌تواند به عنوان انگیزه‌ای برای تحقیقات و توسعه آینده در این زمینه باشد [۷].

در این پژوهش سه نوع جدید از نمودارهای کنترلی ناپارامتری شوهارتی (R، N و W) که از گردش‌ها و آماره‌های مجموع رتبه‌های ویلکاکسون‌گونه[6] برای پی بردن به تغییرهای ممکن یک فرایند استفاده می‌کنند، معرفی می‌شوند. سپس با مقایسه کردن

2. Statistical Process Control (SPC)
3. Shewhart
4. Nonparametric Statistical Process Control (NSPC)
5. Exponetially Weighted Moving Average (EWMA)
6. Wilcoxon-type

این سه نمودار کنترلی به این نتیجه می‌رسیم که کارایی نمودار کنترلی متناظر با آماره‌ی W در مقایسه با دو نمودار کنترلی دیگر (R و N) بیش‌تر است و در نهایت برتری نمودار کنترلی W را در پایش فرایند نشان داده می‌شود.

۲. روش پژوهش

در این پژوهش، سه نوع از نمودارهای کنترلی آزاد-توزیع جدید معرفی می‌شوند. از نمودارهای مذکور، برای ایجاد حدود کنترلی مناسب، متناظر با آماره‌های ترتیبی یک نمونه‌ی مرجع استفاده می‌شوند و سپس برای تحت کنترل بودن یا نبودن فرایند، تعداد گردش یا آماره‌های پایه‌ای-رتبه‌ای مشاهده‌های نمونه‌ی آزمون بین حدود کنترلی قرار می‌گیرند. برای ماکسیمم طول اجرای مشاهده‌های نمونه‌ی آزمون در نمونه‌ی توأم، از اولین نمودار کنترلی (R) استفاده می‌شود. در حالی که دومین نمودار کنترلی (N)، تعداد گردش‌های مشاهده‌های نمونه‌ی آزمون که طولشان از یک مقدار معین از پیش تعیین شده‌ی k تخطی می‌کند، را به حساب می‌آورد. سرانجام نمودار کنترلی سوم (W)، مجموع رتبه‌های مشاهده‌های نمونه‌ی آزمون که بین حدود کنترلی قرار می‌گیرند را محاسبه می‌کند.
به‌طور معمول، حدود کنترلی نمودار کنترلی آزاد-توزیع، از یک نمونه‌ی مرجع فرایندی که تحت کنترل است، به دست می‌آیند. سپس اگر $X_1, X_2, \dots, X_m$ را یک نمونه‌ی تصادفی با اندازه‌ی m از توزیع تجمعی تحت کنترل $F_X(x) = F(x)$ تعریف کنیم و فرض کنیم که دو آماره‌ی ترتیبی معین $X_{a:m}$ و $X_{b:m}$ در حدود کنترلی مورد استفاده قرار می‌گیرند. آن‌گاه داریم:

$$LCL = X_{a:m} \text{ و } UCL = X_{b:m} \quad (1)\ (1 \le a < b \le m)$$

که در آن a و b پارامترهای طرح روی نمودار هستند. یکی از الزامات یک نرخ هشدار غلط (FAR) معین، زمانی است که مقدار متوسط طول اجرای تحت کنترل (ARL_{in})، ۳۷۰ تا ۵۰۰ باشد. و این علامت خوبی است که متوسط طول اجرای تحت کنترل (ARL_{in}) برای یک نمودار کنترلی آزاد- توزیع، مشابه فرایند توزیع‌های پیوسته است.
حال فرض کنید نمونه‌های انتخابی آزمون، مستقل از هم و هم‌چنین مستقل از نمونه‌های مرجع باشند و ما علاقه‌مند به دانستن این‌که آیا فرایند هنوز تحت کنترل هست یا نه، می‌باشیم. در اصطلاح آماری، اگر $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ را نمونه‌ی آزمون و $F_{Y(x)} = G(x)$ را تابع توزیع تجمعی متناظر تعریف کنیم، هدف ما آشکار ساختن یک تغییر ممکن، از توزیع $F(x)$ به $G(x)$ است، به عبارت دیگر، می‌خواهیم آزمون فرض صفر $H_0: F(x) = G(x)$ در مقابل آزمون دو طرفه $H_1: F(x) \neq G(x)$ انجام دهیم.
آماره‌های آزمون به کار برده شده در این مقاله به صورت زیر تعریف شده‌اند:
(a) گردش‌های روی مشاهده‌های Y که درون حدود کنترل LCL و UCL قرار می‌گیرند،
(b) رتبه‌های روی مشاهده‌های Y که درون حدود کنترل LCL و UCL قرار می‌گیرند.
تحت فرض صفر اگر هر دو نمونه‌ی آزمون دارای توزیع مشابهی باشند یعنی، $H_0: F = G$. آن‌گاه نمونه‌ی آزمون مشاهده‌های Y_j که به طور متوالی در میان مشاهده‌های X قرار می‌گیرند، نباید مقدار ماکسیمم آن‌ها از نسبت $\frac{n}{m}$ بیش‌تر باشد. با این ذهنیت، آماره‌های زیر را برای تشخیص تحت کنترل بودن فرایند، می‌توان به کار برد:

- ماکسیمم طول گردش‌های مشاهده‌های Y که بین حدود کنترلی قرار می‌گیرند،
- تعداد گردش‌های مشاهده‌های Y (بین حدود کنترلی) که از یک مقدار معین از پیش تعیین شده‌ی k تخطی می‌کنند.
- سومین انتخاب: مجموع رتبه‌های (مشاهده‌های توأم نمونه‌های X و Y) روی مشاهده‌های Y که بین حدود کنترلی قرار می‌گیرند (متناظر با آماره‌ی مجموع رتبه‌های ویلکاکسون‌گونه).

همه‌ی آماره‌های مذکور، آماره‌های پیش‌رو نامیده می‌شوند. اگر نمونه‌ی آزمون مشاهده‌های Y_j آماره‌های ترتیبی نمونه‌ی X ($X(0) = -\infty$)، بین i امین و (i- ۱) امین آماره‌های ترتیبی قرار گیرند و $M_i, i = 1,2, \dots m$ را طول گردش‌های Y بین مشاهده‌های X متوالی تعریف کنیم، آن‌گاه با توجه به سه آماره‌ی ذکر شده می‌توان نوشت:

$$R = max(M_{a+1}, M_{a+2}, \dots, M_b),$$

$$N_k = |\{M_i : a+1 \le i \le b, M_i \ge k\}|, \qquad W = \sum_{i=a+1}^{b} W_i. \ (۲)$$

که در آن، k یک مقدار صحیح پارامتر طرح و W_i مجموع رتبه‌های مشاهده‌های Y که بین $X_{(i)}$ و $X_{(i-1)}$ قرار می‌گیرد، که عبارت است از:

$$W_i = \sum_{j=1}^{M_i}\left((i-1) + \sum_{r=1}^{i-1} M_r + j\right) = M_i\left((i-1) + \sum_{r=1}^{i-1} M_r\right) + \frac{M_i(M_i+1)}{2} \quad (۳)$$

جدول ۱. پارامترهای طرح سه نمودار با $FAR \leq ۰/۱۰$.

نمودار R					نمودار N						نمودار W				
a	b	r_0	r	FAR	a	b	r_0	r_1	k	FAR	a	b	r_0	w	FAR
1	4	1	2	۰/۰۹۸۹	۳	۶	۲	۰	۲	۰/۰۹۷۹	۱	۴	۴	۱۰	۰/۰۹۱۹

جدول ۲. منابع و نمونه‌های آزمون

نمونه مرجع	۰/۰۵۴۷۴۹۴	۰/۰۹۱۵۶۲۷	۰/۱۹۲۵۰۲۰	۰/۳۲۹۸۵۷۰	۰/۵۸۷۲۴۲۰
	۰/۶۴۶۴۵۴۰	۰/۷۲۵۰۱۹۰	۰/۷۳۱۹۴۹۰	۰/۸۷۹۶۷۹۰	۰/۹۶۸۳۷۹۰
نمونه آزمون تحت کنترل	۰/۱۴۹۲۳۰۰	۰/۳۴۹۴۹۷۰	۰/۶۰۳۸۴۸۰	۰/۶۷۸۷۰۶۰	
نمونه آزمون خارج از کنترل	۰/۰۰۴۱۳۹۱	۰/۰۴۷۵۵۴۶	۰/۱۶۹۸۸۷۰	۰/۱۹۲۱۰۳۲	

با انجام دادن بعضی عملیات جبری عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$W = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=a+1}^{b} M_i\right)^2 + \sum_{i=a+1}^{b} iM_i + \left(M_0 + a - \frac{3}{2}\right)\sum_{i=a+1}^{b} M_i. \quad (4)$$

که در آن $M_0 = \sum_{i=1}^{a} M_i$، تعداد نمونه مشاهده‌های Y قبل از LCL است.

هرگاه آماره‌ی R در دو شرط زیر صدق کند، آن‌گاه فرایند اعلام شده تحت کنترل خواهد بود.

$$R \leq r \quad \text{و} \quad M_0 \leq r_0 \qquad (۵)$$

که در آن r و r_0 پارامترهای طرح روی نمودار کنترلی هستند. به همین ترتیب در مورد آماره‌ی آزمون N_k : هرگاه آماره‌ی N_k در دو شرط زیر صدق کند، آن‌گاه فرایند اعلام شده تحت کنترل خواهد بود.

$$N_k \leq r_1 \quad \text{و} \quad M_0 \leq r_0 \qquad (۶)$$

سرانجام، برای آماره‌ی مجموع رتبه‌های ویلکاکسون‌گونه داریم: هرگاه آماره‌ی W در دو شرط زیر صدق کند، آن‌گاه فرایند اعلام شده تحت کنترل خواهد بود.

$$W \leq w \quad \text{و} \quad M_0 \leq r_0 \qquad (۷)$$

که در آن w و r_0 پارامترهای طرح روی این نمودار هستند. در رابطه با این نمودار (W)، این مقدار ذکر شده که ماکسیمم مقدار ممکن W می‌باشد، زمانی است که همه‌ی مشاهده‌های Y در فاصله‌ی $(X_{b-1:m}\ ,\ X_{b:m})$ قرار می‌گیرند، با استفاده از رابطه $(b-1)+j,\ j=1,2,\dots,n,$ می‌توان رتبه‌ها را به دست آورد، هم‌چنین با استفاده از فرمول زیر می‌توان مجموع رتبه‌های متناظر با آماره‌ی W را به دست آورد:

$$n(b-1) + \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+2b-1)}{2} \qquad (۸)$$

به طور واضح، مینیمم مقدار ممکن W صفر است (زمانی‌که هیچ مشاهده‌ی از Y بین LCL وUCL قرار نمی‌گیرد)، و در نتیجه به پیروی از آن تکیه‌گاه توزیع مرتبط با توزیع W عبارت است از:

$$R_W = \left\{0,1,\dots,\frac{n(n+2b-1)}{2}\right\} \qquad (۹)$$

بل از خاتمه دادن این بخش، یک مثال برای نشان دادن اصول اساسی این نمودارهای کنترلی ناپارامتری ارائه می‌دهیم. فرض کنید می‌خواهیم نمودارهای کنترلی آزاد– توزیع بر پایه نمونه‌ی مرجع با اندازه‌ی m = ۱۰ و نمونه‌های آزمون با اندازه‌ی n = ۴ را تولید کنیم. در جدول۱، نشان دادیم با انتخاب مقادیری برای پارامترهای طرح سه نمودار کنترلی ذکر شده، نرخ هشدار غلط ۰/۱۰ تضمین می‌شود (FAR ≤۰/۱۰).

به منظور نشان دادن چگونگی اجرای نمودارهای کنترلی، فرض می‌کنیم که مشاهده‌های تحت کنترل دارای توزیع یکنواخت (۰و۱) باشند (به عبارت دیگر، $F(x) = x, 0 < x < 1$). دو

سطر اول جدول۲، نمونه‌ی مرجع را نشان می‌دهند. در نتیجه حدود کنترلی زیر به دست می‌آیند:

R نمودار: $LCL = X_{1:10}, \quad UCL = X_{4:10},$

N نمودار: $LCL = X_{3:10}, \quad UCL = X_{6:10},$

W نمودار: $LCL = X_{1:10}, \quad UCL = X_{4:10}.$

بعد از گرداوری نمونه‌ی مرجع، اگر فرایند تحت کنترل باقی بماند، نمونه‌های آزمون با اندازه‌ی ۴ = n از توزیع یکنواخت در بازه (۱و۰) هستند. یکی از این نمونه‌های تولید شده در سطر سوم جدول 2، نشان داده شده است. مشاهده‌های ۱۴ = $m + n$ ترکیب نمونه‌ی (X,Y) مرتب شده زیر را تولید می‌کنند

$$X\ X\ Y\ X\ X\ Y\ X\ Y\ X\ Y\ X\ X\ X\ X$$

نتایجی که در آماره‌های پیش‌رو M_iها به دست می‌آیند، عبارت‌اند از

$$M_1 = 0,\ M_2 = 0, M_3 = 1,\ M_4 = 0, M_5 = 1, M_6 = 1, M_7 = 1, M_8 = 0, M_9 = 0, M_{10} = 0.$$

اگر از نمودار R استفاده کنیم، داریم:

$$\mathrm{R} = max(M_2, M_3, M_4) = 1,$$

و

$$R \le 2 = 1 \quad \text{و} \quad M_0 = M_1 = 0 \le 1 = r_0,$$

نتیجه می‌گیریم که فرایند تحت کنترل می‌باشد. هم‌چنین اگر از نمودار N استفاده کنیم، داریم:

$$N_2 = \left|\left\{M_i: 4 \le i \le 6 \text{ و } M_i \ge 2\right\}\right| = 0,$$

زیرا

$$N_2 \le 0 = r_1 \quad \text{و} \quad M_0 = \sum_{i=1}^{3} M_i = 1 \le 2 = r_0,$$

پس نتیجه می‌گیریم که این فرایند هم تحت کنترل می‌باشد. سرانجام، آماره مجموع-رتبه‌های ویلکاکسون‌گونه را می‌توان با استفاده از فرمول (۴) به دست آورد. (برای a = 1 و b = 4) داریم:

$$W = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=2}^{4} M_i\right)^2 + \sum_{i=2}^{4} iM_i + \left(M_0 + a - \frac{3}{2}\right)\sum_{i=2}^{4} M_i = 3,$$

و

$$W \le 10 = w \quad \text{و} \quad M_0 = M_1 = 0 \le 4 = r_0,$$

پس نتیجه می‌گیریم که هنوز فرایند تحت کنترل می‌باشد.

