

نمودار کنترلی علامت GWMA تحت نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای برای پایش پارامتر مکان فرایند

مهتاب نظری

دانشجوی ارشد، گروه آمار دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران. mahtabnazari1373@gmail.com

محمد بامنی‌مقدم*

نویسنده مسئول، استاد تمام، گروه آمار دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران. bamenimoghadam@atu.ac.ir

سید رحمت شجاعی

دانشجوی دکتری، گروه آمار دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران. r_shojaei@atu.ac.ir

چکیده: نمودارهای کنترلی به صورت گسترده‌ای در شناسایی تغییرات فرایند تولید مورد استفاده قرار می‌گیرند و زمانی که شناسایی تغییرات کوچک در فرایند، مد نظر باشد، نمودارهای کنترلی غیرشوهارته‌ای مانند میانگین متحرک موزون نمایی (EWMA) و میانگین متحرک موزون تعمیم‌یافته (GWMA) جایگزین بهتری برای نمودارهای کنترلی شوهارته‌ای مانند \bar{X} هستند. نمودار کنترلی GWMA حساسیت بیشتری در شناسایی انتقال‌های کوچک در پارامتر مکان فرایند نسبت به نمودارهای کنترلی EWMA و \bar{X} دارد. نمودارهای کنترلی ناپارامتری در مواقعی که توزیع مشخصه‌ی کیفیت فرایند نامعلوم است، مورد استفاده قرار می‌گیرند و نمودار کنترلی علامت یکی از معروف‌ترین نمودارهای کنترلی ناپارامتری است که به علت سهولت در کاربرد و عدم محاسبات عددی پیچیده به‌طور گسترده‌ای کاربرد دارد. در این مقاله، برای اولین بار نمودار کنترلی علامت میانگین متحرک موزون تعمیم‌یافته با استفاده از طرح نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای معرفی شده است. عملکرد نمودار کنترلی پیشنهادی با استفاده از داده‌های شبیه‌سازی شده بر حسب معیار ارزیابی متوسط طول اجرا در نرم‌افزار Julia بررسی شده است و مطالعات شبیه‌سازی نشان می‌دهند که به واسطه تغییرات پارامتر تنظیمی α ، نمودار کنترلی $GWMA_{S_{RSS}}^+$ نسبت به نمودار کنترلی $EWMA_{S_{RSS}}^+$ در کشف تغییرات کوچک فرایند حساس‌تر است، همچنین نمودار کنترلی $GWMA_{S_{RSS}}^+$ نسبت به نمودارهای کنترلی $GWMA_{S_{SRS}}^+$ و $DGWM_{S_{SRS}}^+$ در شناسایی تغییرات کوچک فرایند کارا تر و حساس‌تر است که نشان‌دهنده‌ی مزیت طرح RSS نسبت به طرح SRS است. علاوه بر این، ثابت شد که افزایش k و تعداد چرخه‌ها و مقادیر بزرگ q باعث کاهش ARL_1 و افزایش توان نمودار کنترلی در شناسایی تغییرات فرایند می‌شود.

واژگان کلیدی: نمودار کنترلی علامت میانگین متحرک موزون تعمیم‌یافته، نمودار کنترلی علامت میانگین متحرک موزون نمایی، نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای، نمودار کنترلی ناپارامتری، پارامتر مکان.

۱- مقدمه

نمودارهای کنترلی یکی از مهم‌ترین آن‌ها هستند. از جمله مزیت‌های استفاده از نمودارهای کنترلی، جلوگیری از تنظیم‌های غیر ضروری فرایند است که بهبود کارایی فرایند را به دنبال دارد. والتر شوهارت [۱] برای اولین بار نمودار کنترلی \bar{X} را معرفی کرد. رابرتز [۲] برای شناسایی تغییرات کوچک در فرایند، نمودار کنترلی باحافظه‌ای با نام میانگین متحرک موزون نمایی (EWMA²) را معرفی نمود که در شناسایی تغییرات کوچک در میانگین فرایند کارایی خوبی دارد. اگر یک نمونه‌ی تصادفی مانند $X_1, X_2, X_3, \dots, X_t$ از جامعه‌ای با میانگین μ و واریانس σ^2

در دنیای امروز، همزمان با گسترش فناوری اطلاعات و وابستگی روزافزون جامعه بشری به آن، رابطه کیفیت خدمات یا محصول‌های تولیدی با رفاه بشری، روز به روز گسترش یافته و به قدری ضروری شده که توسعه مفهوم کیفیت برای ارزیابی، ایجاد، کنترل، بهبود و حفظ کیفیت اجتناب‌ناپذیر گشته است. برای ارتقاء کیفیت محصول‌های تولیدی یک فرایند، ابزارهای مختلفی در کنترل فرایند آماری (SPC¹) وجود دارد که

*Corresponding autho: bamenimoghadam@atu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۲/۰۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۲/۲۴

1. Statistical Process Control

دوره ۱۲/ شماره ۴

2. Exponentially Weighted Moving Average

صفحات ۳۸۵-۴۱۱

وزن آخرین نمونه باشد و با افزایش سن نمونه‌ها از وزن آن‌ها کاسته شود، با فرض این که داشته باشیم:

$$(\bar{P}_0 - \bar{P}_1) > (\bar{P}_1 - \bar{P}_2) > \dots > \bar{P}_{t-1} - \bar{P}_t$$

آن‌گاه بیش‌ترین وزن به آخرین نمونه‌ی مشاهده شده و کم‌ترین وزن به اولین نمونه‌ی مشاهده شده تعلق می‌گیرد. اگر $X_1, X_2, X_3, \dots, X_t$ یک نمونه‌ی تصادفی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، میانگین متحرک موزون تعمیم‌یافته به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} GWMA_t &= P(M=1)X_t + P(M=2)X_{t-1} + \dots \\ &\quad + P(M=t)X_1 \\ &\quad + P(M>t)GWMA_0 \rightarrow \\ GWMA_t &= (\bar{P}_0 - \bar{P}_1)X_t + (\bar{P}_1 - \bar{P}_2)X_{t-1} + \dots + \\ &\quad (\bar{P}_{t-1} - \bar{P}_t)X_1 + \bar{P}_t GWMA_0 \end{aligned} \quad (۳)$$

$GWMA_0$ نمایان‌گر مقدار اولیه برای $GWMA_t$ است و برابر با مقدار میانگین نمونه‌ی تصادفی در نظر گرفته می‌شود. به منظور محاسبه‌ی آسان، اگر فرض شود که $\bar{P}_t = q^{t\alpha}$ باشد که در آن q پارامتر طرح و مقدار ثابتی در بازه‌ی $(0, 1)$ و α پارامتر تنظیمی است که توسط متخصص تعیین می‌شود، آن‌گاه آماره $GWMA_t$ در رابطه‌ی (۳) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$GWMA_t = \sum_{i=1}^t (q^{(i-1)\alpha} - q^{i\alpha}) X_{t-i+1} + q^{t\alpha} \mu \quad (۴)$$

$$t = 1, 2, 3, \dots \quad 0 \leq q < 1 \quad 0 < \alpha \leq 1$$

با جایگذاری $\alpha = 1$ و $q = 1 - \lambda$ در رابطه‌ی (۴) خواهیم دید که آماره‌ی $GWMA_t$ معادل با آماره‌ی $EWMA_t$ در رابطه‌ی (۲) است. همچنین اگر مقدار پارامتر λ در نمودار کنترلی EWMA دقیقاً برابر یک باشد، عملکرد نمودار کنترلی EWMA مشابه با یک نمودار کنترلی شوهارتی است. پس می‌توان گفت که نمودار کنترلی GWMA نه تنها در کشف تغییرات کوچک در میانگین فرایند نسبت به نمودار کنترلی EWMA و \bar{X} کارایی بهتری دارد، بلکه نمودارهای کنترلی \bar{X} و EWMA حالت خاصی از آن هستند، یعنی نمودار کنترلی GWMA یک حالت جامع و در بر گیرنده‌ی نمودارهای کنترلی EWMA و شوهارتی است. شکل (۱) ارتباط بین نمودارهای کنترلی EWMA، GWMA و شوهارتی را نشان می‌دهد.

موجود باشد، میانگین متحرک موزون نمایی به صورت رابطه‌ی (۱) محاسبه می‌شود:

$$EWMA_t = \lambda X_t + (1 - \lambda)EWMA_{t-1} \quad (۱)$$

$$t = 1, 2, 3, \dots \quad \text{و} \quad 0 < \lambda \leq 1$$

اگر مقدار اولیه آماره $EWMA_t$ برابر با میانگین جامعه یعنی μ در نظر گرفته شود ($EWMA_0 = \mu$)، با باز کردن بسط رابطه (۱)، آماره کنترلی $EWMA_t$ به صورت رابطه‌ی (۲) بازنویسی می‌شود:

$$EWMA_t = (\sum_{i=0}^{t-1} \lambda(1 - \lambda)^i X_{t-i}) + (1 - \lambda)^t \mu \quad (۲)$$

در آماره‌ی کنترلی (۲)، λ ثابت وزن دهی است و عبارت $\lambda(1 - \lambda)^i$ وزن نمونه‌ی i -ام را در بازه $i \in [0, t - 1]$ تعیین می‌کند. واضح است که بیش‌ترین وزن به نمونه‌ی $i=0$ اختصاص داده می‌شود و وزن نمونه‌های پیشین به صورت نمایی کاهش می‌یابند. شئو و لین [۳] نمودار کنترلی EWMA را تعمیم دادند و نمودار کنترلی دیگری تحت عنوان نمودار کنترلی میانگین متحرک موزون تعمیم‌یافته ($GWMA^1$) را معرفی کردند و نشان دادند که نمودار کنترلی GWMA نسبت به نمودار کنترلی EWMA در کشف تغییرات کوچک فرایند حساس‌تر است. آشنایی با نمودار کنترلی GWMA نیازمند تعریف برخی از نمادها است که در ادامه به طور مختصر به بیان آن‌ها پرداخته می‌شود. در یک دنباله از نمونه‌های مستقل فرض کنید q_t احتمال وقوع پیشامد A و $1 - q_t$ احتمال وقوع پیشامد B در t امین نمونه باشند. همچنین فرض کنید A و B مکمل و ناسازگار هستند. اگر M تعداد نمونه‌ها تا وقوع پیشامد A باشد، احتمال این که پیشامد A در t نمونه اول رخ ندهد، برابر با $\bar{P}_t = P(M > t)$ است و واضح است $\dots \geq \bar{P}_1 \geq \bar{P}_0 = 1$. احتمال این که پیشامد A اولین بار در نمونه‌ی t ام رخ دهد برابر با $q_t = 1 - \frac{\bar{P}_t}{\bar{P}_{t-1}}$ است. بنا بر این، احتمال رخداد پیشامد A در t امین نمونه برابر با $q_t = 1 - \frac{\bar{P}_t}{\bar{P}_{t-1}}$ و همچنین احتمال رخداد پیشامد B در t امین نمونه برابر با $1 - q_t = \frac{\bar{P}_t}{\bar{P}_{t-1}}$ است. اگر $P(M = t)$ به عنوان وزن در میانگین متحرک موزون تعمیم‌یافته در نظر گرفته شود، به طوری که $P(M = 1)$

¹ . Generalized Weighted Moving Average

بالایی نداشته باشند و این مسئله نقطه ضعف نمونه‌گیری تصادفی ساده است.

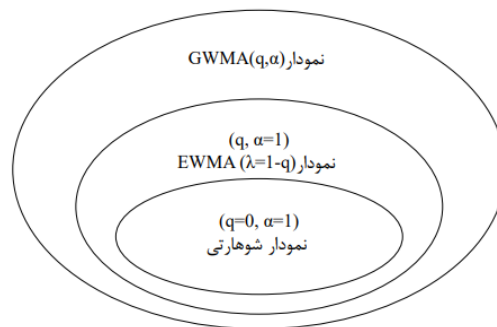
علاوه بر موارد مذکورگاهی اوقات اندازه‌گیری واحدهای جامعه مشکل و پرهزینه است، اما به راحتی و با هزینه اندک می‌توان واحدهای جامعه را رتبه‌بندی کرد، در چنین حالتی از نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای (RSS^3) استفاده می‌شود. اکثر نمودارهایی که تا کنون معرفی شده‌اند، تحت طرح SRS بوده‌اند. طرح RSS برای اولین بار توسط مک اینتایر [۱۰] معرفی شد و تاکاهاشی و واکی‌موتو [۱۱] اولین افرادی بودند که مبانی نظری طرح نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای را به صورت اصولی به روی کاغذ آوردند و نشان دادند میانگین طرح RSS نسبت به طرح SRS کارایی بیشتری دارد. طرح RSS برای گرفتن یک نمونه‌ی k تایی به این صورت است که ابتدا k^2 واحد از جامعه مورد مطالعه به صورت تصادفی انتخاب می‌شوند. سپس این k^2 واحد به k دسته k تایی تقسیم می‌شوند و پس از آن نمونه‌های هر دسته به طور جداگانه بر اساس مشخصه‌ی کیفیت مورد نظر به طور قضاوتی به صورت افزایشی مرتب می‌شوند. از دسته k تایی اول واحد دارای کوچک‌ترین رتبه، از دسته k تایی دوم واحد دارای دومین رتبه و به همین روال ادامه می‌دهیم تا در نهایت از دسته k تایی k ام واحدی که دارای k امین رتبه است، انتخاب شود و بقیه نمونه‌ها به جامعه بازگردانده می‌شوند. توجه شود که در نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای k^2 نمونه انتخاب می‌شود، ولی فقط k نمونه مورد بررسی و اندازه‌گیری قرار می‌گیرند. یعنی، یک نمونه k تایی از جامعه مورد مطالعه به دست خواهد آمد که می‌توان از آن برای برآورد پارامترهای نامعلوم جامعه استفاده نمود. در طرح RSS هنگامی که اندازه‌ی نمونه مورد نظر بزرگ باشد، ممکن است رتبه‌بندی نمونه‌ها به درستی انجام نگردد و برای جلوگیری از خطا در رتبه‌بندی نمونه‌ها، مراحل گفته شده برای طرح RSS را چندین بار و در طی چند چرخه تکرار می‌کنند (با k کوچک) تا به اندازه‌ی نمونه‌ی $n=km$ برسند. به عنوان مثال نمونه‌ی گرفته شده با روش RSS برای $k=3$ در طی m چرخه به صورت رابطه (۵) است. که در آن $X_{(j)i}$ نمایانگر i امین نمونه مرتب‌شده در چرخه‌ی i ام و دسته‌ی j ام است.

