

توسعه نمودارهای ناپارامتری علامت و رتبه علامت‌دار با استفاده از مجموعه‌های فازی نوع ۲ بازه‌ای

یگانه توفیق‌زاده

دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران جنوب، تهران، ایران.

مجید نوجوان

(نویسنده‌ی مسؤل)، استادیار، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران جنوب، تهران، ایران.

چکیده: در سالیان اخیر کاربرد مجموعه‌های فازی نوع ۲ برای نمایش عدم قطعیت در حوزه‌های مختلف گسترش پیدا کرده است. در این مقاله برای کنترل مرکزیت فرآیندهای غیرنرمال و مبهم، دو نمودار ناپارامتری علامت و رتبه علامت‌دار با استفاده از مجموعه‌های فازی نوع ۲ توسعه داده شده است. در نمودارهای علامت و رتبه علامت‌دار مشاهدات هر نمونه با مرکزیت فرآیند در حالت تحت کنترل مقایسه می‌شوند که برای این کار از دو رویکرد استفاده شده است. برای تشریح کاربرد نمودارهای پیشنهادی، از آنها در یک مثال واقعی استفاده و صحت عملکرد نمودارها مشخص شده است. همچنین برای بررسی عملکرد نمودارهای پیشنهادی از شبیه‌سازی استفاده شده که در آنها متغیرهای تصادفی فازی نوع ۲ با سه توزیع متفاوت تولید و متوسط طول دنباله (ARL) نمودارها محاسبه شده است. نتایج عددی نشان‌دهنده عملکرد مناسب و کاربردی بودن نمودارهای علامت و رتبه علامت‌دار پیشنهادی برای کنترل مرکزیت متغیرهای تصادفی غیر نرمال و مبهم می‌باشد.

واژگان کلیدی: نمودارهای کنترل ناپارامتری، مجموعه‌های فازی نوع ۲ بازه‌ای، نمودار علامت فازی نوع ۲ بازه‌ای، نمودار رتبه علامت‌دار فازی نوع ۲ بازه‌ای.

۱. مقدمه

در شرایط عدم وجود اطلاعات کامل و با در نظر گرفتن ماهیت تصادفی ذاتی فرایندها طراحی کرده است. سنترک و ارگینل [۲] برای کنترل میانگین و انحراف معیار فرآیند، نمودارهای کنترل فازی $\bar{X} - S$ و $\bar{X} - R$ را با استفاده از برش α توسعه داده و یک چارچوب برای طراحی نمودارهای کنترلی متغیر بر این اساس پیشنهاد کرده‌اند. فراز و شاپیرو [۳] برای کنترل مرکزیت و پراکندگی متغیرهای تصادفی فازی، نمودارهای $\bar{X} - S$ و $\bar{X} - R$ را با استفاده از اعداد فازی توسعه داده است. پاندورانگان و وراهراجان [۴] نمودارهای کنترلی $\bar{X} - S$ و $\bar{X} - R$ را با برش α و استفاده از اعداد فازی دوزنقه‌ای توسعه داده و در این نمودارها حدود کنترل را به صورت فازی در نظر گرفته‌اند. علیزاده و قمی [۵] برای کنترل مرکزیت و پراکندگی، نمودارهای $\bar{X} - R$ را با استفاده از اعداد فازی مثلثی و روشهای مختلف تابع تبدیل توسعه داده و تفاوت عملکرد نمودارها را در این روشها بررسی کرده‌اند. شو و وو [۶] در نمودارهای \bar{X} و R پارامترهای میانگین و واریانس را به صورت فازی در نظر گرفته و حدود کنترل را به صورت فازی محاسبه کرده‌اند. ارگینال و همکاران [۷] نمودارهای $\bar{X} - S$ را با استفاده از اعداد فازی توسعه

نمودارهای کنترلی یکی از مهمترین ابزارها در کنترل آماری فرآیند (SPC) می‌باشند. نمودارهای کنترلی ثابت پارامترهای مشخصه‌های فرآیند در طول زمان را با استفاده از نمونه‌های گرفته شده از فرآیند کنترل می‌کنند. نمودارهای کنترل با توجه به نوع مشخصه کیفی مورد بررسی به دو گروه نمودارهای متغیر (برای مشخصه‌های پیوسته) و نمودارهای وصفی (برای مشخصه‌های گسسته) تقسیم میشوند. در مشخصه‌های متغیر معمولاً مرکزیت (میانگین یا میانه) و پراکندگی (انحراف معیار) کنترل میشوند. در بسیاری از موارد به علت وجود خطای اندازه‌گیری و همچنین ابهام در اطلاعات به دست آوردن داده‌های دقیق و قطعی ممکن نیست و در چنین مواردی معمولاً ابهام در داده‌ها توسط مجموعه‌های فازی نشان داده شده و از نمودارهای فازی برای کنترل فرآیند استفاده می‌شود.

فراز [۱] برای کنترل مشخصه‌های متغیر یک نمودار کنترل آماری-فازی

¹ Corresponding author: mnojavan@azad.ac.ir

داده‌اند و از نمودارهای حاصل برای کنترل یک فرآیند تولید محصولات غذایی استفاده کردند. خادمی و امیرزاده [۸] نمودارهای $\bar{X} - S$ را با استفاده از اعداد فازی توسعه داده و نحوه عملکرد این نمودارها را بررسی کرده‌اند. شو و وو [۹] با استفاده از اعداد فازی و با رویکرد غلبه فازی نمودارهای $\bar{X} - R$ را توسعه داده و عملکرد این نمودارها را بررسی کرده‌اند. رشید و حیدر [۱۰] برای کنترل مرکزیت و پراکندگی فرآیند، نمودارهای $\bar{X} - R$ را با استفاده از مقادیر فازی و به روش تبدیل میانه دامنه و حدود فازی توسعه داده‌اند. زبیحیان پور و همکاران [۱۱] برای کنترل میانگین و انحراف معیار متغیرهای تصادفی فازی، نمودارهای $\bar{X} - S$ را با استفاده از اعداد فازی مثلثی و یک تخمین ناریب از انحراف معیار فرآیند توسعه داده‌اند. گیلده و شفیعی [۱۲] برای کنترل مرکزیت و پراکندگی فرآیند در حالت نمونه‌های تکی و داده‌های خود همبسته نمودارهای $X - MR$ فازی را با استفاده از روش فاصله‌ای توسعه داده‌اند و عملکرد نمودار را در حالت‌های مختلف محاسبه فاصله بررسی کرده‌اند. گولبی و کهرمان [۱۳] نمودارهای $\bar{X} - S$ ، $\bar{X} - R$ و EWMA را برای کنترل مرکزیت و پراکندگی فرآیندهای فازی توسعه و عملکرد این نمودارها را با هم مقایسه کرده‌اند. مرادی تادی و آواخ دارستانی [۱۴] برای کنترل مرکزیت و پراکندگی فرآیند در حالت وجود نمونه‌های تکی، نمودارهای $X - MR$ را با استفاده از اعداد فازی پیشنهاد کرده‌اند. شو و همکاران [۱۵] نمودارهای $\bar{X} - S$ را با استفاده از اعداد فازی و یک رویکرد مبتنی بر انطباق داده توسعه داده‌اند. کایا و همکاران [۱۶] نمودارهای $X - MR$ را برای کنترل میانگین و انحراف معیار فرآیند در حالت وجود ابهام و نمونه‌های تکی توسعه داده‌اند.

در حالتی که مشخصه متغیر دارای توزیع نرمال نبوده و یا توزیع آن مشخص نباشد معمولاً از نمودارهای ناپارامتری برای کنترل فرآیند استفاده می‌شود و این نمودارها نیز برای استفاده از داده‌های مبهم و با استفاده از تئوری مجموعه‌های فازی توسعه داده شده‌اند.

نوجوان و همکاران [۱۷] برای کنترل مرکزیت فرآیند، نمودار علامت را با استفاده از اعداد فازی مثلثی توسعه داده و برای تعیین آماره سه رویکرد پیشنهاد کرده‌اند. آنها با استفاده از شبیه‌سازی، عملکرد نمودار علامت فازی را در این سه حالت با هم مقایسه کرده‌اند. نوجوان و محجوبی [۱۸] نمودار رتبه علامت‌دار را با استفاده از اعداد فازی مثلثی توسعه داده و چند روش برای تعیین آماره پیشنهاد و عملکرد نمودار را در این روشها با استفاده از برنامه شبیه‌سازی بررسی کرده‌اند. مومنی و شکری [۱۹] برای کنترل مرکزیت فرآیند، دو نمودار علامت و رتبه علامت‌دار را با اعداد فازی مثلثی توسعه داده و برای این منظور دو رویکرد فاصله‌ای و امکانی را پیشنهاد و عملکرد نمودارهای فازی را در این دو رویکرد با هم مقایسه کرده‌اند. عباسی گنجی و صادق پور گیلده [۲۰] برای کنترل مرکزیت فرآیندهای چند متغیره، دو نمودار علامت و رتبه علامت‌دار را با اعداد فازی توسعه داده و عملکرد این نمودارها را با استفاده از شبیه‌سازی بررسی کرده‌اند.

با توجه به اینکه مجموعه‌های فازی نوع ۲ برای نشان دادن عدم قطعیت نسبت به مجموعه‌های فازی نوع انعطاف‌پذیری بیشتری دارند، در سالیان

اخیر استفاده از این مجموعه‌ها در حوزه‌های مختلف از جمله نمودارهای کنترل گسترش یافته و نمودارهای کنترل متغیر نیز با استفاده از مجموعه‌های فازی نوع ۲ توسعه یافته‌اند.

تاکسن و آناگون [۲۱] نمودارهای $\bar{X} - R$ را با استفاده از اعداد فازی نوع ۲ مثلثی و در روش‌های مختلف توسعه داده و از این نمودارها برای کنترل مرکزیت و پراکندگی مشخصه‌های متغیر در صنعت بسته‌بندی مواد غذایی استفاده کردند. کایا [۲۲] برای کنترل مرکزیت و پراکندگی فرآیندهای دارای ابهام زیاد، نمودارهای $\bar{X} - R$ را با استفاده از اعداد فازی نوع ۲ مثلثی توسعه داده است. کایا و همکاران [۲۳] برای کنترل مرکزیت فرآیند، نمودارهای EWMA و CUSUM را با استفاده از اعداد فازی نوع ۲ توسعه داده و عملکرد این نمودارها را با هم مقایسه کرده‌اند. کایا و تورگوت [۲۴] برای کنترل مرکزیت و پراکندگی با استفاده از اعداد فازی نوع ۲ و برای نمونه‌های چندتایی نمودارهای $\bar{X} - S$ و $\bar{X} - R$ و برای نمونه‌های تکی نمودارهای $X - MR$ را توسعه داده و از این نمودارها در کنترل مشخصه‌های متغیر در یک شرکت سازنده تجهیزات برقی استفاده کرده‌اند. موهذ رزالی و همکاران [۲۵] برای کنترل مرکزیت فرآیند در حالت وجود ابهام، نمودار CUSUM را با استفاده از اعداد فازی نوع ۲ توسعه داده و از این نمودار برای کنترل مشخصه وزن در تولید کود در یک سیستم کشاورزی استفاده کرده‌اند. آدپوجو و همکاران [۲۶] نمودار EWMA را با استفاده از اعداد فازی نوع ۲ دوزنقه‌ای توسعه داده و عملکرد این نمودار برای کنترل مرکزیت فرآیند را بررسی کرده‌اند.

با بررسی پیشینه تحقیق مشخص می‌شود که اگر چه نمودارهای پارامتری مختلفی برای کنترل مرکزیت و پراکندگی مشخصه‌های متغیر با استفاده از مجموعه‌های فازی نوع ۲ توسعه داده شده است اما هنوز نمودارهای ناپارامتری با این مجموعه‌ها توسعه داده نشده است. از این رو با توجه به کاربرد زیاد نمودارهای ناپارامتری برای کنترل مشخصه‌های غیرنرمال، در این مقاله دو نمودار ناپارامتری علامت و رتبه علامت‌دار، با استفاده از مجموعه‌های فازی نوع ۲ بازه‌ای توسعه داده شده و عملکرد آنها بررسی شده است. ساختار مقاله به این صورت است که ابتدا در بخش دوم نمودارهای علامت و رتبه علامت‌دار و همچنین مجموعه‌های فازی نوع ۲ و نحوه انجام عملیات بر روی آنها تشریح شده است. سپس در بخش سوم نمودارهای علامت و رتبه علامت‌دار با استفاده از اعداد فازی نوع ۲ بازه‌ای توسعه داده شده و دو روش مختلف برای محاسبه آماره علامت و رتبه علامت‌دار در این حالت پیشنهاد شده است. در ادامه برای تشریح نحوه کاربرد نمودارهای پیشنهادی، از این نمودارها برای کنترل یک مشخصه متغیر در یک مثال واقعی استفاده و عملکرد نمودارها در این حالت بررسی شده است. سپس در بخش چهارم با استفاده از شبیه‌سازی، عملکرد نمودارهای علامت و رتبه علامت‌دار فازی نوع ۲ بازه‌ای در دو روش مختلف و در سه توزیع متفاوت با استفاده از معیار طول متوسط دنباله (ARL) بررسی شده است. نهایتاً در انتها نتیجه‌گیری آمده است.

۲- مرور ادبیات

$$W_i = \sum_{j=1}^n \text{sign}(x_{ij} - \mu_0) R |x_{ij} - \mu_0| \quad (3)$$

که در رابطه بالا R رتبه مقادیر $|x_{ij} - \mu_0|$ بوده و W_i مقدار آماره رتبه علامت‌دار برای نمونه i ام می‌باشد.

مقدار آماره رتبه علامت‌دار در بازه $[-n(n+1)/2, n(n+1)/2]$ قرار داشته و در حالت تحت کنترل مقدار مورد انتظار آن برابر صفر است. اگر مقدار آماره یک عدد مثبت یا منفی بزرگ شود نشان‌دهنده تغییر در مرکزیت فرآیند می‌باشد. حدود کنترلی بالا و پایین (UCL و LCL) در نمودار رتبه علامت‌دار نیز حول مقدار صفر متقارن بوده و با استفاده از جداول استاندارد و با توجه مقدار ARL تحت کنترل مورد نیاز مشخص می‌شوند.

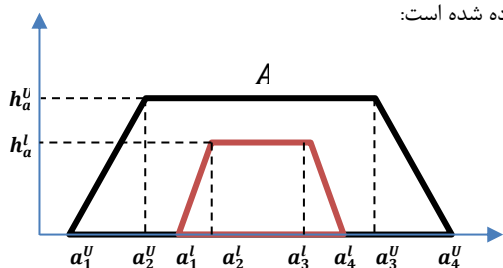
۲-۳- مجموعه‌های فازی نوع ۲ بازه‌ای

برای نشان دادن ابهام در داده‌ها معمولاً از مجموعه‌های فازی استفاده می‌شود که در آنها برای هر مقدار (x) یک درجه عضویت $\mu(x)$ در بازه $[0, 1]$ تعریف می‌شود. اما در مسائل پیچیده و در شرایط وجود ابهام زیاد، درجه عضویت هر مقدار نیز به صورت دقیق مشخص نیست و از اینرو در این حالت از مجموعه‌های فازی نوع ۲ استفاده می‌شود. در مجموعه‌های فازی نوع ۲ هر مقدار x دارای دامنه‌ای از درجات عضویت بوده و این مقادیر نیز خود دارای درجه عضویت هستند.