اگر فرایند را به صورت خارج از کنترل با تابع توزیع $G(x) = x^{\frac{1}{4}},\ 0 < x < 1$ (توزیع توان)، مانند نمونه‌ی تولید شده و نشان داده شده در سطر چهارم جدول ۲، تغییر دهیم آن‌گاه ترکیب نمونه‌ی (X,Y) به صورت زیر است:

$$Y\ Y\ X\ X\ Y\ Y\ X\ X\ X\ X\ X\ X\ X\ X$$

نتایجی که در آماره‌های پیش‌رو M_iها به دست می‌آیند عبارت‌اند از:

$$M_1 = 2, M_2 = 0, M_3 = 2, M_4 = 0, M_5 = 0, M_6 = 0, M_7 = 0, M_8 = 0, M_9 = 0, M_{10} = 0$$

مقادیر به دست آمده سه آماره در این مورد عبارت‌اند از:

$$R = 2, \qquad N_2 = 1, \qquad W = 11,$$

و از این نتایج به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که هیچ‌کدام از این نمودارها تحت کنترل نمی‌باشند. (زیرا در نمودار R: $M_0 = 2 > 1 = r_0$، در نمودارN: $N_2 = 1 > 0 = r_1$ و در نمودار W: $W = 11 > 10 = w$). بنابر این، سه نمودار کنترلی به طور موفقیت‌آمیز قادر خواهند بود انحراف فرایند را نشان دهند.

در دو بخش بعدی، توزیع‌های آماری تحت کنترل و خارج از کنترل در سه نمودار کنترلی ناپارامتری پیش‌نهاد شده را به دست می‌آوریم.

۳. توزیع‌های آماره‌های تحت کنترل

فرض کنید m نمونه‌ی $X_1, X_2, \dots, X_m$ از توزیع تحت کنترل $F_X(x) = F(x)$ و n نمونه‌ی جدید $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ از توزیع $F_Y(x) = G(x)$ باشند.

از بحث پیشین، واضح است که توزیع دقیق آماره‌های R و N_k از توزیع توأم $(M_{a+1}, M_{a+2}, \dots, M_b)$، و توزیع آماره‌ی W از توزیع توأم $(M_0,\ M_{a+1}, M_{a+2}, \dots, M_b)$ حاصل شده‌اند.

آماره آزمون M به کار برده‌شده، ماکسیمم رخ‌دادن تعداد مشاهده‌های Y، بین مشاهده‌های نمونه‌ی X، $(r-1)$امین و rامین را نشان می‌دهد. بنابراین، $M = max(M_1, M_2, \dots, M_r)$ و توزیع آن، تحت فرض صفر $H_0: F_X = F_Y$ برای توزیع توأم $(M_1, M_2, \dots, M_r)$ در لم زیر نشان داده شده است.

لم ۱- تابع جرم احتمال توأم $(M_1, M_2, \dots, M_r),\ r \ge 1$، تحت فرض H_0، $F_X = F_Y$ به صورت زیر است:

$$P(M_1 = m_1, M_2 = m_2, \dots, M_r = m_r |\ H_0) = \frac{\binom{m+n-\sum_{i=1}^{r} m_i - r}{m-r}}{\binom{m+n}{n}}, \qquad (۱۰)$$

می‌توان از توزیع‌های توأم $(M_0, M_{a+1}, \dots, M_b)$ و $(M_{a+1}, \dots, M_b)$ که قبلاً اشاره شده است، برای به دست آوردن توزیع‌های آماره‌های تحت کنترل R و N_k و W استفاده کرد.

قضیه ۱. فرض کنید احتمال $p_{a,b}(m_0, m_{a+1}, m_{a+2}, \dots, m_b)$ به صورت زیر باشد.

$$p_{a,b}(m_0, m_{a+1}, m_{a+2}, \dots, m_b) = \frac{\binom{m_0+a-1}{a-1}\binom{m+n-m_0-\sum_{i=a+1}^{b} m_i - b}{m-r}}{\binom{m+n}{n}}$$

برای هر مجموعه‌ی صحیح نامنفی $m_0, m_{a+1}, \dots, m_b$ به طوری که $m_0 + \sum_{i=a+1}^{b} m_i \le n$ (به عبارت دیگر، $p_{a,b}(m_0, m_{a+1}, m_{a+2}, \dots, m_b) = 0$). داریم:

(a) تابع جرم احتمال توأم $(M_0, M_{a+1}, \dots, M_b)$ زمانی‌که فرایند تحت کنترل است، به صورت زیر می‌باشد.

$$(M_0 = m_0, M_{a+1} = m_{a+1}, \dots, M_b = m_b) = p_{a,b}(m_0, m_{a+1}, m_{a+2}, \dots, m_b).$$

(b) تابع جرم احتمال توأم $(M_{a+1}, \dots, M_b)$ زمانی که فرایند تحت کنترل می‌باشد، به صورت زیر است.

$$P(M_{a+1} = m_{a+1}, \dots, M_b = m_b) = \sum_{m_0=0}^{n} p_{a,b}(m_0, m_{a+1}, m_{a+2}, \dots, m_b).$$

برهان. (a) زمانی که فرایند تحت کنترل است، نمونه‌های X و Y از توزیعی مشابه یعنی، $F_X = F_Y$ هستند.

با در نظر گرفتن این‌که $M_0 = \sum_{i=1}^{a} M_i$، احتمال

$$p = P(M_0 = m_0, M_{a+1} = m_{a+1}, \dots, M_b = m_b) = P\left(\sum_{i=1}^{a} M_i = m_0, M_{a+1} = m_{a+1}, \dots, M_b = m_b\right)$$

می‌باشد. از لم 1 با قرار دادن r = b توسط مجموع همه‌ی $m_1, m_2, \dots, m_a$ به‌طوری‌که $\sum_{i=1}^{a} m_i = m_0$ است. داریم:

$$p = \binom{m+n}{n}^{-1} \sum_{\substack{m_1, m_2, \dots, m_a \\ \sum_{i=1}^{a} m_i = m_0}} \binom{m+n-\sum_{i=1}^{r} m_i - b}{m-b}.$$

حال با نوشتن p به صورت زیر

$$p = \binom{m+n}{n}^{-1} \sum_{\substack{m_1, m_2, \dots, m_a \\ \sum_{i=1}^{a} m_i = m_0}} \binom{m+n-m_0-\sum_{i=a+1}^{b} m_i - b}{m-b},$$

واضح است که

$$p = c\binom{m+n}{n}^{-1}\binom{m+n-m_0-\sum_{i=a+1}^{b} m_i - b}{m-b},$$

که c نشانه‌ای از اعداد صحیح نامنفی جواب‌های معادله‌ی خطی $\sum_{i=1}^{a} m_i = m_0$ است. در نتیجه برهان به سادگی کامل می‌شود

$$c = \binom{m_0+a-1}{a-1}.$$

(b) نتایج زیر با در نظر گرفتن توزیع حاشیه‌ای $(M_{a+1}, \dots, M_b)$ از تابع جرم احتمال $(M_0, M_{a+1}, \dots, M_b)$ در قسمت (a) به دست آمده‌اند.

از قضیه ۱، تابع توزیع تجمعی $R = max(M_{a+1}, M_{a+2}, \dots, M_b)$ به صورت زیر بیان شده است.

$$P(R \le r) = P(M_{a+1} \le r, M_{a+2} \le r, \dots, M_b \le r) = \sum_{m_0=0}^{n} \sum_{m_{a+1}, \dots, m_b} p_{a,b}(m_0, m_{a+1}, \dots, m_b), \quad (۱۱)$$

که در آن جمع داخلی از همه‌ی m_iهایی $(i = a+1, \dots, b)$ که در شرایط زیر صدق می‌کند بیش‌تر است.

$$0 \le m_i \le r, i = a+1, \dots, b \quad و \quad \sum_{i=a+1}^{b} m_i \le n - m_0$$

به‌طور مشابه می‌توان $P(N_k = r)$ را محاسبه کرد.

سرانجام، توزیع آماره‌ی مجموع رتبه‌های ویلکاکسون در (4) از فرمول زیر به دست می‌آید

$$P(W = w) = \sum_{m_0, m_{a+1}, \dots, m_b} p_{a,b}(m_0, m_{a+1}, \dots, m_b), \quad (12)$$

که $w \in R_W$ [به (۹) مراجعه کنید] و مجموع شامل اعداد صحیح نامنفی $m_0, m_{a+1}, \dots, m_b$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند.

$$m_0 + \sum_{i=a+1}^{b} m_i \le n \quad و \quad \frac{1}{2}\left(\sum_{i=a+1}^{b} m_i\right)^2 + \sum_{i=a+1}^{b} i m_i + \left(m_0 + a - \frac{3}{2}\right)\sum_{i=a+1}^{b} m_i = w. \quad (۱۳)$$

در یک روش مستقیم می‌توان از توزیع توأم $(M_0, M_{a+1}, \dots, M_b)$ (تحت فرض H_0: $F_Y = F_X$) نرخ هشدار غلط (FAR) نمودارهای کنترلی R، N و W را محاسبه کرد. به عنوان مثال: در نمودار R، احتمال یک سیگنال تحت کنترل برابر است با:

$$= \sum_{m_0, m_{a+1}, \dots, m_b} p_{a,b}(m_0, m_{a+1}, m_{a+2}, \dots, m_b),$$

که در آن مجموع تمام اعداد صحیح نامنفی $m_0, m_{a+1}, m_{a+2}, \dots, m_b$ در شرایط زیر صدق می‌کند

$$m_0 \le r_0, m_{a+1} \le r, m_{a+2} \le r, \dots, m_b \le r.$$

در نتیجه،

$$FAR = 1 - P\left(R \le r \text{ و } M_0 \le r_0\right). \quad (۱۴)$$

به همین ترتیب می‌توان موارد ذکر شده‌ی نمودار R را برای نمودار N و نمودار W پیش‌بینی کرد.

۴. توزیع‌های آماره‌های خارج از کنترل

فرض کنید که نمونه‌ی آزمون مشاهده‌های $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ از توزیع پیوسته $G(x)$ باشند. برای نشان دادن فرمول‌ها در شکل کلی، احتمال این‌که سیگنال نشان داده شده یک هشدار نباشد را بیان می‌کنیم. مانند:

$$p(m,n,a,b;c;F,G) = \sum_{(m_0,m_{a+1},\dots,m_b)\in A} P\left(M_0 = m_0 \text{ و } M_j = m_j \quad a+1 \le j \le b\right), (15)$$

که c برداری از ثابت‌هاست و A فضایی است که در آن مقادیر بردار تصادفی $(M_0, M_{a+1}, M_{a+2}, \dots, M_b)$، برای نمودار کنترلی نتیجه‌ی یک هشدار نیست. اگر در $p(m,n,a,b;c;F,G)$، $G = F$ قرار دهیم آن‌گاه نرخ هشدار غلط (*FAR*) عبارت است از:

$$FAR = 1 - p(m,n,a,b;c;F;F) \quad (۱۶)$$

حال در حالت کلی فرض کنید زمانی که مشاهده‌های X و Y از توزیع مشابهی نباشند، با در نظر گرفتن فرمول (۱۵)، به یک فرمول دقیقی برای جمع‌وندهای طرف راست فرمول (۱۵) نیاز داریم. به‌طور خلاصه فرض کنید اگر بردار تصادفی $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ را Y و نمونه‌ی X مرتب شده‌ی از a امین تا b امین آماره‌های ترتیبی را $X_{a:b}$ تعریف کنیم. به عبارت دیگر، $X_{a:b} = (X_{a:m}, X_{a+1:m}, \dots, X_{b:m})$ و $U_{a:b}$ تناظر یکنواخت آماره‌های ترتیبی m نمونه‌ی تصادفی باشند. سپس داریم:

$$p = P\left(M_0(Y; X_{a:b}) = m_0 \text{ و } M_j(Y; X_{a:b}) = m_j \quad a+1 \le j \le b\right) \quad (۱۷)$$

که با استفاده از این نکته که:

$$F(X_{a:b}) = \left(F(X_{a:m}), F(X_{a+1:m}), \dots, F(X_{b:m})\right) = (U_{a:m}, U_{a+1:m}, \dots, U_{b:m}) = U_{a;b}$$

عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$p = P\left(M_0(F(Y); U_{a:b}) = m_0 \text{ و } M_j(F(Y); U_{a:b}) = m_j, \; a+1 \le j \le b\right). \quad (۱۸)$$

در نتیجه تابع چگالی توأم $U_{a:b}$ عبارت است از:

$$f_{a:b}(u_a, u_{a+1}, \dots, u_b) = f_{a:b}(U_{a:b}) = \frac{m!}{(a-1)!(m-b)!}(u_a)^{a-1}(1 - u_b)^{m-b}, \; ۰ \le u_a \le u_{a+۱} \le \dots \le u_b \le ۱ \quad (۱۹)$$

می‌توانیم احتمال (۱۸) را به شکل انتگرال بیان کنیم:

$$p = \iint \dots \int_{0 u_a \le u_{a+1} \le \dots \le u_b \le 1} P\big(M_0(F(Y); u_{a:b}) = m_0 \text{ و } M_j(F(Y); u_{a:b}) = m_j, \quad a+1 \le j \le b\big) \times f_{U_{a:b}}(u_{a:b}) du_a \, du_{a+1} \dots du_b. \quad (۲۰)$$

با بررسی کردن درونی‌ترین انتگرال هنگامی‌که

$$P\left(M_0(Y; F^{-1}(u_{a:b})) = m_0 \text{ و } M_j(Y; F^{-1}(u_{a:b})) = m_j \quad, a+1 \le j \le b\right) = P\big(M_0(G(Y); GF^{-1}(u_{a:b})) = m_0 \text{ و } M_j(G(Y); GF^{-1}(u_{a:b})) = m_j, \; a+1 \le j \le b\big),$$

و نظر به این‌که:

$$G(Y) = \big(G(Y_1), G(Y_2), \dots, G(Y_n)\big) = (U_1, U_2, \dots, U_n) = U$$

مطابق با یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع یکنواخت (۱و۰) است. عبارت زیر حاصل می‌شود

$$P\left(M_0(U; GF^{-1}(u_{a:b})) = m_0 \text{ و } M_j(U; GF^{-1}(u_{a:b})) = m_j, \; a+1 \le j \le b\right).$$

اگر فرض کنیم که $U_1, U_2, \dots, U_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع یکنواخت (۱و۰) باشد، آن‌گاه m_0 قبل از $GF^{-1}(u_a)$، m_j بین $GF^{-1}(u_j)$ و $GF^{-1}(u_{j-1})$ برای $j = a+1, a+2, \dots, b$ و $n - m_0 - \sum_{j=a+1}^{b} m_j$ باقی‌مانده، بعد از $GF^{-1}(u_b)$ قرار می‌گیرد. به عبارت دیگر، $q\big(GF^{-1}(u_a), GF^{-1}(u_{a+1}), \dots, GF^{-1}(u_b)\big)$ که در آن

$$q(v_a, v_{a+1}, \dots, v_b) = \frac{n!}{m_0! \left(\prod_{j=a+1}^{b} m_j!\right)\left(n - m_0 - \sum_{j=a+1}^{b} m_j\right)!} {v_a}^{m_0} \prod_{j=a+1}^{b} (v_j - v_{j-1})^{m_j} (1 - v_b)^{n - m_0 - \sum_{j=a+1}^{b} m_j} \quad (۲۱)$$

احتمال چند جمله‌ای با $0 \le v_a \le v_{a+1} \le \dots \le v_b \le 1$ است.

با ترکیب فرمول‌های (۱۹) – (۲۱) قضیه‌ی زیر را داریم.