چرخه اول

$$X_{(1)11} \leq X_{(2)11} \leq X_{(3)11} \Rightarrow X_{(1)11} = X_{(1)1}$$

$$X_{(1)21} \leq X_{(2)21} \leq X_{(3)21} \Rightarrow X_{(2)21} = X_{(2)1}$$

$$X_{(1)31} \leq X_{(2)31} \leq X_{(3)31} \Rightarrow X_{(3)31} = X_{(3)1}$$



شکل ۱- ارتباط بین نمودارهای کنترلی شوهارتی، EWMA و GWMA

بسیاری از نمودارهای کنترلی بر فرض نرمال بودن داده‌ها استوار هستند، ولی از آنجا که توزیع متغیر پاسخ همیشه معلوم نیست، استفاده از توزیع‌های ناپارامتری مطرح گردیدند. آربونات [۴] برای نخستین بار دیدگاه ناپارامتری را در آزمون فرض دخالت داد و یک آزمون ناپارامتری تحت عنوان "آزمون علامت" معرفی کرد. پس از آن ویلکاکسون [۵] و من و ویتنی [۶] این دیدگاه را گسترش دادند. امین و همکاران [۷] نمودار کنترلی شوهارتی را بر اساس آماره علامت معرفی کردند. یانگ و همکاران [۸] نمودار ناپارامتری علامت EWMA را معرفی کردند و نشان دادند که این نمودار کنترلی ناپارامتری برای پایش تغییرات کوچک در میانگین فرایند در زمانی که توزیع مشاهده‌ها نامعلوم است، مناسب‌تر است. هو و یو [۹] نمودار کنترلی ناپارامتری $CUSUM^1$ را برای نظارت بر تغییر توزیع دلخواه و تشخیص نوع تغییر به طور همزمان معرفی کردند.

یکی از عوامل دیگری که نقش به‌سزایی در کارایی نمودارهای کنترلی دارد، روش نمونه‌گیری است. ساده‌ترین و متداول‌ترین روش نمونه‌گیری، نمونه‌گیری تصادفی ساده (SRS^2) است که در آن همه‌ی اعضای جامعه شانس برابر برای انتخاب در نمونه را دارند. در نمونه‌گیری تصادفی ساده اندازه‌ی نمونه باید به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد تا برآوردهای به دست آمده برای پارامترهای جامعه از دقت بالایی برخوردار باشند. اما گاهی به دلیل هزینه بالای نمونه‌گیری و از بین رفتن بخشی از اطلاعات به سبب نمونه‌گیری، نمی‌توان نمونه‌ای با اندازه‌ی بزرگ اختیار کرد و ناچار به نمونه‌گیری با اندازه‌ی نمونه کم هستیم و ممکن است نمونه‌ی حاصل، نمایانگر جامعه نباشد و برآوردهای به دست آمده دقت

³ . Rank Set Sampling

¹ . Cumulative sum

² . Simple Random Sampling

- نمودار کنترلی EWMA با طراحی مناسب و بسیار ساده‌تر، عملکرد آماری بهتری نسبت به این نمودار کنترلی ارائه می‌دهد.
- در برخی موارد نمودار GWMA به داده‌های گذشته نسبت به داده‌های فعلی، وزن بیش‌تری اختصاص می‌دهد.

در این پژوهش نمودار کنترلی GWMA با یک رویکرد ناپارامتری تحت روش نمونه‌گیری مجموعه‌ای رتبه‌ای برای پاسخ به چالش‌های استفاده از این نمودار معرفی می‌شود و عملکرد آن مورد بررسی قرار می‌گیرد و برای پاسخ به چالش مربوط به محاسبات و شبیه‌سازی، از زبان برنامه‌نویسی Julia استفاده می‌شود که در کم‌ترین زمان خروجی‌های مربوطه را نتیجه می‌داد و در بخش انتهایی با یک مقایسه‌ی کاربردی، عملکرد و توانایی نمودار کنترلی پیشنهادی در شناسایی تغییرات کوچک فرایند نسبت به سایر نمودارها اعم از EWMA بررسی می‌شود. ادامه‌ی مباحث در این مقاله به این ترتیب سازماندهی شده است که در بخش ۲ طراحی ناپارامتری نمودار کنترلی علامت GWMA ارائه می‌شود و در بخش ۳ نمودار کنترلی علامت GWMA تحت طرح RSS مورد بررسی قرار می‌گیرد. بخش ۴ شامل نتایج عددی و ارزیابی عملکرد نمودار کنترلی پیشنهادی است و در پایان اظهارات نهایی و نتیجه‌گیری کلی در بخش ۵ فراهم آمده‌اند.

۲- طراحی ناپارامتری نمودار کنترلی علامت GWMA

انتخاب یک نمودار کنترلی مناسب برای پایش تغییرات فرایند یک امر ضروری است. زمانی که توزیع مشخصه کیفیت، غیرنرمال یا نامشخص باشد، استفاده از نمودارهای کنترلی ناپارامتری به جای نمودارهای کنترلی پارامتری منطقی‌تر به نظر می‌رسد. یکی از پرکاربردترین نمودارهای کنترلی ناپارامتری، نمودار کنترلی علامت است. نمودار کنترلی علامت به‌طور معمول به علت سهولت در کاربرد و عدم محاسبات عددی پیچیده به‌کار می‌رود. در نمودار کنترلی علامت از مقایسه نمونه مشاهده‌شده با مقدار هدف (میانه یا میانگین) استفاده می‌شود. در بخش‌های بعدی آزمون علامت تحت دو طرح SRS و RSS معرفی می‌شوند که این دو آزمون مبنای تشکیل نمودارهای کنترلی علامت تحت طرح‌های SRS و RSS هستند.

چرخه دوم

$$\begin{aligned} X_{(1)12} \leq X_{(2)12} \leq X_{(3)12} &\Rightarrow X_{(1)12} = X_{(1)2} \\ X_{(1)22} \leq X_{(2)22} \leq X_{(3)22} &\Rightarrow X_{(2)22} = X_{(2)2} \\ X_{(1)32} \leq X_{(2)32} \leq X_{(3)32} &\Rightarrow X_{(3)32} = X_{(3)2} \end{aligned} \quad (5)$$

چرخه mام

$$\begin{aligned} X_{(1)1m} \leq X_{(2)1m} \leq X_{(3)1m} &\Rightarrow X_{(1)1m} = X_{(1)m} \\ X_{(1)2m} \leq X_{(2)2m} \leq X_{(3)2m} &\Rightarrow X_{(2)2m} = X_{(2)m} \\ X_{(1)3m} \leq X_{(2)3m} \leq X_{(3)3m} &\Rightarrow X_{(3)3m} = X_{(3)m} \end{aligned}$$

با توجه به ویژگی‌های مثبتی که طرح RSS نسبت به طرح SRS دارد، نمودارهای کنترلی بر اساس طرح RSS مورد بررسی قرار گرفته شدند. مطلق و الصباح [۱۲]، نمودار کنترلی \bar{X} با استفاده از طرح RSS را معرفی کردند و ابوجیا و مطلق [۱۳]، نمودار کنترلی \bar{X} با استفاده از طرح RSS دوگانه را معرفی کردند. لی [۱۴] نشان داد نمودارهای کنترلی \bar{X} و EWMA تحت طرح RSS نسبت به طرح SRS توان بیش‌تری دارند. با در نظر گرفتن کارایی بالای روش RSS و نامعلوم بودن توزیع مشخصه کیفیت در کاربردهای عملی، بررسی نمودارهای کنترلی ناپارامتری با استفاده از روش RSS مطرح گردید. هتمانسپرگر [۱۵] آزمون علامت را تحت طرح RSS معرفی کرد. ابید و همکاران [۱۶] نمودار کنترلی علامت EWMA تحت طرح RSS را معرفی کردند و اصغری و همکاران [۱۷] نشان دادند، کارایی این نمودار کنترلی تحت طرح RSS نسبت به طرح SRS بیش‌تر است. علی و همکاران [۱۸] نمودار کنترلی علامت EWMA تحت طرح RSS را برای نظارت بر تغییرات کوچک و مداوم در پارامتر مکان فرایند را معرفی کردند.

در چند سال اخیر مطالعاتی متعددی بر روی عملکرد نمودارهای کنترلی غیرشوهارتی و به‌طور خاص نمودار کنترلی GWMA انجام شده است و عملکرد این نمودارها مورد کنکاش قرار گرفته است. کنوس و همکاران [۱۹] در پژوهشی نمودار کنترلی GWMA را ناکارآمد دانستند و دلایل زیر را برای عدم استفاده از این نمودار کنترلی بیان کردند:

- هیچ فرمول بازگشتی برای آماره‌ی کنترلی نمودار GWMA وجود ندارد و تمام داده‌های قبلی باید ذخیره شوند و برای محاسبه‌ی آماره‌های کنترلی مورد استفاده قرار بگیرند.
- ویژگی مارکوف برای نمودار کنترلی GWMA اعمال نمی‌شود، بنا بر این، باید از شبیه‌سازی کامپیوتری برای تعیین محدودیت‌های کنترل و عملکرد آماری استفاده شود.

۲-۱- آزمون علامت با استفاده از طرح SRS

اگر X مشخصه‌ی کیفیت و θ مقدار هدف باشد که از پیش تعیین می‌شود. تفاوت بین مشخصه کیفیت و مقدار هدف به صورت $S = X - \theta$ است. $p = P(S > 0)$ به عنوان نسبت فرایند معرفی می‌شود و اگر $p = 0/5$ باشد، فرایند در حالت تحت کنترل قرار دارد. اما در حالتی که $p \neq 0/5$ باشد، تغییراتی به وسیله علت‌های اسنادپذیر در فرایند به وجود آمده و فرایند را از حالت تحت کنترل خارج کرده است. پایش تغییرات از مقدار هدف، معادل با پایش تغییرات در نسبت فرایند است. فرض کنید یک نمونه تصادفی ساده و مستقل n تایی از X مانند X_1, X_2, \dots, X_n از توزیع $F(0)$ برای پایش انحرافات از مقدار هدف θ جمع‌آوری شده است. آماره آزمون علامت تحت طرح SRS به صورت زیر است:

$$S_{SRS}^+ = \sum_{j=1}^n I(X_j - \theta > 0) \quad (۶)$$

که در آن $I(0)$ تابع نشانگر است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I(X_j - \theta > 0) = \begin{cases} 1 & \text{if } X_j - \theta > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

آماره S_{SRS}^+ دارای توزیع $\text{Bin}(n, p)$ است. یعنی در حالت تحت کنترل ($P=0/5$) میانگین و واریانس آماره S_{SRS}^+ به صورت $E[S_{SRS}^+] = \frac{n}{2}$ و $\text{Var}[S_{SRS}^+] = \frac{n}{4}$ است (برای اطلاعات بیشتر به مقاله کوتی و جاگش‌بابو [۲۰] رجوع شود). لو [۲۱] با تلفیق نمودار کنترلی علامت تحت طرح SRS و نمودار کنترلی غیرشوهارتی GWMA، نمودار کنترلی جدیدی به نام نمودار کنترلی علامت GWMA با استفاده از روش نمونه‌گیری تصادفی ساده را برای پایش انحرافات از مقدار هدف فرایند (میانه یا میانگین) که با نماد $GWMA_{S_{SRS}^+}$ نشان داده می‌شود را معرفی کرد. لو [۲۱] نشان داد این نمودار کنترلی برای پایش تغییرات فرایندهایی با توزیع مشخصه کیفیت نامعلوم، مناسب است. آماره کنترلی علامت GWMA تحت طرح SRS با توجه به رابطه (۶) به صورت:

$$GWMA_{S_{SRS}^+} = \sum_{i=1}^t (q_1^{(i-1)\alpha_1} - q_1^{i\alpha_1}) S_{SRS}^+ + q_1^{t\alpha_1} GWMA_{S_{SRS}^+} \quad t = 1, 2, 3, \dots \quad (۷)$$

است. که در آن $GWMA_{S_{SRS}^+}$ مقدار اولیه آماره‌ی $GWMA_{S_{SRS}^+}$ است و برابر با میانگین آماره S_{SRS}^+ فرض می‌شود، یعنی

$E[S_{SRS}^+] = \frac{n}{2}$ است. همان گونه که گفته شد، در نمودار کنترلی GWMA بیشترین وزن به آخرین نمونه اختصاص داده می‌شود و نمونه‌های قبلی وزن‌های کمتری نسبت به این نمونه می‌گیرند. در رابطه (۷)، $q^{t\alpha}$ وزن مقدار هدف است و رابطه $q^{(i-1)\alpha} - q^{i\alpha}$ به ازای هر i وزن نمونه $t-i+1$ ام را نشان می‌دهد. لو [۲۲] نمودار کنترلی علامت GWMA را گسترش داد و نمودار کنترلی علامت میانگین متحرک دوگانه ($DGWMA^1$) را برای نظارت بر انحراف‌های کوچک در زمانی که توزیع مشخصه کیفیت نامعلوم است معرفی کرد. لو [۲۲] عملکرد آماری نمودار کنترلی علامت DGWMA را ارزیابی کرد و آن را با نمودارهای دیگر از جمله نمودار کنترلی علامت EWMA، نمودار کنترلی علامت GWMA و نمودار کنترلی علامت DEWMA مقایسه کرد. مطالعات شبیه‌سازی نشان داد که نمودار کنترلی علامت DGWMA با طراحی بزرگ و پارامترهای تنظیم میانه، همیشه در تشخیص تغییرات کوچک حساس‌تر از نمودارهای دیگر است. آماره‌ی کنترلی علامت DGWMA تحت طرح SRS طبق رابطه (۶) به شرح زیر است:

$$DGWMA_{S_{SRS}^+} = \sum_{i=1}^t (q_2^{(i-1)\alpha_2} - q_2^{i\alpha_2}) GWMA_{S_{SRS}^+} + q_2^{t\alpha_2} GWMA_{S_{SRS}^+} \quad (۸)$$

$t = 1, 2, 3, \dots, \quad i = 1, 2$
 $0 \leq q_i < 1 \quad 0 < \alpha_i \leq 1$

با جایگزینی رابطه (۷) در رابطه (۸)، آماره‌ی کنترلی در رابطه‌ی (۸) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$DGWMA_{S_{SRS}^+} = \sum_{i=1}^t W_i S_{SRS}^+ + (1 - \sum_{i=1}^t W_i) GWMA_{S_{SRS}^+} \quad (۹)$$

که در آن W_i وزن جدید آماره S_{SRS}^+ است که از دنباله وزنی $(q_1^{(j-1)\alpha_1} - q_1^{j\alpha_1})$ و $(q_2^{(i-j)\alpha_2} - q_2^{(i-j+1)\alpha_2})$ تشکیل شده است و برابر با مقدار زیر است:

$$W_i = \sum_{j=1}^i (q_1^{(j-1)\alpha_1} - q_1^{j\alpha_1}) (q_2^{(i-j)\alpha_2} - q_2^{(i-j+1)\alpha_2})$$

اگر $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ و $q_1 = q_2 = q$ باشد، معادله (۷) به صورت معادله (۱۰) و دنباله وزنی در رابطه (۹) به صورت معادله (۱۱) نوشته می‌شود:

$$GWMA_{S_{SRS}^+} = \sum_{i=1}^t (q^{(i-1)\alpha} - q^{i\alpha}) S_{SRS}^+ + q^{t\alpha} GWMA_{S_{SRS}^+} \quad (۱۰)$$

¹ . Double Generally Weighted Moving Average

$UCL_{DGWMA_{S_{SRS}^+}} = \frac{n}{2} - L\sqrt{Q_{2t}\frac{n}{4}}$
 در حدود کنترلی بالا، L ضریب حدود کنترلی است. با رسم
 آماره‌های کنترلی دو نمودارهای $DGWMA_{S_{SRS}^+}$ و $GWMA_{S_{SRS}^+}$
 در زمان‌های مختلف روی نمودار و سنجش آن‌ها با حدود کنترلی،
 رفتار فرایند پایش می‌شود. در صورت وجود هشدارهای خارج از
 کنترل فرایند اصلاح می‌شود تا به حالت تحت کنترل بازگردد و
 در غیر این صورت فرایند مادام مورد کنترل قرار می‌گیرد.