مجموعه‌های فازی بازه‌ای نوع ۲، حالت خاصی از مجموعه‌های فازی نوع ۲ هستند که در آنها درجات عضویت هر مقدار x دارای درجه تعلق یک هستند و به علت سادگی محاسباتی بیشترین کاربرد را در مجموعه‌های فازی نوع ۲ دارند. یک مجموعه فازی نوع ۲ بازه‌ای مانند A به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$A = \left\{ (a_1^u, a_2^u, a_3^u, a_4^u; h_a^u); (a_1^l, a_2^l, a_3^l, a_4^l; h_a^l) \right\} \quad (4)$$

همچنین نمونه‌ای از یک مجموعه فازی نوع ۲ بازه‌ای A در شکل ۱ نشان داده شده است:



شکل ۱. یک عدد فازی نوع ۲ بازه‌ای

برای انجام محاسبات ریاضی مانند: جمع، تفریق، ضرب و تقسیم بر روی دو مجموعه فازی نوع ۲ بازه‌ای A و B از روابط زیر استفاده می‌شود [۲۷]:

در این مقاله نمودارهای ناپارامتری علامت و رتبه علامت‌دار، با استفاده از اعداد فازی نوع ۲ بازه‌ای توسعه داده می‌شود. مفاهیم مورد استفاده در ادامه تشریح شده است.

۲-۱- نمودار علامت

در نمودار ناپارامتری علامت برای کنترل مرکزیت فرآیند (میان‌ه یا میانگین)، ابتدا هر یک از مشاهدات نمونه با مقدار هدف (میان‌ه یا میانگین) مقایسه شده و از مجموع تعداد علامتهای مثبت و منفی به عنوان آماره آزمون برای کنترل مرکزیت فرآیند استفاده می‌شود. در هنگام استفاده از نمودار علامت فرض می‌شود که نمونه‌ها مستقل از هم بوده و توزیع احتمال مشخصه پیوسته است. آماره علامت برای نمونه (زیرگروه) i ام به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$SN_i = \sum_{j=1}^n \text{sign}(x_{ij} - \mu_0) \quad (1)$$

که در رابطه بالا n اندازه نمونه، x_{ij} مقدار مشاهده i ام در نمونه i ام، μ_0 مقدار مرکزیت (میان‌ه یا میانگین) فرآیند در حالت تحت کنترل و SN_i مقدار آماره علامت برای نمونه i ام می‌باشد. تابع علامت $\text{sign}(y)$ نیز به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$\text{sign}(y) = \begin{cases} -1 & y < 0 \\ 0 & y = 0 \\ 1 & y > 0 \end{cases} \quad (2)$$

مقدار آماره علامت در بازه $[-n, n]$ قرار دارد و در حالت تحت کنترل مقدار مورد انتظار آن برابر صفر است. اگر مقدار آماره علامت یک عدد مثبت یا منفی بزرگ شود، نشان دهنده تغییر در مرکزیت فرآیند می‌باشد. حدود کنترل بالا و پایین (UCL و LCL) در نمودار علامت، حول مقدار صفر متقارن بوده و با استفاده از جداول استاندارد و با توجه به مقدار ARL تحت کنترل مورد نیاز مشخص می‌شود.

۲-۲- نمودار رتبه علامت‌دار

در نمودار رتبه علامت‌دار برای کنترل مرکزیت فرآیند از رتبه‌های علامت‌دار اختلاف مشاهدات با میانگین استفاده می‌شود. مفروضات مورد نیاز برای استفاده از این نمودار، استقلال نمونه‌ها، پیوسته و متقارن بودن توزیع مشخصه حول مرکزیت می‌باشد. برای محاسبه آماره رتبه علامت‌دار در هر نمونه، علامت اختلاف مشاهدات نمونه تا میانگین فرآیند در حالت تحت کنترل مشخص و این علامت‌ها در رتبه قدر مطلق اختلاف مشاهدات از میانگین ضرب شده و سپس این مقادیر با هم جمع می‌شوند. آماره رتبه علامت‌دار برای نمونه i ام به صورت زیر محاسبه می‌شود:

۳- توسعه نمودارهای علامت و رتبه علامت‌دار با مجموعه‌های فازی نوع ۲ بازه‌ای

برای توسعه نمودار علامت و رتبه علامت‌دار با مجموعه‌های فازی نوع ۲ فرض شده است که مرکزیت و مشاهدات با استفاده از اعداد فازی دوزنقه‌ای نوع ۲ بازه‌ای نمایش داده می‌شوند. این فرض علاوه بر افزایش انعطاف‌پذیری نمودار، انجام محاسبات بر روی مجموعه‌های فازی را نیز ساده می‌سازد و توسط سایر محققین در طراحی نمودارهای پارامتری فازی نوع ۲ نیز به کار رفته است. در این حالت مشاهدات هر نمونه (X_{ij}) و میانگین فرآیند (μ_0) به صورت فازی زیر نشان داده می‌شوند:

$$X_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} (x_{ij1}^u, x_{ij2}^u, x_{ij3}^u, x_{ij4}^u; h_{x_{ij}}^u) \\ (x_{ij1}^l, x_{ij2}^l, x_{ij3}^l, x_{ij4}^l; h_{x_{ij}}^l) \end{array} \right\} \quad (۸)$$

$$\mu_0 = \left\{ \begin{array}{l} (\mu_{01}^u, \mu_{02}^u, \mu_{03}^u, \mu_{04}^u; h_{\mu_0}^u) \\ (\mu_{01}^l, \mu_{02}^l, \mu_{03}^l, \mu_{04}^l; h_{\mu_0}^l) \end{array} \right\}$$

برای محاسبه آماره‌های علامت و رتبه علامت‌دار باید مقادیر مشاهدات نمونه با میانگین فرآیند در حالت تحت کنترل مقایسه شوند و با توجه به اینکه این مقادیر به صورت مجموعه‌های فازی نوع ۲ بازه‌ای نشان داده شده‌اند دو روش زیر برای این منظور پیشنهاد شده است.

۳-۱- روش فازی‌زدائی

در روش فازی‌زدائی مقادیر فازی نوع ۲ به اعداد قطعی تبدیل و محاسبات با استفاده از این اعداد قطعی انجام می‌شود. این روش توسط برخی از محققین از جمله سنترک و ارگینل [۲] در نمودارهای فازی استفاده شده است.

در این مقاله برای استفاده از روش فازی‌زدائی، ابتدا اختلاف بین مشاهدات هر نمونه و میانگین فرآیند (Y_{ij}) به صورت اعداد فازی نوع ۲ و با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$Y_{ij} = X_{ij} - \mu_0 = \left\{ \begin{array}{l} (x_{ij1}^u - \mu_{04}^u, x_{ij2}^u - \mu_{03}^u, x_{ij3}^u - \mu_{02}^u, x_{ij4}^u - \mu_{01}^u; \min\{h_{x_{ij}}^u, h_{\mu_0}^u\}) \\ (x_{ij1}^l - \mu_{04}^l, x_{ij2}^l - \mu_{03}^l, x_{ij3}^l - \mu_{02}^l, x_{ij4}^l - \mu_{01}^l; \min\{h_{x_{ij}}^l, h_{\mu_0}^l\}) \end{array} \right\} \quad (۹)$$

سیس این مقادیر فازی با توجه به رابطه ۶ و به صورت زیر به مقادیر قطعی تبدیل می‌شوند:

$$y_{ij} = \frac{1}{8} \left\{ \begin{array}{l} (y_{ij1}^u + h_{y_{ij}}^u y_{ij2}^u + h_{y_{ij}}^u y_{ij3}^u + y_{ij4}^u) \\ + (y_{ij1}^l + h_{y_{ij}}^l y_{ij2}^l + h_{y_{ij}}^l y_{ij3}^l + y_{ij4}^l) \end{array} \right\} \quad (۱۰)$$

نهایتاً با استفاده از این مقادیر، آماره‌های علامت (SN_i) و رتبه علامت‌دار (W_i) برای نمونه i ام از رابطه زیر محاسبه می‌شوند:

$$A = \left\{ \begin{array}{l} (a_1^u, a_2^u, a_3^u, a_4^u; h_a^u) \\ (a_1^l, a_2^l, a_3^l, a_4^l; h_a^l) \end{array} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{array}{l} (b_1^u, b_2^u, b_3^u, b_4^u; h_b^u) \\ (b_1^l, b_2^l, b_3^l, b_4^l; h_b^l) \end{array} \right\}$$

$$A + B = \left\{ \begin{array}{l} (a_1^u + b_1^u, a_2^u + b_2^u, a_3^u + b_3^u, a_4^u + b_4^u; \min\{h_a^u, h_b^u\}) \\ (a_1^l + b_1^l, a_2^l + b_2^l, a_3^l + b_3^l, a_4^l + b_4^l; \min\{h_a^l, h_b^l\}) \end{array} \right\}$$

$$A - B = \left\{ \begin{array}{l} (a_1^u - b_4^u, a_2^u - b_3^u, a_3^u - b_2^u, a_4^u - b_1^u; \min\{h_a^u, h_b^u\}) \\ (a_1^l - b_4^l, a_2^l - b_3^l, a_3^l - b_2^l, a_4^l - b_1^l; \min\{h_a^l, h_b^l\}) \end{array} \right\} \quad (۵)$$

$$A \cdot B = \left\{ \begin{array}{l} (a_1^u \cdot b_1^u, a_2^u \cdot b_2^u, a_3^u \cdot b_3^u, a_4^u \cdot b_4^u; \min\{h_a^u, h_b^u\}) \\ (a_1^l \cdot b_1^l, a_2^l \cdot b_2^l, a_3^l \cdot b_3^l, a_4^l \cdot b_4^l; \min\{h_a^l, h_b^l\}) \end{array} \right\}$$

$$a_1^u, b_1^u \geq 0$$

$$\frac{A}{B} = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{a_1^u}{b_4^u}, \frac{a_2^u}{b_3^u}, \frac{a_3^u}{b_2^u}, \frac{a_4^u}{b_1^u}; \min\{h_a^u, h_b^u\} \right) \\ \left(\frac{a_1^l}{b_4^l}, \frac{a_2^l}{b_3^l}, \frac{a_3^l}{b_2^l}, \frac{a_4^l}{b_1^l}; \min\{h_a^l, h_b^l\} \right) \end{array} \right\}$$

$$a_1^u \cdot b_1^u \geq 0$$

در بعضی از موارد لازم است که مجموعه‌های فازی نوع ۲ بازه‌ای به اعداد قطعی تبدیل شوند، برای این منظور روشهای مختلفی پیشنهاد شده است که یکی از آنها روش مورد استفاده توسط کهرمان و همکاران [۲۸] است. در این روش برای فازی‌زدائی مجموعه فازی نوع ۲ بازه‌ای A (که مقدار قطعی آن به صورت a نشان داده شده است) از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$a = \frac{1}{8} \left((a_1^u + h_a^u a_2^u + h_a^u a_3^u + a_4^u) + (a_1^l + h_a^l a_2^l + h_a^l a_3^l + a_4^l) \right) \quad (۶)$$

برای محاسبه فاصله دو مجموعه فازی نوع ۲ نیز روشهای زیادی پیشنهاد شده است که یکی از آنها روش چن [۲۹] است. در این روش برای اندازه‌گیری فاصله دو مجموعه فازی نوع ۲ بازه‌ای (که مقادیر آنها در دامنه $[0, 1]$ قرار دارد)، فاصله علامت‌دار دو مجموعه فازی تا عدد قطعی ۱ محاسبه شده و با مقایسه این دو مقدار، فاصله دو عدد فازی تعیین می‌شود. در این حالت فاصله عدد فازی نوع ۲ بازه‌ای A تا عدد قطعی ۱ در بازه $[0, 2]$ قرار داشته و با استفاده از رابطه زیر مشخص می‌شود:

$$d(A, 1) = \frac{1}{8} \left((a_1^u + a_2^u + a_3^u + a_4^u) + (4a_1^u + 2a_2^u + 2a_3^u + 4a_4^u) - 3 \left(\frac{h_a^u}{h_a^l} (a_1^u - a_2^u - a_3^u + a_4^u) - 16 \right) \right) \quad (۷)$$

$$SN_i = \sum_{j=1}^n \text{Sign} \{d(\mu_0, M) - d(X_{ij}, M)\}$$

$$W_i = \sum_{j=1}^n \text{Sign} \{d(\mu_0, M) - d(X_{ij}, M)\} * R|d(\mu_0, M) - d(X_{ij}, M)| \quad (16)$$

$$SN_i = \sum_{j=1}^n \text{sign}(y_{ij})$$

$$W_i = \sum_{j=1}^n \text{sign}(y_{ij}) * R|y_{ij}| \quad (11)$$

۳-۲- روش فاصله‌ای

۳-۳- مثال تشریحی

کاپا و تورگوت [۲۴] در یک مطالعه موردی واقعی برای کنترل مرکزیت و پراکندگی یک مشخصه متغیر از نمودارهای پارامتری فازی نوع ۲ استفاده کرده‌اند. در این مطالعه آنها شرکتی که در تولید و فروش محصولات الکترونیکی و برقی فعالیت می‌کند را انتخاب و مرکزیت و پراکندگی در بلوکهای ترمینال تولیدی این شرکت را بررسی کرده‌اند. بلوکهای ترمینال تولیدی این شرکت دارای دو قسمت نری و ماده‌گی هستند که باید به هم متصل شوند و در این میان مشخصه متغیر عرض بین‌های ماده‌گی (X) در اتصال صحیح نقش زیادی داشته و باید کنترل شود. برای تخمین میانگین و انحراف معیار این مشخصه، تعداد $m=۲۵$ نمونه $n=۶$ تایی از فرآیند تولید انتخاب و عرض هر بین به صورت زبانی "تقریباً a" مشخص شده است که این مقادیر زبانی به صورت زیر به اعداد فازی نوع ۲ تبدیل می‌شوند:

$$\text{Approximate } a = \{(a - 0.015, a, a + 0.015, a + 0.03; 1), (a - 0.006, a + 0.003, a + 0.012, a + 0.021; 0.8)\}$$

به عنوان نمونه مقدار "تقریباً ۰/۶" به صورت مجموعه فازی زیر نشان داده می‌شود:

$$\text{Approximate } 0.6 = \{(0.585, 0.6, 0.615, 0.63; 1), (0.594, 0.603, 0.612, 0.621; 0.8)\}$$

برای استفاده از نمودارهای علامت و رتبه علامت‌دار باید مقدار μ_0 در حالت تحت کنترل برآورد شود. برای این منظور از مقدار آماره \bar{X} که در مرجع [۲۴] محاسبه و مقدار آن به صورت زیر تعیین شده استفاده می‌شود:

$$\mu_0 = \bar{X} = \{(0.6137, 0.6287, 0.6437, 0.6587; 1), (0.6227, 0.6317, 0.6407, 0.6497; 0.8)\}$$

حال برای تعیین وضعیت هر یک از این نمونه‌ها (به صورت تحت کنترل یا خارج از کنترل) باید از دو روش فازی‌زدائی و فاصله‌ای مقدار آماره‌های علامت و رتبه علامت‌دار فازی نوع ۲ را برای هر نمونه محاسبه و آنرا با حدود کنترل این نمودارها مقایسه نمود.

در این مثال با توجه به اندازه نمونه $n=۶$ ، حدود نمودار علامت فازی نوع ۲ به صورت $UCL=۵$ و $LCL=-۵$ و حدود نمودار رتبه علامت‌دار فازی نوع ۲ نیز به صورت $UCL=۲۰$ و $LCL=-۲۰$ تعیین شده است.

در جدول ۱ مقادیر زبانی مشاهدات هر نمونه، اختلاف مقادیر مشاهدات و میانگین در هر نمونه و همچنین مقادیر آماره‌های علامت (SN_i) و رتبه علامت‌دار (W_i) هر نمونه در دو روش فازی‌زدائی و فاصله‌ای نشان داده شده است.