قضیه ۲. تابع جرم احتمال توأم تجمعی $(M_0, M_{a+1}, \dots, M_b)$، زمانی که مشاهده‌های X از تابع توزیع تجمعی $F(x)$ و مشاهده‌های Y از توزیع $G(x)$ هستند عبارت است از:

$$P\left(M_0 = m_0 \text{ و } M_j = m_j \quad, \quad a+1 \le j \le b\right)$$

$$= \iint \dots \int_{0 \le u_a \le u_{a+1} \le \dots \le u_b \le 1} q\big(GF^{-1}(u_a), GF^{-1}(u_{a+1}), \dots, GF^{-1}(u_b)\big) f_{a:b}(u_{a:b}) du_a du_{a+1} \dots du_b, \quad (۲۲)$$

که $f_{a:b}$ و q به ترتیب در (۱۹) و (۲۱) تعریف شده‌اند اگر در (۲۲) *F=G* باشد، عبارت زیر حاصل می‌شود

$$P\left(M_0 = m_0 \text{ و } M_j = m_j \,, a+1 \le j \le b\right)$$

$$= \iint \dots \int_{0 \le u_a \le u_{a+1} \le \dots \le u_b \le 1} q(u_a, u_{a+1}, \dots, u_b) f_{a:b}(u_a, u_{a+1}, \dots, u_b) du_a du_{a+1} \dots du_b \;,$$

بعد از انجام دادن بعضی عملیات جبری، به نتایج نشان داده شده در قضیه۱ دست می‌یابیم. بنابر این، توزیع توأم تحت کنترل $(M_0, M_{a+1}, \dots, M_b)$، حالت خاصی از نتایج کلی در قضیه‌ی ۲ است.

حال با استفاده از تابع جرم احتمال توأم قضیه 2، در مورد خاصی از خانواده‌ای از توزیع‌هایی که در زمینه‌ی ناپارامتری رایج هستند، به عبارت دیگر، فرض‌های مقابل لهمن را بررسی خواهیم کرد. همان‌طور که در قضیه ۲ ملاحظه شد، اگر تغییرهای فرایند خارج از کنترل باشند، آن‌گاه این احتمال وجود دارد که نمودار، سیگنال یک هشدار وابسته‌ی توزیع‌های تحت کنترل و هم‌چنین خارج از کنترل (به ترتیب، $F(x)$ و $G(x)$)، نباشد. به نظر می‌رسد که تحت فرض‌های مقابل لهمن، فرمول‌های دقیقی برای نرخ هشدار خارج از کنترل به دست می‌آید. تحت فرض مقابل نوع – لهمن (برای اطلاعات بیش‌تر به کتاب‌های لهمن (۱۹۵۳)[7]، گیبونس و چاکرابارتی (۲۰۰۳)[8]، وان در لان و چاکرابارتی (۲۰۰۱)[9]، هولندر و ولف (۱۹۹۹)[10] و بالاکریشنان و نگ (۲۰۰۶)[11] مراجعه شود.)، تابع توزیع خارج از کنترل $G(x) = (F(x))^{\gamma}$ برای اعداد مثبت $\gamma > 0$، فرض شده است. اگر γ یک عدد صحیح مثبت باشد، فرض مقابل لهمن بیان می‌کند که متغیرهای تصادفی Y به صورت دقیق مانند بزرگ‌ترین مقدار γی متغیرهای مستقل X توزیع می‌شوند. به‌طور مشابه، ممکن است تابع توزیع خارج از کنترل به شکل $G(x) = 1 - \left(1 - F(x)\right)^{\gamma}$ انتخاب شود. در این حالت، برای عدد صحیح مثبت γ، متناظر با حالتی است که در آن متغیرهای Y به صورت دقیق مانند کوچکترین مقدار γی متغیرهای مستقل X توزیع می‌شوند.

سیگنال یک هشدار وابسته‌ی توزیع‌های تحت کنترل و هم‌چنین خارج از کنترل (به ترتیب، $F(x)$ و $G(x)$)، نباشد. به نظر می‌رسد که تحت فرض‌های مقابل لهمن، فرمول‌های دقیقی برای نرخ هشدار خارج از کنترل به دست می‌آید. تحت فرض مقابل نوع – لهمن (برای اطلاعات بیش‌تر به کتاب‌های لهمن (۱۹۵۳)، گیبونس و چاکرابارتی (۲۰۰۳)، وان در لان و چاکرابارتی (۲۰۰۱)، هولندر و ولف (۱۹۹۹) و بالاکریشنان و نگ (۲۰۰۶) مراجعه شود.)، تابع توزیع خارج از کنترل $G(x) = (F(x))^{\gamma}$ برای اعداد مثبت $\gamma > 0$، فرض شده است. اگر γ یک عدد صحیح مثبت باشد، فرض مقابل لهمن بیان می‌کند که متغیرهای تصادفی Y به صورت دقیق مانند بزرگ‌ترین مقدار γی متغیرهای مستقل X توزیع می‌شوند. به‌طور مشابه، ممکن است تابع توزیع خارج از کنترل به شکل $G(x) = 1 - \left(1 - F(x)\right)^{\gamma}$ انتخاب شود. در این حالت، برای عدد صحیح مثبت γ، متناظر با حالتی است که در آن متغیرهای Y به صورت دقیق مانند کوچکترین مقدار γی متغیرهای مستقل X توزیع می‌شوند.

قضیه ۳. تابع جرم احتمال توأم $(M_0, M_{a+1}, \dots, M_b)$ تحت فرض مقابل لهمن $G(x) = (F(x))^{\gamma}$ به صورت زیر می‌باشد.

$$P\left(M_0 = m_0 \text{ و } M_j = m_j \;, a+1 \le j \le b\right) = c_1 c_2 \gamma^{-(b-a+1)} \prod_{j=a}^{b-1} B\left(\frac{j}{\gamma} + m_0 + \sum_{i=a+1}^{j} m_i, m_{j+1} + 1\right) \times \sum_{l=0}^{m-b} (-1)^l \binom{m-b}{j} B\left(\frac{b+l}{\gamma} + m_0 + \sum_{i=a+1}^{b} m_i \,, n - m_0 - \sum_{i=a+1}^{b} m_i + 1\right),$$

که

$$c_1 = \frac{m!}{(a-1)!\,(m-b)!}\,, \quad c_2 = \frac{n!}{m_0!\left(\prod_{j=a+1}^{b} m_j!\right)\left(n - m_0 - \sum_{j=a+1}^{b} m_j\right)!}\,,$$

و $\mathrm{B}(a,b)$ تابع بتا تعریف شده است.

برهان. تحت فرض مقابل لهمن *G(x)* $= (F(x))^{\gamma}$ که $G\left(F^{-1}(x)\right) = x^{\gamma} G F^{-1}(x)$ و با جای‌گذاری در (۲۲) داریم:

$$P\left(M_0 = m_0 \text{ و } M_j = m_j \;, \quad a+1 \le j \le b\right)$$

$$= \iint \dots \int_{0 \le u_a \le u_{a+1} \le \dots \le u_b \le 1} q\left(u_a^{\gamma}, u_{a+1}^{\gamma}, \dots, u_b^{\gamma}\right) f_{a:b}\,(u_a, u_{a+1}, \dots, u_b) du_a du_{a+1} \dots du_b,$$

که با توجه به (۱۹) و (۲۱) نتایج زیر به‌دست می‌آیند

$$P\left(M_0 = m_0 \text{ و } M_j = m_j \;, \quad a+1 \le j \le b\right)$$

---

7. Lehmann
8. Gibbons and Chakraborti
9. van der Lann and Chakraborti
10. Hollander and Wolfe
11. Balakrishnan and Ng

$$= c_1 c_2 \sum_{l=0}^{m-b} \binom{m-b}{l} (-1)^l \iint \cdots \int_{0\le u_a \le u_{a+1}\le\cdots\le u_b\le 1} u_a^{a+m_0\gamma-1} \times \prod_{j=a+1}^{b} \left(u_j^\gamma - u_{j-1}^\gamma\right)^{m_j} u_b^l \left(1 - u_b^\gamma\right)^{n-m_0-\sum_{i=a+1}^{b} m_i} du_a du_{a+1} \dots du_b.$$

اکنون با استفاده از تبدیل $t = \left({u_a}/{u_{a+1}}\right)^\gamma$ در درونی‌ترین انتگرال، داریم:

$$P\left(M_0 = m_0 \quad \text{و} \quad M_j = m_j \ , \quad a+1 \le j \le b\right) = c_1 c_2 \sum_{l=0}^{m-b} \binom{m-b}{l} (-1)^l \iint \cdots \int_{0\le u_a \le u_{a+1}\le\cdots\le u_b\le 1} \gamma^{-1} B\left(\frac{a}{\gamma} + m_o, m_{a+1}+1\right) \times \prod_{j=a+2}^{b} \left(u_j^\gamma - u_{j-1}^\gamma\right)^{m_j} \left(1 - u_b^\gamma\right)^{n-m_o-\sum_{i=a+1}^{b} m_i} du_{a+1} \dots du_b.$$

به طور مشابه، با استفاده مکرر از تبدیل:
$t = \left({u_a}/{u_{a+1}}\right)^\gamma,\ j = a+1, a+2, \dots, b-1$، عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$P\left(M_0 = m_0 \quad \text{و} \quad M_j = m_j \ , \quad a+1 \le j \le b\right) = \frac{m!\,n!}{(a-1)!\,(m-b)!\,m_0!\left(\prod_{j=a+1}^{b} m_j!\right)\left(n - m_0 - \sum_{j=a+1}^{b} m_j\right)!} \gamma^{-(b-a+1)}$$
$$\times \prod_{j=a}^{b-1} B\left(\frac{j}{\gamma} + m_0 + \sum_{i=a+1}^{j} m_i, m_{j+1}+1\right)$$
$$\times \sum_{l=0}^{m-b} (-1)^l \binom{m-b}{j} B\left(\frac{b+l}{\gamma} + m_0 + \sum_{i=a+1}^{b} m_i, n - m_0 - \sum_{i=a+1}^{b} m_i + 1\right)$$

در نتیجه برهان قضیه کامل می‌شود.

۵. توزیع طول اجرا

یکی از ضعف‌های اساسی نمودارهای کنترلی ناپارامتری این است که هشدارهایی که برای رخدادها می‌دهند، مستقل نیستند. و بنابر این، متوسط طول اجرای (*ARL*) نمودار نمی‌تواند مانند معکوسی از احتمال هشدارها محاسبه شود. اگرچه، می‌توان با استفاده از یک شناسه‌ی شرطی، یک فرمول دقیق برای توزیع طول اجرا و میانگین آن‌ها به‌دست آورد.

در بررسی فرمول‌های (۱۵) و (۱۷) واضح است که، تحت شرط $X_{a:b} = (x_a, x_{a+1}, \dots, x_b) = x_{a:b} \in \Re^{b-a+1}$، زمان مورد انتظار متغیر تصادفی N، تعدادی از نمونه‌های Y را تا زمانی‌که یک هشدار خارج از کنترل، نتیجه‌ی یک توزیع هندسی با احتمال موفقیت زیر

$$p\,(x_{a:b}) = \sum_{(m_0, m_{a+1}, \dots, m_b) \in A} P\left(M_0(Y; x_{a:b}) = m_0 \ \text{و}\ M_j(Y; x_{a:b}) = m_j \ , a+1 \le j \le b\right)$$

و تابع جرم احتمال زیر

$$\left(1 - p(x_{a:b})\right)\left(p(x_{a:b})\right)^{k-1} = \left(p(x_{a:b})\right)^{k-1} - \left(p(x_{a:b})\right)^{k}, \ k = 1,2, \dots .$$

باشد، را تعریف می‌کند.

بنابر این، توزیع غیرشرطی N به صورت زیر است:

$$P\,(N = k) = D(k-1) - D(k), \quad (۲۳)$$

(23)

که *D(0) = 1* و

$$D(k) = E_{x_{a:b}}\left\{\left(p(x_{a:b})\right)^k\right\}, \quad k = 1,2, \dots .$$

با تغییر متغیرهای تصادفی $X_{a:b}$ با استفاده از فرمول (۱۸) داریم

$$D\,(k) = E_{U_{a:b}}\left\{\left(p(u_{a:b})\right)^k\right\} = \iint \cdots \int_{0\le u_a \le u_{a+1}\le\cdots\le u_b\le 1} \left(p(u_{a:b})\right)^k f_{a:b}(u_{a:b}) du_a du_{a+1} \dots du_b,$$

که $f_{a:b}$ تابع چگالی توأم آماره‌های ترتیبی $(U_a, U_{a+1}, \dots, U_b)$ در (۱۹) است، و

$$p\,(u_{a:b}) = \sum_{(m_0, m_{a+1}, \dots, m_b) \in A} P\left(M_0(Y; u_{a:b}) = m_0 \quad \text{و} \quad M_j(Y; u_{a:b}) = m_j \ , \quad a+1 \le j \le b\right).$$

با توجه به برهان قضیه۲، عبارت زیر حاصل شده است

$$p(u_{a:b}) = \sum_{(m_0, m_{a+1}, \dots, m_b) \in A} q\left(GF^{-1}(u_a), GF^{-1}(u_{a+1}), \dots, GF^{-1}(u_b)\right),$$

که q در (۲۱) تعریف شده است.

از بحث قبلی، نتایج کلی زیر، توزیع طول اجرا و میانگین نمودار کنترلی حاصل می‌شود.