۲-۲- آماره آزمون علامت با استفاده از طرح RSS

فرض کنید فرایند نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای با تکرار m
 چرخه برای گرفتن یک نمونه با اندازه $n = km$ انجام شده است
 و نمونه حاصل از مشخصه کیفیت X برای پایش انحرافات از
 مقدار هدف θ به‌صورت زیر است:

$$X_{(1)1}, X_{(2)1}, \dots, X_{(k)1}, X_{(1)2}, X_{(2)2}, \dots, X_{(k)2}, \dots, X_{(1)m}, X_{(2)m}, \dots, X_{(k)m}$$

آماره آزمون علامت تحت طرح RSS به‌صورت زیر است:

$$S_{RSS}^+ = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m I(X_{(j)i} - \theta > 0) \quad (14)$$

که در آن I(0) تابع نشانگر است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I(X_{(j)i} - \theta > 0) = \begin{cases} 1 & \text{if } X_{(j)i} - \theta > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

آماره S_{RSS}^+ را می‌توان به‌صورت $S_{RSS}^+ = \sum_{j=1}^k S_{(j)}^+$ بازنویسی
 کرد که آماره‌ی $S_{(j)}^+ = \sum_{i=1}^m I(X_{(j)i} - \theta > 0)$ دارای توزیع
 Bin (m, $p_j = 1 - H_j(0)$) است. در شرایط تحت کنترل
 $H(0) = \frac{1}{2}$ است. امید ریاضی و واریانس آماره S_{RSS}^+ در رابطه‌ی
 (۵) برابر با $E[S_{RSS}^+] = \frac{n}{2}$ و $Var[S_{RSS}^+] = \frac{n}{4}\delta_0^2$ است که در آن

$$\delta_0^2 = 1 - \left(\frac{4}{n}\right) \sum_{j=1}^k \left(H_j(0) - \frac{1}{2}\right)^2$$

است (برای اطلاعات بیشتر به مقاله هتمانسپرگر [۱۵] رجوع
 شود). مقادیر $H_j(0)$ به ازای $j=1, 2, \dots, k$ از طریق ارزیابی
 انتگرال تابع بتای ناقص به‌صورت رابطه (۱۵) محاسبه می‌شوند.
 مقادیر $H_j(0)$ و δ_0^2 که یک معیار مهم در ارزیابی روش RSS
 نسبت به SRS هستند در جدول (۱) محاسبه شده‌اند.

$$H_j(0) = \frac{k!}{(j-1)!(k-j)!} \int_{-\infty}^0 H^{j-1}(t)[1-H(t)]^{k-j} h(t) dt \quad (15)$$

$$\begin{cases} W_i = \sum_{j=1}^i (q^{(j-1)\alpha} - q^{j\alpha})(q^{(i-j)\alpha} - q^{(i-j+1)\alpha}) \\ 1 - \sum_{i=1}^t W_i = q^{t\alpha} + \sum_{j=1}^t (q^{(j-1)\alpha} - q^{j\alpha})q^{(t-j+1)\alpha} \end{cases} \quad (11)$$

اگر $\alpha=1$ و $q=1-\lambda$ ، آماره‌ی کنترلی $DGWMA_{S_{SRS}^+}$ و $GWMA_{S_{SRS}^+}$
 به ترتیب با آماره‌های $DEWMA_{S_{SRS}^+}$ و $EWMA_{S_{SRS}^+}$ یکسان
 هستند. به عبارت دیگر، نمودارهای کنترلی $DGWMA_{S_{SRS}^+}$
 و $GWMA_{S_{SRS}^+}$ یک حالت جامع هستند که شامل نمودارهای
 کنترلی $DEWMA_{S_{SRS}^+}$ و $EWMA_{S_{SRS}^+}$ می‌شوند. میانگین و
 واریانس آماره‌های $DGWMA_{S_{SRS}^+}$ و $GWMA_{S_{SRS}^+}$ در حالت تحت
 کنترل برابر با مقادیر زیر هستند:

$$\begin{aligned} E[GWMA_{S_{SRS}^+}] &= \\ E\left[\sum_{i=1}^t (q^{(i-1)\alpha} - q^{i\alpha})S_{SRS_{t-i+1}}^+ + q^{t\alpha}GWMA_{S_{SRS_0}^+}\right] &= \frac{n}{2} \\ Var[GWMA_{S_{SRS}^+}] &= \\ Var\left[\sum_{i=1}^t (q^{(i-1)\alpha} - q^{i\alpha})S_{SRS_{t-i+1}}^+ + q^{t\alpha}GWMA_{S_{SRS_0}^+}\right] &= Q_{1t}\frac{n}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[DGWMA_{S_{SRS}^+}] &= \\ E\left[\sum_{i=1}^t W_i S_{SRS_{t-i+1}}^+ + (1 - \sum_{i=1}^t W_i)GWMA_{S_{SRS_0}^+}\right] &= \frac{n}{2} \\ Var[DGWMA_{S_{SRS}^+}] &= \\ Var\left[\sum_{i=1}^t W_i S_{SRS_{t-i+1}}^+ + (1 - \sum_{i=1}^t W_i)GWMA_{S_{SRS_0}^+}\right] &= Q_{2t}\frac{n}{2} \end{aligned}$$

به‌طوری که $Q_{1t} = \sum_{i=1}^t (q^{(i-1)\alpha} - q^{i\alpha})^2$ (برای اطلاعات
 بیشتر به Lu [۲۱] مراجعه کنید) و $Q_{2t} = \sum_{i=1}^t W_i^2$ (برای
 اطلاعات بیشتر به Lu [۲۲] مراجعه کنید). بنا بر این، حدود
 کنترلی نمودارهای $DGWMA_{S_{SRS}^+}$ و $GWMA_{S_{SRS}^+}$ به‌صورت زیر
 هستند:

$$\begin{aligned} UCL_{GWMA_{S_{SRS}^+}} &= \frac{n}{2} + L\sqrt{Q_{1t}\frac{n}{4}} \\ CL_{GWMA_{S_{SRS}^+}} &= \frac{n}{2} \\ UCL_{DGWMA_{S_{SRS}^+}} &= \frac{n}{2} - L\sqrt{Q_{2t}\frac{n}{4}} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} UCL_{DGWMA_{S_{SRS}^+}} &= \frac{n}{2} + L\sqrt{Q_{2t}\frac{n}{4}} \\ CL_{DGWMA_{S_{SRS}^+}} &= \frac{n}{2} \end{aligned} \quad (13)$$

جدول ۱: مقادیر متناظر با $H_j(0)$ و $\delta_0^2 = 1 - \left(\frac{4}{n}\right) \sum_{j=1}^k (F_j(0) - \frac{1}{2})^2$

k \ j	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	۰/۷۵۰	۰/۸۷۵	۰/۹۳۸	۰/۹۶۹	۰/۹۸۴	۰/۹۹۲	۰/۹۹۶	۰/۹۹۳	۰/۹۹۹
۲	۰/۲۵۰	۰/۵۰۰	۰/۶۸۸	۰/۸۱۳	۰/۸۹۱	۰/۹۳۸	۰/۹۶۵	۰/۹۸۱	۰/۹۸۹
۳		۰/۱۲۵	۰/۳۱۳	۰/۵۰۰	۰/۶۵۶	۰/۷۷۳	۰/۸۵۶	۰/۹۱۰	۰/۹۴۵
۴			۰/۰۶۳	۰/۱۸۸	۰/۳۴۴	۰/۵۰۰	۰/۶۳۷	۰/۷۴۶	۰/۸۲۸
۵				۰/۰۳۱	۰/۱۰۹	۰/۲۲۷	۰/۳۶۳	۰/۵۰۰	۰/۶۲۳
۶					۰/۰۱۶	۰/۰۶۳	۰/۱۴۵	۰/۲۵۴	۰/۳۷۷
۷						۰/۰۰۸	۰/۰۳۵	۰/۰۹۰	۰/۱۷۲
۸							۰/۰۰۴	۰/۰۲۰	۰/۰۵۵
۹								۰/۰۰۲	۰/۰۱۱
۱۰									۰/۰۰۱
δ_0^2	۰/۷۵۰	۰/۶۲۵	۰/۵۴۷	۰/۴۹۰	۰/۴۵۱	۰/۴۱۶	۰/۳۹۳	۰/۳۷۱	۰/۳۵۲

جدول ۲: توزیع صفر آماره S_{RSS}^+ برای ترکیب‌های مختلف (k, m)

x	(k=2, m=3)	(k=2, m=4)	(k=2, m=5)	(k=2, m=6)
۰	۰/۰۰۶۵۹۱۸	۰/۰۰۱۲۳۵۹	۰/۰۰۰۲۳۱۷	۰/۰۰۰۰۴۳۴
۱	۰/۰۶۵۹۱۷۹	۰/۰۰۱۶۴۷۹	۰/۰۰۳۸۶۲۴	۰/۰۰۰۸۶۹۰
۲	۰/۳۳۵۹۰۲	۰/۰۸۷۳۴۱۳	۰/۰۲۶۹۰۷۹	۰/۰۰۷۵۰۲۸
۳	۰/۳۷۵۹۷۶۵	۰/۲۳۲۵۴۳۹	۰/۱۰۱۲۸۰۲	۰/۰۳۶۵۳۱۷
۴	۰/۳۳۹۵۰۲	۰/۲۳۴۷۹۸۶	۰/۲۲۲۶۱۶۲	۰/۱۱۰۰۸۵۹
۵	۰/۰۶۵۹۱۷۹	۰/۲۳۲۵۴۳۹	۰/۲۹۰۲۰۳۱	۰/۲۱۲۵۳۸۲
۶	۰/۰۰۶۵۹۱۸	۰/۰۸۷۳۴۱۳	۰/۲۲۲۶۱۶۲	۰/۲۶۴۸۵۸
۷		۰/۰۰۱۶۴۷۹	۰/۱۰۱۲۸۰۲	۰/۲۱۲۵۳۸۲
۸		۰/۰۰۰۱۲۳۵۹	۰/۰۲۶۹۰۷۹	۰/۱۱۰۰۸۵۹
۹			۰/۰۰۳۸۶۲۴	۰/۰۳۶۵۳۱۷
۱۰			۰/۰۰۰۲۳۱۷	۰/۰۰۷۵۰۲۸
۱۱			۰/۰۰۳۸۶۲۴	۰/۰۰۰۸۶۹۰
۱۲			۰/۰۰۰۲۳۱۷	۰/۰۰۰۰۴۳۴

رجوع شود). مقادیر توزیع دقیق آماره S_{RSS}^+ تحت فرض صفر برای ترکیب‌های مختلف (k, m) در جدول (۲) فراهم آمده است.

$$P(S_{RSS}^+ = x) = \sum_{j=y} \prod_{r=1}^k \binom{m}{j_r} \left[1 - I_{\frac{1}{2}}(j, k - j + 1) \right]^{j_r} \left[I_{\frac{1}{2}}(j, k - j + 1) \right]^{m - j_r} \quad (۱۶)$$

۳-۲- توزیع دقیق آماره S_{RSS}^+

کوتی و جاگش‌بابو [۲۰] با یافتن توزیع دقیق آماره S_{RSS}^+ روش کار هتمانسپرگر را گسترش دادند و توزیع دقیق این آماره را برای مقادیر کم k و m به صورت رابطه (۱۶) به دست آوردند. که در آن $I_x(\alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^x u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} du$ تابع بتا است (برای اطلاعات بیشتر به مقاله کوتی و جاگش‌بابو [۲۰]

۳- نمودار کنترلی علامت GWMA با استفاده از طرح RSS

کنترلی خارج از حدود کنترلی باشند، یعنی داشته باشیم $UCL > GWMA_{S_{RSS_t}^+} > LCL$ یا $GWMA_{S_{RSS_t}^+} < LCL$ ، فرایند خارج از کنترل آماری تلقی می‌شود و اقدامات اصلاحی برای بازگرداندن فرایند به حالت تحت کنترل صورت می‌گیرد.

ملاحظه: اگر یک مقدار مجانبی برای Q_t به صورت

$$Q = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^t (q^{(i-1)\alpha} - q^{i\alpha})^2 \right)$$

تعریف شود، با جایگزینی Q به جای Q_t در حدود کنترلی رابطه (۱۸)، حدود کنترلی دقیق به حدود کنترلی مجانبی تبدیل می‌شوند.

مقادیر بهینه L برای حدود کنترلی دقیق و مجانبی برای ترکیب‌های مختلف (k, m, q, α) با $ARL_0 \cong 370$ به ترتیب در جدول‌های (۳) و (۴) ارائه شده است.