در روش فاصله‌ای فاصله مشاهدات نمونه و میانگین فازی نوع ۲ با یک مقدار ثابت اندازه‌گیری و سپس این فواصل با هم مقایسه می‌شوند. این روش توسط مومنی و شکری [۱۹] در نمودارهای پارامتری فازی نوع ۱ استفاده شده است.

در این مقاله برای اندازه‌گیری فاصله اعداد فازی نوع ۲ تا یک مقدار ثابت، رابطه ۷ به گونه‌ای توسعه داده شده است که بتوان با استفاده از آن فاصله عدد فازی نوع ۲ بازه‌های A (با مقدار مثبت یا منفی) را تا عدد قطعی مثبت بزرگ M محاسبه نمود که در این حالت رابطه حاصل به صورت زیر مشخص شده است:

$$d(A, M) = \frac{1}{8} \left| (a_1^u + a_2^u + a_3^u + a_4^u) + (4a_1^u + 2a_2^u + 2a_3^u + 4a_4^u) - 3 \left(\frac{h_a}{h_a^u} \right) (a_1^u - a_2^u - a_3^u + a_4^u) - 16m \right| \quad (12)$$

$$M = \{(m, m, m, m; 1), (m, m, m, m; 1)\}$$

لازم به ذکر است که در رابطه بالا مقدار فاصله به صورت مثبت محاسبه می‌شود.

برای استفاده از روش فاصله‌ای ابتدا فاصله هر یک از مشاهدات نمونه i ام (X_{ij}) تا عدد قطعی مثبت M و همچنین فاصله میانگین فازی μ_0 تا عدد قطعی مثبت M به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$d(X_{ij}, M) = \frac{1}{8} \left| (x_{ij1}^l + x_{ij2}^l + x_{ij3}^l + x_{ij4}^l) + (4x_{ij1}^u + 2x_{ij2}^u + 2x_{ij3}^u + 4x_{ij4}^u) - 3 \left(\frac{h_{x_{ij}}}{h_{x_{ij}}^u} \right) (x_{ij1}^u - x_{ij2}^u - x_{ij3}^u + x_{ij4}^u) - 16m \right| \quad (13)$$

$$d(\mu_0, M) = \frac{1}{8} \left| (\mu_{01}^l + \mu_{02}^l + \mu_{03}^l + \mu_{04}^l) + (4\mu_{01}^u + 2\mu_{02}^u + 2\mu_{03}^u + 4\mu_{04}^u) - 3 \left(\frac{h_{\mu_0}}{h_{\mu_0}^u} \right) (\mu_{01}^u - \mu_{02}^u - \mu_{03}^u + \mu_{04}^u) - 16m \right| \quad (14)$$

که در رابطه بالا عدد قطعی مثبت M به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$M = \{(m, m, m, m; 1), (m, m, m, m; 1)\} \quad (15)$$

$$m = \max_j \{x_{ij4}^u, \mu_{04}^u\}$$

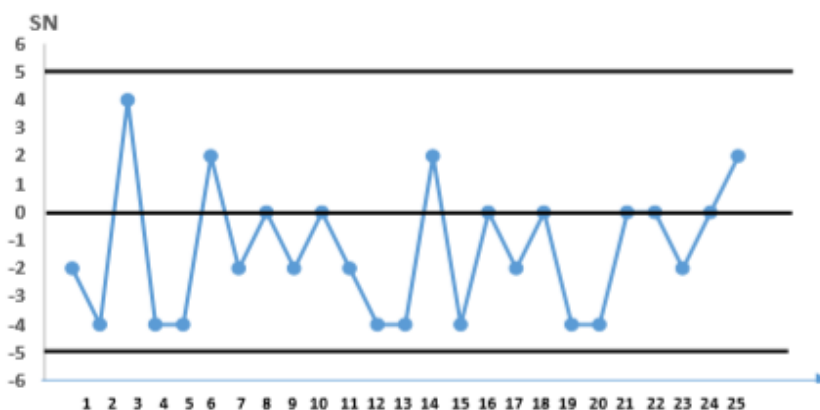
سپس آماره‌های علامت (SN_i) و رتبه علامت‌دار (W_i) برای نمونه نام از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

علامت‌دار برای همه نمونه‌ها در داخل حدود کنترل نمودارهای مربوطه قرار داشته و بنابراین همه نمونه‌ها در شرایط تحت کنترل قرار دارند. لازم به ذکر است که نتایج بدست آمده از نمودارهای ناپارامتری علامت و رتبه علامت‌دار فازی نوع ۲ با نتیجه ارایه شده در مقاله کایا و تورگوت [۲۴] که در آن برای کنترل مرکزیت از نمودار پارامتری \bar{X} فازی نوع ۲ استفاده شده است مشابه می‌باشد.

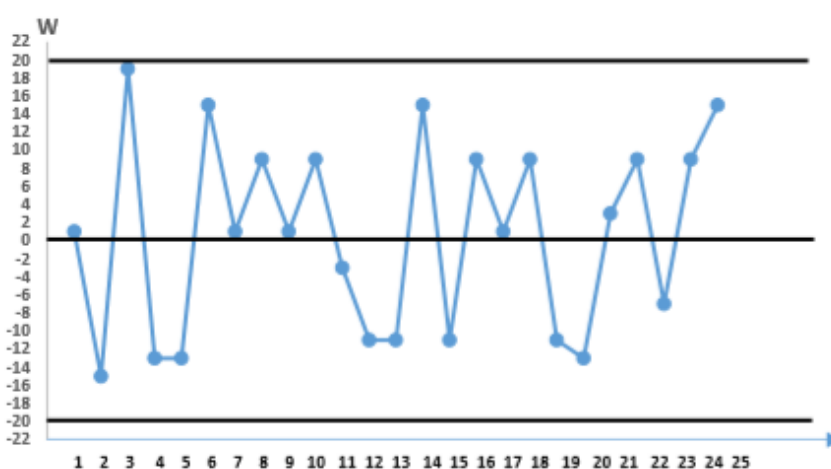
همانطور که در جدول ۱ دیده می‌شود، مقدار آماره‌های علامت و رتبه علامت‌دار برای هر نمونه در دو روش فازی‌زدائی و فاصله‌ی مشابه می‌باشد. همچنین در شکل‌های ۲ و ۳ به ترتیب نمودار علامت فازی نوع ۲ و نمودار رتبه علامت‌دار فازی نوع ۲ برای این مثال ترسیم شده است. همانطور که از این شکل‌ها مشخص است مقدار آماره‌های علامت و رتبه

جدول ۱. مقادیر نمونه و آماره‌های علامت و رتبه علامت‌دار در دو روش فازی‌زدائی و فاصله‌ی

شماره نمونه	مشاهدات نمونه						روش فاصله‌ی						روش فازی‌زدائی									
	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	X_{i6}	$d(\mu_0) - d(X_{i1})$	$d(\mu_0) - d(X_{i2})$	$d(\mu_0) - d(X_{i3})$	$d(\mu_0) - d(X_{i4})$	$d(\mu_0) - d(X_{i5})$	$d(\mu_0) - d(X_{i6})$	SN_i	W_i	$Def(X_{i1} - \mu_0)$	$Def(X_{i2} - \mu_0)$	$Def(X_{i3} - \mu_0)$	$Def(X_{i4} - \mu_0)$	$Def(X_{i5} - \mu_0)$	$Def(X_{i6} - \mu_0)$	SN_i	W_i
۱	۰/۶	۰/۶	۰/۷	۰/۶	۰/۶	۰/۷	-۰/۰۳	-۰/۰۳	۰/۰۷	-۰/۰۳	-۰/۰۳	۰/۰۷	-۲	۱	-۰/۰۶	-۰/۰۶	۰/۱۴	-۰/۰۶	-۰/۰۶	۰/۱۴	-۲	۱
۲	۰/۵	۰/۶	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۵	-۰/۱۲	-۰/۰۳	-۰/۱۲	-۰/۰۳	۰/۰۷	-۰/۱۲	-۴	-۱۵	-۰/۲۶	-۰/۰۶	-۰/۲۶	-۰/۰۶	۰/۱۴	-۰/۲۶	-۴	-۱۵
۳	۰/۸	۰/۶	۰/۷	۰/۷	۰/۷	۰/۷	۰/۱۶	-۰/۰۳	۰/۰۷	۰/۰۷	۰/۰۷	۰/۰۷	۴	۱۹	۰/۳۴	-۰/۰۶	۰/۱۴	۰/۱۴	۰/۱۴	۰/۱۴	۴	۱۹
۴	۰/۶	۰/۶	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۵	-۰/۰۳	-۰/۰۳	-۰/۱۲	-۰/۰۳	۰/۰۷	-۰/۱۲	-۴	-۱۳	-۰/۰۶	-۰/۰۶	-۰/۲۶	-۰/۰۶	۰/۱۴	-۰/۲۶	-۴	-۱۳
۵	۰/۷	۰/۶	۰/۵	۰/۶	۰/۶	۰/۵	۰/۰۷	-۰/۰۳	-۰/۱۲	-۰/۰۳	-۰/۰۳	-۰/۱۲	-۴	-۱۳	۰/۱۴	-۰/۰۶	-۰/۲۶	-۰/۰۶	-۰/۰۶	-۰/۲۶	-۴	-۱۳
۶	۰/۷	۰/۸	۰/۷	۰/۷	۰/۶	۰/۶	۰/۰۷	۰/۱۶	۰/۰۷	۰/۰۷	-۰/۰۳	-۰/۰۳	۲	۱۵	۰/۱۴	۰/۳۴	۰/۱۴	۰/۱۴	-۰/۰۶	-۰/۰۶	۲	۱۵
۷	۰/۶	۰/۷	۰/۷	۰/۶	۰/۶	۰/۶	-۰/۰۳	۰/۰۷	۰/۰۷	-۰/۰۳	-۰/۰۳	-۰/۰۳	-۲	۱	-۰/۰۶	۰/۱۴	۰/۱۴	-۰/۰۶	-۰/۰۶	-۰/۰۶	-۲	۱
۸	۰/۶	۰/۷	۰/۷	۰/۷	۰/۶	۰/۶	-۰/۰۳	۰/۰۷	۰/۰۷	۰/۰۷	-۰/۰۳	-۰/۰۳	۰	۹	-۰/۰۶	۰/۱۴	۰/۱۴	۰/۱۴	-۰/۰۶	-۰/۰۶	۰	۹
۹	۰/۶	۰/۷	۰/۷	۰/۶	۰/۶	۰/۶	-۰/۰۳	۰/۰۷	۰/۰۷	-۰/۰۳	-۰/۰۳	-۰/۰۳	-۲	۱	-۰/۰۶	۰/۱۴	۰/۱۴	-۰/۰۶	-۰/۰۶	-۰/۰۶	-۲	۱
۱۰	۰/۷	۰/۷	۰/۷	۰/۶	۰/۶	۰/۶	۰/۰۷	۰/۰۷	۰/۰۷	-۰/۰۳	-۰/۰۳	-۰/۰۳	۰	۹	۰/۱۴	۰/۱۴	۰/۱۴	-۰/۰۶	-۰/۰۶	-۰/۰۶	۰	۹
۱۱	۰/۶	۰/۶	۰/۷	۰/۶	۰/۷	۰/۵	-۰/۰۳	-۰/۰۳	۰/۰۷	-۰/۰۳	۰/۰۷	-۰/۱۲	-۲	-۳	-۰/۰۶	-۰/۰۶	۰/۱۴	-۰/۰۶	۰/۱۴	-۰/۲۶	-۲	-۳
۱۲	۰/۶	۰/۶	۰/۶	۰/۵	۰/۶	۰/۷	-۰/۰۳	-۰/۰۳	-۰/۰۳	-۰/۱۲	-۰/۰۳	۰/۰۷	-۴	-۱۱	-۰/۰۶	-۰/۰۶	-۰/۰۶	-۰/۲۶	-۰/۰۶	۰/۱۴	-۴	-۱۱
۱۳	۰/۶	۰/۶	۰/۶	۰/۷	۰/۶	۰/۵	-۰/۰۳	-۰/۰۳	-۰/۰۳	۰/۰۷	-۰/۰۳	-۰/۱۲	-۴	-۱۱	-۰/۰۶	-۰/۰۶	-۰/۰۶	۰/۱۴	-۰/۰۶	-۰/۲۶	-۴	-۱۱
۱۴	۰/۶	۰/۶	۰/۷	۰/۷	۰/۷	۰/۷	-۰/۰۳	-۰/۰۳	۰/۰۷	۰/۰۷	۰/۰۷	۰/۰۷	۲	۱۵	-۰/۰۶	-۰/۰۶	۰/۱۴	۰/۱۴	۰/۱۴	۰/۱۴	۲	۱۵
۱۵	۰/۶	۰/۶	۰/۷	۰/۶	۰/۶	۰/۵	-۰/۰۳	-۰/۰۳	۰/۰۷	-۰/۰۳	-۰/۰۳	-۰/۱۲	-۴	-۱۱	-۰/۰۶	-۰/۰۶	۰/۱۴	-۰/۰۶	-۰/۰۶	-۰/۲۶	-۴	-۱۱
۱۶	۰/۶	۰/۷	۰/۷	۰/۷	۰/۶	۰/۶	-۰/۰۳	۰/۰۷	۰/۰۷	۰/۰۷	-۰/۰۳	-۰/۰۳	۰	۹	-۰/۰۶	۰/۱۴	۰/۱۴	۰/۱۴	-۰/۰۶	-۰/۰۶	۰	۹
۱۷	۰/۷	۰/۶	۰/۶	۰/۷	۰/۶	۰/۶	۰/۰۷	-۰/۰۳	-۰/۰۳	۰/۰۷	-۰/۰۳	-۰/۰۳	-۲	۱	۰/۱۴	-۰/۰۶	-۰/۰۶	۰/۱۴	-۰/۰۶	-۰/۰۶	-۲	۱
۱۸	۰/۶	۰/۷	۰/۶	۰/۶	۰/۷	۰/۷	-۰/۰۳	۰/۰۷	-۰/۰۳	-۰/۰۳	۰/۰۷	۰/۰۷	۰	۹	-۰/۰۶	۰/۱۴	-۰/۰۶	-۰/۰۶	۰/۱۴	۰/۱۴	۰	۹
۱۹	۰/۶	۰/۶	۰/۷	۰/۶	۰/۵	۰/۶	-۰/۰۳	-۰/۰۳	۰/۰۷	-۰/۰۳	-۰/۱۲	-۰/۰۳	-۴	-۱۱	-۰/۰۶	-۰/۰۶	۰/۱۴	-۰/۰۶	-۰/۲۶	-۰/۰۶	-۴	-۱۱
۲۰	۰/۷	۰/۶	۰/۵	۰/۶	۰/۶	۰/۵	۰/۰۷	-۰/۰۳	-۰/۱۲	-۰/۰۳	-۰/۰۳	-۰/۱۲	-۴	-۱۳	۰/۱۴	-۰/۰۶	-۰/۲۶	-۰/۰۶	-۰/۰۶	-۰/۲۶	-۴	-۱۳
۲۱	۰/۷	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۶	۰/۷	۰/۰۷	-۰/۱۲	-۰/۰۳	۰/۰۷	-۰/۰۳	۰/۰۷	۰	۳	۰/۱۴	-۰/۲۶	-۰/۰۶	۰/۱۴	-۰/۰۶	۰/۱۴	۰	۳
۲۲	۰/۶	۰/۶	۰/۷	۰/۶	۰/۷	۰/۷	-۰/۰۳	-۰/۰۳	۰/۰۷	-۰/۰۳	۰/۰۷	۰/۰۷	۰	۹	-۰/۰۶	-۰/۰۶	۰/۱۴	-۰/۰۶	۰/۱۴	۰/۱۴	۰	۹
۲۳	۰/۷	۰/۶	۰/۷	۰/۶	۰/۵	۰/۵	۰/۰۷	-۰/۰۳	۰/۰۷	-۰/۰۳	-۰/۱۲	-۰/۱۲	-۲	-۷	۰/۱۴	-۰/۰۶	۰/۱۴	-۰/۰۶	-۰/۲۶	-۰/۲۶	-۲	-۷
۲۴	۰/۷	۰/۷	۰/۶	۰/۶	۰/۶	۰/۷	۰/۰۷	۰/۰۷	-۰/۰۳	-۰/۰۳	-۰/۰۳	۰/۰۷	۰	۹	۰/۱۴	۰/۱۴	-۰/۰۶	-۰/۰۶	-۰/۰۶	۰/۱۴	۰	۹
۲۵	۰/۷	۰/۶	۰/۷	۰/۶	۰/۷	۰/۷	۰/۰۷	-۰/۰۳	۰/۰۷	-۰/۰۳	۰/۰۷	۰/۰۷	۲	۱۵	۰/۱۴	-۰/۰۶	۰/۱۴	-۰/۰۶	۰/۱۴	۰/۱۴	۲	۱۵