قضیه۴. فرض کنید N زمان مورد انتظار طول اجرای یک نمودار کنترلی که سیگنال‌های آن، هشدار به هنگام بردار تصادفی $(M_0, M_{a+1}, \dots, M_b)$، با مقادیر خارج از مجموعه $A \subseteq \{0,1,2, \dots\}^{b-a}$ باشد. آن‌گاه اگر

$$Q(v_a, v_{a+1}, \dots, v_b) = \sum_{(m_0, m_{a+1}, \dots, m_b) \in A} q(v_a, v_{a+1}, \dots, v_b),$$

سپس:

(a) تابع جرم احتمال روی N عبارت است از $P(N = k) = D(k-1) - D(k),\ k = 1,2, \dots$ با $D(0) = 1$ و

$$D(k) = \iint \cdots \int_{0\le u_a \le u_{a+1}\le\cdots\le u_b\le 1} \left(Q^k\left(GF^{-1}(u_a), GF^{-1}(u_{a+1}), \dots, GF^{-1}(u_b)\right)\right) f_{a:b}(u_a, u_{a+1}, \dots, u_b) du_a du_{a+1} \dots du_b;$$

(b) متوسط طول اجرا $ARL = E(N)$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$ARL = \sum_{k=0}^{\infty} D(k) = \iint \dots \int_{0\le u_a \le u_{a+1} \le \cdots \le u_b \le 1} \frac{1}{1 - Q\left(GF^{-1}(u_a), GF^{-1}(u_{a+1}), \dots, GF^{-1}(u_b)\right)} \times f_{a:b}(u_a, u_{a+1}, \dots, u_b) du_a du_{a+1} \dots du_b. \quad (25)$$

برهان. قسمت (a) قبلاً اثبات شده است. قسمت (b) به آسانی از فرمول شناخته شده زیر نتیجه می‌شود:

$$E(N) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} P(N > k) = E_{U_{a:b}}\left(\sum\nolimits_{k=0}^{\infty} p^k\,(U_{a:b})\right) = E_{U_{a:b}}\left(\frac{1}{1 - p(U_{a:b})}\right).$$

توزیع متوسط طول اجرای تحت کنترل (ARL_{in}) را با قرار دادن $G = F$ می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$ARL_{in} = \iint \dots \int_{0\le u_a \le u_{a+1} \le \cdots \le u_b \le 1} \frac{1}{1 - Q(u_a, u_{a+1}, \dots, u_b)} f_{a:b}(u_a, u_{a+1}, \dots, u_b) du_a du_{a+1} \dots du_b. \quad (۲۶)$$

به طورمشابه، می‌توان متوسط طول اجرای خارج از کنترل (ARL_{out})، هم‌چنین توزیع تحت کنترل F و توزیع خارج از کنترل G را پیش‌بینی کرد. زمانی که توزیع خارج از کنترل، یک فرض مقابل لهمن از توزیع تحت کنترل F، به شکل $G(x) = \left(F(x)\right)^{\gamma}$ است، آن‌گاه داریم:

$$ARL_{out} = \iint \dots \int_{0\le u_a \le u_{a+1} \le \cdots u_b \le 1} \frac{1}{1 - Q\left(u_a^{\gamma}, u_{a+1}^{\gamma}, \dots, u_b^{\gamma}\right)} f_{a:b}(u_a, u_{a+1}, \dots, u_b) du_a du_{a+1} \dots du_b. \quad (۲۷)$$

۶. یافته‌های پژوهش

در بخش قبلی نمودارهای کنترلی جدید شوهارتی یک‌متغیره معرفی شدند، حال ما در این بخش قصد داریم با استفاده از، جدول‌ها و مثال‌های عددی عملکرد نمودارهای کنترلی (R، N وW) را با هم مقایسه کنیم و نشان دهیم که عملکرد نمودار کنترلی W در مقایسه با دو نمودار کنترلی (R وN) و دیگر نمودارها بهتر است. از آن‌جا که یک روش مقایسه‌ی نمودارهای کنترلی استفاده از نرخ هشدار غلط (FAR) مشترک یا متوسط طول اجرای تحت کنترل (ARL_{in}) مشترک و سپس آزمودن نرخ‌های هشدار (AR) آن‌ها است. بنابر این، در بخش اول، با استفاده از مثال‌های عددی، به مقایسه‌ی نمودارهای کنترلی پرداخته می‌شود، سپس در دو بخش بعدی به نتیجه‌گیری و ارائه‌ی پیش‌نهاد می‌پردازیم.

۷. مثال‌های عددی

در این بخش با آزمودن عددی، اثر نمودارهای کنترلی جدید و ویژگی‌های استواری آن‌ها، را در هر دو موقعیت تحت کنترل و خارج از کنترل، نشان می‌دهیم. در جدول ۳، نرخ هشدار (AR) سه نمودار کنترلی با m و nهای مختلف، نشان داده شده است. پارامترهای طرح a، b، r_0، r، k و w برای زمانی‌که نرخ هشدار غلط ۰/۰۵ است (FAR = ۰/۰۵)، انتخاب شده‌اند. سپس مقادیر نرخ هشدار (AR) برای ۱/۸و ۱/۴ ،۱/۲ = γ همه با استفاده از قضیه۳ در بخش قبلی به‌دست آمده‌اند.

در جدول ۳، نمودار کنترلی آزاد- توزیع نشان داده شده (برای پارامترهای انتخابی مناسب) مشابه عملکرد نرخ هشدار (AR) یک نرخ هشدار غلط (FAR) مشترک به میزان ۰/۰۵، را مشاهده کردیم. به همین دلیل از این پس، توجه‌مان را فقط به یکی از آن‌ها (نمودارها) محدود می‌کنیم. به عبارت دیگر، نمودار مجموع رتبه‌ای ویلکاکسون‌گونه، زیرا در دو نمودار کنترلی دیگر، تحت انتخاب‌های پارامترهای طرح مناسب، تقریباً نتایج به دست آمده با هم برابرند. در جدول ۴، نرخ هشدار غلط (FAR) نمودار W برای چندین طرح و با انتخاب مختلف پارامترهای m, n, a, b, w, r_0 که محاسبه‌ی آن‌ها توسط قضیه‌ی ۱ انجام شده است، نشان داده شده است.

جدول ۳. مقایسه AR سه نمودار کنترلی با ($\gamma = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ و $\frac{1}{8}$) و FAR = ۰/۰۵

m	n	نمودار R (LCL, UCL)	r_0	r	Exact FAR	AR	نمودار N_2 (LCL, UCL)	r_0	k	Exact FAR	AR	نمودار W (LCL, UCL)	w	r_0	Exact FAR	AR
۱۰۰	۵	(۱۰و۷)	۲	۲	۰/۰۰۴۳	۰/۱۲۰۱ ۰/۵۱۳۰ ۰/۸۴۸۶	(۱۰و۷)	۲	۱	۰/۰۰۴۱	۰/۱۱۹۳ ۰/۵۱۲۳ ۰/۸۴۸۳	(۱۰و۷)	۷۰	۲	۰/۰۰۴۱	۰/۱۱۹۳ ۰/۵۱۲۳ ۰/۸۴۸۳
	۱۱	(۱۳و۱۰)	۴	۳	۰/۰۰۴۹	۰/۲۴۶۱ ۰/۸۲۷۹ ۰/۹۹۰۱	(۱۳و۱۰)	۴	۱	۰/۰۰۴۷	۰/۲۴۵۷ ۰/۸۲۷۷ ۰/۹۹۰۱	(۱۳و۱۰)	۹۵	۴	۰/۰۰۴۸	۰/۲۴۷۵ ۰/۸۲۸۸ ۰/۹۹۰۲
	۲۵	(۱۲و۹)	۷	۴	۰/۰۰۴۵	۰/۴۶۶۸ ۰/۹۸۷۲ ۰/۹۹۹۹	(۱۲و۹)	۷	۱	۰/۰۰۵۰	۰/۴۶۸۰ ۰/۹۸۷۲ ۰/۹۹۹۹	(۱۲و۹)	۱۲۳	۷	۰/۰۰۴۹	۰/۴۷۵۳ ۰/۹۸۷۹ ۰/۹۹۹۹
۲۰۰	۵	(۱۹و۱۶)	۲	۲	۰/۰۰۵۰	۰/۱۴۰۹ ۰/۵۵۲۶ ۰/۸۶۸۹	(۱۹و۱۶)	۲	۱	۰/۰۰۵۰	۰/۱۴۰۸ ۰/۵۵۲۶ ۰/۸۶۸۹	(۱۸و۱۵)	۶۵	۲	۰/۰۰۴۶	۰/۱۳۲۶ ۰/۵۳۹۹ ۰/۸۶۳۱
	۱۱	(۲۴و۲۱)	۴	۳	۰/۰۰۴۵	۰/۲۶۴۷ ۰/۸۴۸۸ ۰/۹۹۲۲	(۲۴و۲۱)	۴	۲	۰/۰۰۴۴	۰/۲۶۴۶ ۰/۸۴۸۸ ۰/۹۹۲۲	(۲۴و۲۱)	۱۳۵	۴	۰/۰۰۴۸	۰/۲۶۶۹ ۰/۸۴۹۷ ۰/۹۹۲۳
	۲۵	(۱۹و۱۶)	۶	۵	۰/۰۰۴۹	۰/۵۶۷۸ ۰/۹۹۵۲ ۰/۹۹۹۹	(۱۹و۱۶)	۶	۲	۰/۰۰۴۹	۰/۵۶۷۷ ۰/۹۹۵۲ ۰/۹۹۹۹	(۱۹و۱۶)	۱۹۰	۶	۰/۰۰۵۰	۰/۵۶۸۸ ۰/۹۹۵۳ ۰/۹۹۹۹
۵۰۰	۵	(۴۲و۳۹)	۲	۱	۰/۰۰۴۷	۰/۱۳۷۴ ۰/۵۵۱۰ ۰/۸۶۹۰	(۴۲و۳۹)	۲	۲	۰/۰۰۴۴	۰/۱۳۶۷ ۰/۵۵۰۴ ۰/۸۶۸۹	(۴۲و۳۹)	۱۰۰	۲	۰/۰۰۴۹	۰/۱۳۸۱ ۰/۵۵۱۵ ۰/۸۶۹۲
	۱۱	(۳۶و۳۳)	۳	۲	۰/۰۰۴۸	۰/۳۰۴۲ ۰/۸۹۱۱ ۰/۹۹۶۵	(۳۶و۳۳)	۳	۲	۰/۰۰۴۸	۰/۳۰۴۱ ۰/۸۹۱۱ ۰/۹۹۶۵	(۳۶و۳۳)	۳	۲	۰/۰۰۴۹	۰/۳۰۴۵ ۰/۸۹۱۲ ۰/۹۹۶۵
	۲۵	(۲۴و۲۱)	۴	۴	۰/۰۰۴۵	۰/۵۹۰۷ ۰/۹۹۷۱ ۰/۹۹۹۹	(۲۴و۲۱)	۴	۲	۰/۰۰۴۵	۰/۵۹۰۷ ۰/۰۰۷۱ ۰/۹۹۹۹	(۲۴و۲۱)	۱۵۰	۴	۰/۰۰۴۶	۰/۵۹۱۵ ۰/۹۹۷۱ ۰/۹۹۹۹

در جدول ۴، با استفاده از شش پارامتر (m, n, a, b, w, r_0) در این نمودار انعطاف پذیر (نمودار کنترلی W)، با ثابت نگه‌داشتن بعضی از پارامترها و سپس پیش بینی کردن بهینه‌ترین انتخاب آن‌ها، یا جستجوی فرض مقابل، یک ترکیب قابل قبولی از آن‌ها که مناسب نیازهای ما می‌باشد، را می‌توان به دست آورد. به عنوان مثال، اگر از نمونه‌ی مرجع با اندازه‌ی m = 200، نمونه‌های آزمون با اندازه‌ی n = 25، را انتخاب کنیم و نرخ هشدار غلط (FAR) 0/05 را در نظر بگیریم، آن‌گاه نتایج زیر به دست می‌آیند:

- اگر در نمونه‌ی آزمون انتخابی مشاهده‌ها، a=۱۹، b= ۲۲، $w = ۸۱$ و $r_0 = ۸$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه نرخ هشدار غلط (FAR) برابر است با (FAR = ۰/۰۴۶۴)، یا

جدول ۴. نرخ‌های هشدار غلط برای طرح داده شده.

n	r_0	نمونه‌ی مرجع m: 40			60			100			200		
		(a,b)	w	FAR	(a,b)	w	FAR	(a,b)	w	FAR	(a,b)	w	FAR
۵	۲	(۷و۱۱)	۲۰۰	۰/۰۴۷۱	(۱۰و۱۳)	۴۵	۰/۰۴۶۶	(۱۵و۱۹)	۱۵۰	۰/۰۲۹۲	(۲۰و۲۴)	۸۰	۰/۰۱۴۰
			۴۰	۰/۰۵۹۷		۳۰	۰/۰۶۶۹		۵۰	۰/۰۴۶۴		۴۲	۰/۰۴۵۳
			۴۴	۰/۰۹۰۰		۲۴			۴۴	۰/۰۶۹۶		۴۰	۰/۰۸۹۰
	۳	(۱۳و۱۷)	۹۰	۰/۰۴۹۹	(۲۰و۲۳)	۱۵۰	۰/۰۴۹۲	(۱۵و۱۹)	۵۰	۰/۰۲۰۱	(۲۰و۲۴)	۴۴	۰/۰۱۴۴
			۶۴	۰/۰۶۰۱		۸۰	۰/۰۷۶۱		۴۴	۰/۰۴۵۱		۴۲	۰/۰۴۶۹
			۵۸	۰/۰۹۲۴		۴۴	۰/۰۸۴۲		۴۲	۰/۰۸۵۷		۲۷	۰/۰۹۵۴
	۴	(۱۶و۲۰)	۱۰۰	۰/۰۲۴۹	(۲۵و۲۸)	۵۵	۰/۰۴۴۹	(۲۵و۲۹)	۶۰	۰/۰۱۸۵	(۳۰و۳۴)	۶۴	۰/۰۱۸۵
			۷۲	۰/۰۴۴۰		۵۴	۰/۰۵۸۱		۵۴	۰/۰۴۲۴		۶۲	۰/۰۴۱۰
			۶۵	۰/۰۹۸۷		۵۴	۰/۰۹۴۴		۵۳	۰/۰۶۰۴		۲۷	۰/۰۹۴۸
۱۱	۴	(۷و۱۲)	۱۷۰	۰/۰۴۴۴	(۱۱و۱۵)	۱۴۰	۰/۰۴۶۹	(۱۵و۱۹)	۷۸	۰/۰۴۴۱	(۲۰و۲۴)	۸۵	۰/۰۱۶۴
			۱۰۰	۰/۰۵۰۶		۹۰	۰/۰۵۵۶		۶۸	۰/۰۴۹۹		۴۴	۰/۰۴۱۶
			۶۶	۰/۰۹۷۸		۵۵	۰/۰۹۸۷		۵۳	۰/۰۹۶۰		۴۴	۰/۰۶۹۴
	۶	(۱۰و۱۵)	۱۷۰	۰/۰۱۵۲	(۱۱و۱۵)	۱۰۰	۰/۰۱۰۴	(۱۸و۲۲)	۹۰	۰/۰۱۴۴	(۲۵و۲۹)	۵۵	۰/۰۳۰۱
			۱۰۲۲	۰/۰۴۷۱		۵۸	۰/۰۴۸۶		۷۹	۰/۰۴۲۷		۵۴	۰/۰۴۵۸
			۷۹	۰/۰۹۲۹		۵۲	۰/۰۹۱۴		۴۲	۰/۰۸۷۴		۵۴	۰/۰۷۷۰
	۸	(۱۵و۲۰)	۱۴۴	۰/۰۴۷۲	(۱۷و۲۱)	۱۳۰	۰/۰۱۰۱	(۲۱و۲۵)	۱۰۰	۰/۰۱۳۰	(۲۶و۳۰)	۷۰	۰/۰۲۲۷
			۱۱۵	۰/۰۷۴۹		۸۴	۰/۰۴۷۷		۹۱	۰/۰۴۵۷		۵۶	۰/۰۴۷۱
			۱۱۱	۰/۰۹۶۱		۷۸	۰/۰۹۰۶		۴۸	۰/۰۹۱۶		۵۵	۰/۰۷۸۹
۲۵	۸	(۵و۸)	۸۵	۰/۰۴۹۶	(۱۰و۱۳)	۲۵۰	۰/۰۳۳۷	(۱۵و۱۸)	۱۵۵	۰/۰۱۹۸	(۱۹و۲۲)	۱۲۰	۰/۰۱۰۴
			۷۰	۰/۰۸۴۴		۱۳۰	۰/۰۴۸۱		۱۰۵	۰/۰۴۹۸		۸۱	۰/۰۴۶۴
			۶۶	۰/۰۹۶۶		۸۵	۰/۰۹۹۸		۷۳	۰/۰۹۰۶		۴۴	۰/۰۸۷۷
	۱۴	(۸و۱۲)	۱۵۰	۰/۰۴۲۸	(۱۵و۱۸)	۲۰۰	۰/۰۱۱۵	(۲۸و۳۱)	۲۴۰	۰/۰۱۶۶	(۳۰و۳۳)	۱۳۰	۰/۰۳۳۰
			۱۴۰	۰/۰۵۶۷		۱۴۶	۰/۰۴۸۶		۱۸۷	۰/۰۴۷۱		۱۲۷	۰/۰۴۷۰
			۱۲۰	۰/۰۹۷۲		۱۱۴	۰/۰۹۶۴		۱۳۰	۰/۰۹۶۰		۶۷	۰/۰۸۲۱
	۱۶	(۱۲و۱۶)	۲۱۰	۰/۰۴۴۴	(۱۹و۲۲)	۲۱۰	۰/۰۲۲۴	(۳۲و۳۵)	۲۴۰	۰/۰۱۵۵	(۳۳و۳۶)	۱۶۰	۰/۰۱۰۵
			۱۹۰	۰/۰۶۶۵		۱۸۵	۰/۰۴۶۹		۲۱۵	۰/۰۴۴۱		۱۴۰	۰/۰۴۶۸
			۱۷۰	۰/۰۹۹۸		۱۴۴	۰/۰۹۶۱		۱۴۸	۰/۰۹۴۶		۷۴	۰/۰۹۰۲