با توجه به مقدمات گفته‌شده و کارایی و توان بالاتر در روش نمونه‌گیری RSS نسبت به SRS در این بخش نمودار کنترلی معرفی شده توسط لو [۲۱] گسترش داده می‌شود و نمودار کنترلی علامت GWMA با استفاده از طرح RSS که $GWMA_{S_{RSS}^+}$ نامیده می‌شود، با استفاده از توزیع دقیق آماره S_{RSS}^+ معرفی می‌شود. آماره کنترلی $GWMA_{S_{RSS}^+}$ با توجه به رابطه (۱۴) به صورت:

$$GWMA_{S_{RSS_t}^+} = \sum_{i=1}^t (q^{(i-1)\alpha} - q^{i\alpha}) S_{RSS_{t-i+1}}^+ + q^{t\alpha} GWMA_{S_{RSS_0}^+} \quad (۱۷)$$

است. که در آن $GWMA_{S_{RSS_0}^+}$ مقدار اولیه آماره $GWMA_{S_{RSS_t}^+}$ است و برابر با میانگین آماره S_{RSS}^+ فرض می‌شود، یعنی $GWMA_{S_{RSS_0}^+} = E[S_{RSS}^+] = \frac{n}{2}$ ریاضی و واریانس آماره S_{RSS}^+ ، امید ریاضی و واریانس آماره $GWMA_{S_{RSS_t}^+}$ به صورت $E[GWMA_{S_{RSS_t}^+}] = \frac{n}{2}$ و $Var[GWMA_{S_{RSS_t}^+}] = Q_t \delta_0^2 \frac{n}{4}$ هستند که $Q_t = \sum_{i=1}^t (q^{(i-1)\alpha} - q^{i\alpha})^2$ بنا بر این، حدود کنترلی نمودار کنترلی $GWMA_{S_{RSS}^+}$ به صورت رابطه (۱۸) است:

$$\begin{aligned} UCL_{GWMA_{S_{RSS}^+}} &= \frac{n}{2} + L \sqrt{Q_t \delta_0^2 \frac{n}{4}} \\ CL_{GWMA_{S_{RSS}^+}} &= \frac{n}{2} \\ LCL_{GWMA_{S_{RSS}^+}} &= \frac{n}{2} - L \sqrt{Q_t \delta_0^2 \frac{n}{4}} \end{aligned} \quad (۱۸)$$

در حدود کنترلی گفته شده در رابطه (۱۸)، L ضریب حدود کنترلی و تعیین‌کننده‌ی عرض حدود کنترلی است. این ضریب به‌گونه‌ای تعیین می‌شود که ARL_0 یک مقدار مشخص داشته باشد. از آن‌جا که آماره S_{RSS}^+ دارای توزیع دوجمله‌ای است، لذا امکان دست‌یابی به مقادیر L برای یک مقدار دقیق ARL_0 تحت ترکیب‌های مختلف پارامترهای نمودار کنترلی $GWMA_{S_{RSS}^+}$ وجود ندارد. بنا بر این، یک مقدار تقریبی برای ARL_0 در نظر گرفته می‌شود. در این مقاله $ARL_0 \cong 370$ مبنای ارزیابی نمودار کنترلی در نظر گرفته می‌شود. توجه شود که می‌توان هر مقدار دلخواه دیگری را برای ARL_0 در نظر گرفت. با رسم آماره‌های کنترلی $GWMA_{S_{RSS_t}^+}$ در زمان‌های مختلف روی نمودار و سنجش آن‌ها با حدود کنترلی، رفتار فرایند پایش می‌شود. اگر مقدار آماره‌های کنترلی $GWMA_{S_{RSS_t}^+}$ بین حدود کنترلی باشند، فرایند تحت کنترل آماری تلقی می‌شود. اما در صورتی که مقدار آماره‌ی

جدول ۳- مقادیر L برای حدود کنترلی دقیق، تحت ترکیب‌های مختلف (k, m, q, α) و $ARL_0 \cong 370$

		m=1					m=2					m=3					m=4				
q	k	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
.1	.1	1/683	2/222	2/171	2/122	2/668	2/347	2/100	2/885	2/731	2/614	2/845	2/962	2/117	2/621	2/829	2/502	2/933	2/125	2/168	2/040
	.3	1/748	2/290	2/167	2/117	2/517	2/398	2/100	2/906	2/765	2/662	2/867	2/975	2/108	2/679	2/857	2/570	2/948	2/176	2/137	2/041
	.5	1/783	2/327	2/193	2/156	2/543	2/427	2/097	2/921	2/786	2/694	2/882	2/982	2/100	2/717	2/873	2/615	2/958	2/801	2/115	2/038
	.7	1/798	2/372	2/809	2/136	2/552	2/440	2/092	2/935	2/793	2/717	2/895	2/984	2/097	2/740	2/884	2/650	2/966	2/817	2/104	2/036
	.9	1/803	2/397	2/821	2/121	2/553	2/438	2/086	2/945	2/792	2/732	2/905	2/984	2/098	2/753	2/881	2/673	2/973	2/828	2/094	2/031
	1	1/803	2/403	2/825	2/115	2/553	2/436	2/084	2/948	2/791	2/737	2/908	2/983	2/099	2/757	2/878	2/681	2/977	2/831	2/096	2/029
.3	.1	1/744	2/281	2/161	2/113	2/511	2/391	2/100	2/904	2/761	2/656	2/865	2/973	2/109	2/672	2/852	2/563	2/947	2/171	2/140	2/041
	.3	1/924	2/324	2/184	2/121	2/634	2/519	2/088	2/948	2/843	2/776	2/911	2/995	2/069	2/821	2/911	2/746	2/975	2/867	2/043	2/026
	.5	2/047	2/527	2/197	2/183	2/718	2/607	2/062	2/969	2/893	2/853	2/933	2/997	2/022	2/908	2/951	2/848	2/982	2/925	2/980	2/003
	.7	2/128	2/612	2/193	2/029	2/770	2/665	2/034	2/979	2/924	2/902	2/944	2/991	2/981	2/940	2/969	2/886	2/979	2/954	2/973	2/985
	.9	2/170	2/701	2/196	2/196	2/796	2/698	2/000	2/986	2/940	2/933	2/952	2/980	2/962	2/957	2/972	2/905	2/970	2/964	2/972	2/981
	1	2/178	2/736	2/192	2/198	2/796	2/709	2/981	2/991	2/939	2/947	2/959	2/973	2/964	2/961	2/970	2/907	2/968	2/968	2/977	2/979
.5	.1	1/788	2/317	2/182	2/165	2/543	2/423	2/099	2/916	2/782	2/687	2/878	2/981	2/101	2/711	2/871	2/609	2/955	2/126	2/120	2/039
	.3	2/070	2/532	2/197	2/177	2/727	2/612	2/059	2/969	2/899	2/862	2/934	2/997	2/016	2/915	2/952	2/860	2/981	2/929	2/976	2/000
	.5	2/283	2/681	2/194	2/195	2/845	2/740	2/981	2/970	2/951	2/941	2/941	2/968	2/956	2/960	2/970	2/915	2/969	2/964	2/970	2/976
	.7	2/429	2/779	2/194	2/186	2/907	2/817	2/934	2/948	2/956	2/959	2/923	2/951	2/956	2/962	2/967	2/936	2/959	2/965	2/968	2/973
	.9	2/524	2/846	2/194	2/187	2/932	2/822	2/929	2/939	2/944	2/951	2/917	2/951	2/959	2/957	2/966	2/935	2/957	2/963	2/964	2/966
	1	2/553	2/874	2/198	2/182	2/937	2/876	2/936	2/940	2/946	2/946	2/918	2/952	2/958	2/959	2/965	2/934	2/955	2/962	2/964	2/968
.7	.1	1/825	2/345	2/180	2/157	2/568	2/448	2/097	2/926	2/800	2/712	2/887	2/985	2/093	2/743	2/884	2/646	2/961	2/117	2/100	2/037
	.3	2/200	2/624	2/192	2/103	2/802	2/689	2/100	2/971	2/934	2/919	2/940	2/980	2/966	2/948	2/969	2/899	2/970	2/961	2/969	2/978
	.5	2/490	2/802	2/196	2/187	2/916	2/830	2/927	2/935	2/946	2/948	2/913	2/941	2/948	2/953	2/955	2/927	2/948	2/954	2/960	2/963
	.7	2/667	2/885	2/196	2/189	2/930	2/880	2/924	2/926	2/929	2/931	2/909	2/933	2/931	2/940	2/941	2/917	2/934	2/940	2/943	2/945
	.9	2/771	2/906	2/186	2/190	2/895	2/877	2/910	2/920	2/924	2/924	2/908	2/910	2/923	2/924	2/918	2/913	2/921	2/917	2/923	2/928
	1	2/802	2/905	2/186	2/196	2/895	2/866	2/902	2/911	2/919	2/922	2/904	2/902	2/918	2/913	2/920	2/911	2/917	2/915	2/916	2/915
.9	.1	1/856	2/370	2/183	2/149	2/590	2/470	2/094	2/932	2/814	2/733	2/896	2/990	2/086	2/767	2/894	2/682	2/967	2/123	2/082	2/035
	.3	2/312	2/696	2/199	2/195	2/856	2/748	2/953	2/959	2/946	2/940	2/928	2/953	2/949	2/955	2/962	2/913	2/951	2/958	2/964	2/968
	.5	2/614	2/829	2/186	2/187	2/871	2/823	2/867	2/868	2/875	2/875	2/854	2/878	2/878	2/882	2/885	2/865	2/881	2/884	2/886	2/889
	.7	2/711	2/774	2/186	2/181	2/765	2/755	2/774	2/780	2/782	2/784	2/777	2/782	2/783	2/782	2/789	2/778	2/785	2/783	2/787	2/789
	.9	2/724	2/685	2/186	2/170	2/723	2/720	2/724	2/724	2/718	2/720	2/723	2/730	2/720	2/729	2/725	2/720	2/721	2/722	2/725	2/726
	1	2/716	2/679	2/171	2/184	2/713	2/711	2/713	2/719	2/711	2/713	2/716	2/714	2/711	2/714	2/711	2/709	2/708	2/708	2/707	2/707
.95	.1	1/864	2/376	2/186	2/147	2/595	2/475	2/094	2/934	2/818	2/738	2/898	2/990	2/084	2/773	2/898	2/688	2/967	2/128	2/080	2/032
	.3	2/337	2/710	2/194	2/186	2/865	2/760	2/941	2/948	2/943	2/940	2/920	2/948	2/943	2/951	2/955	2/914	2/948	2/952	2/959	2/962
	.5	2/596	2/781	2/189	2/184	2/807	2/769	2/803	2/810	2/811	2/814	2/797	2/812	2/812	2/819	2/819	2/803	2/814	2/818	2/822	2/823
	.7	2/589	2/607	2/183	2/182	2/610	2/604	2/610	2/620	2/627	2/622	2/617	2/623	2/625	2/622	2/628	2/619	2/623	2/620	2/624	2/626
	.9	2/528	2/513	2/184	2/182	2/546	2/523	2/523	2/525	2/528	2/527	2/525	2/523	2/522	2/524	2/523	2/521	2/525	2/525	2/526	2/523
	1	2/522	2/515	2/180	2/182	2/527	2/523	2/524	2/527	2/522	2/527	2/528	2/511	2/524	2/522	2/519	2/519	2/528	2/524	2/527	2/522

جدول ۴: مقادیر L برای حدود کنترلی مجانبی، تحت ترکیب‌های مختلف (k, m, q, α) و $ARL_0 \cong 370$