شکل ۲. نمودار علامت فازی نوع ۲ برای نمونه‌ها در مثال تشریح شده



شکل ۳- نمودار رتبه علامت‌دار فازی نوع ۲ برای نمونه‌ها در مثال تشریح شده

جدول ۲- مشخصات توزیع‌های نرمال، یکنواخت و لاپلاس

توزیع	یکنواخت	نرمال	لاپلاس
تابع چگالی	$\frac{1}{\beta - \alpha}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{ x-\theta }{\lambda}}$
مقادیر پارامترها	$\beta = \sqrt{3}$ $\alpha = -\sqrt{3}$	$\mu = 0$ $\sigma = 1$	$\theta = 0$ $\lambda = 1/\sqrt{2}$

با توجه به این که متغیرهای تصادفی فوق باید به صورت فازی نوع ۲ باشند، در این مقاله فرض شده است که متغیر تصادفی فازی هر توزیع در حالت تحت کنترل دارای میانگین فازی نوع ۲ "تقریباً صفر" ($\mu_0 = \vec{0}$) و واریانس قطعی $\sigma^2 = 1$ می‌باشد که در آن "تقریباً صفر" به صورت عدد فازی نوع ۲ بازه‌ای متقارن زیر مشخص می‌شود:

$$\mu_0 = \left\{ \begin{matrix} (-1, -0.5, 0.5, 1) \\ (-0.5, -0.25, 0.25, 0.5; 0.8) \end{matrix} \right\}$$

برای تولید مشاهدات فازی نوع ۲ در برنامه‌های شبیه‌سازی از روش فنگ [۳۰] استفاده شده است که در آن ابتدا یک متغیر تصادفی قطعی با

۴- بررسی عملکرد نمودارهای علامت و رتبه علامت‌دار فازی نوع ۲ بازه‌ای

برای بررسی عملکرد نمودارهای علامت و رتبه علامت‌دار فازی نوع ۲، از برنامه‌های شبیه‌سازی در نرم افزار MATLAB استفاده شده است که در آنها مقادیر طول متوسط دنباله (ARL) و انحراف معیار دنباله (SDRL) این نمودارها به ازای مقادیر مختلف تغییر در میانگین برای سه توزیع مختلف نرمال (توزیع دنباله متوسط)، یکنواخت (توزیع دنباله کوتاه) و لاپلاس (توزیع دنباله بلند) و در دو روش فازی‌دائی و فاصله‌ای محاسبه شده است. در این حالت برای یکسان شدن مشخصات توزیع‌های نرمال، یکنواخت و لاپلاس بر روی عملکرد نمودارها، پارامترهای این توزیع‌ها به گونه ای تنظیم شده است که در شرایط تحت کنترل میانگین سه توزیع برابر صفر و واریانس آنها برابر یک باشد. جدول ۲ تابع چگالی و همچنین مقادیر پارامترهای این توزیع‌ها را در این حالت نشان می‌دهد.

نشریه مهندسی و مدیریت کیفیت

برای کنترل صحت برنامه شبیه‌سازی، مشاهدات نمونه‌ای و میانگین به صورت مقادیر قطعی (که نوع خاصی از اعداد فازی نوع ۲ با مقادیر و ارتفاع مشابه هستند) در نظر گرفته شده و مقادیر ARL نمودارهای علامت و رتبه علامت‌دار فازی نوع ۲ با برنامه شبیه‌سازی محاسبه شده است. با توجه به اینکه حداکثر اختلاف مقادیر بدست آمده از برنامه شبیه‌سازی و مقادیر داده شده در مراجع [۱۷ و ۱۸] کمتر از ۵٪ است، می‌توان با اطمینان از برنامه شبیه‌سازی استفاده نمود.

مقادیر ARL و SDRL نمودار علامت فازی نوع ۲ در سه توزیع مختلف و دو روش فازی‌زدائی و فاصله‌ای در جدول ۳ نشان داده شده است. همانطور که در جدول ۳ دیده می‌شود انحراف معیار طول دنباله (SDRL) در همه توزیع‌ها و در هر دو روش فازی‌زدائی و فاصله‌ای با افزایش میزان تغییر در میانگین فرآیند به سمت صفر میل می‌کند که نشان دهنده دقت رویکرد شبیه‌سازی برای تخمین مقدار میانگین طول دنباله (ARL) در نمودار علامت فازی نوع ۲ می‌باشد.

میانگین قطعی $0 + k$ و واریانس قطعی ۱ تولید و سپس با استفاده از رابطه زیر مقدار مشاهدات نمونه‌ای فازی نوع ۲ بازه‌ای X_{ij} ایجاد می‌شود:

$$X_{ij} = \mu_0 + z_{ij} \quad j = 1, \dots, n$$

$$X_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} (\mu_1^u + z_{ij}, \mu_2^u + z_{ij}, \mu_3^u + z_{ij}, \mu_4^u + z_{ij}; h_\mu^u) \\ (\mu_1^l + z_{ij}, \mu_2^l + z_{ij}, \mu_3^l + z_{ij}, \mu_4^l + z_{ij}; h_\mu^l) \end{array} \right\}$$

$$Z_{ij} \sim N(0 + k, 1)$$

$$Z_{ij} \sim U(\alpha = -\sqrt{3} + k, \beta = +\sqrt{3} + k)$$

$$Z_{ij} \sim L\left(\theta = 0 + k, \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

که در رابطه بالا k میزان تغییر در میانگین را نشان داده و در حالت تحت کنترل مقدار آن برابر صفر است. در برنامه‌های شبیه‌سازی، تعداد تکرارها برابر ۱۰۰۰۰، اندازه نمونه برابر $n=10$ ، حدود نمودار علامت به صورت $UCL=9$ و $LCL=-9$ و حدود نمودار رتبه علامت‌دار به صورت $UCL=53$ و $LCL=-53$ مشخص شده است که در این حالت ARL نمودارها در حالت تحت کنترل در حدود ۵۱۲ خواهد بود.

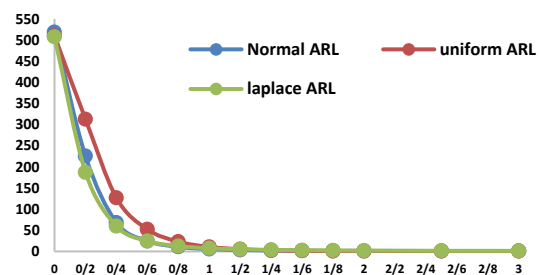
جدول ۳. مقادیر ARL و SDRL نمودار علامت فازی نوع ۲

روش	k توزیع	مقادیر ARL و SDRL													
		۰/۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱/۰	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲/۰	۲/۵	۳/۰	
فازی‌زدائی	یکنواخت	ARL	۵۱۰/۰۸	۳۱۳/۰۲	۱۲۶/۷۷	۵۲/۱۴	۲۳/۱۳	۱۰/۸۵	۵/۳۰	۲/۷۳	۱/۴۸	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰
		SDRL	۵۰۷/۱۵	۳۱۲/۰۱	۱۲۷/۱۲	۵۱/۶۳	۲۲/۷۴	۱۰/۲۴	۴/۷۶	۲/۱۷	۰/۸۴	۰	۰	۰	۰
	نرمال	ARL	۵۱۸/۷۰	۲۲۵/۷۸	۶۸/۳۲	۲۴/۸۶	۱۰/۸۵	۵/۶۵	۳/۴۱	۲/۳۵	۱/۷۷	۱/۴۴	۱/۲۶	۱/۰۷	۱/۰۱
		SDRL	۵۱۵/۹۱	۲۳۰/۰۰	۶۷/۷۴	۲۴/۱۹	۱۰/۲۷	۵/۱۵	۲/۸۴	۱/۸۱	۱/۱۴	۰/۸۱	۰/۵۸	۰/۲۷	۰/۱۱
	لاپلاس	ARL	۵۰۷/۸۰	۱۸۷/۲۵	۵۹/۹۱	۲۴/۶۵	۱۲/۷۴	۷/۵۱	۵/۱۶	۳/۳۲	۲/۸۸	۲/۳۵	۲/۰۰	۱/۵۴	۱/۲۹
		SDRL	۵۰۲/۱۳	۱۸۹/۴۸	۵۹/۳۰	۲۴/۰۸	۱۲/۳۳	۶/۹۷	۴/۵۹	۳/۱۹	۲/۳۱	۱/۷۹	۱/۴۲	۰/۹۰	۰/۶۱
فاصله‌ای	یکنواخت	ARL	۵۰۳/۹۷	۳۱۳/۳۴	۱۲۵/۵۱	۵۲/۲۲	۲۳/۲۸	۱۰/۸۳	۵/۳۷	۲/۷۵	۱/۴۶	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰
		SDRL	۵۰۵/۱۷	۳۱۴/۷۸	۱۲۴/۰۳	۵۲/۸۴	۲۲/۹۵	۱۰/۳۸	۴/۹۴	۲/۱۷	۰/۸۲	۰	۰	۰	۰
	نرمال	ARL	۵۱۸/۲۶	۲۲۹/۲۰	۶۸/۸۷	۲۴/۶۱	۱۰/۹۰	۵/۵۸	۳/۴۴	۲/۳۰	۱/۷۴	۱/۴۳	۱/۲۶	۱/۰۷	۱/۰۱
		SDRL	۵۲۳/۰۴	۲۳۱/۷۲	۶۸/۷۳	۲۴/۴۹	۱۰/۳۱	۵/۱۰	۲/۹۴	۱/۷۱	۱/۱۵	۰/۷۸	۰/۵۸	۰/۲۷	۰/۱۱
	لاپلاس	ARL	۵۰۹/۲۴	۱۸۷/۳۲	۵۹/۲۰	۲۴/۷۴	۱۲/۶۹	۷/۶۶	۵/۱۲	۳/۷۳	۲/۸۹	۲/۳۳	۲/۰۳	۱/۵۲	۱/۲۹
		SDRL	۵۰۵/۵۴	۱۸۶/۷۶	۵۷/۷۵	۲۴/۶۱	۱۲/۲۳	۷/۱۹	۴/۵۷	۳/۲۴	۲/۳۳	۱/۷۹	۱/۴۳	۰/۹۰	۰/۶۱

همانطور که در شکل ۴ دیده می‌شود، عملکرد نمودار علامت فازی نوع ۲ در روش فازی‌زدائی، احتمال تشخیص تغییرات کوچکتر از ۰/۵ به ترتیب در توزیع‌های یکنواخت، نرمال و لاپلاس، احتمال تشخیص تغییرات در بازه [۰/۱-۵/۵] به ترتیب در توزیع‌های یکنواخت، لاپلاس و نرمال و احتمال تشخیص تغییرات بزرگتر از ۱/۵ به ترتیب در توزیع‌های لاپلاس، نرمال و یکنواخت افزایش می‌یابد.

در شکل ۵ مقادیر ARL نمودار علامت فازی نوع ۲ در روش فاصله‌ای و در سه توزیع مختلف نشان داده شده است.

با توجه به شکل ۵ مشخص است که عملکرد نمودار علامت فازی نوع ۲ در روش فاصله‌ای برای تشخیص تغییرات کوچک به ترتیب در توزیع‌های یکنواخت، نرمال و لاپلاس، برای تشخیص تغییرات متوسط به ترتیب در



شکل ۴. مقایسه ARL نمودار علامت فازی نوع ۲ در توزیع‌های مختلف (روش فازی‌زدائی)

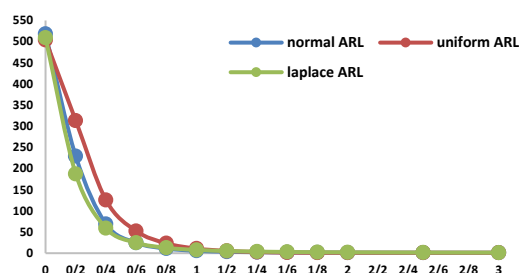
مقادیر ARL نمودار علامت در سه توزیع مختلف و در حالت استفاده از روش فازی‌زدائی در شکل ۴ نشان داده شده است.

همچنین با مقایسه عملکرد نمودار علامت فازی نوع ۲ در دو روش فازی‌زدائی و فاصله‌ای مشخص می‌شود که عملکرد این نمودار در دو روش برای هر سه توزیع تقریباً مشابه است.

در جدول ۴ نیز مقادیر ARL و SDRL نمودار رتبه علامت‌دار فازی نوع ۲ در سه توزیع مختلف و در دو روش فازی‌زدائی و فاصله‌ای نشان داده شده است.

همانطور که در جدول ۴ دیده می‌شود انحراف معیار طول دنباله (SDRL) در همه توزیع‌ها و در هر دو روش فازی‌زدائی و فاصله‌ای با افزایش میزان تغییر در میانگین فرآیند به سمت صفر میل می‌کند که نشان دهنده دقت رویکرد شبیه‌سازی برای تخمین مقدار میانگین طول دنباله (ARL) در نمودار رتبه علامت‌دار می‌باشد.

توزیع‌های یکنواخت، لاپلاس و نرمال و در تشخیص تشخیص تغییرات بزرگ (بزرگتر از ۱/۵) به ترتیب در توزیع‌های لاپلاس، نرمال و یکنواخت بهبود می‌یابد.