- اگر در نمونه‌ی آزمون انتخابی مشاهده‌ها، a=۳۳، b=۳۶، w = ۱۴ و r_0 = ۱۶ را در نظر بگیریم، آن‌گاه نرخ هشدار غلط (FAR) برابر است با (FAR = ۰/۰۴۶۸).
- اطلاعات مفیدی درباره‌ی کارایی نمودارهای کنترلی ناپارامتری از جدول ۵ برای حالت فرض‌های مقابل لهمن به دست می‌آید. در این جدول، نرخ هشدار (AR) برای چندین انتخاب پارامترهای طرح m, n, a, b, w, r_0 و پارامتر تغییر $\gamma > 0$، محاسبه و نشان داده شده است. در واقع همه‌ی طرح‌های نشان داده شده‌ی جدول ۴ برای قابلیت پی بردن به تغییرهای توزیع تحت کنترل، آزمایش شده‌اند. بنابر این، از مقادیر گزارش شده در جدول ۵، برای حالتی که m = 200، n = 25 و با انتخاب پارامترهای طرح متناظر با a = 19، b = 22، w = 81 و r_0 = ۸، نرخ هشدار(AR) بهینه برای پی بردن به تغییر در فرض‌های مقابل لهمن زمانی‌که $\gamma = \frac{1}{3}$، برابر با ۰/۸۸۶۸ (AR=۰/۸۸۶۸) و زمانی‌که $\gamma = \frac{1}{5}$، برابر با ۰/۹۹۷۷ (AR=۰/۹۹۷۷) است.

یک روش مقایسه دو نمودار کنترلی مختلف، استفاده از نرخ هشدار غلط (FAR) مشترک یا متوسط طول اجرای تحت کنترل (ARL_{in}) و سپس آزمودن نرخ‌های هشدار(AR) آن‌ها است. در نتیجه می‌توان، کارایی نمودار کنترلی آزاد- توزیع پیشنهاد شده را مقایسه کرد. در جدول۶، سه سطح نرخ هشدار غلط (FAR) مختلف و چندین مقدار پارامترهای m و n بررسی شده است.

جدول ۵. نرخ‌های هشدار (AR) برای طرح داده شده.

		m نمونه‌ی مرجع											
n	r	۴۰			۶۰			۱۰۰			۲۰۰		
		(a,b)	w	AR	(a,b)	w	AR	(a,b)	w	AR	(a,b)	w	AR
۵	۲	(۱۱و۷)	۲۰۰	۰/۵۸۵۸ ۰/۸۲۵۱	(۱۳و۱۰)	۴۵	۰/۵۹۱۰ ۰/۸۲۹۶	(۱۹و۱۵)	۱۵۰	۰/۵۴۴۸ ۰/۸۹۶۷	(۲۴و۲۰)	۸۰	۰/۰۴۳۶۷ ۰/۷۳۳۳
			۴۰	۰/۵۹۶۷ ۰/۸۳۰۰		۳۰	۰/۶۰۱۱ ۰/۸۳۳۳		۵۰	۰/۵۶۶۱ ۰/۸۱۵۲		۴۲	۰/۴۹۰۷ ۰/۷۶۴۳
			۳۳	۰/۶۳۴۰ ۰/۸۴۹۱		۲۳	۰/۶۲۲۸ ۰/۸۴۵۲		۳۳	۰/۶۰۵۴ ۰/۸۳۵۴		۴۰	۰/۵۲۵۹ ۰/۷۸۰۴
		(۱۷و۱۳)	۹۰	۰/۴۸۸۶ ۰/۷۱۸۹	(۲۳و۲۰)	۱۵۰	۰/۵۰۳۷ ۰/۷۳۲۰	(۱۹و۱۵)	۵۰	۰/۲۴۷۴ ۰/۵۰۱۲	(۲۴و۲۰)	۴۳	۰/۲۰۷۱ ۰/۴۴۳۳
			۶۳	۰/۴۹۳۷ ۰/۷۲۱۷		۸۰	۰/۵۱۶۸ ۰/۷۳۸۶		۳۳	۰/۳۲۵۳ ۰/۵۶۴۱		۴۲	۰/۲۳۷۳ ۰/۴۶۵۸
			۵۸	۰/۵۲۱۱ ۰/۷۳۷۳		۴۴	۰/۵۳۵۲ ۰/۷۵۱۵		۳۲	۰/۳۶۶۰ ۰/۵۹۲۱		۲۷	۰/۲۷۵۲ ۰/۴۸۲۴
		(۲۰و۱۶)	۱۰۰	۰/۲۱۵۶ ۰/۳۹۱۲	(۲۸و۲۵)	۵۵	۰/۲۵۲۹ ۰/۴۲۹۵	(۲۹و۲۵)	۶۰	۰/۱۱۰۸ ۰/۲۵۳۷	(۳۴و۳۰)	۶۳	۰/۱۰۲۸ ۰/۲۰۷۹
			۷۲	۰/۲۳۱۹ ۰/۴۰۰۷		۵۴	۰/۲۸۳۷ ۰/۴۵۵۲		۵۴	۰/۱۶۴۳ ۰/۳۰۶۲		۶۲	۰/۱۲۶۲ ۰/۲۲۳۶
			۶۵	۰/۲۴۶۸ ۰/۴۰۶۷		۵۳	۰/۳۲۳۳ ۰/۴۸۴۴		۵۳	۰/۱۹۸۱ ۰/۳۳۲۳		۲۷	۰/۱۵۰۳ ۰/۲۳۳۱
	۱۱	(۱۲و۷)	۱۷۰	۰/۸۰۱۸ ۰/۹۶۹۰	(۱۵و۱۱)	۱۴۰	۰/۸۳۰۹ ۰/۹۷۶۴	(۱۹و۱۵)	۷۸	۰/۷۸۲۰ ۰/۹۶۷۰	(۲۴و۲۰)	۸۵	۰/۶۵۳۹ ۰/۹۳۴۱
			۱۰۰	۰/۸۰۸۸ ۰/۹۷۰۶		۹۰	۰/۸۳۰۹ ۰/۹۷۶۴		۶۸	۰/۸۰۵۹ ۰/۹۷۱۶		۴۴	۰/۷۱۰۷ ۰/۹۴۷۷
			۶۶	۰/۸۳۰۱ ۰/۹۷۴۵		۵۵	۰/۹۷۷۱ ۰/۹۸۱۸		۵۳	۰/۸۱۰۱ ۰/۹۷۲۱		۴۳	۰/۷۳۶۲ ۰/۹۵۳۲
		(۱۵و۱۰)	۱۷۰	۰/۵۸۳۸ ۰/۸۷۳۹	(۱۵و۱۱)	۱۰۰	۰/۴۳۷۴ ۰/۷۹۶۷	(۲۲و۱۸)	۹۰	۰/۴۳۹۴ ۰/۸۰۲۱	(۲۹و۲۵)	۵۵	۰/۴۰۹۷ ۰/۷۶۰۵
			۱۰۲	۰/۶۰۴۹ ۰/۸۸۰۳		۵۸	۰/۴۹۹۸ ۰/۸۲۶۰		۷۹	۰/۴۸۶۴ ۰/۸۱۹۸		۵۴	۰/۴۴۰۳ ۰/۷۶۹۸
			۷۹	۰/۶۴۷۷ ۰/۸۹۵۵		۵۲	۰/۵۵۱۴ ۰/۸۴۱۶		۴۲	۰/۵۷۱۷ ۰/۸۵۸۴		۵۳	۰/۴۵۸۹ ۰/۷۷۳۲
		(۲۰و۱۵)	۱۴۳	۰/۳۶۸۶ ۰/۶۶۸۷	(۲۱و۱۷)	۱۳۰	۰/۲۱۸۷ ۰/۵۳۰۷	(۲۵و۲۱)	۱۰۰	۰/۱۴۱۱ ۰/۴۱۶۷	(۳۰و۲۶)	۷۰	۰/۰۷۱۵ ۰/۲۵۰۴
			۱۱۵	۰/۳۹۵۹		۸۴	۰/۲۷۱۳		۹۱	۰/۱۷۶۲		۵۶	۰/۲۴۱۹

			۰/۶۸۳۰			۰/۵۶۶۰			۰/۴۲۹۱			۰/۳۹۵۴
		۱۱۱	۰/۴۰۵۷ ۰/۶۸۵۵		۷۸	۰/۳۱۰۹ ۰/۵۷۸۹		۴۸	۰/۳۴۳۳ ۰/۵۶۸۹		۵۵	۰/۲۵۹۵ ۰/۳۹۸۵
۲۵	(۵و۸)	۸۵	۰/۹۱۸۱ ۰/۹۹۷۸	(۱۰و۱۳)	۲۵۰	۰/۹۶۳۶ ۰/۹۹۹۵	(۱۵و۱۸)	۱۵۵	۰/۹۶۰۲ ۰/۹۹۹۵	(۱۹و۲۲)	۱۲۰	۰/۸۶۸۱ ۰/۹۹۷۲
		۷۰	۰/۹۳۳۶ ۰/۹۹۸۴		۱۳۰	۰/۹۶۷۲ ۰/۹۹۹۶		۱۰۵	۰/۹۶۴۹ ۰/۹۹۹۶		۸۱	۰/۸۸۶۸ ۰/۹۹۷۷
		۶۶	۰/۹۳۴۷ ۰/۹۹۸۴		۸۵	۰/۹۷۵۶ ۰/۹۹۹۷		۷۳	۰/۹۷۳۰ ۰/۹۹۹۷		۴۳	۰/۹۳۰۱ ۰/۹۹۸۷
	(۸و۱۲)	۱۵۰	۰/۵۵۴۳ ۰/۹۲۱۲	(۱۵و۱۸)	۲۰۰	۰/۶۶۹۶ ۰/۹۶۳۰	(۲۸و۳۱)	۲۴۰	۰/۷۶۲۷ ۰/۹۸۱۰	(۳۰و۳۳)	۱۳۰	۰/۳۷۷۷ ۰/۸۷۰۳
		۱۴۰	۰/۵۶۳۶ ۰/۹۲۱۹		۱۴۶	۰/۶۸۴۸ ۰/۹۶۵۰		۱۸۷	۰/۷۷۳۶ ۰/۹۸۲۰		۱۲۷	۰/۳۷۷۷ ۰/۸۷۰۳
		۱۲۰	۰/۶۱۳۵ ۰/۹۳۴۷		۱۱۴	۰/۷۲۰۰ ۰/۹۶۹۳		۱۳۰	۰/۸۰۶۶ ۰/۹۸۴۸		۶۷	۰/۵۶۳۶ ۰/۹۱۱۰
۱	(۱۲و۱۶)	۲۱۰	۰/۳۹۷۵ ۰/۸۱۸۷	(۱۹و۲۲)	۲۱۰	۰/۵۸۶۶ ۰/۹۲۸۳	(۳۲و۳۵)	۲۴۰	۰/۶۰۲۸ ۰/۹۳۸۵	(۳۳و۳۶)	۱۶۰	۰/۱۷۴۲ ۰/۶۷۷۵
		۱۹۰	۰/۴۱۳۰ ۰/۸۲۱۰		۱۸۵	۰/۵۸۹۰ ۰/۹۲۸۴		۲۱۵	۰/۶۰۹۰ ۰/۹۳۸۵		۱۴۰	۰/۲۰۲۶ ۰/۶۸۰۳
		۱۷۰	۰/۴۳۲۶ ۰/۸۳۱۱		۱۴۳	۰/۶۲۴۰ ۰/۹۳۴۸		۱۴۸	۰/۶۵۶۲ ۰/۹۴۶۶		۷۳	۰/۴۲۴۱ ۰/۷۶۹۲

جدول ۶. مقایسه AR نمودارهای کنترلی با نرخ هشدار غلط (FAR) مشترک (۰/۲ و ۰/۴ = γ).

FAR	*m*	*n*	*NEW*					*B−T−K*			
			(LCL,UCL)	*w*	r_0	*Exact FAR*	*AR*	*(LCL,UCL)*	*r*	*Exact FAR*	*AR*
۰/۰۱	۵۰	۵	(۴و۷)	۳۱	۲	۰/۰۰۸۲	۰/۲۵۳۸ ۰/۶۶۶۰	(۳و۴۸)	۱	۰/۰۰۷۲	۰/۱۸۸۸ ۰/۵۹۵۶
		۱۱		۴۱	۴	۰/۰۰۹۷	۰/۳۸۴۸ ۰/۸۸۵۳	(۷و۴۴)	۱	۰/۰۰۹۳	۰/۳۶۵۱ ۰/۸۶۳۸
		۲۵		۹۰	۷	۰/۰۰۹۶	۰/۷۰۱۸ ۰/۹۹۷۴	(۶و۴۵)	۱۳	۰/۰۰۹۷	۰/۳۸۸۶ ۰/۹۳۸۸
	۱۰۰	۵	(۱۰و۱۳)	۶۵	۲	۰/۰۱۰۰	۰/۳۰۸۹ ۰/۹۹۵۷	(۷و۹۴)	۱	۰/۰۰۸۶	۰/۲۲۳۰ ۰/۶۴۵۵
		۱۱		۶۶	۴	۰/۰۰۹۵	۰/۴۶۲۰ ۰/۹۲۴۹	(۶و۹۵)	۷	۰/۰۰۹۱	۰/۳۱۷۹ ۰/۸۵۳۹
		۲۵		۱۱۵	۷	۰/۰۰۹۶	۰/۸۱۱۳ ۰/۹۹۹۰	(۸و۹۳)	۱۶	۰/۰۰۸۲	۰/۵۲۹۴ ۰/۹۸۴۸
	۵۰۰	۵	(۵۰و۵۳)	۱۲۰	۲	۰/۰۰۹۴	۰/۳۱۳۹ ۰/۷۳۲۷	(۳۸و۴۳)	۲	۰/۰۰۹۱	۰/۲۴۷۲ ۰/۶۷۶۰
		۱۱		۱۰۴	۴	۰/۰۰۷۳	۰/۴۸۴۷ ۰/۹۳۹۸	(۳۳و۶۸)	۷	۰/۰۰۹۹	۰/۳۶۶۳ ۰/۸۸۹۴
		۲۵		۲۰۷	۷	۰/۰۰۹۱	۰/۸۴۰۱ ۰/۹۹۹۵	(۱۲۰و۸۱)	۷	۰/۰۰۹۵	۰/۷۴۲۱ ۰/۹۹۶۵