q	k	α	m=1					m=2					m=3					m=4						
			2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6		
.1	.1	.1	1/682	2/222	2/171	2/111	2/68	2/347	2/100	2/885	2/731	2/614	2/845	2/962	2/118	2/620	2/829	2/501	2/934	2/125	2/167	2/104	2/104	
		.3	1/748	2/290	2/176	2/117	2/517	2/398	2/100	2/906	2/765	2/662	2/868	2/975	2/108	2/678	2/857	2/572	2/948	2/175	2/138	2/104	2/104	
		.5	1/782	2/337	2/193	2/155	2/543	2/427	2/107	2/921	2/786	2/693	2/882	2/982	2/100	2/717	2/874	2/615	2/957	2/180	2/114	2/104	2/104	
		.7	1/798	2/373	2/209	2/137	2/552	2/440	2/109	2/934	2/793	2/716	2/895	2/984	2/107	2/740	2/884	2/650	2/965	2/181	2/101	2/104	2/104	
		.9	1/802	2/397	2/221	2/121	2/554	2/438	2/108	2/945	2/791	2/732	2/905	2/982	2/108	2/754	2/882	2/672	2/972	2/182	2/108	2/104	2/104	
		1	1/802	2/404	2/225	2/115	2/552	2/436	2/108	2/948	2/791	2/737	2/908	2/982	2/109	2/757	2/878	2/681	2/977	2/182	2/108	2/104	2/104	
.3	.1	.1	1/744	2/281	2/176	2/117	2/511	2/391	2/100	2/904	2/761	2/656	2/864	2/972	2/109	2/672	2/852	2/565	2/946	2/171	2/142	2/104	2/104	
		.3	1/924	2/424	2/244	2/131	2/625	2/519	2/108	2/947	2/844	2/755	2/911	2/995	2/100	2/820	2/917	2/642	2/975	2/188	2/106	2/104	2/104	
		.5	2/047	2/526	2/297	2/182	2/718	2/606	2/106	2/969	2/892	2/804	2/934	2/998	2/102	2/908	2/951	2/849	2/982	2/206	2/108	2/104	2/104	
		.7	2/128	2/612	2/325	2/207	2/771	2/665	2/103	2/978	2/924	2/801	2/944	2/991	2/981	2/940	2/968	2/886	2/979	2/954	2/972	2/108	2/104	
		.9	2/170	2/700	2/362	2/267	2/794	2/697	2/997	2/986	2/940	2/822	2/952	2/988	2/964	2/956	2/972	2/906	2/971	2/966	2/974	2/108	2/104	
		1	2/178	2/739	2/371	2/282	2/796	2/712	2/978	2/990	2/938	2/847	2/958	2/972	2/961	2/962	2/968	2/908	2/969	2/966	2/974	2/108	2/104	
.5	.1	.1	1/788	2/317	2/182	2/126	2/543	2/422	2/109	2/916	2/782	2/687	2/878	2/980	2/101	2/710	2/871	2/610	2/955	2/176	2/119	2/104	2/104	
		.3	2/070	2/531	2/296	2/176	2/726	2/612	2/104	2/966	2/898	2/801	2/932	2/996	2/102	2/918	2/952	2/856	2/980	2/202	2/108	2/104	2/104	
		.5	2/128	2/682	2/354	2/257	2/845	2/738	2/978	2/969	2/948	2/842	2/940	2/998	2/998	2/956	2/960	2/970	2/914	2/964	2/964	2/972	2/104	
		.7	2/130	2/778	2/371	2/285	2/907	2/814	2/929	2/946	2/955	2/858	2/921	2/948	2/956	2/962	2/966	2/922	2/957	2/962	2/966	2/972	2/104	
		.9	2/154	2/847	2/390	2/316	2/922	2/861	2/931	2/938	2/946	2/851	2/916	2/952	2/956	2/957	2/964	2/922	2/957	2/964	2/962	2/962	2/104	
		1	2/152	2/872	2/396	2/312	2/927	2/875	2/934	2/935	2/944	2/842	2/917	2/950	2/952	2/957	2/965	2/922	2/956	2/961	2/964	2/964	2/104	
.7	.1	.1	1/825	2/345	2/199	2/157	2/569	2/448	2/106	2/926	2/800	2/711	2/887	2/985	2/102	2/741	2/884	2/648	2/961	2/181	2/100	2/104	2/104	
		.3	2/199	2/622	2/300	2/200	2/800	2/689	2/106	2/971	2/922	2/817	2/939	2/991	2/991	2/964	2/946	2/966	2/900	2/968	2/957	2/104	2/104	
		.5	2/146	2/800	2/408	2/288	2/914	2/820	2/921	2/932	2/946	2/849	2/912	2/928	2/944	2/950	2/952	2/926	2/948	2/952	2/956	2/956	2/104	
		.7	2/167	2/881	2/414	2/315	2/924	2/880	2/922	2/922	2/922	2/829	2/906	2/928	2/930	2/928	2/928	2/915	2/928	2/928	2/940	2/940	2/104	
		.9	2/172	2/904	2/425	2/324	2/925	2/834	2/908	2/915	2/920	2/822	2/907	2/906	2/918	2/924	2/917	2/912	2/916	2/916	2/916	2/922	2/104	
		1	2/180	2/902	2/427	2/324	2/927	2/862	2/899	2/911	2/918	2/819	2/904	2/897	2/915	2/912	2/916	2/910	2/914	2/915	2/914	2/911	2/104	
.9	.1	.1	1/856	2/369	2/213	2/147	2/589	2/469	2/102	2/922	2/814	2/722	2/895	2/988	2/108	2/768	2/895	2/679	2/964	2/124	2/101	2/104	2/104	
		.3	2/305	2/688	2/339	2/204	2/848	2/741	2/942	2/945	2/825	2/931	2/916	2/942	2/928	2/946	2/950	2/906	2/942	2/947	2/954	2/956	2/104	
		.5	2/156	2/807	2/434	2/315	2/849	2/802	2/844	2/844	2/849	2/854	2/828	2/850	2/852	2/859	2/861	2/840	2/852	2/860	2/862	2/862	2/104	
		.7	2/168	2/855	2/436	2/300	2/845	2/826	2/851	2/860	2/861	2/860	2/852	2/859	2/864	2/862	2/866	2/860	2/866	2/866	2/866	2/865	2/104	
		.9	2/178	2/872	2/441	2/292	2/841	2/807	2/807	2/807	2/807	2/806	2/805	2/813	2/803	2/811	2/809	2/802	2/808	2/808	2/807	2/810	2/812	2/104
		1	2/176	2/870	2/440	2/292	2/841	2/868	2/800	2/802	2/804	2/801	2/801	2/800	2/800	2/800	2/802	2/802	2/802	2/802	2/802	2/802	2/802	2/104
.95	.1	.1	1/862	2/375	2/216	2/147	2/594	2/475	2/104	2/924	2/817	2/728	2/897	2/990	2/102	2/775	2/896	2/685	2/966	2/127	2/101	2/104	2/104	
		.3	2/324	2/695	2/340	2/212	2/848	2/744	2/922	2/929	2/826	2/922	2/902	2/928	2/924	2/934	2/928	2/897	2/920	2/925	2/940	2/942	2/104	
		.5	2/154	2/818	2/435	2/319	2/840	2/805	2/829	2/842	2/842	2/842	2/828	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/104	
		.7	2/152	2/846	2/434	2/305	2/842	2/822	2/842	2/842	2/842	2/842	2/828	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/104
		.9	2/150	2/841	2/430	2/292	2/842	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/104
		1	2/149	2/840	2/429	2/292	2/842	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/846	2/104

۴- نتایج عددی و ارزیابی عملکرد

یکی از معیارهای سنجش عملکرد نمودارهای کنترلی، میانگین طول اجرا (ARL) است و روش‌های بسیاری برای محاسبه‌ی ARL از جمله زنجیر مارکوف، معادلات انتگرال و شبیه‌سازی مونت کارلو مورد مطالعه قرار گرفته است. منظور از ARL، متوسط تعداد نقطه‌های رسم شده در یک نمودار کنترلی است، پیش از آن که یک نقطه خارج از حدود کنترلی قرار بگیرد. متوسط طول اجرا در حالت تحت کنترل و خارج از کنترل به ترتیب با نمادهای ARL_0 و ARL_1 نشان داده می‌شود. مقدار مطلوب ARL_0 باید بزرگ باشد تا تعداد هشدارهای اشتباه به حد اقل برسد و همچنین مقدار مطلوب ARL_1 باید کوچک باشد تا تغییرات میانگین فرایند به سرعت شناسایی شده و اقدامات اصلاحی برای بازگرداندن فرایند به حالت پایدار صورت بگیرد. با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو، برای نمودار کنترلی پیشنهادی به این صورت محاسبه شده است که حدود کنترلی دقیق و مجانبی با استفاده از مقادیر ارائه شده برای L در جدول‌های (۳) و (۴) تعیین می‌شوند. سپس آماره‌های کنترلی $GWMA_{RSS}^+$ روی نمودار کنترلی پیشنهادی رسم می‌شوند و تعداد آماره‌های کنترلی که خارج از حدود کنترلی قرار می‌گیرند، مشاهده می‌شود. این روال برای به دست آوردن متوسط طول اجرا ۵۰۰۰ بار تکرار می‌شود. مقادیر ARL_0 ، ARL_1 ، $SDRL_0$ و $SDRL_1$ با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو برای ترکیب‌های مختلف $q, \alpha, k = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ، $p = \{0.1, 0.07, 0.06, 0.055, 0.05\}$ و $m = 2$ در جدول‌های (۵) تا (۱۰) فراهم آمده است. توجه شود در جدول‌های (۵) تا (۷) از حدود کنترلی دقیق و در جدول‌های (۸) تا (۱۰) از حدود کنترلی مجانبی استفاده شده است. در جدول‌های (۵) تا (۱۰) زمانی که $\alpha = 1$ باشد نمودار کنترلی $GWMA_{RSS}^+$ به نمودار کنترلی $EWMA_{RSS}^+$ با ثابت هموارسازی $\lambda = 1 - q$ تبدیل می‌شود. با استفاده از اطلاعات موجود در جدول (۵)، مقدارهای ARL بر حسب سطح‌های مختلف P برای مقدارهای مختلف k در شکل (۲) رسم شده است. با توجه به شکل (۲) مشاهده می‌شود که تحت مقادیر ثابت q و $\alpha > 0.5$ با افزایش k، ARL_1 کاهش می‌یابد.

همچنین با توجه به شکل (۳) می‌توان نتیجه گرفت که افزایش مقدار q، کاهش ARL_1 را به دنبال دارد. با توجه به شکل‌های (۴) و (۵) دیده می‌شود که منحنی مربوط به $\alpha = 1$ که نشان‌دهنده‌ی نمودار کنترلی $EWMA_{RSS}^+$ است، دارای ARL کم‌تری نسبت به سایر منحنی‌ها است. پس می‌توان نتیجه گرفت که کارایی نمودار کنترلی $GWMA_{RSS}^+$ در شناسایی تغییرات به ویژه تغییرات کوچک نسبت به نمودار $EWMA_{RSS}^+$ بهتر است. به علاوه با مقایسه‌ی دو شکل (۴) و (۵) خواهیم دید که با افزایش تعداد چرخه‌ها، مقدار ARL_1 کاهش می‌یابد. علاوه بر موارد فوق، مقادیر بهینه‌ی پارامترهای نمودار کنترلی $GWMA_{RSS}^+$ برای تغییرات مختلف (کوچک، متوسط و بزرگ) در جدول (۱۱) خلاصه شده است. در جدول (۱۱) تفاوت نسبت تغییرات فرایند از حالت تحت کنترل به حالت خارج از کنترل یعنی $|p_1 - p_0|$ با Δ نشان داده شده است و $\Delta = 0.05$ بیان‌گر تغییرات کوچک، $\Delta = 0.1$ بیان‌گر تغییرات متوسط و $\Delta = \{0.2, 0.3\}$ بیان‌گر تغییرات بزرگ است. اساس کار انتخاب مقادیر موجود در جدول (۱۱) به این صورت است که از هر ستون از جدول‌های (۴) تا (۱۰) کم‌ترین مقدار ARL_1 منتظر با مقدار Δ را انتخاب کرده و مقدار L و پارامترهای q و α برای این مقدار کمینه ARL_1 به‌عنوان مقدار بهینه در نظر گرفته می‌شوند. نتایج مفید زیر از جدول (۱۱) به‌دست می‌آید:

- (۱) نمودار کنترلی $GWMA_{RSS}^+$ در شناسایی تغییرات کوچک فرایند نسبت به نمودار کنترلی $EWMA_{RSS}^+$ کارا تر است.
- (۲) نمودار کنترلی $GWMA_{RSS}^+$ برای شناسایی تغییرات بزرگ فرایند، یک نمودار بهینه نیست اما می‌تواند با نمودار کنترلی $EWMA_{RSS}^+$ رقابت کند.
- (۳) برای پایش تغییرات کوچک فرایند در نمودار کنترلی $GWMA_{RSS}^+$ مقادیر بزرگ برای k, m, α و q توصیه می‌شود.

جدول ۵- مقادیر ARL و SDRL نمودار کنترلی $GWMA_{RSS}^+$ برای ترکیب‌های مختلف α با در نظر گرفتن $ARL_0 \cong 370$ و $m=2$ ، $q=0.1$ ، زمانی که از حدود کنترلی دقیق استفاده شود.