شکل ۵. مقایسه ARL نمودار علامت فازی نوع ۲ در توزیع‌های مختلف (روش فاصله‌ای)

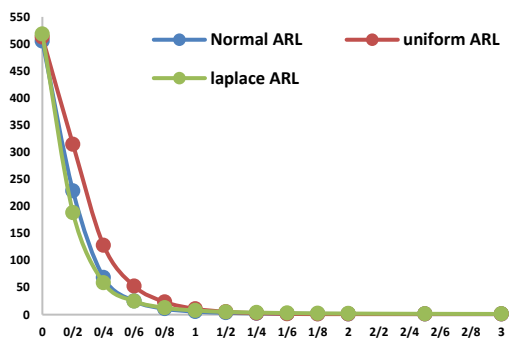
جدول ۴. مقادیر ARL و SDRL نمودار رتبه علامت‌دار فازی نوع ۲

روش	k توزیع														
		۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲	۲/۵	۳	
فازی‌زدائی	یکنواخت	ARL	۵۱۲/۶۵	۳۱۴/۶۲	۱۲۸/۰۱	۵۲/۶۶	۲۳/۳۵	۱۰/۷۵	۵/۲۹	۲/۷۳	۱/۴۷	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰
		SDRL	۵۰۷/۳۶	۳۱۸/۰۸	۱۲۷/۲۱	۵۱/۴۶	۲۲/۹۶	۱۰/۰۸	۴/۸۱	۲/۱۸	۰/۸۱	۰	۰	۰	۰
	نرمال	ARL	۵۰۵/۳۶	۲۲۸/۵۹	۶۸/۵۸	۲۴/۹۹	۱۰/۸۴	۵/۵۹	۳/۴۴	۲/۳۳	۱/۷۷	۱/۴۴	۱/۲۵	۱/۰۶	۱/۰۱
		SDRL	۵۰۸/۰۸	۲۲۴/۸۷	۶۸/۱۴	۲۴/۱۷	۱۰/۳۳	۵/۰۹	۲/۹۰	۱/۷۴	۱/۱۷	۰/۸۰	۰/۵۶	۰/۲۵	۰/۱۲
	لاپلاس	ARL	۵۱۸/۳۰	۱۸۸/۲۸	۵۸/۷۴	۲۴/۸۲	۱۲/۵۷	۷/۵۷	۵/۱۰	۳/۷۶	۲/۹۴	۲/۳۹	۲/۰۲	۱/۵۱	۱/۳۰
		SDRL	۵۲۶/۳۵	۱۸۸/۷۶	۵۷/۱۶	۲۳/۹۷	۱۱/۹۴	۷/۱۶	۴/۵۸	۳/۳۲	۲/۴۴	۱/۸۱	۱/۴۵	۰/۸۸	۰/۶۱
فاصله‌ای	یکنواخت	ARL	۵۱۵/۵۶	۳۱۲/۲۸	۱۲۷/۱۷	۵۱/۷۴	۲۳/۰۲	۱۰/۸۰	۵/۲۵	۲/۷۰	۱/۴۷	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰
		SDRL	۵۱۵/۹۱	۳۱۲/۲۸	۱۲۵/۲۸	۵۱/۶۱	۲۲/۲۲	۱۰/۳۸	۴/۷۲	۲/۱۲	۰/۸۳	۰	۰	۰	۰
	نرمال	ARL	۵۱۱/۳۱	۱۸۸/۳۶	۵۹/۳۸	۲۴/۶۶	۱۲/۶۵	۷/۷۲	۵/۰۹	۳/۷۲	۲/۹۲	۲/۳۸	۲/۰۰	۱/۵۲	۱/۲۹
		SDRL	۵۱۰/۵۷	۱۸۸/۳۲	۵۸/۸۳	۲۴/۴۴	۱۲/۰۶	۷/۲۳	۴/۵۳	۳/۱۶	۲/۳۷	۱/۸۳	۱/۴۵	۰/۸۹	۰/۶۱
	لاپلاس	ARL	۵۲۰/۷۲	۱۸۵/۸۹	۵۷/۴۷	۲۴/۶۱	۱۲/۶۱	۷/۷۰	۵/۱۰	۳/۷۴	۲/۹۳	۲/۳۸	۲/۰۳	۱/۵۲	۱/۲۹
		SDRL	۵۲۰/۴۱	۱۸۴/۷۱	۵۶/۱۴	۲۳/۹۵	۱۲/۰۰	۷/۲۲	۴/۵۵	۳/۱۴	۲/۴۱	۱/۸۰	۱/۴۴	۰/۸۸	۰/۶۱

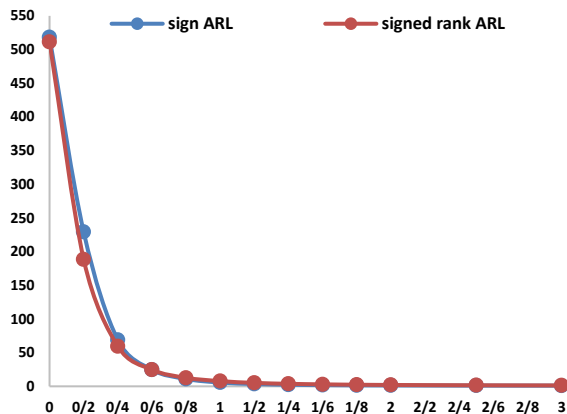
با توجه به شکل ۶ مشخص است که در روش فازی‌زدائی احتمال تشخیص تغییرات کوچک (کمتر از ۰/۷) به ترتیب در توزیع‌های یکنواخت، نرمال و لاپلاس، احتمال تشخیص تغییرات متوسط (۱/۳-۰/۷) به ترتیب در توزیع‌های نرمال، لاپلاس و یکنواخت و احتمال کشف تغییرات بزرگ (بزرگتر از ۱/۳) به ترتیب در توزیع‌های لاپلاس، نرمال و یکنواخت افزایش می‌یابد.

همچنین برای بررسی عملکرد نمودار رتبه علامت‌دار فازی نوع ۲ در روش فاصله‌ای مقادیر ARL نمودار در سه توزیع مختلف مشخص و این مقادیر در شکل ۷ نشان داده شده است.

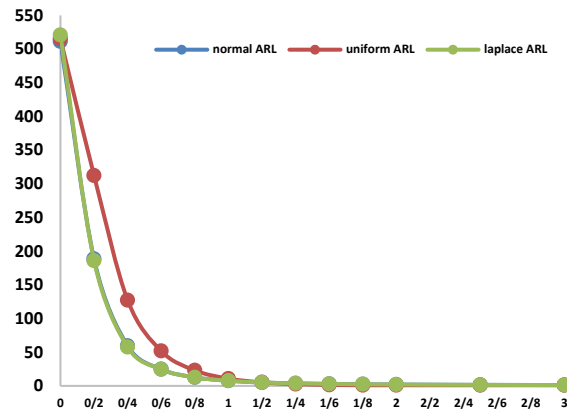
مقادیر ARL نمودار رتبه علامت‌دار فازی نوع ۲ در حالت استفاده از روش فازی‌زدائی در شکل ۶ نشان داده شده است.



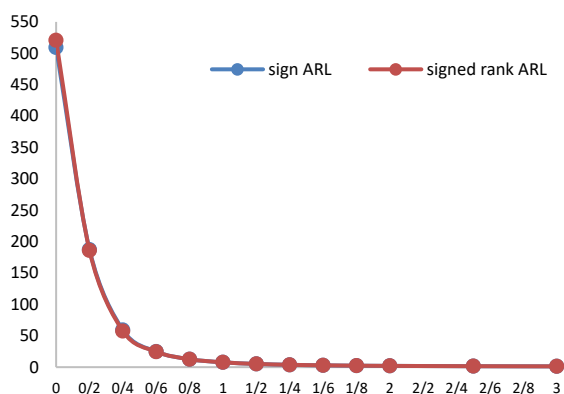
شکل ۶. مقایسه ARL نمودار رتبه علامت‌دار فازی نوع ۲ در توزیع‌های مختلف (روش فازی‌زدائی)



شکل ۹. مقایسه عملکرد نمودارهای علامت و رتبه علامت‌دار فازی نوع ۲ (توزیع یکنواخت)



شکل ۷. مقایسه ARL نمودار رتبه علامت‌دار فازی نوع ۲ در توزیع‌های مختلف (روش فاصله‌ای)



شکل ۱۰. مقایسه عملکرد نمودارهای علامت و رتبه علامت‌دار فازی نوع ۲ (توزیع لاپلاس)

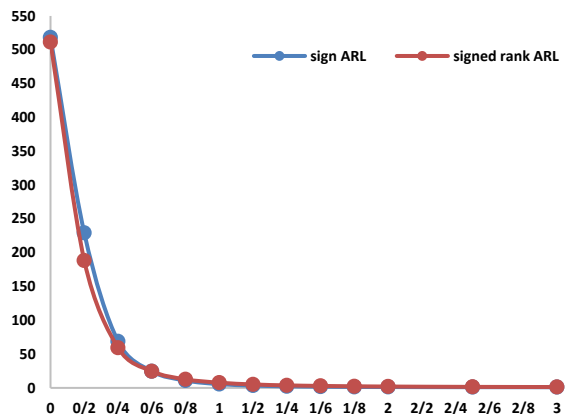
همانطور که در شکل‌های ۸، ۹ و ۱۰ دیده می‌شود، در توزیع لاپلاس عملکرد دو نمودار علامت و رتبه علامت‌دار فازی نوع ۲ در تشخیص تغییرات تقریباً مشابه بوده ولی در توزیع نرمال و یکنواخت عملکرد نمودار رتبه علامت‌دار در کشف تغییرات کوچک بهتر از نمودار علامت می‌باشد.

در انتها برای مقایسه عملکرد نمودارهای ناپارامتری و پارامتری فازی نوع ۲، عملکرد نمودار پارامتری \bar{X} فازی نوع ۲ بررسی شده است. جهت یکسان بودن مقدار ARL_0 نمودارها، حدود نمودار \bar{X} فازی نوع ۲ برابر $3/1$ انحراف معیار از میانگین در نظر گرفته شده است که در این حالت در توزیع نرمال مقدار ARL_0 نمودار تقریباً برابر ۵۱۲ می‌باشد. در شکل ۱۱ عملکرد نمودار \bar{X} فازی نوع ۲ در سه توزیع نرمال، یکنواخت و لاپلاس نشان داده شده است.

با توجه به شکل ۷ مشخص است که در نمودار رتبه علامت‌دار فازی نوع ۲ احتمال تشخیص تغییرات کوچکتر از $1/1$ به ترتیب در توزیع‌های یکنواخت، نرمال و لاپلاس و احتمال تشخیص تغییرات بزرگتر از $1/1$ به ترتیب در توزیع‌های لاپلاس، نرمال و یکنواخت زیاد می‌شود.

با بررسی مقادیر ARL نمودار رتبه علامت‌دار فازی نوع ۲ در دو روش فازی‌زدائی و فاصله‌ای مشخص می‌گردد که در توزیع‌های لاپلاس و یکنواخت عملکرد این نمودار در روش فاصله‌ای بهتر از روش فازی‌زدائی است. همچنین عملکرد نمودار رتبه علامت‌دار فازی نوع ۲ در توزیع نرمال برای تشخیص تغییرات کوچک در روش فاصله‌ای و برای تشخیص تغییرات متوسط و بزرگ در روش فازی‌زدائی بهتر است.

نهایتاً برای مقایسه عملکرد دو نمودار علامت و رتبه علامت‌دار فازی نوع ۲، مقادیر ARL این نمودارها در روش فاصله‌ای و برای سه توزیع نرمال، یکنواخت و لاپلاس مشخص و نمودارهای حاصل در شکل‌های ۸، ۹ و ۱۰ نشان داده شده است.



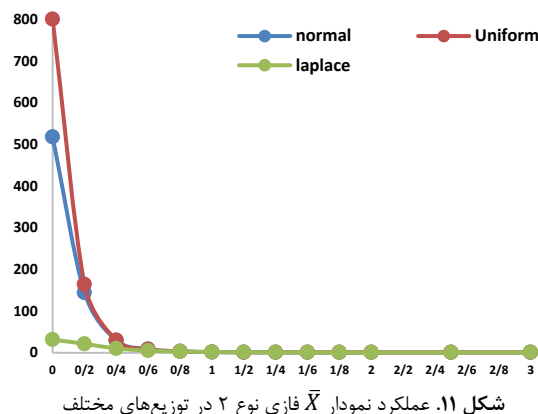
شکل ۸. مقایسه عملکرد نمودارهای علامت و رتبه علامت‌دار فازی نوع ۲ (توزیع نرمال)

می‌دهد که برنامه‌های شبیه‌سازی در تخمین مقادیر ARL دقت کافی دارند و هر چقدر میزان تغییر در مرکزیت بیشتر شود، دقت تخمین ARL نیز بیشتر می‌شود. بررسی مقادیر ARL محاسبه شده نیز نشان می‌دهد که عملکرد نمودار علامت در هر دو روش فاصله‌ای و فازی‌زدائی برای کشف تغییرات کوچک در توزیع لاپلاس نسبت به دو توزیع دیگر بهتر است. همچنین در نمودار رتبه علامت‌دار نیز در هر دو روش فاصله‌ای و فازی‌زدائی، تغییرات کوچک در توزیع لاپلاس نسبت به دو توزیع دیگر سریع‌تر کشف می‌شود. نهایتاً با مقایسه عملکرد دو نمودار علامت و رتبه علامت‌دار فازی نوع ۲ مشخص شده است که در توزیع لاپلاس عملکرد دو نمودار تقریباً مشابه بوده ولی در توزیع نرمال و یکنواخت عملکرد نمودار رتبه علامت‌دار در کشف تغییرات کوچک بهتر از نمودار علامت می‌باشد. استفاده از نمودار علامت فازی نوع ۲ می‌تواند کاربرد نمودارهای کنترلی را در کنترل فرایندهای غیر نرمال که با داده‌های مبهم همراه هستند مانند فرآیندهای خدماتی و مالی گسترش داده و باعث بهبود کنترل فرایند گردد.

تعارض منافع: نویسندگان اعلام می‌کنند که هیچگونه تعارض منافی وجود ندارد.

منابع

- [1] Faraz, A. (2011) Constructing the process of statistical-fuzzy control chart, *Journal of Operational Research in Its Applications*, Vol. 2(29), 45-54.
- [2] Senturk, S., Erginel, N. (2009) Development of fuzzy \bar{X} -R and \bar{X} -S control charts using α -cuts, *Information Science*, Vol. 179, 1542-1551.
- [3] Faraz, A., Shapiro, A.F. (2010) An application of fuzzy random variables to control charts, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 161(20), 2684-2694.
- [4] Pandurangan, C.A., Varadharajan, R. (2011) Construction of α -cut fuzzy \bar{X} -S and \bar{X} -R control charts using fuzzy trapezoidal number, *International Journal of Research and Reviews for Applied Sciences*, Vol. 9, 100-111
- [5] Moheb-Alizadeh, H., Fatemi Ghomi, S.M.T. (2011) Fuzzy development of Mean and Range control charts using statistical property of different representative values, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, Vol. 22(5-6), 253-265.
- [6] Shu, M.H., Wu, H.C. (2011) Fuzzy \bar{X} and R control charts: Fuzzy dominance approach,



همانطور که در شکل ۱۱ دیده می‌شود خطای نوع اول نمودار \bar{X} فازی در توزیع لاپلاس نسبت به توزیع نرمال افزایش و در توزیع یکنواخت نسبت به توزیع نرمال کاهش یافته است. همچنین احتمال کشف تغییرات در نمودار \bar{X} فازی نوع ۲ نیز در توزیع لاپلاس نسبت به توزیع نرمال افزایش و در توزیع یکنواخت نسبت به توزیع نرمال کاهش می‌یابد. برای مقایسه عملکرد نمودار پارامتری \bar{X} فازی نوع ۲ با نمودارهای ناپارامتری علامت و رتبه علامت‌دار فازی نوع ۲ و با توجه به شکل‌های ۸ تا ۱۱ می‌توان گفت در توزیع نرمال عملکرد نمودار \bar{X} فازی از نمودارهای علامت و رتبه علامت‌دار فازی بهتر است اما در توزیع یکنواخت احتمال خطای نوع دوم (عدم کشف تغییرات) و در توزیع لاپلاس احتمال خطای نوع اول در نمودارهای ناپارامتری علامت و رتبه علامت‌دار فازی نوع ۲ از نمودار پارامتری \bar{X} فازی نوع ۲ کمتر و در نتیجه عملکرد آنها بهتر می‌باشد.