۰/۲۵۶۸ ۰/۶۸۵۶	۰/۰۰۹۹	۲	(۷۹و۹۲)	۰/۳۱۶۴ ۰/۷۳۵۴	۰/۰۰۹۱	۲	۲۰۳	(۱۰۰و۱۰۳)	۵	۱۰۰۰	
۰/۳۱۸۸ ۰/۸۴۲۳	۰/۰۰۹۸	۶	(۹۶و۹۵)	۰/۴۸۲۸ ۰/۹۳۶۹	۰/۰۰۷۲	۴	۲۰۳		۱۱		
۰/۷۵۴۵ ۰/۹۹۶۹	۰/۰۰۹۹	۷	(۲۴۳و۷۸)	۰/۸۵۴۲ ۰/۹۹۹۶	۰/۰۰۸۶	۷	۲۰۶		۲۵		
۰/۱۲۷۳ ۰/۵۰۵۳	۰/۰۰۳۰	۱	(۲و۴۹)	۰/۱۸۸۵ ۰/۵۹۵۶	۰/۰۰۳۶	۲	۴۵	(۳و۶)	۵	۵۰	۰/۰۰۵
۰/۲۳۷۷ ۰/۷۸۰۴	۰/۰۰۲۵	۲	(۵و۴۶)	۰/۲۸۷۸ ۰/۸۲۸۷	۰/۰۰۳۶	۴	۳۹		۱۱		
۰/۳۵۴۷ ۰/۹۴۱۰	۰/۰۰۴۸	۱۱	(۷و۴۴)	۰/۵۸۶۸ ۰/۹۸۹۶	۰/۰۰۴۹	۷	۸۰		۲۵		
۰/۱۶۱۸ ۰/۵۷۳۰	۰/۰۰۳۵	۱	(۵و۹۶)	۰/۲۲۵۴ ۰/۶۴۷۱	۰/۰۰۴۶	۲	۴۰	(۷و۱۰)	۵	۱۰۰	
۰/۲۵۳۸ ۰/۸۱۴۱	۰/۰۰۴۶	۷	(۵و۹۶)	۰/۳۳۴۸ ۰/۸۷۲۹	۰/۰۰۴۸	۴	۴۹		۱۱		
۰/۴۱۱۲ ۰/۹۶۵۰	۰/۰۰۴۵	۱۱	(۱۵و۸۶)	۰/۶۶۶۱ ۰/۹۹۶۲	۰/۰۰۴۹	۷	۸۳		۲۵		
۰/۱۱۹۷ ۰/۵۵۸۱	۰/۰۰۴۸	۳	(۲۰و۴۸۱)	۰/۲۵۶۹ ۰/۶۸۶۱	۰/۰۰۴۸	۲	۱۶۵	(۴۰و۴۳)	۵	۵۰۰	
۰/۳۰۴۴ ۰/۸۴۶۲	۰/۰۰۴۹	۵	(۵۶و۴۵۴)	۰/۳۹۷۳ ۰/۹۱۰۰	۰/۰۰۴۶	۴	۸۴		۱۱		
۰/۵۳۹۱ ۰/۹۸۶۵	۰/۰۰۵۰	۱۰	(۹۰و۴۱۱)	۰/۷۴۶۰ ۰/۹۹۸۸	۰/۰۰۴۸	۷	۱۶۸		۲۵		
۰/۲۰۴۳ ۰/۶۳۴۷	۰/۰۰۴۹	۲	(۶۲و۹۹)	۰/۲۶۲۷ ۰/۶۹۲۲	۰/۰۰۵۰	۲	۳۵۰	(۸۲و۸۵)	۵	۱۰۰۰	
۰/۳۷۱۵ ۰/۸۸۳۹	۰/۰۰۴۹	۴	(۱۳۶و۸۶۵)	۰/۴۰۴۰ ۰/۹۱۳۱	۰/۰۰۴۴	۴	۱۶۷		۱۱		
۰/۴۷۶۰ ۰/۹۷۶۶	۰/۰۰۵۰	۱۳	(۱۲۹و۸۷۲)	۰/۷۶۶۵ ۰/۹۹۹۰	۰/۰۰۴۴	۷	۱۷۱		۲۵		
۰/۰۶۳۴ ۰/۳۶۱۷	۰/۰۰۰۸	۱	(۱و۵۰)	۰/۱۴۰۴ ۰/۵۲۰۷	۰/۰۰۲۶	۲	۱۹	(۲و۵)	۵	۵۰	۰/۰۰۲۷
۰/۲۳۷۷ ۰/۷۸۰۴	۰/۰۰۲۵	۲	(۵و۴۶)	۰/۲۷۸۸ ۰/۸۲۶۴	۰/۰۰۲۷	۴	۴۳	(۳و۶)	۱۱		
۰/۳۳۰۹ ۰/۹۳۸۱	۰/۰۰۲۱	۱۰	(۷و۴۴)	۰/۵۵۱۴ ۰/۹۸۷۳	۰/۰۰۲۵	۷	۱۰۰		۲۵		
۰/۱۳۰۴ ۰/۵۲۶۲	۰/۰۰۲۱	۲	(۴و۹۷)	۰/۱۷۳۰ ۰/۵۸۵۴	۰/۰۰۲۶	۲	۲۶	(۵و۸)	۵	۱۰۰	
۰/۲۱۸۵ ۰/۷۷۵۶	۰/۰۰۲۳	۵	(۹و۹۲)	۰/۲۴۳۷ ۰/۸۱۳۴	۰/۰۰۲۷	۳	۳۹		۱۱		
۰/۳۰۲۸ ۰/۹۳۶۴	۰/۰۰۱۹	۱۲	(۱۲و۸۹)	۰/۶۴۶۱ ۰/۹۹۶۰	۰/۰۰۲۶	۶	۷۳		۲۵		

۵۰۰	۵	(۳۲و۳۵)	۱۳۴	۲	۰/۰۰۲۶	۰/۲۰۸۹ ۰/۶۳۹۵	(۱۶و۴۸۵)	۳	۰/۰۰۲۶	۰/۱۱۹۷ ۰/۵۱۱۶
	۱۱	(۳۸و۴۱)	۱۵۵	۴	۰/۰۰۲۵	۰/۳۵۳۴ ۰/۸۹۵۲	(۶۴و۴۳۷)	۲	۰/۰۰۲۶	۰/۳۳۸۶ ۰/۸۶۹۳
	۲۵		۱۶۲	۷	۰/۰۰۲۶	۰/۷۲۱۶ ۰/۹۹۸۵	(۱۰۱و۴۰۰)	۸	۰/۰۰۲۶	۰/۶۰۷۸ ۰/۹۹۱۵
۱۰۰۰	۵	(۶۶و۶۹)	۳۳۰	۲	۰/۰۰۲۷	۰/۲۱۵۱ ۰/۶۴۷۰	(۴۹و۹۵۲)	۲	۰/۰۰۲۵	۰/۱۶۲۶ ۰/۵۸۶۲
	۱۱	(۶۴و۶۷)	۱۳۱	۴	۰/۰۰۲۷	۰/۳۱۸۶ ۰/۸۷۷۸	(۴۹و۹۵۲)	۷	۰/۰۰۲۷	۰/۲۵۳۶ ۰/۸۳۵۵
	۲۵	(۶۶و۶۹)	۲۶۸	۷	۰/۰۰۲۶	۰/۶۴۵۶ ۰/۹۹۷۵	(۱۸۹و۸۱۲)	۹	۰/۰۰۲۷	۰/۵۶۲۶ ۰/۹۸۹۱

جدول ۷. مقایسه نرخ هشدار(AR) نمودارهای کنترلی با متوسط طول اجرای تحت کنترل (ARL_{in}) مشترک.

ARL_{in}	m	n	NEW					B−T−K			
			(LCL,UCL)	w	r_0	Exact ARL_{in}	AR	(LCL,UCL)	r	Exact ARL_{in}	AR
۳۷۰	۱۰۰	۵	(۸و۱۱)	۵۱	۲	۳۷۰/۳۰	۰/۱۴۲۸ ۰/۶۷۵۷	(۶و۹۵)	۱	۳۵۹/۶۴	۰/۰۹۹۰ ۰/۶۱۲۱
		۷	(۶و۹)	۴۴	۲	۳۷۹/۰۴	۰/۲۳۲۵ ۰/۸۵۷۸	(۹و۹۲)	۲	۳۶۹/۳۵	۰/۱۲۷۹ ۰/۷۲۸۳
		۱۱	(۱۱و۱۴)	۷۵	۴	۳۵۸/۸۲	۰/۲۹۳۷ ۰/۹۳۶۴	(۱۴و۸۷)	۳	۳۶۰/۰۴	۰/۱۹۵۲ ۰/۸۷۷۰
	۲۰۰	۵	(۱۴و۱۷)	۶۰	۲	۳۶۷/۳۱	۰/۱۲۴۰ ۰/۶۵۷۵	(۱۱و۱۹۰)	۲	۳۶۳/۶۰	۰/۰۸۹۵ ۰/۶۰۲۸
		۷	(۹و۱۲)	۴۰	۲	۳۷۹/۴۴	۰/۱۸۲۳ ۰/۸۲۸۸	(۱۶و۱۸۵)	۳	۳۷۲/۸۶	۰/۱۱۰۵ ۰/۷۱۰۳
		۱۱	(۷و۱۰)	۵۰	۲	۳۷۶/۵۸	۰/۳۳۵۹ ۰/۹۶۷۳	(۲۲و۱۷۹)	۵	۳۶۷/۸۰	۰/۱۴۱۰ ۰/۸۳۷۰
۵۰۰	۱۰۰	۵	(۸و۱۱)	۸۸	۲	۴۹۹/۴۶	۰/۱۴۰۴ ۰/۶۷۴۴	(۴و۹۷)	۳	۴۹۹/۸۸	۰/۰۷۵۲ ۰/۵۴۰۷
		۷	(۶و۹)	۷۴	۲	۵۰۰/۶۲	۰/۲۲۸۰ ۰/۸۵۴۵	(۸و۹۳)	۳	۴۹۰/۹۲	۰/۱۱۱۶ ۰/۷۰۱۹
		۱۱	(۱۱و۱۴)	۸۰	۴	۴۹۴/۶۵	۰/۲۸۸۳ ۰/۹۳۶۰	(۱۳و۸۸)	۴	۴۶۲/۹۸	۰/۱۷۴۹ ۰/۸۶۲۱
	۲۰۰	۵	(۱۴و۱۷)	۹۳	۲	۴۹۸/۲۹	۰/۱۱۹۵ ۰/۶۵۳۲	(۷و۱۹۴)	۳	۵۰۰/۳۰	۰/۰۶۲۱ ۰/۵۲۲۹
		۷	(۹و۱۲)	۴۱	۲	۵۰۵/۳۶	۰/۱۷۷۲ ۰/۸۲۶۶	(۱۶و۱۸۵)	۲	۴۹۰/۷۶	۰/۱۰۶۲ ۰/۷۰۸۳
		۱۱	(۱۸و۲۱)	۵۹	۴	۵۰۴/۵۰	۰/۲۴۰۵ ۰/۹۱۹۲	(۲۱و۱۸۰)	۵	۴۹۶/۸۰	۰/۱۲۷۴ ۰/۸۲۵۵

هر خانه‌ی نرخ هشدار (AR) شامل مقادیر به دست آمده به ترتیب برای $\gamma = ۰/۵$ و $\gamma = ۰/۲$ می‌باشد.

جدول ۸. مقایسه متوسط طول اجرای خارج از کنترل (ARL_{out}) نمودارهای کنترلی با متوسط طول اجرای تحت کنترل (ARL_{in}) مشترک.

ARL_{in}	m	n	نمودار W: (LCL, UCL)	w	r	$Exact\ ARL_{in}$	ARL_{out}	$B-T-K$: (LCL, UCL)	r	$Exact\ ARL_{in}$	ARL_{out}
۳۷۰	۱۰۰	۵	(۱۵و۱۷)	۵۵	۲	۳۵۴/۹	۱۳۸/۵	(۶و۹۵)	۲	۳۴۱/۴	۲۳۰/۲
		۱۱	(۱۱و۱۳)	۱۲۵	۲	۳۷۶/۶	۱۲۷/۲	(۲۲و۱۷۹)	۵	۳۶۷/۸	۱۳۶/۶
	۵۰۰	۵	(۲۰۴و۲۰۶)	۲۰	۲	۳۷۰/۴	۳۰۵/۸	(۱۸و۴۸۳)	۳	۳۵۰/۴	۴۰۷/۱
		۱۱	(۱۴۰و۱۴۲)	۱۴۰	۲	۳۷۴/۷	۳۵۹/۸	(۳۹و۴۶۲)	۶	۳۷۳/۸	۴۴۲/۷
۵۰۰	۱۰۰	۵	(۱۸و۲۰)	۷۸	۲	۵۱۲/۴	۱۵۵/۵	(۴و۹۷)	۳	۴۹۹/۹	۱۳۹۰/۶
		۱۱	(۱۰و۱۲)	۱۲۰	۲	۵۰۷/۰	۱۴۵/۳	(۲۱و۱۸۰)	۵	۴۹۶/۸	۱۷۹/۹
	۵۰۰	۵	(۱۴۵و۱۴۷)	۲۵	۲	۵۰۲/۹	۳۸۶/۶	(۱۶و۴۸۵)	۳	۵۰۳/۸	۶۰۰/۳
		۱۱	(۷۵و۷۷)	۱۵۱	۲	۴۹۸/۸	۴۳۴/۸	(۳۷و۴۶۴)	۶	۵۰۰/۷	۶۰۲/۵

توزیع‌های اساسی: به ترتیب، نمایی با میانگین برابر ۲ (تحت کنترل) و ۱ (خارج از کنترل).

برای هر انتخاب، با توجه به قضیه ۱ پارامترهای طرح نمودار کنترلی جدید که عبارت‌اند از:
r_0 و $LCL = X_{a:m}, UCL = X_{b:m}, w$ حاصل شده‌اند. تا آن‌جایی که نرخ هشدار غلط (FAR) دقیق نمودار نتیجه‌گیری شده در صورت امکان به نرخ هشدار غلط (FAR) خواسته شده نزدیک شود. سپس از قضیه ۳، برای براورد عددی مقادیر نرخ هشدار (AR)، تحت دو مورد خاص فرض مقابل لهمن متناظر با $\gamma = ۰/۲$ و $\gamma = ۰/۴$ استفاده شده است . این نتایج در جدول۶ تحت عنوان جدید (NEW)، جمع‌بندی شده‌اند. تحت عنوان B-T-K، نتایج متناظر نمودار بالاکریشنان و همکاران[۱۲] را نشان دادیم [8]. تاکنون انتخاب‌های پارامتر مشابه برای n, m و نرخ هشدار غلط (FAR) همان‌طور که به کار برده شده است، را مورد بررسی قرار دادیم، که این قسمت از جدول به وضوح دوباره از جدول ۴ ایجاد شده است. جدول ۶ نشان می‌دهد که تحت نرخ هشدار غلط (FAR) مشترک، عملکرد نمودار کنترلی جدید بهتر از نمودار B-T-K است. به عبارت دیگر، مقادیر نرخ هشدار (AR) در همه‌ی موارد بررسی شده است. به عنوان مثال، با استفاده از یک نمونه‌ی مرجع با اندازه m = ۵۰۰، نمونه‌های آزمون با اندازه n =۵ و برای یک نرخ هشدار غلط ۰/۰۰۲۷ (FAR =۰/۰۰۲۷)، نرخ‌های هشدار (AR) به‌دست آمده‌ی نمودار B-T-K، برای (γ = ۰/۲) γ = ۰/۴ عبارت‌اند از: (۰/۵۱۱۶) ۰/۱۱۹۷، در حالی‌که نرخ‌های هشدار (AR) متناظر نمودار کنترلی W به ترتیب برابر است با (۰/۶۳۹۵) ۰/۲۰۸۹.