α	k	L	ARL					SDRL				
			p					p				
			۰/۵	۰/۵۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۵	۰/۵۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸
۰/۱	۲	۲/۳۴۷	۳۶۸/۶۲	۱۲۲/۹۹	۴۲/۸۳	۱۲/۴۰	۵/۶۹	۳۶۴/۶۲	۱۰۸/۰۰	۳۳/۷۲	۸/۳۰	۳/۲۶
	۳	۳/۱۰۰	۳۶۸/۶۲	۱۵۸/۸۵	۶۲/۲۷	۱۵/۹۸	۵/۸۸	۳۶۴/۶۰	۱۵۰/۱۹	۵۸/۳۸	۱۴/۱۳	۴/۲۸
	۴	۲/۸۸۵	۳۶۵/۶۲	۹۱/۶۱	۲۹/۴۵	۷/۲۰	۳/۰۵	۳۶۳/۸۴	۸۲/۸۳	۲۵/۱۹	۵/۳۴	۱/۶۹
	۵	۲/۷۳۱	۳۶۹/۹۳	۶۲/۸۴	۱۸/۰۳	۴/۳۹	۲/۰۲	۳۶۷/۴۲	۵۳/۹۷	۱۴/۲۶	۲/۸۶	۰/۹۵
	۶	۲/۶۱۴	۳۶۱/۶۰	۵۰/۶۱	۱۳/۳۴	۳/۳۳	۱/۵۷	۳۶۰/۳۶	۴۱/۹۳	۹/۷۹	۱/۹۳	۰/۷۲
۰/۳	۲	۲/۳۹۸	۳۷۳/۵۵	۱۸۱/۳۲	۶۲/۵۸	۱۴/۳۵	۵/۹۰	۳۶۹/۸۳	۱۷۷/۹۴	۵۷/۸۵	۱۱/۱۲	۳/۶۶
	۳	۳/۱۰۰	۳۷۲/۰۴	۱۸۳/۳۵	۶۸/۰۸	۱۶/۰۵	۵/۹۳	۳۶۸/۶۸	۱۸۰/۳۴	۶۵/۵۰	۱۴/۲۲	۴/۳۶
	۴	۲/۹۰۶	۳۶۵/۱۲	۱۱۶/۸۹	۳۳/۰۵	۷/۰۳	۲/۹۵	۳۶۷/۶۵	۱۱۵/۰۳	۳۰/۵۶	۵/۴۸	۱/۶۵
	۵	۲/۷۶۵	۳۶۳/۹۲	۸۳/۳۱	۲۰/۴۳	۴/۳۸	۲/۰۳	۳۶۲/۰۸	۷۹/۸۸	۱۷/۵۶	۲/۸۷	۰/۹۶
	۶	۲/۶۶۲	۳۷۰/۶۳	۷۰/۸۶	۱۵/۳۰	۳/۳۴	۱/۵۸	۳۷۱/۳۰	۶۷/۳۰	۱۲/۵۹	۲/۰۰	۰/۷۳
۰/۵	۲	۲/۴۲۷	۳۶۹/۵۱	۲۱۷/۶۸	۸۶/۸۹	۱۷/۹۶	۶/۳۷	۳۶۶/۰۵	۲۱۵/۱۸	۸۵/۱۷	۱۵/۷۱	۴/۴۰
	۳	۳/۰۹۷	۳۶۶/۲۹	۱۹۱/۵۶	۷۱/۹۵	۱۵/۳۵	۴/۹۰	۳۶۴/۶۷	۱۹۲/۳۸	۷۱/۴۱	۱۴/۷۰	۴/۳۸
	۴	۲/۹۲۱	۳۶۹/۸۸	۱۳۷/۴۳	۳۹/۱۹	۷/۲۴	۲/۹۵	۳۶۸/۶۷	۱۳۵/۷۶	۳۷/۶۵	۵/۸۵	۱/۶۵
	۵	۲/۷۸۶	۳۶۹/۴۱	۱۰۰/۵۳	۲۳/۵۷	۴/۴۷	۲/۰۲	۳۶۵/۸۶	۹۸/۲۸	۲۱/۶۶	۳/۰۴	۰/۹۵
	۶	۲/۶۹۴	۳۶۹/۹۲	۸۸/۵۹	۱۸/۶۵	۳/۴۴	۱/۵۸	۳۷۲/۶۷	۸۶/۰۲	۱۶/۶۸	۲/۱۴	۰/۷۴
۰/۷	۲	۲/۴۴۰	۳۶۹/۳۸	۲۳۴/۳۰	۱۰۲/۳۶	۲۲/۸۹	۷/۴۸	۳۶۸/۶۲	۲۳۳/۴۶	۱۰۰/۸۲	۲۱/۳۰	۵/۹۳
	۳	۳/۰۹۲	۳۷۲/۹۱	۱۹۷/۸۹	۷۴/۴۸	۱۵/۴۷	۴/۹۵	۳۷۱/۰۲	۱۹۸/۰۲	۷۴/۲۰	۱۴/۷۵	۴/۴۰
	۴	۲/۹۳۵	۳۷۵/۲۵	۱۴۳/۳۴	۴۱/۵۹	۷/۵۰	۲/۹۷	۳۷۳/۸۸	۱۴۲/۴۰	۴۰/۲۹	۶/۱۵	۱/۷۰
	۵	۲/۷۹۳	۳۶۵/۶۳	۱۰۷/۴۸	۲۵/۰۲	۴/۵۱	۲/۰۲	۳۶۲/۰۸	۱۰۵/۷۳	۲۳/۲۶	۳/۱۰	۰/۹۶
	۶	۲/۷۱۷	۳۶۹/۰۱	۹۴/۱۶	۲۰/۲۴	۳/۵۵	۱/۵۸	۳۶۶/۹۳	۹۲/۷۶	۱۸/۳۴	۲/۳۴	۰/۷۳
۰/۹	۲	۲/۴۳۸	۳۶۱/۳۱	۲۳۰/۲۱	۱۰۲/۰۰	۲۲/۶۵	۷/۴۸	۳۶۰/۹۱	۲۲۸/۱۷	۱۰۰/۲۷	۲۱/۱۳	۶/۰۰
	۳	۳/۰۸۶	۳۸۰/۲۸	۲۰۲/۱۷	۷۶/۰۵	۱۵/۴۸	۴/۹۰	۳۷۸/۶۴	۲۰۱/۱۷	۷۵/۶۰	۱۴/۷۸	۴/۳۴
	۴	۲/۹۴۵	۳۷۰/۶۳	۱۴۳/۴۳	۴۱/۷۱	۷/۵۶	۲/۶۹	۳۷۲/۹۴	۱۴۲/۴۶	۳۹/۹۰	۶/۱۹	۱/۶۸
	۵	۲/۷۹۲	۳۷۳/۷۹	۱۱۳/۳۵	۲۶/۵۸	۴/۵۴	۲/۰۲	۳۷۱/۸۲	۱۱۲/۱۰	۲۴/۹۴	۳/۲۱	۰/۹۶
	۶	۲/۷۳۲	۳۶۶/۱۳	۹۴/۶۶	۲۰/۳۲	۳/۵۳	۱/۵۷	۳۶۶/۳۸	۹۲/۹۵	۱۸/۷۷	۲/۳۱	۰/۷۴
۱	۲	۲/۴۳۶	۳۹۷/۰۶	۲۵۸/۳۱	۱۱۳/۸۳	۲۵/۵۸	۸/۱۸	۳۹۶/۱۸	۲۵۶/۵۱	۱۱۲/۳۳	۲۳/۸۸	۶/۵۱
	۳	۳/۰۸۴	۳۸۸/۸۴	۲۰۹/۲۸	۷۶/۷۸	۱۵/۶۴	۴/۹۰	۳۸۷/۹۳	۲۱۰/۲۱	۷۶/۱۸	۱۴/۹۹	۴/۳۳
	۴	۲/۹۴۸	۳۴۹/۴۴	۱۴۰/۵۸	۴۱/۳۱	۷/۵۶	۲/۹۸	۳۵۰/۱۱	۱۳۸/۸۸	۳۹/۹۷	۶/۲۳	۱/۷۰
	۵	۲/۷۹۱	۳۷۳/۶۰	۱۱۲/۸۰	۲۶/۸۱	۴/۵۶	۲/۰۲	۳۷۲/۹۸	۱۱۰/۵۰	۲۵/۱۰	۳/۲۰	۰/۹۵
	۶	۲/۷۳۷	۳۶۹/۷۷	۹۴/۶۹	۱۰/۳۳	۳/۵۱	۱/۵۸	۳۶۸/۷۴	۹۳/۰۳	۱۸/۷۴	۲/۲۹	۰/۷۴

جدول ۶: مقادیر ARL و SDRL نمودار کنترلی $GWMA_{RSS}^+$ برای ترکیب‌های مختلف α با در نظر گرفتن $ARL_0 \cong 370$, $m=2$ و $q=0.5$ زمانی که از حدود کنترلی دقیق استفاده شود

α	k	L	ARL					SDRL				
			p					p				
			0.5	0.55	0.6	0.7	0.8	0.5	0.55	0.6	0.7	0.8
0.1	2	2/423	373/10	104/43	38/56	12/23	6/12	367/37	84/76	27/73	7/34	2/92
	3	3/099	371/46	148/29	61/97	16/02	5/90	369/88	139/42	58/75	14/14	4/31
	4	2/916	370/79	82/07	28/49	7/18	3/05	368/12	71/22	24/48	5/31	1/69
	5	2/782	364/72	55/25	17/34	4/35	2/02	361/32	45/24	13/60	2/81	0/96
	6	2/687	368/10	45/70	13/10	3/34	1/58	363/66	35/18	9/28	1/95	0/73
	0.3	2	2/612	365/51	113/16	39/28	11/66	5/47	364/29	99/52	30/42	7/59
3		3/059	373/41	153/56	60/76	14/29	4/81	378/32	148/67	58/88	12/92	4/14
4		2/969	370/48	85/53	28/33	6/92	2/95	366/12	77/18	24/55	5/26	1/63
5		2/899	371/40	58/48	17/28	4/32	2/02	370/09	49/83	13/67	2/79	0/94
6		2/862	368/24	46/97	12/95	3/31	1/57	367/62	37/92	9/47	1/92	0/73
0.5		2	2/740	372/13	142/05	46/42	12/08	5/52	370/49	136/91	40/53	8/27
	3	2/981	369/09	158/06	50/61	10/43	4/08	370/68	155/55	46/61	7/75	2/78
	4	2/970	368/53	97/85	28/10	6/47	2/91	368/14	93/78	24/49	4/44	1/55
	5	2/951	371/26	67/48	17/78	4/32	2/02	368/45	62/58	14/46	2/74	0/94
	6	2/941	371/27	52/14	12/91	3/28	1/57	369/52	46/81	9/73	1/89	0/72
	0.7	2	2/817	373/41	171/38	58/67	13/42	5/63	374/28	168/67	55/39	10/44
3		2/934	372/93	148/26	43/66	8/66	3/51	371/83	146/58	40/93	6/47	2/21
4		2/948	371/94	106/32	27/52	5/88	2/80	372/16	103/85	24/63	3/82	1/32
5		2/956	369/90	77/25	18/37	4/19	2/01	367/64	73/94	15/65	2/54	0/93
6		2/959	372/34	58/71	13/03	3/02	1/53	369/40	55/86	10/72	1/78	0/67
0.9		2	2/862	368/70	191/20	69/15	14/99	5/81	366/72	188/47	66/35	12/61
	3	2/929	364/93	147/94	43/61	8/53	3/46	364/94	147/17	41/79	6/63	2/15
	4	2/939	371/94	110/94	27/74	5/60	2/70	372/41	108/96	25/50	3/68	1/20
	5	2/944	368/85	84/01	19/01	4/08	2/00	368/16	81/85	16/72	2/44	0/91
	6	2/951	372/38	65/03	13/76	3/02	1/53	370/60	63/31	11/89	1/78	0/65
	1	2	2/876	370/02	199/64	73/76	15/75	5/92	368/11	197/67	71/90	13/52
3		2/936	372/08	152/55	45/76	8/81	3/47	372/59	151/30	43/98	7/02	2/19
4		2/940	371/49	113/30	28/33	5/49	2/53	369/72	111/80	26/17	3/76	1/17
5		2/946	372/08	85/86	19/40	3/99	1/98	369/86	83/88	17/44	2/43	0/85
6		2/946	371/69	67/80	14/20	3/02	1/53	371/99	66/31	12/44	1/79	0/66

جدول ۷: مقادیر ARL و SDRL نمودار کنترلی $GWMA_{RSS}^+$ برای ترکیب‌های مختلف α با در نظر گرفتن $ARL_0 \cong 370$, $m=2$ و $q=0.95$ زمانی که از حدود کنترلی دقیق استفاده شود.

α	k	L	ARL					SDRL				
			P					P				
			۰/۵	۰/۵۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۵	۰/۵۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸
۰/۱	۲	۲/۴۷۵	۳۶۷/۰۶	۹۷/۶۱	۳۶/۸۷	۱۲/۰۶	۶/۱۱	۳۵۸/۹۲	۷۶/۸۹	۲۵/۸۱	۷/۱۶	۲/۹۰
	۳	۳/۰۹۴	۳۷۰/۱۳	۱۵۴/۴۱	۶۰/۴۸	۱۴/۹۴	۴/۸۶	۳۷۲/۸۸	۱۳۷/۱۲	۵۸/۲۲	۱۴/۱۴	۴/۳۱
	۴	۲/۹۳۴	۳۶۵/۵۳	۸۰/۰۹	۲۸/۳۲	۷/۱۵	۳/۰۴	۳۶۳/۲۵	۶۸/۷۷	۲۴/۱۴	۵/۲۸	۱/۶۸
	۵	۲/۸۱۸	۳۷۴/۱۰	۵۳/۵۳	۱۷/۲۵	۴/۳۸	۲/۰۲	۳۷۳/۲۰	۴۲/۵۰	۱۳/۴۸	۲/۸۴	۰/۹۶
	۶	۲/۷۳۸	۳۷۲/۱۸	۴۳/۵۷	۱۳/۰۴	۳/۳۵	۱/۵۷	۳۷۰/۴۴	۳۲/۸۴	۹/۰۸	۱/۹۷	۰/۷۲
۰/۳	۲	۲/۷۶۰	۳۷۰/۷۱	۸۴/۰۰	۳۲/۸۷	۱۱/۳۰	۵/۸۶	۳۷۲/۱۴	۶۴/۰۳	۲۲/۲۱	۶/۵۸	۲/۷۱
	۳	۲/۹۴۱	۳۷۱/۰۶	۸۱/۲۸	۲۸/۴۸	۸/۵۲	۳/۸۳	۳۷۷/۷۸	۶۰/۰۶	۱۸/۹۲	۵/۲۶	۲/۴۲
	۴	۲/۹۴۸	۳۶۹/۴۶	۵۹/۲۱	۲۰/۲۴	۶/۰۰	۲/۸۹	۳۷۵/۱۷	۴۳/۳۶	۱۳/۴۴	۳/۵۷	۱/۴۷
	۵	۲/۹۴۳	۳۷۰/۷۴	۴۴/۶۹	۱۴/۷۹	۴/۲۳	۲/۰۱	۳۷۲/۲۲	۳۲/۳۰	۹/۷۸	۲/۵۲	۰/۹۴
	۶	۲/۹۴۰	۳۶۹/۵۵	۳۵/۸۹	۱۱/۵۱	۳/۲۷	۱/۵۷	۳۶۸/۸۷	۲۵/۳۵	۷/۴۸	۱/۸۶	۰/۷۲
۰/۵	۲	۲/۷۶۹	۳۷۲/۸۳	۷۲/۰۰	۲۷/۱۴	۹/۴۵	۴/۸۶	۴۰۴/۶۵	۵۷/۱۷	۱۹/۱۰	۵/۷۴	۲/۵۲
	۳	۲/۸۰۳	۳۶۹/۲۷	۴۹/۰۳	۱۷/۷۸	۵/۹۷	۳/۰۷	۴۰۲/۸۷	۳۶/۹۹	۱۱/۸۶	۳/۴۸	۱/۶۱
	۴	۲/۸۱۰	۳۶۸/۱۲	۳۶/۳۳	۱۲/۶۹	۴/۰۴	۱/۹۶	۴۰۱/۳۶	۲۶/۶۹	۸/۳۲	۲/۴۶	۱/۱۳
	۵	۲/۸۱۱	۳۷۰/۵۵	۲۸/۹۱	۱۰/۰۳	۳/۴۴	۱/۹۴	۴۰۶/۳۵	۲۰/۲۶	۶/۱۳	۱/۶۷	۰/۸۰
	۶	۲/۷۱۴	۳۷۱/۵۰	۲۳/۷۴	۸/۱۹	۲/۷۸	۱/۵۲	۴۰۱/۲۶	۱۶/۳۱	۴/۸۳	۱/۳۶	۰/۶۳
۰/۷	۲	۲/۶۰۴	۳۷۱/۵۰	۶۶/۰۴	۲۳/۵۰	۸/۱۳	۴/۴۲	۴۰۲/۴۶	۵۵/۹۶	۱۷/۱۰	۴/۷۸	۲/۰۴
	۳	۲/۶۱۰	۳۶۹/۴۹	۴۲/۸۶	۱۴/۸۹	۴/۹۶	۲/۶۰	۴۰۱/۸۸	۳۴/۵۸	۱۰/۴۰	۲/۹۴	۱/۳۶
	۴	۲/۶۲۰	۳۶۹/۰۲	۳۰/۹۶	۱۰/۴۸	۳/۳۲	۱/۷۳	۴۰۰/۶۹	۲۴/۳۲	۷/۳۲	۲/۰۶	۰/۸۵
	۵	۲/۶۲۷	۳۷۴/۸۲	۲۴/۱۲	۸/۰۱	۲/۶۲	۱/۳۹	۴۱۱/۲۲	۱۸/۵۳	۵/۴۵	۱/۵۶	۰/۶۷
	۶	۲/۶۲۲	۳۷۱/۶۳	۱۹/۷۸	۶/۷۳	۲/۴۲	۱/۴۸	۳۹۹/۸۸	۱۴/۵۰	۴/۲۰	۱/۰۸	۰/۵۵
۰/۹	۲	۲/۵۳۲	۳۷۰/۲۴	۷۱/۱۷	۲۳/۹۰	۷/۷۰	۴/۰۸	۳۸۳/۵۲	۶۳/۵۵	۱۸/۰۴	۴/۶۹	۱/۹۱
	۳	۲/۵۳۳	۳۶۴/۶۶	۴۵/۳۹	۱۴/۷۱	۴/۸۷	۲/۵۹	۳۸۲/۰۵	۳۸/۱۵	۱۰/۴۵	۲/۸۱	۱/۳۰
	۴	۲/۵۳۵	۳۶۵/۴۶	۳۲/۱۰	۱۰/۲۷	۳/۳۱	۱/۷۳	۳۸۴/۵۷	۲۵/۹۳	۷/۲۵	۲/۰۰	۰/۸۵
	۵	۲/۵۳۸	۳۶۶/۳۴	۲۴/۰۷	۷/۵۹	۲/۳۶	۱/۳۳	۳۹۵/۶۶	۱۹/۱۷	۵/۴۳	۱/۴۴	۰/۵۵
	۶	۲/۵۳۷	۳۶۷/۹۶	۱۹/۴۴	۶/۲۷	۲/۰۶	۱/۱۶	۳۸۹/۱۶	۱۴/۸۷	۴/۲۰	۱/۲۲	۰/۴۳
۱	۲	۲/۵۲۳	۳۷۰/۴۶	۷۶/۹۱	۲۴/۸۰	۷/۷۹	۴/۰۸	۳۸۱/۲۲	۷۰/۰۴	۱۹/۰۰	۴/۸۸	۱/۹۳
	۳	۲/۵۲۴	۳۶۸/۷۸	۴۷/۶۳	۱۵/۱۴	۴/۷۹	۲/۵۶	۳۸۱/۴۹	۴۱/۰۰	۱۰/۹۱	۲/۸۱	۱/۲۶
	۴	۲/۵۲۷	۳۷۱/۸۲	۳۳/۴۶	۱۰/۴۹	۳/۳۰	۱/۷۳	۳۸۸/۱۵	۲۷/۴۸	۷/۴۲	۱/۹۸	۰/۸۴
	۵	۲/۵۳۲	۳۷۳/۵۰	۲۵/۰۵	۷/۷۲	۲/۳۶	۱/۳۲	۳۹۳/۸۳	۲۰/۲۴	۵/۵۷	۱/۴۴	۰/۵۴
	۶	۲/۵۲۷	۳۶۹/۲۸	۲۰/۱۴	۶/۲۹	۲/۰۶	۱/۱۶	۳۸۹/۲۲	۱۵/۶۶	۴/۲۵	۱/۲۲	۰/۴۳