۵. نتیجه‌گیری

با توجه به وجود ابهام و داده‌های غیردقیق در مشاهدات نمونه‌ای و گسترش استفاده از مجموعه‌های فازی نوع ۲ برای نشان دادن ابهام در داده‌ها لازم است که نمودارهای ناپارامتری نیز قابلیت استفاده از این نوع داده‌ها را داشته باشد. در این مقاله دو نمودار ناپارامتری علامت و رتبه علامت‌دار با استفاده از مجموعه‌های فازی نوع ۲ بازه‌ای توسعه داده شده و برای مقایسه مشاهدات فازی نمونه با میانگین فازی دو روش فازی‌زدائی و فاصله‌ای پیشنهاد شده است. برای ارزیابی عملکرد نمودارهای پیشنهادی از این نمودارها در کنترل مرکزیت فرآیند یک مسئله واقعی استفاده و کاربردی بودن و صحت عملکرد این نمودارها مشخص شده است. همچنین برای بررسی عملکرد نمودارهای علامت و رتبه علامت‌دار فازی نوع ۲، برنامه‌های شبیه‌سازی در نرم‌افزار MATLAB طراحی و با استفاده از آنها مقادیر متوسط طول دنباله (ARL) و انحراف معیار طول دنباله (SDRL) این نمودارها برای سه توزیع مختلف نرمال، یکنواخت و لاپلاس و دو روش فازی‌زدائی و فاصله‌ای محاسبه شده است. بررسی مقادیر SDRL محاسبه شده نشان

- [16] Kaya, İ., Erdoğan, M., Yıldız, C. (2017) Analysis and control of variability by using fuzzy individual control charts, *Applied Soft Computing*, Vol. 51, 370-381.
- [17] Nojavan, M., Mahjuby, S., Raissi, S., (2013) Developing the sign nonparametric control chart by fuzzy data, *Journal of Quality Engineering and Management*, Vol. 4(3), 229-238. (in Farsi)
- [18] Nojavan, M., Mahjuby, S., (2015) Developing the nonparametric signed rank control chart with fuzzy data, *Journal of Industrial Engineering Research in Production Systems*, Vol. 3(5), 1-11. (in Farsi)
- [19] Momeni, F., Shokri, S. (2019) Nonparametric Shewhart-type quality control charts in fuzzy environment, *International Journal of Applied Operational Research*, Vol. 9(3), 28-44.
- [20] Abbasi Ganji, Z., Sadeghpour Gildeh, B. (2020) On the non-parametric multivariate control charts in fuzzy environment, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, Vol. 17(1), 185-205.
- [21] Teksen, H.E., Anagün, A.S. (2018) Different methods to fuzzy $\bar{X} - R$ control charts used in production, *Journal of Enterprise Information Management*, Vol. 31(6), 848-866.
- [22] Kaya, I. (2019) Design of variable control charts under type-2 fuzzy sets, *11th Research/Expert Conference with International Participation "QUALITY 2019"*, Neum, B&H, June 14-16.
- [23] Kaya, I., Ilbahar, E., Karasan, A., Cebeci, B. (2020) Design of EWMA and CUSUM control charts based on type-2 fuzzy sets, *Conference Proceeding Science and Technology*, Vol. 3(1), 129-135.
- [24] Kaya, I., Turgut, A. (2021) Design of variable control charts based on type-2 fuzzy sets with a real case study, *Soft Computing*, Vol. 25, 613-633.
- [25] Mohd Razali, N.H., Abdullah, L., Salleh, Z., Termimi A.B., Ghani, A., Yap, B.W. (2021) Interval type-2 fuzzy standardized cumulative sum control charts in production of fertilizers, *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2021, 1-20.
- Computers & Industrial Engineering*, Vol. 61, 676-685.
- [7] Erginel, N., Şentürk, S., Kahraman, C., Kaya, I. (2011) Evaluating the packing process in food industry using fuzzy and control charts, *International Journal of Computational Intelligence Systems*, Vol. 4(4), 509-520.
- [8] Khademi, M., Amirzadeh, V. (2014) Fuzzy rules for fuzzy \bar{X} and R control charts, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, Vol. 11(5), 55-66.
- [9] Shu, M.H., Wu, H.C. (2011) Fuzzy \bar{X} and R control charts: Fuzzy dominance approach, *Computers and Industrial Engineering*, Vol. 61, 676-685.
- [10] Rashid, K.M.J., Haydar, S.S. (2015) Use fuzzy midrange transformation method to construction fuzzy control charts limits, *International Journal of Scientific and Statistical Computing*, Vol. 6(3), 1-14.
- [11] Zabihinpour, S.M., Ariffin, M.K.A., Tang, S.H., Azfanizam, A.S. (2015). Construction of fuzzy \bar{X} -S control charts with an unbiased estimation of standard deviation for a triangular fuzzy random variable, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, Vol. 28, 2735-2747.
- [12] Gildeh, B.S., Shafiee, N. (2015) X-MR control chart for auto correlated fuzzy data using $D_{p,q}$ distance, *International Journal Advance Manufacturing Technology*, Vol. 81, 1047-1054.
- [13] Gülbay, M., Kahraman, C. (2016) Intelligent process control using control charts-I: Control charts for variables, *Intelligent Decision Making in Quality Management*, Berlin: Springer-Verlag, 23-70.
- [14] Moraditadi, A., Avakhdarestani, S. (2016) Development of fuzzy individual X and moving range control chart, *International Journal Productivity and Quality Management*, Vol. 17(1), 82-103.
- [15] Shu, M.H., Dang, D.C., Nguyen, T.L., Hsu, B.M., Phan, N.S. (2017) Fuzzy \bar{X} and S control charts: A data-adaptability and human-acceptance approach, *Complexity*, Vol. 2017, 1-17.

- process with interval type 2 fuzzy sets, *Knowledge-Based Systems*, Vol. 59, 48–57.
- [29] Chen, T.Y. (2012) Multiple criteria group decision-making with generalized interval-valued fuzzy numbers based on signed distances and incomplete weights, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, 3029–3052.
- [30] Feng, Y. (2000) Gaussian fuzzy random variables, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 111, 325-330.
- [26] Adepoju, A.A., Abdulkadir, S.S., Jibasen, D., Chiroma, H. (2022) Interval Type-2 fuzzy Exponentially Weighted Moving Average Control Chart, *STATISTICS IN TRANSITION new series*, Vol. 23(1), 185–200
- [27] Mendel J.M., John, R.I.B. (2002) Type-2 fuzzy sets made simple, *IEEE Transaction Fuzzy System*, Vol. 10(2), 117–127.
- [28] Kahraman, C., Oztayşi, B., Sarı, İ.U., Turanoğlu, E. (2014) Fuzzy analytic hierarchy

Developing the Sign and Signed Rank Non-parametric Control Charts by Using Interval Type-2 Fuzzy Sets

Yeganeh Tofighzadeh

M.Sc. Student, Department of Industrial Engineering, Islamic Azad University, South Tehran Branch, Tehran, Iran (yeganehtofighzadeh@gmail.com)

Majid Nojavan

Assistant professor, Department of Industrial Engineering, Islamic Azad University, South Tehran Branch, Tehran, Iran (mnojavan@azad.ac.ir)

Abstract: Considering the high flexibility of type-2 fuzzy sets to represent uncertainty, their applications in different scopes included control charts are extended. In this paper, to control the centrality of non-normal and ambiguous processes, two non parametric control charts included sign and signed-rank charts have been developed using interval type-2 fuzzy sets. In the type-2 fuzzy sign chart and type-2 fuzzy signed-rank chart, the observations of each sample are compared with the centrality of the process in the control state, which for this purpose it used two different methods. To describe the applicability of the proposed charts, they are used in an example with real data and it is showed their correctness performance. Also, to evaluate the performance of type-2 fuzzy sign chart and type-2 fuzzy signed rank chart, simulation programs have been used in which type-2 fuzzy random variables with three different density functions are generated and in each distribution and both methods, the average run length (ARL) of the charts are calculated. The numerical results show the appropriate performance and applicability of the type-2 fuzzy sign chart and type-2 fuzzy signed-rank chart to control the centrality of non-normal fuzzy random variables.

Keywords: Non parametric Control Chart , Interval Type-2 Fuzzy Sets, Type-2 Fuzzy Sign Chart, Type-2 Fuzzy Signed Rank Chart.

1. Introduction

Type-2 fuzzy sets are very flexible to represent uncertainty and so their applications extended in different scopes. In this paper, to control the centrality of non-normal and ambiguous processes, two non-parametric control charts included sign and signed-rank charts have been developed using interval type-2 fuzzy sets.

2. Litreture review

The used concepts for the development of sign and signed rank charts by using interval type-2 fuzzy sets is described as follows:

2.1. The sign statistic

To centrality control, the sign statistic is calculated in the i th sample (size of n) as follows:

$$SN_i = \sum_{j=1}^n \text{sign}(x_{ij} - \mu_0) \quad (1)$$

Where in above equation, x_{ij} is j^{th} observation of i^{th} sample and μ_0 is process centrality in steady state. Also the sign shown the sign function.

2.2. The signed rank statistic

To centrality control, the signed rank statistic is calculated in the i^{th} sample as follows:

$$W_i = \sum_{j=1}^n \text{sign}(x_{ij} - \mu_0) R |x_{ij} - \mu_0| \quad (2)$$

In above equation, the R function shown the rank of $|x_{ij} - \mu_0|$.

2.3. Interval type-2 fuzzy sets

An interval type-2 fuzzy set for example A (figure 1) shown as follows:

$$A = \left\{ \begin{array}{l} (a_1^U, a_2^U, a_3^U, a_4^U; h_a^U) \\ (a_1^L, a_2^L, a_3^L, a_4^L; h_a^L) \end{array} \right\} \quad (3)$$

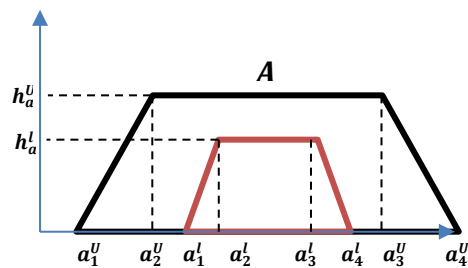


Figure 1- An example of intrval type-2 fuzzy sets

3. Development sign chrt and signed-rank chart using intrval type-2 fuzzy sets

To develop the sign chart and signed-rank chart with interval type-2 fuzzy sets, two methods are proposed included defuzzification and distance methods. These methods described as follows:

3.1. Defuzzification method

To calculate the sign and signed rank statistics must be type-2 fuzzy sets are compared together and in defuzzification method, type-2 fuzzy set (for example A) convert as crisp value by following equation [1].

$$a = \frac{1}{8} \left((a_1^U + h_a^U a_2^U + h_a^U a_3^U + a_4^U) + (a_1^L + h_a^L a_2^L + h_a^L a_3^L + a_4^L) \right) \quad (4)$$

3.2. Distance method

In this method to compair type-2 fuzzy sets, their distances from a positive and crisp large value (M) are calculated by following equation [2]:

$$d(A, M) = \frac{1}{8} \left| (a_1^l + a_2^l + a_3^l + a_4^l) + (4a_1^u + 2a_2^u + 2a_3^u + 4a_4^u) - 3 \left(\frac{h_a^l}{h_a^u} \right) (a_1^u - a_2^u - a_3^u + a_4^u) - 16m \right| \tag{5}$$

4. Descriptive example

In a company to control the centrality and dispersion of the width of female pins in the production terminal blocks (X), is used type-2 fuzzy \bar{X} and S control chart [3]. To determine the limits of these charts, the number m=25 samples of size n=6 from the process have been selected and the values of observations for each sample are determined as "approximation a" and then these values are converted to type-2 fuzzy sets.

In the sign chart and signed rank chart, the observations of each sample compare with centrality of process in steady state. in this paper to estimate the centrality of process, the \bar{X} statistic used and then the values of the sign statistic and signed rank statistic calculated in defuzzification and distance methods for each sample. The sample observations and the values of sign and signed rank statistics are shown in table 1.

The figure 3 and figure 4 shown type-2 fuzzy sign chart and type-2 fuzzy signed rank chart for described example respectively. As can be seen in both charts, all samples are under control. This results are similar with results from type-2 fuzzy \bar{X} control chart.

Table 1. The samples, sign and signed rank statistics in defuzzification and distance methods

Sample number.	Sample observations						Distance Method						Defuzzification Method									
	X ₁₁	X ₁₂	X ₁₃	X ₁₄	X ₁₅	X ₁₆	d ^l (X ₁₁) - d ^l (X ₁₂)	d ^l (X ₁₁) - d ^l (X ₁₃)	d ^l (X ₁₁) - d ^l (X ₁₄)	d ^l (X ₁₁) - d ^l (X ₁₅)	d ^l (X ₁₁) - d ^l (X ₁₆)	S <i>N</i> _i	W _i	Def ^l (X ₁₁ - μ ₀)	Def ^l (X ₁₂ - μ ₀)	Def ^l (X ₁₃ - μ ₀)	Def ^l (X ₁₄ - μ ₀)	Def ^l (X ₁₅ - μ ₀)	Def ^l (X ₁₆ - μ ₀)	S <i>N</i> _i	W _i	
1	0.6	0.6	0.7	0.6	0.6	0.7	-0.03	-0.03	0.07	-0.03	-0.03	0.07	-2	1	-0.06	-0.06	0.14	-0.06	-0.06	0.14	-2	1
2	0.5	0.6	0.5	0.6	0.7	0.5	-0.12	-0.03	-0.12	-0.03	0.07	-0.12	-4	-15	-0.26	-0.06	-0.26	-0.06	0.14	-0.26	-4	-15
3	0.8	0.6	0.7	0.7	0.7	0.7	0.16	-0.03	0.07	0.07	0.07	0.07	4	19	0.34	-0.06	0.14	0.14	0.14	0.14	4	19
4	0.6	0.6	0.5	0.6	0.7	0.5	-0.03	-0.03	-0.12	-0.03	0.07	-0.12	-4	-13	-0.06	-0.06	-0.26	-0.06	0.14	-0.26	-4	-13
5	0.7	0.6	0.5	0.6	0.6	0.5	0.07	-0.03	-0.12	-0.03	-0.03	-0.12	-4	-13	0.14	-0.06	-0.26	-0.06	-0.06	-0.26	-4	-13
6	0.7	0.8	0.7	0.7	0.6	0.6	0.07	0.16	0.07	0.07	-0.03	-0.03	2	15	0.14	0.34	0.14	0.14	-0.06	-0.06	2	15
7	0.6	0.7	0.7	0.6	0.6	0.6	-0.03	0.07	0.07	-0.03	-0.03	-0.03	-2	1	-0.06	0.14	0.14	-0.06	-0.06	-0.06	-2	1
8	0.6	0.7	0.7	0.7	0.6	0.6	-0.03	0.07	0.07	0.07	-0.03	-0.03	0	9	-0.06	0.14	0.14	0.14	-0.06	-0.06	0	9
9	0.6	0.7	0.7	0.6	0.6	0.6	-0.03	0.07	0.07	-0.03	-0.03	-0.03	-2	1	-0.06	0.14	0.14	-0.06	-0.06	-0.06	-2	1
10	0.7	0.7	0.7	0.6	0.6	0.6	0.07	0.07	0.07	-0.03	-0.03	-0.03	0	9	0.14	0.14	0.14	-0.06	-0.06	-0.06	0	9
11	0.6	0.6	0.7	0.6	0.7	0.5	-0.03	-0.03	0.07	-0.03	0.07	-0.12	-2	-3	-0.06	-0.06	0.14	-0.06	0.14	-0.26	-2	-3
12	0.6	0.6	0.6	0.5	0.6	0.7	-0.03	-0.03	-0.03	-0.12	-0.03	0.07	-4	-11	-0.06	-0.06	-0.06	-0.26	-0.06	0.14	-4	-11
13	0.6	0.6	0.6	0.7	0.6	0.5	-0.03	-0.03	-0.03	0.07	-0.03	-0.12	-4	-11	-0.06	-0.06	-0.06	0.14	-0.06	-0.26	-4	-11
14	0.6	0.6	0.7	0.7	0.7	0.7	-0.03	-0.03	0.07	0.07	0.07	0.07	2	15	-0.06	-0.06	0.14	0.14	0.14	0.14	2	15
15	0.6	0.6	0.7	0.6	0.6	0.5	-0.03	-0.03	0.07	-0.03	-0.03	-0.12	-4	-11	-0.06	-0.06	0.14	-0.06	-0.06	-0.26	-4	-11
16	0.6	0.7	0.7	0.7	0.6	0.6	-0.03	0.07	0.07	0.07	-0.03	-0.03	0	9	-0.06	0.14	0.14	0.14	-0.06	-0.06	0	9
17	0.7	0.6	0.6	0.7	0.6	0.6	0.07	-0.03	-0.03	0.07	-0.03	-0.03	-2	1	0.14	-0.06	-0.06	0.14	-0.06	-0.06	-2	1
18	0.6	0.7	0.6	0.6	0.7	0.7	-0.03	0.07	-0.03	-0.03	0.07	0.07	0	9	-0.06	0.14	-0.06	-0.06	0.14	0.14	0	9
19	0.6	0.6	0.7	0.6	0.5	0.6	-0.03	-0.03	0.07	-0.03	-0.12	-0.03	-4	-11	-0.06	-0.06	0.14	-0.06	-0.26	-0.06	-4	-11
20	0.7	0.6	0.5	0.6	0.6	0.5	0.07	-0.03	-0.12	-0.03	-0.03	-0.12	-4	-13	0.14	-0.06	-0.26	-0.06	-0.06	-0.26	-4	-13
21	0.7	0.5	0.6	0.7	0.6	0.7	0.07	-0.12	-0.03	0.07	-0.03	0.07	0	3	0.14	-0.26	-0.06	0.14	-0.06	0.14	0	3
22	0.6	0.6	0.7	0.6	0.7	0.7	-0.03	-0.03	0.07	-0.03	0.07	0.07	0	9	-0.06	-0.06	0.14	-0.06	0.14	0.14	0	9
23	0.7	0.6	0.7	0.6	0.5	0.5	0.07	-0.03	0.07	-0.03	-0.12	-0.12	-2	-7	0.14	-0.06	0.14	-0.06	-0.26	-0.26	-2	-7
24	0.7	0.7	0.6	0.6	0.6	0.7	0.07	0.07	-0.03	-0.03	-0.03	0.07	0	9	0.14	0.14	-0.06	-0.06	-0.06	0.14	0	9
25	0.7	0.6	0.7	0.6	0.7	0.7	0.07	-0.03	0.07	-0.03	0.07	0.07	2	15	0.14	-0.06	0.14	-0.06	0.14	0.14	2	15