حال کارایی نمودارهای کنترلی را با ثابت نگه‌داشتن متوسط طول اجرای تحت کنترل (ARL_{in}) مشترک و سپس ارزیابی نرخ هشدار (AR) مربوطه برای فرض‌های مقابل نوع لهمن خارج از کنترل را مقایسه می‌کنیم. در جدول ۷، مقادیر نرخ هشدار (AR) نمودار B-T-K و نمودار کنترلی ناپارامتری پیش‌نهاد شده با ۰/۵ و γ=۰/۲ ، ۱۱ و n=۷ و ۲۰۰ m=۱۰۰، ۵۰۰ و ۳۷۰ = متوسط طول اجرای تحت کنترل (ARL_{in})، نشان داده شده است. پارامترهای طرح $LCL = X_{a:m}, UCL = X_{b:m}, w, r_0$، با توجه به فرمول (*26*)، تعیین شده‌اند، تا آن‌جایی که متوسط طول اجرای تحت کنترل (ARL_{in}) در صورت امکان به مقدار هدف نزدیک شود، هم‌چنین مقادیر جدول۷ ، برتری نمودارکنترلی W تحت این شرح مختصر را نشان می‌دهند.

به عنوان یک تحلیل نهایی، کارایی نمودارهای کنترلی پیش‌نهاد شده را در حالت استاندارد یک خانواده‌ی پارامتری از توزیع‌ها، بررسی می‌کنیم. برای این منظور، فرض می‌کنیم که فرایند تحت کنترل یک توزیع نمایی با میانگین ۲ می‌باشد، هنگامی که توزیع خارج از کنترل دارای توزیع نمایی با میانگین ۱ است. در جدول ۸، مقادیر متوسط طول اجرای خارج از کنترل (ARL_{out}) نمودار B-T-K و نمودار W آزاد- توزیع برای ۵۰۰ و m = ۱۰۰، ۱۱و $n = 5$ و دو مقدار ویژه (مشترک) ۵۰۰ و ۳۷۰ = ARL_{in}، نشان داده شده است. پارامترهای طرح $LCL = X_{a:m}$، $UCL = X_{b:m}$، w و r_0، همه با توجه به فرمول (۲۶) به دست

[17]. Balakrishnan et al

آمده‌اند. تا آن‌جایی که متوسط طول اجرای تحت کنترل (ARL_{in}) در صورت امکان به مقدار هدف نزدیک شود.
از آن‌جا که مهم‌ترین معیار کارایی نمودارهای کنترلی و هم‌چنین مهم‌ترین معیار برای مقایسه‌ی آن‌ها با یکدیگر متوسط طول اجرا (ARL) است. متوسط طول اجرا در حالت کنترل عبارت از تعداد نمونه‌های گرفته شده از فرایند تا مشاهده‌ی اولین حالت خارج از کنترل است. به همین دلیل مقدارهای بزرگ ARL برای حالت تحت کنترل مطلوب است، و برعکس برای حالت خارج از کنترل مقادیر کوچک ARL مطلوب است تا حالت‌های خارج از کنترل به سرعت کشف و اعلام شود. بنابر این، با توجه به مقادیر متوسط طول اجرای خارج از کنترل (ARL_{out}) نشان داده شده در جدول ۸، به وضوح برتری نمودار کنترلی W ثابت می‌شود.

۸. بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، نمودارهای کنترلی شوهارتی یک‌متغیره ناپارامتری معرفی شدند. با استفاده از جدول‌ها و مثال‌های عددی عملکرد نمودارهای کنترلی توسط نرخ هشدار غلط (FAR) مشترک و سپس آزمون کردن نرخ هشدار (AR) آن‌ها، به این نتیجه رسیدیم که در نمودار کنترلی با نرخ هشدار غلط (FAR) مشترک، با افزایش نرخ هشدار (AR) کارایی نمودار کنترلی بیش‌تر می‌شود و هم‌چنین با مقایسه مقادیر متوسط طول اجرای خارج از کنترل (ARL_{out}) نمودارهای کنترلی با متوسط طول اجرای تحت کنترل (ARL_{in}) مشترک، با معلوم بودن توزیع (نمایی)، به این نتیجه رسیدیم که با توجه به مقادیر کوچک خارج از کنترل متوسط طول اجرا (ARL) نمودار کنترلی W (برای حلت خارج از کنترل مقادیر کوچک متوسط طول اجرا (ARL) مطلوب است تا حالت‌های خارج از کنترل به سرعت کشف و اعلام شود) در مقایسه با دیگر نمودارها (B-T-K)، آشکار می‌گردد که نمودار کنترلی W دارای مزیت و برتری است.

۹. سپاس‌گزاری

این پژوهش با حمایت معنوی و مالی معاونت محترم پژوهشی دانشگاه علامه طباطبایی از هسته پژوهشی کیفیت انجام پذیرفته است.

۱۰. مراجع

[1] Saif, A. (2009). Statistical-economic design of Hotelling's T^2 control chart with variable sample size and control limits. PhD Thesis, Islamic Azad university, science and researches section.

[2] Bamni Moghadam, M. (2004). statistical quality control. First edition, PayameNoor University Press. pp. 95-107, 190, 197, 218-222 and 227-228, Tehran.

[3] Najmei Saroqi, N., (2010). Statistical-economic design of T^2 Hotelling multivariate control chart with variable sample size. master thesis, Allameh Tabatabai University, School of Economics.

[4] Montgomery Douglas C., (2013). Statistical quality control, translated by Rasool Noor al-Sana,(2017) Tehran, Iran University of Science and Technology, Publishing Center. pp. 237-242, 251-252, 254-255, 258 and 736-737.

[5] Hollander, M., & Wolfe, D. A. (1999). A distribution free test for ordered alternatives (Jonckheere, Terpstra). In Nonparametric statistical methods (pp. 202-12). New York: Wiley

[6] Chakraborti, S., & Graham, M. A. (2019). Nonparametric (distribution-free) control charts: An updated overview and some results. Quality Engineering, *31*(4), 523-544.

[7] Chakraborti, S., Van der Laan, P., & Bakir, S. T. (2001). Nonparametric control charts: an overview and some results. Journal of quality technology, 33(3), 304-315.

Nonparametric Control Charts Based On Runs And Wilcoxon-Type Rank-Sum Statistics

Elham Changaei
Master's degree in statistics from Alborz Qazvin University, Qazvin. Iran.
saghi1862@yahoo.com

Mohamad Bameni Moghadam
Full Professor, Allameh Tabataba'i University, Tehran, Iran. bamenimoghadam@atu.ac.ir

Abstract: In this article, we introduce three new distribution-free Shewhart-type control charts that exploit run and Wilcoxon-type rank-sum statistics to detect possible shifts of a monitored process is introduced. Exact formulae for the alarm rate, the run length distribution, and the average run length (ARL) are all derived. A key advantage of these charts is that, due to their nonparametric nature, the false alarm rate (FAR) and in-control run length distribution is the same for all continuous process distributions. Tables are provided for the implementation of the charts for some typical FAR values. Furthermore, a numerical study carrited out reveals that the new charts are quite flexible and efficient in detecting shifts to Lehmann-type out-of-control situations.

Keywords: Statistical Process Control (SPC), Control Charts, Parametric Control Charts, Distribution-Free Control Charts, Average Run Length (ARL), Exceedance Statistics.

1- Introduction

In today's competitive world, quality is the most important factor in advancing the goals of organizations. Today, quality is known as a business strategy, and the title of industrial giant is not for countries with mass production, but for countries with industrial growth indicators (possibility of offering higher quality products, supply of products to international markets, and the ability to offer products at a lower price). is applied [7]. Achieving industrial growth indicators is dependent on the use of modern human knowledge and technological growth, and countries that are aware of the competitive situation have accepted continuous optimization of their systems (processes and products) as a basic principle and focus more have focused on optimizing systems [1].

The basis of statistical quality control charts was established by Shewhart in 1924 to control important changes in the production process and was published in the form of an article in 1925. This diagram is considered as the emergence of statistical process control. This method was one of the first methods of quality assurance in construction activities that was introduced in modern industry. Charts and control limits are designed so that if the current performance is not very different from the normal performance, the value of the statistic calculated from the current data is within the control limits. If the current performance is significantly different from the normal performance, then the statistical finding is outside the control limits, and this situation is considered as an out-of-control situation. In statistical process control theory, an out-of-control condition is usually caused by identifiable causes, or reasoned deviations, such as sudden changes in input materials, equipment failure or malfunction, change of users, etc. In this case, production is usually stopped and research is

started to find and eliminate identifiable causes [6]. Due to the importance of using control charts, there are many control charts available for univariate cases, i.e. when there is only one output variable to control and monitor. In most control charts, the distribution is usually assumed to be normal, and almost all functional analysis in the literature also assumes that the observations are drawn from a normal distribution. . However, most of the process data does not have a normal distribution, and therefore the stability and resistance of control charts to this assumption has always been a main issue of the statistical process. Researchers' findings show that some control charts are strongly affected by abnormal observations [5]. One of these methods is the non-parametric (free-distribution) Schohart control chart methods. Free-distribution control charts are less well-known and rarely referred to in specialized books. Nevertheless, control charts without distribution have many advantages and in some cases are even more efficient than other charts [4].
In this research, three new types of Shewharty's non-parametric control charts (R, N and W) are introduced, which use Wilcoxon-type total rank statistics and rotations to find out the possible changes of a process. Then, by comparing these three control charts, we come to the conclusion that the efficiency of the control chart corresponding to the W statistic is higher compared to the other two control charts (R and N), and finally, the superiority of the W control chart in process monitoring is shown.

2- Research Method

In this research, three types of new free-distribution control charts are introduced. The mentioned charts are used to create suitable control limits, corresponding to the ordinal statistics of a reference sample, and then to determine whether the process is under control or not, the number of circulations or the basic-rank statistics of the test sample observations are placed between the control limits. they take. The first control chart (R) is used for the maximum length of the observations of the test sample in the combined sample. While the second control chart (N) counts the number of cycles of observations of the test sample whose length exceeds a certain predetermined value of k. Finally, the third control chart (W) calculates the sum of the ranks of the test sample observations that fall between the control limits.

3- Three new distribution-free control charts

Traditionally, the control limits of a distribution-free control chart are established from a reference sample drawn from a process which is in-control. Let us then denote by $X_1, X_2, \dots, X_m$a random sample of size m from the in-control(cumulative) distribution $F_X(x) = F(x)$ and assume that two specific order statistics, say $X_{a:m}$, $X_{b:m}$ are used as control limits, viz.,

$$LCL = X_{a:m} \quad , \quad UCL = X_{b:m} \quad (1 \le a < b \le m) \tag{1}$$

The parameters *a*, *b* are design parameters of the chart and their determination is traditionally achieved through two different approaches. The first one requires a specific *FAR* to be achieved while the second maintains a pre-specified in-control average run length (*ARL*) value (ARL_{in}), such as 370 or 500.It is good to note here that thein-control *ARL* for a distribution-free control chart is the same for all (in-control) continuous distributions.
The test statistics used in this article are defined as follows:

(a) runs of the Y-observations that fall with in the control limits *LCL*, *UCL*,
(b) the ranks of the Y-observations that fall with in the control limits *LCL*, *UCL*.
Under the null hypothesis $H_0: F = G$. the number of test sample observations Y_j that fall between successive *X*-observations should not attain"extreme"values,with extremes being determined based on the proportion *n/m*. With this in mind, two plausible test statistics that could be used for deciding whether the process is in-control are as follows:
the maximum run length of *Y*-observations that occur between the control limits,
the number of runs of *Y*-observations (between the control limits) whose length exceeds a pre-specified level *k*.
let us denote by $M_i, i = 1,2, \ldots m$ .If the test sample observations Y_j that fall between the $(i - 1)$-th and i-th order statistics of the *X*-sample (with the convention that $(X(0) = -\infty)$.Clearly, M_i. provide the lengths of runs of *Y*-observations between successive *X*-observations. Then, according to the three mentioned statistics, it can be written:

$$R = max(M_{a+1}, M_{a+2}, \ldots, M_b),$$

$$N_k = |\{M_i: a+1 \le i \le b, M_i \ge k\}|, \quad (٢)$$

$$\mathrm{W} = \sum_{\mathrm{i=a+1}}^{\mathrm{b}} \mathrm{W_i}.$$

(*k* is an additional integer-valued design parameter) where *Wi* denotes the sum of the ranks of the *Y*-observations falling between *X*(*i*−1) and *X*(*i*).

Table 1-Design parameters for the three charts with *FAR* _0.10.

$R - chart$					$N - chart$						$W - chart$				
a	b	r_0	r	FAR	a	b	r_0	r_1	k	FAR	a	b	r_0	w	FAR
1	4	1	2	0.0989	3	6	2	0	2	0.0979	1	4	4	10	0.0919

Table 2- Reference and test samples

Reference test sample	0.0547494	0.0915627	0.1925020	0.3298570	0.5872420
	0.6464540	0.7250190	0.7319490	0.8796790	0.9683790
In-control test sample	0.1492300	0.3494970	0.6038480	0.6787060	
Out-of-control test sample	0.0041391	0.0475546	0.1698870	0.1921032	

and performing some algebraic manipulations, we obtain the expression

$$W = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=a+1}^{b} M_i\right)^2 + \sum_{i=a+1}^{b} iM_i + \left(M_0 + a - \frac{3}{2}\right)\sum_{i=a+1}^{b} M_i. \quad (3)$$

Where $M_0 = \sum_{i=1}^{a} M_i$، denotes the number of observations of the Y-sample before LCL.
When the statistic R is being used, the process will be declared to be in-control if the following two conditions hold true:

$$R \le r \quad , \quad M_0 \le r_0 \quad (4)$$

With r, r_0 being the design parameters of the control chart. In a similar vein, when the test statistic N_k is being used, the process will be declared to be in-control, if the following two conditions hold true:

$$N_k \le r_1 \quad , \qquad M_0 \le r_0 \quad (5)$$

Finally, if the Wilcoxon-type rank-sum statistic W is used to monitor the process, the process will be declared to be in-control if the following two conditions hold true:

$$W \leq w \quad , \quad M_0 \leq r_0 \tag{6}$$

With w, r_0 being he design parameters of this chart. With respect to this chart, it is worth mentioning that the largest possible value of *W* occurs when all the *Y*-observations fall in the interval $(X_{b-1:m}, X_{b:m})$; in this case, their ranks are $(b-1)+j,\ j=1,2,\dots,n$ with the corresponding rank-sum statistic becoming.

$$n(b-1)+\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+2b-1)}{2}. \tag{7}$$

Obviously, the smallest possible value of W is zero (attained when no Y-observation falls between LCL and UCL), and consequently the support of the distribution of *W* is

$$R_W = \left\{0,1,\dots,\frac{n(n+2b-1)}{2}\right\} \tag{8}$$

Before closing this section, we shall present an example to illustrate the basic principles of the proposed nonparametric control charts. Suppose we wish to establish distribution-free control charts based on a reference sample of size *m*=10 and test samples of size *n*=4. In Table 1, we have presented a choice for the design parameters for each of the three control charts described earlier that guarantees an *FAR* of 10% (FAR ≤0.10).