جدول ۸- مقادیر ARL و SDRL نمودار کنترلی $GWMA_{SS}^+$ برای ترکیب‌های مختلف α با در نظر گرفتن $ARL_0 \cong 370$ و $m=2$ ، $q=0/1$ ، زمانی که از حدود کنترلی مجانبی استفاده شود.

α	k	L	ARL					SDRL				
			p					p				
			0/5	0/55	0/6	0/7	0/8	0/5	0/55	0/6	0/7	0/8
0/1	2	2/347	369/30	122/10	42/93	12/40	5/70	365/26	107/30	32/78	8/25	2/25
	3	3/100	370/34	159/12	62/33	15/92	5/88	366/51	152/27	58/46	14/07	4/32
	4	2/885	367/40	91/23	29/20	7/20	3/04	364/50	81/96	25/05	5/37	1/67
	5	2/731	372/29	62/12	17/94	4/37	2/02	368/58	52/92	14/17	2/84	0/95
	6	2/614	362/76	50/41	12/32	2/30	1/57	359/83	41/65	9/72	1/93	0/72
	0/3	2	2/398	376/29	180/78	62/44	14/38	5/92	377/25	177/35	57/80	11/14
3		3/100	368/02	182/60	68/23	16/08	5/91	369/09	180/67	65/77	14/20	4/33
4		2/906	365/95	117/82	32/80	7/02	2/94	366/28	114/85	30/39	5/47	1/65
5		2/765	362/74	84/23	20/29	4/40	2/02	359/24	80/70	17/54	2/91	0/94
6		2/662	366/44	71/03	15/21	2/34	1/57	368/65	67/56	12/56	1/98	0/72
0/5		2	2/427	371/63	218/06	86/69	18/04	6/35	368/98	216/00	84/71	15/70
	3	3/097	367/74	195/14	73/92	16/37	5/91	364/46	194/14	71/77	14/67	4/35
	4	2/921	375/02	137/74	38/93	7/27	2/94	371/65	135/71	37/62	5/84	1/66
	5	2/786	370/70	101/21	23/59	4/46	2/02	369/75	99/57	21/76	3/04	0/96
	6	2/693	368/90	87/35	18/48	2/44	1/57	364/92	85/85	16/60	2/16	0/73
	0/7	2	2/440	371/29	235/70	102/56	22/87	7/45	369/90	234/72	101/01	21/26
3		3/091	367/04	199/66	75/39	16/39	5/91	366/36	196/91	73/91	14/64	4/33
4		2/934	364/66	142/89	41/00	7/54	2/97	364/38	142/29	39/84	6/19	1/68
5		2/793	369/55	107/86	25/25	4/52	2/02	369/48	105/90	23/54	3/11	0/95
6		2/716	368/21	92/89	20/14	2/52	1/58	366/28	91/25	18/54	2/29	0/74
0/9		2	2/438	363/64	230/61	102/35	22/72	7/51	361/15	227/63	101/05	21/23
	3	3/086	380/46	204/89	77/24	16/52	5/92	380/93	202/88	75/31	14/88	4/32
	4	2/945	371/30	145/14	41/46	7/50	2/96	370/72	142/94	40/02	6/13	1/68
	5	2/791	369/33	102/69	24/79	4/49	2/02	369/45	101/68	23/11	3/06	0/95
	6	2/732	372/23	94/66	20/29	2/55	1/57	370/84	92/82	18/62	2/32	0/73
	1	2	2/436	396/38	258/00	114/93	25/53	8/17	394/97	256/25	112/85	23/84
3		3/084	389/15	209/79	78/80	16/66	5/88	388/02	207/14	76/84	14/98	4/34
4		2/948	349/04	140/09	41/18	7/51	2/97	351/38	140/45	39/65	6/14	1/68
5		2/791	372/66	114/23	26/46	4/55	2/02	371/83	112/82	24/95	3/18	0/96
6		2/737	366/81	94/25	20/32	2/52	1/57	367/05	92/78	18/80	2/30	0/73

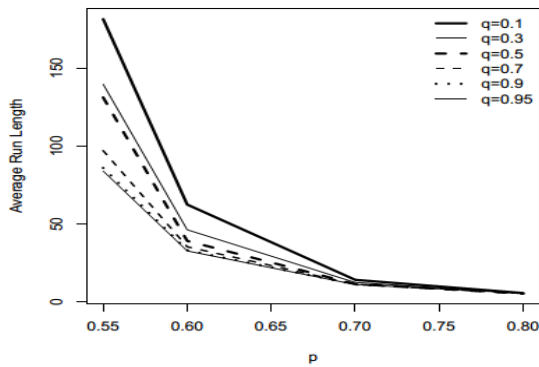
جدول ۹: مقادیر ARL و SDRL نمودار کنترلی $GWMA_{RSS}^*$ برای ترکیب‌های مختلف α با در نظر گرفتن $ARL_0 \cong 370$ ، $m=2$ و $h=0.5$ ، زمانی که از حدود کنترلی مجانبی استفاده شود.

α	k	L	ARL					SDRL				
			p					p				
			۰/۵	۰/۵۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۵	۰/۵۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸
۰/۱	۲	۲/۴۲۳	۳۷۲/۷۲	۱۰۵/۰۰	۳۸۶۰	۱۲/۲۶	۶/۱۴	۳۶۴/۸۰	۸۵/۱۴	۲۷/۸۹	۷/۳۶	۲/۹۴
	۳	۳/۰۹۹	۳۷۱/۱۳	۱۵۰/۱۶	۶۱/۳۱	۱۵۸۷	۵/۹۰	۳۶۷/۵۱	۱۴۰/۱۸	۵۸/۱۸	۱۴/۰۰	۴/۳۲
	۴	۲/۹۱۶	۳۷۳/۲۹	۸۲/۲۸	۲۸۶۵	۷/۲۳	۳/۰۴	۳۷۱/۳۹	۷۲/۳۹	۲۴/۴۲	۵/۳۷	۱/۶۸
	۵	۲/۷۸۲	۳۶۳/۰۸	۵۵/۶۹	۱۷/۵۲	۴/۳۵	۲/۰۱	۳۶۰/۲۶	۴۵۰/۰۸	۱۳/۶۷	۲/۸۱	۰/۹۵
	۶	۲/۶۸۷	۳۷۴/۶۰	۴۵/۷۴	۱۳/۱۶	۳/۳۵	۱/۵۷	۳۷۰/۷۰	۳۵/۱۳	۹/۲۸	۱/۹۶	۰/۷۲
	۰/۳	۲	۲/۶۱۲	۳۶۹/۰۴	۱۱۴/۰۷	۴۰/۰۷	۱۲/۳۰	۶/۱۳	۳۶۵/۶۳	۹۸/۸۵	۳۰/۲۱	۷/۵۷
۳		۳/۰۵۴	۳۶۵/۹۷	۱۵۴/۲۴	۶۱/۸۲	۱۵/۴۵	۴/۵/۱	۳۶۳/۵۴	۱۴۷/۷۸	۵۷/۷۷	۱۲/۸۰	۴/۰۶
۴		۲/۹۶۶	۳۶۸/۵۸	۸۶/۳۵	۲۸/۷۸	۷/۱۸	۳/۰۴	۳۶۴/۷۴	۷۷/۰۲	۲۴/۶۱	۵/۳۳	۱/۶۸
۵		۲/۸۹۸	۳۶۹/۸۸	۵۸/۳۹	۱۷/۴۸	۴/۳۵	۲/۰۲	۳۶۸/۰۴	۴۹/۶۸	۱۳/۷۰	۲/۸۱	۰/۹۴
۶		۲/۸۶۱	۳۷۲/۳۶	۴۷/۲۲	۱۳/۱۷	۳/۳۴	۱/۵۸	۳۶۶/۲۰	۳۸/۳۳	۹/۴۰	۱/۹۳	۰/۷۴
۰/۵		۲	۲/۷۳۸	۳۷۰/۳۶	۱۴۱/۸۳	۴۶/۸۸	۱۲/۵۲	۵/۹۹	۳۶۴/۱۴	۱۳۵/۳۲	۳۹/۹۳	۸/۳۲
	۳	۲/۹۷۸	۳۷۰/۰۲	۱۵۹/۶۳	۵۱/۱۹	۱۱/۱۴	۴/۸۷	۳۶۹/۶۲	۱۵۴/۷۸	۴۶/۲۶	۷/۴۹	۲/۵۴
	۴	۲/۹۶۹	۳۶۶/۰۸	۹۸/۳۶	۲۸/۶۷	۶/۷۸	۳/۰۱	۳۶۵/۹۲	۹۳/۱۴	۲۴/۷۶	۴/۴۴	۱/۵۹
	۵	۲/۹۴۸	۳۶۸/۲۵	۶۶/۸۸	۱۷/۸۶	۴/۳۳	۲/۰۲	۳۶۶/۹۴	۶۱/۹۰	۱۴/۳۷	۲/۷۴	۰/۹۵
	۶	۲/۹۴۲	۳۷۳/۶۳	۵۲/۵۸	۱۳/۰۱	۳/۳۰	۱/۵۷	۳۷۱/۰۸	۴۷/۲۰	۹/۷۳	۱/۹۱	۰/۷۲
	۰/۷	۲	۲/۸۱۴	۳۶۶/۵۵	۱۷۰/۳۴	۵۷/۹۹	۱۳/۳۲	۵/۶۵	۳۶۴/۷۸	۱۶۸/۳۱	۵۴/۴۴	۱۰/۳۰
۳		۲/۹۲۹	۳۶۶/۴۸	۱۴۸/۳۱	۴۴/۱۰	۹/۱۱	۴/۰۸	۳۶۴/۳۱	۱۴۶/۰۹	۴۰/۷۰	۶/۳۳	۱/۹۶
۴		۲/۹۴۶	۳۷۰/۵۰	۱۰۶/۹۰	۲۷/۷۲	۶/۱۷	۲/۹۱	۳۶۶/۱۵	۱۰۲/۹۳	۲۴/۳۲	۳/۸۲	۱/۳۸
۵		۲/۹۵۵	۳۷۱/۹۶	۷۷/۳۴	۱۸/۴۹	۴/۲۴	۲/۰۱	۳۷۱/۷۹	۷۴/۴۶	۱۵/۷۵	۲/۵۸	۰/۹۳
۶		۲/۹۵۸	۳۷۰/۳۹	۵۸/۹۵	۱۳/۳۴	۳/۲۸	۱/۵۷	۳۷۱/۰۸	۵۵/۵۲	۱۰/۵۲	۱/۸۷	۰/۷۲
۰/۹		۲	۲/۸۶۱	۳۶۹/۲۲	۱۹۰/۱۸	۶۹/۱۵	۱۴/۹۴	۵/۸۴	۳۶۹/۲۷	۱۸۷/۲۵	۶۶/۲۲	۱۲/۴۴
	۳	۲/۹۳۱	۳۷۰/۸۳	۱۴۹/۹۹	۴۴/۷۹	۸/۹۵	۳/۸۵	۳۶۷/۱۳	۱۴۷/۸۲	۴۲/۱۵	۶/۵۸	۱/۹۵
	۴	۲/۹۳۸	۳۷۱/۵۸	۱۱۰/۱۷	۲۸/۱۴	۵/۷۷	۲/۷۶	۳۶۷/۴۲	۱۰۸/۱۶	۲۵/۲۸	۳/۶۳	۱/۲۱
	۵	۲/۹۴۶	۳۷۲/۳۸	۸۴/۰۹	۱۹/۳۷	۴/۱۲	۲/۰۱	۳۷۷/۸۸	۸۲/۰۱	۱۷/۰۳	۲/۴۶	۰/۹۱
	۶	۲/۹۵۱	۳۶۹/۶۸	۶۴/۹۳	۱۳/۸۰	۳/۰۳	۱/۵۳	۳۷۱/۱۹	۶۳/۳۴	۱۱/۹۵	۱/۷۹	۰/۶۶
	۱	۲	۲/۸۷۵	۳۶۹/۳۹	۱۹۸/۱۸	۷۴/۷۳	۱۶/۱۲	۶/۰۷	۳۶۴/۶۸	۱۹۵/۶۳	۷۱/۸۰	۱۳/۶۲
۳		۲/۹۳۴	۳۷۰/۶۲	۱۵۲/۲۴	۴۶/۴۰	۹/۲۳	۳/۸۸	۳۷۱/۹۹	۱۴۹/۴۲	۴۴/۳۰	۶/۹۷	۲/۰۱
۴		۲/۹۳۵	۳۶۷/۸۰	۱۱۲/۶۰	۲۸/۶۷	۵/۸۰	۲/۷۷	۳۶۷/۲۰	۱۰۹/۶۱	۲۶/۲۲	۳/۶۷	۱/۲۱
۵		۲/۹۴۴	۳۶۹/۳۰	۸۶/۱۱	۱۹/۷۲	۴/۱۵	۲/۰۱	۳۶۸/۹۳	۸۳/۷۷	۱۷/۳۲	۲/۵۰	۰/۹۱
۶		۲/۹۴۳	۳۶۹/۱۹	۶۶/۸۲	۱۴/۱۴	۳/۰۳	۱/۵۲	۳۶۹/۳۳	۶۵/۳۵	۱۲/۴۱	۱/۸۰	۰/۶۵