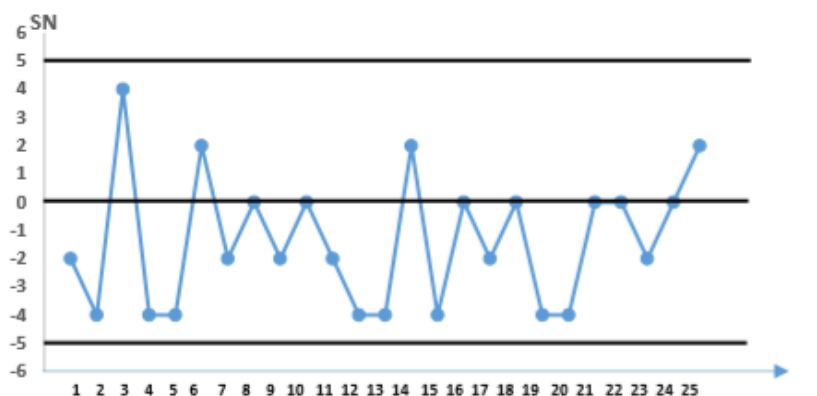


Figure 2. Type-2 fuzzy sign chart for described example

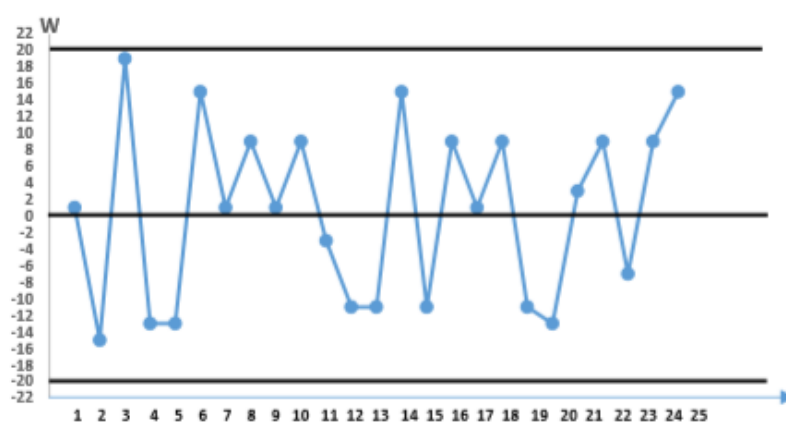


Figure 3. Type-2 fuzzy signed rank chart for described example

5. Performance evaluation for type-2 fuzzy sign chart and type-2 fuzzy signed-rank chart

The performance of type-2 fuzzy sign chart and type-2 fuzzy signed rank chart in defuzzification and distance methods are calculated by simulation programs in MATLAB software. The characteristics of normal, uniform and Laplace distributions in simulation programs is shown in table 2.

Table 2. Parameters of normal, uniform and Laplace distributions in simulation programs

Distribution	Uniform	Normal	Laplace
Density function	$\frac{1}{\beta - \alpha}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{ x-\theta }{\lambda}}$
Parameters values	$\beta = \sqrt{3}, \alpha = -\sqrt{3}$	$\mu = 0, \sigma = 1$	$\theta = 0, \lambda = 1/\sqrt{2}$

Also the Characteristics of sign chart and signed rank chart in simulation programs are as follows:

Sign Chart (n=10, UCL=9, LCL=-9, t_{max}=10000, ALR₀ ≈ 512)

Signed rank chart (n=10, UCL=53, LCL=-53, t_{max}=10000, ALR₀ ≈ 512)

The performance of type-2 fuzzy sign control chart is shown in table 3.

Table 3. The ARL and SDRL for type-2 fuzzy sign chart

method	dist.	k																
			0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.5	3.0			
Defuzzification	Uniform	ARL	510.08	313.02	126.77	52.14	23.13	10.85	5.30	2.73	1.48	1.00	1.00	1.00	1.00			
		SDRL	507.15	312.01	127.12	51.63	22.74	10.24	4.76	2.17	0.84	0	0	0	0			
	Normal	ARL	518.70	225.78	68.23	24.86	10.85	5.65	3.41	2.35	1.77	1.44	1.26	1.07	1.01			
		SDRL	515.91	230.00	67.74	24.19	10.27	5.15	2.84	1.81	1.14	0.81	0.58	0.27	0.11			
	Laplace	ARL	507.80	187.25	59.91	24.65	12.74	7.51	5.16	3.32	2.88	2.35	2.00	1.54	1.29			
		SDRL	502.13	189.48	59.30	24.08	12.33	6.97	4.59	3.19	2.31	1.79	1.42	0.90	0.61			
Distance	Uniform	ARL	503.97	313.34	125.51	52.22	23.28	10.83	5.37	2.75	1.46	1.00	1.00	1.00	1.00			
		SDRL	505.17	314.78	124.03	52.84	22.95	10.38	4.94	2.17	0.82	0	0	0	0			
	Normal	ARL	518.26	229.20	68.87	24.61	10.90	5.58	3.44	2.30	1.74	1.43	1.26	1.07	1.01			
		SDRL	523.04	231.72	68.73	24.49	10.31	5.10	2.94	1.71	1.15	0.78	0.58	0.27	0.11			
	Laplace	ARL	509.24	187.32	59.20	24.74	12.69	7.66	5.12	3.73	2.89	2.33	2.03	1.52	1.29			
		SDRL	505.54	186.76	57.75	24.61	12.23	7.19	4.57	3.24	2.33	1.79	1.43	0.90	0.61			

The Average run length (ARL) values of Type-2 fuzzy sign chart in different distributions for defuzzification and distance methods are shown in figure 4 and figure 5 respectively.

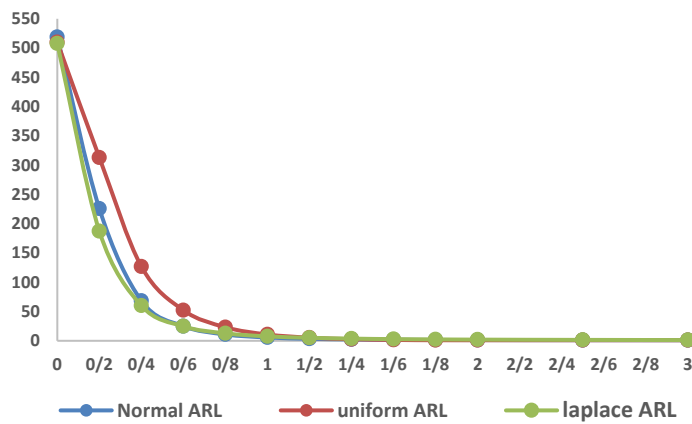


Figure 4. The ARLs values for type-2 fuzzy sign chart in three distributions (Defuzzification method)

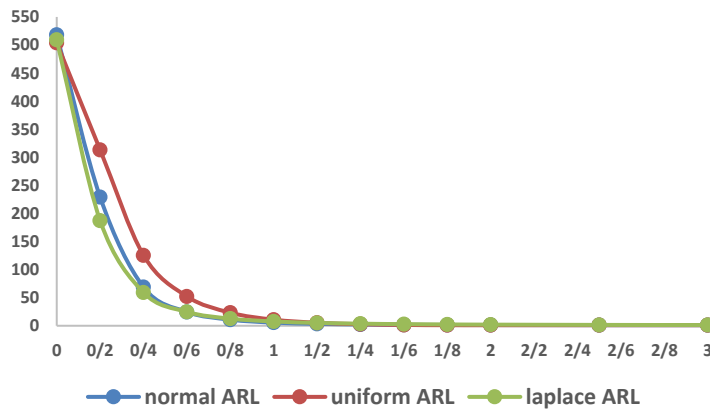


Figure 5. The ARLs values for type-2 fuzzy sign chart in three distributions (Distance method)

According to the above figures, it is clear that in both defuzzification and distance methods, the probability of detecting small changes increases in uniform, normal and Laplace distributions, respectively.

Also the performance of type-2 fuzzy signed rank control chart is shown in table 4.

Table 4. The ARL and SDRL for type-2 fuzzy signed rank control chart

method	Dist.	k	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.5	3.0																																																																																																																																																																																																																																																																															
			<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2" rowspan="2">Defuzzification</th> <th rowspan="2">k</th> <th>0</th> <th>0.2</th> <th>0.4</th> <th>0.6</th> <th>0.8</th> <th>1.0</th> <th>1.2</th> <th>1.4</th> <th>1.6</th> <th>1.8</th> <th>2.0</th> <th>2.5</th> <th>3.0</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>ARL</td> <td>512.65</td> <td>314.62</td> <td>128.01</td> <td>52.66</td> <td>33.35</td> <td>10.75</td> <td>5.29</td> <td>2.73</td> <td>1.47</td> <td>1.00</td> <td>1.00</td> <td>1.00</td> <td>1.00</td> <td>1.00</td> </tr> <tr> <td>SDRL</td> <td>507.36</td> <td>318.08</td> <td>127.21</td> <td>51.46</td> <td>22.96</td> <td>10.08</td> <td>4.81</td> <td>2.18</td> <td>0.81</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <th colspan="2" rowspan="2">Normal</th> <th rowspan="2">k</th> <th>0</th> <th>0.2</th> <th>0.4</th> <th>0.6</th> <th>0.8</th> <th>1.0</th> <th>1.2</th> <th>1.4</th> <th>1.6</th> <th>1.8</th> <th>2.0</th> <th>2.5</th> <th>3.0</th> </tr> <tr> <td>ARL</td> <td>505.36</td> <td>228.59</td> <td>68.58</td> <td>24.99</td> <td>10.84</td> <td>5.59</td> <td>3.44</td> <td>2.33</td> <td>1.77</td> <td>1.44</td> <td>1.25</td> <td>1.06</td> <td>1.01</td> </tr> <tr> <td>SDRL</td> <td>508.08</td> <td>224.87</td> <td>68.14</td> <td>24.17</td> <td>10.33</td> <td>5.09</td> <td>2.90</td> <td>1.74</td> <td>1.17</td> <td>0.80</td> <td>0.56</td> <td>0.25</td> <td>0.12</td> <td></td> </tr> <tr> <th colspan="2" rowspan="2">Laplace</th> <th rowspan="2">k</th> <th>0</th> <th>0.2</th> <th>0.4</th> <th>0.6</th> <th>0.8</th> <th>1.0</th> <th>1.2</th> <th>1.4</th> <th>1.6</th> <th>1.8</th> <th>2.0</th> <th>2.5</th> <th>3.0</th> </tr> <tr> <td>ARL</td> <td>518.30</td> <td>188.28</td> <td>58.74</td> <td>24.82</td> <td>12.57</td> <td>7.57</td> <td>5.10</td> <td>3.76</td> <td>2.94</td> <td>2.39</td> <td>2.02</td> <td>1.51</td> <td>1.30</td> </tr> <tr> <td>SDRL</td> <td>526.35</td> <td>188.76</td> <td>57.16</td> <td>23.97</td> <td>11.94</td> <td>7.16</td> <td>4.58</td> <td>3.32</td> <td>2.44</td> <td>1.81</td> <td>1.45</td> <td>0.88</td> <td>0.61</td> <td></td> </tr> <tr> <th colspan="2" rowspan="2">Distance</th> <th rowspan="2">k</th> <th>0</th> <th>0.2</th> <th>0.4</th> <th>0.6</th> <th>0.8</th> <th>1.0</th> <th>1.2</th> <th>1.4</th> <th>1.6</th> <th>1.8</th> <th>2.0</th> <th>2.5</th> <th>3.0</th> </tr> <tr> <td>ARL</td> <td>515.56</td> <td>312.28</td> <td>127.17</td> <td>51.74</td> <td>23.02</td> <td>10.80</td> <td>5.25</td> <td>2.70</td> <td>1.47</td> <td>1.00</td> <td>1.00</td> <td>1.00</td> <td>1.00</td> </tr> <tr> <td>SDRL</td> <td>515.91</td> <td>312.28</td> <td>125.28</td> <td>51.61</td> <td>22.22</td> <td>10.38</td> <td>4.72</td> <td>2.12</td> <td>0.83</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td></td> </tr> <tr> <th colspan="2" rowspan="2">Normal</th> <th rowspan="2">k</th> <th>0</th> <th>0.2</th> <th>0.4</th> <th>0.6</th> <th>0.8</th> <th>1.0</th> <th>1.2</th> <th>1.4</th> <th>1.6</th> <th>1.8</th> <th>2.0</th> <th>2.5</th> <th>3.0</th> </tr> <tr> <td>ARL</td> <td>511.31</td> <td>188.36</td> <td>59.38</td> <td>24.66</td> <td>12.65</td> <td>7.72</td> <td>5.09</td> <td>3.72</td> <td>2.92</td> <td>2.38</td> <td>2.00</td> <td>1.52</td> <td>1.29</td> </tr> <tr> <td>SDRL</td> <td>510.57</td> <td>188.32</td> <td>58.83</td> <td>24.44</td> <td>12.06</td> <td>7.23</td> <td>4.53</td> <td>3.16</td> <td>2.37</td> <td>1.83</td> <td>1.45</td> <td>0.89</td> <td>0.61</td> <td></td> </tr> <tr> <th colspan="2" rowspan="2">Laplace</th> <th rowspan="2">k</th> <th>0</th> <th>0.2</th> <th>0.4</th> <th>0.6</th> <th>0.8</th> <th>1.0</th> <th>1.2</th> <th>1.4</th> <th>1.6</th> <th>1.8</th> <th>2.0</th> <th>2.5</th> <th>3.0</th> </tr> <tr> <td>ARL</td> <td>520.72</td> <td>185.89</td> <td>57.47</td> <td>24.61</td> <td>12.61</td> <td>7.70</td> <td>5.10</td> <td>3.74</td> <td>2.93</td> <td>2.38</td> <td>2.03</td> <td>1.52</td> <td>1.29</td> </tr> <tr> <td>SDRL</td> <td>520.41</td> <td>184.71</td> <td>56.14</td> <td>23.95</td> <td>12.00</td> <td>7.22</td> <td>4.55</td> <td>3.14</td> <td>2.41</td> <td>1.80</td> <td>1.44</td> <td>0.88</td> <td>0.61</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>																Defuzzification		k	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.5	3.0	ARL	512.65	314.62	128.01	52.66	33.35	10.75	5.29	2.73	1.47	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	SDRL	507.36	318.08	127.21	51.46	22.96	10.08	4.81	2.18	0.81	0	0	0	0	0	Normal		k	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.5	3.0	ARL	505.36	228.59	68.58	24.99	10.84	5.59	3.44	2.33	1.77	1.44	1.25	1.06	1.01	SDRL	508.08	224.87	68.14	24.17	10.33	5.09	2.90	1.74	1.17	0.80	0.56	0.25	0.12		Laplace		k	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.5	3.0	ARL	518.30	188.28	58.74	24.82	12.57	7.57	5.10	3.76	2.94	2.39	2.02	1.51	1.30	SDRL	526.35	188.76	57.16	23.97	11.94	7.16	4.58	3.32	2.44	1.81	1.45	0.88	0.61		Distance		k	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.5	3.0	ARL	515.56	312.28	127.17	51.74	23.02	10.80	5.25	2.70	1.47	1.00	1.00	1.00	1.00	SDRL	515.91	312.28	125.28	51.61	22.22	10.38	4.72	2.12	0.83	0	0	0	0		Normal		k	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.5	3.0	ARL	511.31	188.36	59.38	24.66	12.65	7.72	5.09	3.72	2.92	2.38	2.00	1.52	1.29	SDRL	510.57	188.32	58.83	24.44	12.06	7.23	4.53	3.16	2.37	1.83	1.45	0.89	0.61		Laplace		k	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.5	3.0	ARL	520.72	185.89	57.47	24.61	12.61	7.70	5.10	3.74	2.93	2.38	2.03	1.52	1.29	SDRL	520.41	184.71	56.14	23.95	12.00	7.22	4.55	3.14	2.41	1.80	1.44
Defuzzification		k	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.5	3.0																																																																																																																																																																																																																																																																															
			ARL	512.65	314.62	128.01	52.66	33.35	10.75	5.29	2.73	1.47	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00																																																																																																																																																																																																																																																																													
SDRL	507.36	318.08	127.21	51.46	22.96	10.08	4.81	2.18	0.81	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																
Normal		k	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.5	3.0																																																																																																																																																																																																																																																																															
			ARL	505.36	228.59	68.58	24.99	10.84	5.59	3.44	2.33	1.77	1.44	1.25	1.06	1.01																																																																																																																																																																																																																																																																														
SDRL	508.08	224.87	68.14	24.17	10.33	5.09	2.90	1.74	1.17	0.80	0.56	0.25	0.12																																																																																																																																																																																																																																																																																	
Laplace		k	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.5	3.0																																																																																																																																																																																																																																																																															
			ARL	518.30	188.28	58.74	24.82	12.57	7.57	5.10	3.76	2.94	2.39	2.02	1.51	1.30																																																																																																																																																																																																																																																																														
SDRL	526.35	188.76	57.16	23.97	11.94	7.16	4.58	3.32	2.44	1.81	1.45	0.88	0.61																																																																																																																																																																																																																																																																																	
Distance		k	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.5	3.0																																																																																																																																																																																																																																																																															
			ARL	515.56	312.28	127.17	51.74	23.02	10.80	5.25	2.70	1.47	1.00	1.00	1.00	1.00																																																																																																																																																																																																																																																																														
SDRL	515.91	312.28	125.28	51.61	22.22	10.38	4.72	2.12	0.83	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																	
Normal		k	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.5	3.0																																																																																																																																																																																																																																																																															
			ARL	511.31	188.36	59.38	24.66	12.65	7.72	5.09	3.72	2.92	2.38	2.00	1.52	1.29																																																																																																																																																																																																																																																																														
SDRL	510.57	188.32	58.83	24.44	12.06	7.23	4.53	3.16	2.37	1.83	1.45	0.89	0.61																																																																																																																																																																																																																																																																																	
Laplace		k	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.5	3.0																																																																																																																																																																																																																																																																															
			ARL	520.72	185.89	57.47	24.61	12.61	7.70	5.10	3.74	2.93	2.38	2.03	1.52	1.29																																																																																																																																																																																																																																																																														
SDRL	520.41	184.71	56.14	23.95	12.00	7.22	4.55	3.14	2.41	1.80	1.44	0.88	0.61																																																																																																																																																																																																																																																																																	