In order to demonstrate how these control charts perform, let us consider the case in which the in-control observations come from a uniform distribution on (0, 1); (i.e., $F(x)=x, 0<x<1$.) The first two rows of Table 2 present the simulated reference sample (in ascending order), using which we obtain the control limits as

R-chart: $LCL = X_{1:10}, \quad UCL = X_{4:10}$,

N-chart: $LCL = X_{3:10}, \quad UCL = X_{6:10}$

W-chart: $LCL = X_{1:10}, \quad UCL = X_{4:10}$.

After the collection of the reference sample, if the process continues to remain in-control, the test samples of size *n* =4 will also come from a uniform distribution in the interval (0,1). One such sample has been generated and is presented in the third row of Table 2. The *m* + *n* = 14 observations of the combined ordered (*X*, *Y*) sample yields the sequence.

$X\ X\ Y\ X\ X\ Y\ X\ Y\ X\ Y\ X\ X\ X\ X$

resulting in the exceedance statistics M_is to be

$M_1=0,\ M_2=0, M_3=1,\ M_4=0, M_5=1, M_6=1, M_7=1, M_8=0, M_9=0, M_{10}=0.$

If the *R*-chart is used, we find.

$\mathrm{R} = max(M_2, M_3, M_4) = 1,$

and since $R \leq 2 = 1$ و $M_0 = M_1 = 0 \leq 1 = r_0,$

we conclude that the process is in-control. Likewise, if the N-chart is used, we find

$N_2 = \left|\{M_i: 4 \leq i \leq 6 \text{ و } M_i \geq 2\}\right| = 0,$

and since

$N_2 \leq 0 = r_1$ و $M_0 = \sum_{i=1}^{3} M_i = 1 \leq 2 = r_0,$

3. Exact in-control distributions of the statistics

Suppose m is a sample, $X_1, X_2, \dots, X_m$ came from the in-control distribution $F_X(x) = F(x)$ and n a new test sample $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ came from distribution $F_Y(x) = G(x)$.It s evident that the exact distribution of the statistics *R* and $N_k$can bsample. Thus, $M = max(M_1, M_2, \dots, M_r)$ and its distribution, under the null hypothe

4- Out-of-control distributions of the statistics

Let us now assume that the observations $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ of the test sample come from a continuous distribution $G(x)$. In order to state our formulas in a general form, we express the probability that the rule does not signal an alarm as

$$p(m,n,a,b;c;F,G) = \sum_{(m_0,m_{a+1},\dots,m_b)\in A} P\big(M_0 = m_0 \text{ و } M_j = m_j \quad a+1 \le j \le b\big), \qquad (9)$$

where **c** is a vector of constants that should be determined so that the rule meets some requirements (e.g., a pre-specified FAR or in-control ARL) and A is the space where the values of the random vector $(M_0, M_{a+1}, M_{a+2}, \dots, M_b)$، should be in order for the control chart not to issue an alarm It is clear that the *FAR* is the complement of $p(m, n, a, b; \mathbf{c}; F, G)$ for the special case when $G = F$, i.e.,

$$FAR = 1 - p(m,n,a,b;c;F;F) \qquad (10)$$

Let us now consider the general case when the *X*- and *Y*-observations do not follow the same distribution. In view of (10) all we need is an exact formula for the summands on the RHS of (10). For notational convenience, let us denote the random vector $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ by **Y**, the ordered *X*-sample extending from the a-th to b-th order statistics by $X_{a:b}$,i.e., $X_{a:b} = (X_{a:m}, X_{a+1:m}, \dots, X_{b:m})$ and $U_{a:b}$ for the corresponding uniform order statistics from a random sample of size *m*. Then:

$$\mathrm{p} = \big(M_0(Y;X_{a:b}) = m_0 \text{ و } M_j(Y;X_{a:b}) = m_j \quad a+1 \le j \le b\big) \qquad (11)$$

which, upon using the fact that

$$F(X_{a:b}) = \big(F(X_{a:m}), F(X_{a+1:m}), \dots, F(X_{b:m})\big) = (U_{a:m}, U_{a+1:m}, \dots, U_{b:m}) = U_{a;b}$$

leads to the equivalent expression

$$p = P\big(M_0(F(Y);U_{a:b}) = m_0 \text{ و } M_j(F(Y);U_{a:b}) = m_j\,,\ a+1 \le j \le b\big) \qquad (12)$$

Since the joint density function of $\boldsymbol{U_{a:b}}$is

$$f_{a:b}(u_a, u_{a+1}, \dots, u_b) = f_{a:b}(U_{a:b})$$

$$= \frac{m!}{(a-1)!(m-b)!}(u_a)^{a-1}(1-u_b)^{m-b},\ 0 \le u_a \le u_{a+1} \le \cdots \le u_b \le 1 \qquad (13)$$

5. Run length distribution

One inherent weakness of the nonparametric control charts is that the signaling events are not independent and therefore the ARL of the chart cannot be calculated as the reciprocal of the signaling probability. However, one can make use of an appropriate conditioning argument to establish a formula for the exact run length distribution and its mean.

In view of (9) and (11) it is clear that, under the condition $X_{a:b} = (x_a, x_{a+1}, \dots, x_b) = x_{a:b} \in \Re^{b-a+1}$ the waiting time random variable N which describes the number of Y-samples until an out-of-control alarm issued follows a geometric distribution with success probability

$$p\,(x_{a:b}) = \sum_{(m_0,m_{a+1},\dots,m_b)\in A} P\big(M_0(Y;x_{a:b}) = m_0 \text{ و } M_j(Y;x_{a:b}) = m_j \ ,a+1 \le j \le b\big)$$

and probability mass function

$$\big(1 - p(x_{a:b})\big)\big(p(x_{a:b})\big)^{k-1} = \big(p(x_{a:b})\big)^{k-1} - \big(p(x_{a:b})\big)^{k},\quad k = 1,2,\dots .$$

Consequently, the unconditional distribution of N may be expressed as

$$P\ (N = k) = D(k-1) - D(k) \tag{14}$$

where $D(0) = 1$ and

$D(k) = E_{x_{a:b}}\left\{\left(p(x_{a:b})\right)^k\right\}, \quad k = 1,2, \dots$.

6. Research findings

In this section, we are going to compare the performance of control charts (R, N and W) using tables and numerical examples. and show that the performance of control chart W is better compared to two control charts (R and N) and other charts. Since one method of comparing control charts is to use the joint false alarm rate (FAR) or average run length under (ARL_{in}) joint control and then test their alarm rates (AR).

7- Numerical results

In this section, by numerical testing, we show the effect of new control charts and their stability characteristics in both under-control and out-of-control situations. In Table 3, we present the AR of the three control charts for different choices of *m*, *n*. The design parameters a, b, r_0 ،r, k and w For when the false alarm rate is 0.05 (FAR=0.05). Then, the AR values for $\gamma = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ were all determined with the use of Theorem 3.

Table 3: Comparison of the *AR* of the three control charts with FAR = 0.05 ($\gamma = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$).

m	n	R − chart (LCL, UCL)	r_0	r	Exact FAR	AR	N − chart (LCL, UCL)	r_0	k	Exact FAR	AR	W − chart (LCL, UCL)	w	r_0	Exact FAR	AR
200	11	(21,24)	6	5	0.0045	0.2647 0.8488 0.9922	(21,24)	4	2	0.0044	0.2646 0.8488 0.9922	(21,24)	135	4	0.0048	0.2669 0.8497 0.9923
	25	(16,19)	6	5	0.0049	0.5678 0.9952 0.9999	(16,19)	6	2	0.0049	0.5677 0.9952 0.9999	(16,19)	190	6	0.0050	0.5688 0.9953 0.9999
500	11	(33,36)	3	2	0.0048	0.3042 0.8911 0.9965	(33,36)	3	2	0.0048	0.3041 0.8911 0.9965	(33,36)	3	2	0.0049	0.3045 0.8912 0.9965
	25	(21,24)	4	4	0.0045	0.5907 0.9971 0.9999	(21,24)	4	2	0.0045	0.5907 0.9971 0.9999	(21,24)	150	4	0.0046	0.5915 0.9971 0.9999

In Table 3, we observe that the three distribution-free control charts exhibit (for appropriately chosen parameters) similar performance in terms of AR for a common FAR rate of 0.05.

Table 4: Comparison of the AR of control charts with the same ARL_{in}

ARL_{in}	*m*	*n*	*NEW* (LCL,UCL)	*w*	r_0	Exact ARL_{in}	AR	*B−T−K* (LCL,UCL)	*r*	Exact ARL_{in}	AR
370	100	7	(6,9)	44	2	379/04	0.2325 0.8578	(9,92)	2	369.35	0.1279 0.7283
		11	(11,14)	75	4	358/82	0.2937 0.9364	(14,87)	3	360.04	0.1952 0.8770
	200	7	(9,12)	40	2	379.44	0.1823 0.8388	(16,185)	3	372.86	0.1105 0.7103
		11	(7,10)	50	2	376.58	0.3359 0.9673	(22,179)	5	367.80	0.1410 0.8370
500	100	7	(6,9)	74	2	500.62	0.2280 0.8545	(8,93)	3	490.92	0.1116 0.7019
		11	(11,14)	80	4	494/65	0.2883 0.9360	(13,88)	4	462.98	0.1749 0.8621
	200	7	(9,12)	41	2	505.36	0.1772 0.8266	(16.185)	2	490.76	0.1062 0.7083
		11	(18,21)	59	4	504.50	0.2405 0.9192	(21,180)	5	496.80	0.1274 0.8255

Each *AR* cell contains the values attained for $\gamma = 0.5\ and\ 0.2$, respectively.

One way to compare two different control charts is to use the common false alarm rate (FAR) or average run length under control (ARL_{in}) and then test their alarm rates (AR). As a result, it is possible to compare the efficiency of the free control chart-preset distribution.

Table 5: Comparison of the ARL_{out} of control charts with the same ARL_{in}.

ARL_{in}	m	n	$W-chart$					$B-T-K$			
			(LCL, UCL)	w	r_0	$Exact\ ARL_{in}$	ARL_{out}	(LCL, UCL)	r	$Exact\ ARL_{in}$	ARL_{out}
370	100	5	(15,17)	55	2	354.9	138.5	(6,95)	2	431.4	230.2
		11	(11,13)	125	2	376.6	127.2	(22,179)	5	367.8	136.6
	500	5	(204,206)	20	2	370.4	305/8	(18,483)	3	350.4	407.1
		11	(140,142)	140	2	374.7	359.8	(39.462)	6	373.8	442.7
500	100	5	(18,20)	78	2	512.4	155.5	(4.97)	3	499.9	1390.6
		11	(10,12)	120	2	507.0	145.3	(21,180)	5	496.8	179.9
	500	5	(145,147)	25	2	502.9	386/6	(16.485)	3	503.8	600.3
		11	(75,77)	151	2	498.8	434.8	(37,464)	6	500.7	602.5

We now compare the performance of control charts by keeping the average run length under joint control (ARL_{in}) constant and then evaluating the corresponding alarm rate (AR) for out-of-control Lehman-type opposite assumptions. In Table 4, the alarm rate (AR) values of the B-T-K chart and the non-parametric control chart proposed with γ = 0.2 and 0.5, n = 7 and 11, m = 100 and 200; average execution length under control ($ARL_{in} = 370\ and\ 500$) are shown. given. The design parameters $LCL = X_{a:m}, UCL = X_{b:m}, w, r_0$, have been determined, , as long as the average length of execution under control is close to the target value if possible, also the values of Table 4 show the superiority of control chart W under this brief description.

In Table 5, the average values of the out-of-control(ARL_{out}) execution length, the B-T-K diagram and the W free-distribution diagram for m = 100 and 500, n = 5 and 11, and two eigenvalues (common) ARL_{in}= 500 and 370 are shown.

Because the most important criterion for the efficiency of control charts and also the most important criterion for comparing them with each other is the average execution length (ARL). Average run length in control mode is the first out of control mode. For this reason, large ARL values are desirable for the under-control state, and conversely, for the out-of-control state, small ARL values are desirable so that the out-of-control states are quickly discovered and announced. Therefore, according to the average values of the out-of-control (ARL_{out}) execution length shown in Table 5, the superiority of the W control chart is clearly proven.

8. Discussion and conclusion

In this article, non-parametric one-variable Shewhart control charts were introduced. By using tables and numerical examples of the performance of control charts by common false alarm rate (FAR) and then testing their alarm rate (AR), we came to the conclusion that in the control chart with common false alarm rate (FAR), with increasing rate Warning (AR) increases the efficiency of the control chart and also by comparing the average values of the out-of-control execution length of the control charts with the average execution length under common control, with the known distribution (exponential), we came to the conclusion that due to the small out-of-control values Average control run length (ARL) control chart W (for the out-of-control state, small values of average run length (ARL) are desirable so that out-of-control states can be discovered and announced quickly) compared to other charts (B-T-K), it is revealed that Control chart W has advantages and superiority.

9- Acknowledgments

This research has been carried out with the spiritual and financial support of the Honorable Research Vice-Chancellor of Allameh Tabatabai University from the quality research core

10- References

[1] Bamni Moghadam, M. (2004). statistical quality control. First edition, PayameNoor University Press. pp. 95-107, 190, 197, 218-222 and 227-228, Tehran.

[2] Chakraborti, S., Van der Laan, P., & Bakir, S. T. (2001). Nonparametric control charts: an overview and some results. Journal of quality technology, 33(3), 304-315.

[3] Chakraborti, S., & Graham, M. A. (2019). Nonparametric (distribution-free) control charts: An updated overview and some results. Quality Engineering, 31(4), 523-544.

[4] Hollander, M., & Wolfe, D. A. (1999). A distribution free test for ordered alternatives (Jonckheere, Terpstra). In Nonparametric statistical methods (pp. 202-12). New York: Wiley

[5] Montgomery Douglas C., (2013). Statistical quality control, translated by Rasool Noor al-Sana,(2017) Tehran, Iran University of Science and Technology, Publishing Center. pp. 237-242, 251-252, 254-255, 258 and 736-737.

[6] Najmei Saroqi, N., (2010). Statistical-economic design of T^2 Hotelling multivariate control chart with variable sample size. master thesis, Allameh Tabatabai University, School of Economics.

[7] Saif, A. (2009). Statistical-economic design of Hotelling's T^2 control chart with variable sample size and control limits. PhD Thesis, Islamic Azad university, science and researches section.