The ARLs values of Type-2 fuzzy signed rank chart in different distributions for defuzzification and distance methods are shown in figure 6 and figure 7 respectively.

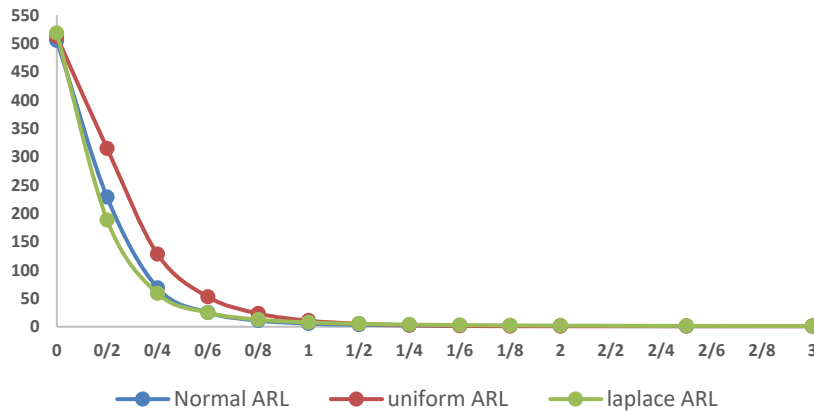


Figure 6. The ARLs values for type-2 fuzzy signed rank chart in three distributions (Defuzzification method)

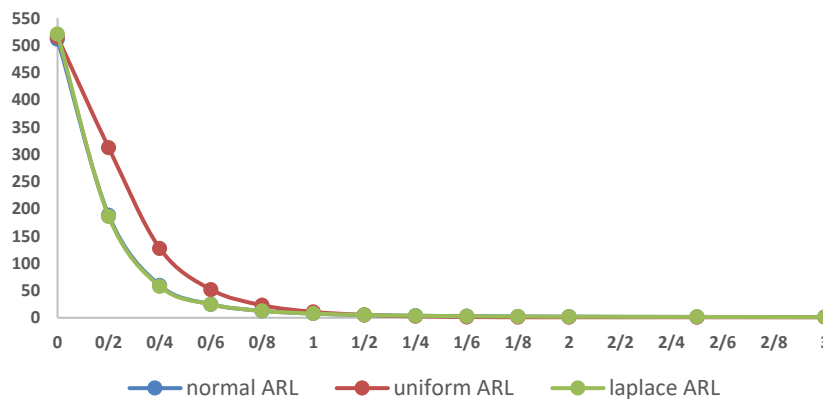


Figure 7. The ARLs values for type-2 fuzzy signed rank chart in three distributions (Distance method)

According to the above figures, it is clear that in both defuzzification and distance methods, the probability of detecting small changes increases in uniform, normal and Laplace distributions, respectively.

Also the performance of Type-2 fuzzy sign and Type-2 fuzzy signed rank control charts are compared for normal, uniform and Laplace distributions and are shown in figure 8, 9 and 10 respectively.

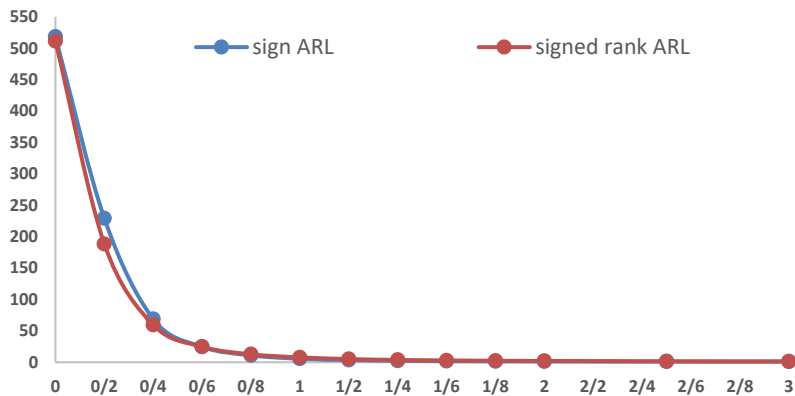


Figure 8. Performance comparing for type-2 fuzzy sign chart and type-2 fuzzy signed rank chart (Normal distribution)

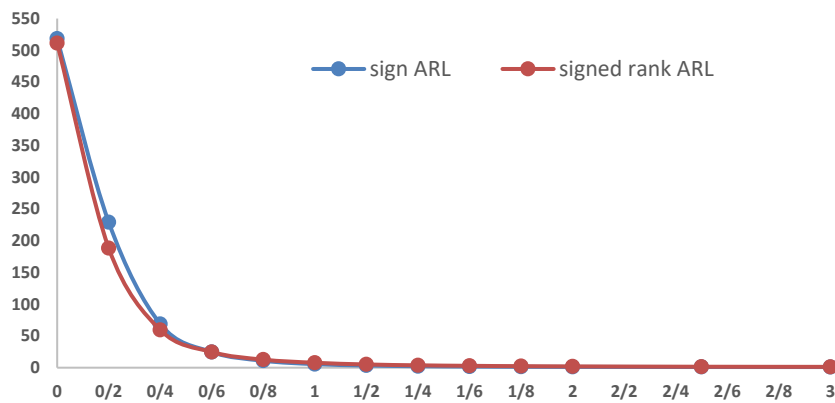


Figure 9. Performance comparing for type-2 fuzzy sign chart and type-2 fuzzy signed rank chart (Uniform distribution)

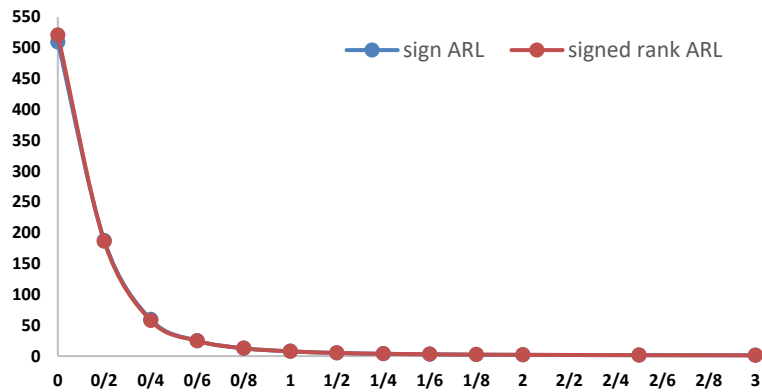


Figure 10. Performance comparing for type-2 fuzzy sign chart and type-2 fuzzy signed rank chart (Laplace distribution)

According the above figures, the performance of sign chart and signed rank charts with type-2 fuzzy sets in detecting changes in the Laplace distribution are similar, but

in the normal and uniform distributions in detecting small changes, the performance of signed rank chart is better than the sign chart.

Finally, the performance of type-2 fuzzy \bar{X} parametric control chart in different distributions is shown in figure 11.

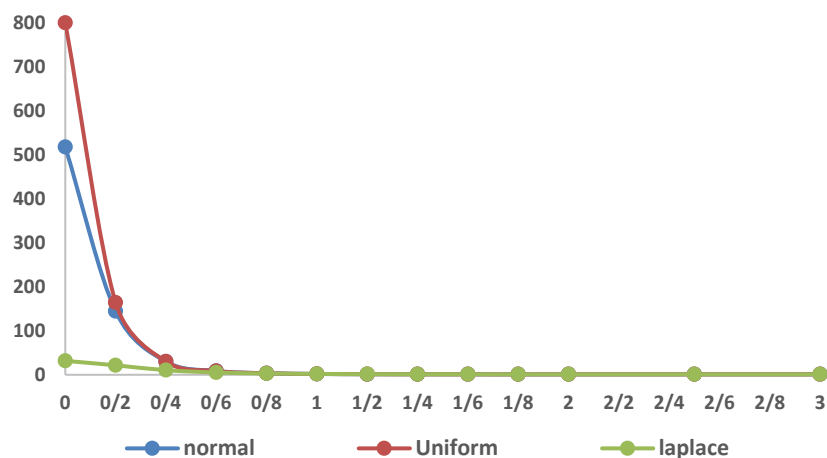


Figure 11. The Performance of type-2 fuzzy X-bar chart in different distributions

According figure 11, the probability of type-1 error for fuzzy \bar{X} chart increases in the Laplace distribution compared to the normal distribution and it decreases in the uniform distribution compared to the normal distribution. Also, the probability of type-2 error for fuzzy \bar{X} chart decreases in Laplace distribution compared to normal distribution and it increase in uniform distribution compared to normal distribution.

To compare the performance of type-2 fuzzy \bar{X} chart with the sign and signed rank charts with type-2 fuzzy sets and according figures 8-11, it can see that in the normal distribution, changes detecting of \bar{X} chart is better from non-parametric charts. Also sign and signed rank charts have the smaller probability of type-1 error in Laplace distribution and they have the smaller probability of type-2 error in uniform distribution.

6. Conclusion

In this paper two nonparametric control charts included sign and signed-rank charts have been developed using interval type-2 fuzzy sets. In the type-2 fuzzy sign chart and type-2 fuzzy signed-rank chart, the observations of a sample are compared with the centrality of the process in the control state which for this purpose it used two methods included defuzzification and distance methods. The proposed charts are used to control centrality in a real problem and it is shown their applicability and performance correctness. Also, to evaluate the performance of type-2 fuzzy sign and type-2 fuzzy signed-rank charts, simulation programs have been designed in MATLAB software which in these programs are generated type-2 fuzzy random variables with normal, uniform and Laplace distributions. Using simulation programs, the average run length (ARL) and standard deviation run length (SDRL) for the proposed charts calculated in each distribution and both defuzzification and distance methods. Numerical results show, the performance of sign chart and signed rank charts with type-2 fuzzy sets in detecting changes in the Laplace distribution are similar, but in the normal and uniform distributions in detecting small changes, the

performance of signed rank chart is better than the sign chart. Due to the appropriate performance of type-2 fuzzy sign chart and type-2 fuzzy signed rank chart to control the centrality of non-normal and ambiguous variables, their use improves the quality of process.

References

- [1] Kahraman, C., Oztayşi, B., Sarı, İ.U., Turanoğlu, E. (2014) Fuzzy analytic hierarchy process with interval type 2 fuzzy sets, *Knowledge-Based Systems*, Vol. 59, 48–57.
- [2] Chen, T.Y. (2012) Multiple criteria group decision-making with generalized interval-valued fuzzy numbers based on signed distances and incomplete weights, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, 3029–3052.
- [3] Kaya, I., Turgut, A. (2021) Design of variable control charts based on type-2 fuzzy sets with a real case study, [Soft Computing](#), Vol. 25, 613–633.