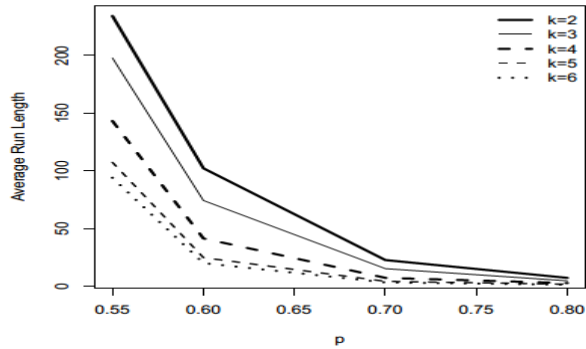
جدول ۱۰- مقادیر ARL و SDRL نمودار کنترلی $GWMA_{S_{RSS}}^+$ برای ترکیب‌های مختلف α با در نظر گرفتن $ARL_0 \cong 370$ ، $m=2$ ، $q=0.95$ و زمانی که از حدود کنترلی مجانی استفاده

شود

α	k	L	ARL					SDRL				
			p					p				
			۰/۵	۰/۵۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۵	۰/۵۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸
۰/۱	۲	۲/۴۷۵	۳۶۸/۳۸	۹۸/۲۴	۳۷/۱۲	۱۲/۱۲	۶/۱۲	۳۵۸/۱۳	۷۶/۷۰	۲۵/۷۷	۷/۱۲	۲/۹۱
	۳	۳/۰۹۴	۳۷۴/۰۱	۱۴۷/۷۱	۶۱/۴۳	۱۵/۹۹	۵/۸۹	۳۷۱/۷۵	۱۳۸/۲۵	۵۷/۷۱	۱۴/۱۴	۴/۳۳
	۴	۲/۹۳۴	۳۶۶/۹۴	۸۰/۲۰	۲۸/۶۷	۷/۲۹	۳/۰۴	۳۶۰/۴۶	۶۹/۱۰	۲۴/۳۶	۵/۳۷	۱/۶۷
	۵	۲/۸۱۷	۳۶۸/۲۹	۵۳/۸۹	۱۷/۶۱	۴/۶۴	۲/۱۵	۳۶۴/۲۸	۴۲/۳۳	۱۳/۴۵	۲/۸۰	۱/۰۶
	۶	۲/۷۳۸	۳۷۴/۴۰	۴۳/۹۵	۱۳/۱۲	۳/۳۹	۱/۵۷	۳۷۱/۶۴	۳۲/۸۱	۹/۱۹	۱/۹۷	۰/۷۳
	۰/۳	۲	۲/۷۴۴	۳۶۹/۶۴	۸۷/۹۰	۳۴/۸۸	۱۲/۲۷	۶/۴۲	۳۵۲/۱۲	۶۳/۹۱	۲۲/۲۲	۶/۷۱
۳		۲/۹۲۲	۳۷۱/۱۷	۸۳/۵۷	۳۰/۳۶	۹/۶۰	۴/۷۵	۳۶۵/۰۶	۵۹/۶۶	۱۸/۸۰	۵/۱۶	۲/۲۹
۴		۲/۹۲۹	۳۷۰/۲۴	۶۱/۷۶	۲۱/۴۷	۶/۴۵	۳/۰۱	۳۶۱/۵۳	۴۳/۴۸	۱۳/۵۰	۳/۷۱	۱/۵۵
۵		۲/۹۲۶	۳۷۴/۹۱	۴۶/۶۰	۱۵/۷۲	۴/۶۰	۲/۱۶	۳۶۳/۸۲	۳۲/۴۴	۹/۹۷	۲/۶۲	۱/۰۶
۶		۲/۹۲۲	۳۶۶/۷۹	۳۷/۷۴	۱۲/۳۱	۳/۶۱	۱/۶۸	۳۵۷/۸۲	۲۵/۵۷	۷/۶۶	۱/۹۷	۰/۸۸
۰/۵		۲	۲/۷۰۵	۳۶۹/۵۶	۸۱/۵۲	۳۳/۳۰	۱۲/۵۶	۶/۹۴	۳۴۸/۵۵	۵۵/۹۳	۱۹/۳۴	۵/۹۵
	۳	۲/۷۳۹	۳۷۳/۱۶	۵۷/۶۴	۲۲/۴۶	۸/۱۸	۴/۴۳	۳۵۳/۳۳	۳۷/۳۰	۱۲/۳۴	۳/۷۰	۱/۷۶
	۴	۲/۷۴۲	۳۷۰/۵۶	۴۳/۴۷	۱۶/۶۱	۵/۹۸	۳/۱۶	۳۵۲/۲۴	۲۶/۶۴	۸/۶۶	۲/۶۴	۱/۳۶
	۵	۲/۷۴۵	۳۷۱/۰۳	۳۴/۸۵	۱۳/۱۵	۴/۸۱	۲/۷۳	۳۵۱/۱۶	۲۰/۵۸	۶/۵۳	۱/۹۳	۰/۹۲
	۶	۲/۷۴۸	۳۷۱/۸۸	۲۹/۲۰	۱۰/۸۶	۳/۹۳	۲/۱۲	۳۵۱/۱۶	۱۶/۶۴	۵/۲۶	۱/۵۸	۰/۷۶
	۰/۷	۲	۲/۵۴۲	۳۶۷/۲۹	۷۶/۴۸	۳۱/۱۱	۱۲/۴۷	۷/۳۱	۳۴۸/۹۸	۵۲/۸۲	۱۶/۶۹	۵/۰۶
۳		۲/۵۴۹	۳۶۸/۱۲	۵۲/۶۳	۲۱/۱۰	۸/۴۶	۴/۹۹	۳۴۳/۸۳	۳۳/۲۰	۱۰/۳۸	۳/۱۶	۱/۴۶
۴		۲/۵۵۳	۳۶۹/۴۲	۳۹/۸۸	۱۵/۹۳	۶/۴۴	۳/۸۵	۳۴۹/۴۰	۲۳/۴۴	۷/۲۷	۲/۲۱	۱/۰۸
۵		۲/۵۵۷	۳۶۹/۹۵	۳۲/۲۱	۱۲/۹۱	۵/۱۸	۳/۰۷	۳۴۹/۰۳	۱۷/۸۳	۵/۵۴	۱/۷۳	۰/۸۴
۶		۲/۵۵۸	۳۷۰/۸۱	۲۶/۸۵	۱۰/۷۸	۴/۴۱	۲/۶۶	۳۵۰/۴۸	۱۴/۱۶	۴/۴۲	۱/۳۶	۰/۷۳
۰/۹		۲	۲/۴۹۶	۳۶۷/۴۴	۷۸/۱۷	۲۹/۶۵	۱۲/۰۶	۷/۳۸	۳۵۲/۷۲	۵۹/۶۷	۱۶/۴۷	۴/۵۲
	۳	۲/۴۹۵	۳۷۰/۶۶	۵۱/۷۲	۲۰/۱۱	۸/۴۸	۵/۳۰	۳۵۳/۵۰	۳۵/۲۴	۹/۷۳	۲/۷۶	۱/۳۲
	۴	۲/۴۹۲	۳۶۹/۱۶	۳۸/۶۹	۱۵/۲۵	۶/۶۲	۴/۲۰	۳۵۳/۷۰	۲۳/۹۹	۶/۶۳	۱/۹۴	۰/۹۴
	۵	۲/۴۹۵	۳۷۱/۸۴	۳۰/۸۳	۱۲/۴۷	۵/۵۰	۳/۵۳	۳۵۷/۰۷	۱۷/۷۰	۴/۹۵	۱/۴۸	۰/۷۳
	۶	۲/۴۹۴	۳۷۲/۱۴	۲۵/۶۷	۱۰/۶۰	۴/۷۵	۳/۰۶	۳۵۵/۹۸	۱۳/۸۰	۳/۹۴	۱/۲۰	۰/۶۷
	۱	۲	۲/۴۹۶	۳۷۳/۷۸	۸۲/۱۶	۲۹/۵۸	۱۱/۸۰	۷/۲۶	۳۶۲/۶۲	۶۶/۷۰	۱۷/۶۲	۴/۴۳
۳		۲/۴۹۱	۳۷۰/۱۲	۵۲/۹۲	۱۹/۶۰	۸/۲۸	۵/۳۶	۳۵۷/۴۶	۳۸/۷۴	۹/۸۰	۲/۶۰	۱/۱۴
۴		۲/۴۹۷	۳۷۴/۶۵	۳۹/۳۰	۱۴/۹۴	۶/۶۳	۴/۲۸	۳۶۲/۶۱	۲۶/۱۶	۶/۵۷	۱/۸۴	۰/۹۵
۵		۲/۴۹۳	۳۷۰/۰۷	۳۰/۸۶	۱۲/۱۵	۵/۵۲	۳/۷۱	۳۵۸/۲۴	۱۸/۷۱	۴/۸۱	۱/۳۸	۰/۶۶
۶		۲/۴۹۱	۳۶۸/۴۱	۲۵/۸۰	۱۰/۳۴	۴/۸۲	۳/۲۰	۳۵۴/۴۰	۱۴/۱۶	۳/۷۶	۱/۱۵	۰/۵۵



شکل ۳- منحنی ARL_1 نمودار کنترلی $GWMA_{RSS}^+$ بر حسب ترکیب‌های مختلف (p, q) با مقدار ثابت $k=2, \alpha=0/1, m=2$ و حدود کنترلی دقیق

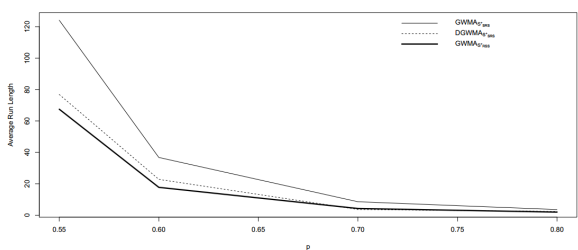


شکل ۴- منحنی ARL_1 نمودار کنترلی $GWMA_{RSS}^+$ بر حسب ترکیب‌های مختلف (p, k) با مقدار ثابت $q=0/1, \alpha=0/7, m=2$ و حدود کنترلی دقیق

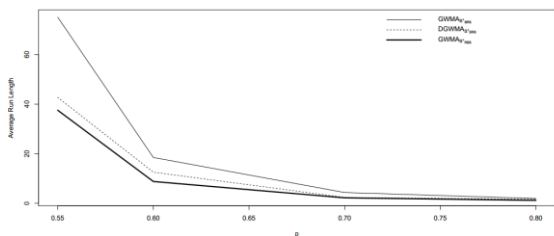
جدول ۱۱- مقادیر بهینه پارامترهای نمودار کنترلی $GWMA_{RSS}^+$ تحت نسبت تغییرات مختلف، زمانی که $ARL_0 \cong 370$ باشد.

حدود کنترلی	m	$\Delta = p_1 - p_0 $	نوع نمودار	مقدار پارامترهای بهینه				L^*	ARL_1	$SDRL_1$
				k^*	q^*	α^*	λ^*			
دقیق	۲	۰/۰۵	GWMA	۶	۰/۹۵	۰/۹	-	۲/۵۳۷	۱۹/۴۴	۶/۲۷
			EWMA	۶	-	-	۰/۰۵	۲/۵۲۷	۲۰/۱۴	۱۵/۶۶
		۰/۱	GWMA	۶	۰/۹۵	۰/۹	-	۲/۵۳۷	۶/۲۷	۴/۲۰
			EWMA	۶	-	-	۰/۰۵	۲/۵۲۷	۶/۲۹	۴/۲۵
		۰/۲	GWMA	۶	۰/۹۵	۱	-	۲/۵۲۷	۲/۰۶	۱/۲۲
			EWMA	۶	-	-	۰/۰۵	۲/۵۲۷	۲/۲۶	۱/۲۲
۰/۳	GWMA	۶	۰/۹۵	۱	-	۲/۵۲۷	۱/۱۶	۰/۴۳		
	EWMA	۶	-	-	۰/۰۵	۲/۵۲۷	۱/۱۶	۰/۴۳		
مجانبی	۲	۰/۵	GWMA	۶	۰/۹۵	۰/۹	-	۲/۴۹۴	۲۵/۶۷	۱۳/۸۰
			EWMA	۶	-	-	۰/۰۵	۲/۴۹۱	۲۵/۸۰	۱۴/۱۶
		۰/۱	GWMA	۶	۰/۹	۱	-	۲/۷۰۱	۹/۳۱	۴/۱۳
			EWMA	۶	-	-	۰/۱	۲/۷۰۱	۹/۳۱	۴/۱۳
		۰/۲	GWMA	۶	۰/۷	۱	-	۲/۹۱۹	۳/۱۹	۱/۲۶
			EWMA	۶	-	-	۰/۳	۲/۹۱۹	۳/۱۹	۱/۲۶
۰/۳	GWMA	۶	۰/۷	۰/۵	-	۲/۹۴۹	۱/۵۷	۰/۷۲		
	EWMA	۶	-	-	۰/۳	۲/۹۱۹	۱/۹۴	۰/۵۷		

پررنگ که نمودار کنترلی $GWMA_{SRS}^+$ را نشان می‌دهد، پایین‌تر از منحنی‌های دیگر یعنی نمودارهای کنترلی $GWMA_{SRS}^+$ و $DGWMAS_{SRS}^+$ است که نشان‌دهنده‌ی کاهش ARL_1 این نمودار کنترلی نسبت به دو نمودار کنترلی دیگر است. بنا بر این، می‌توان نتیجه گرفت که نمودار کنترلی $GWMA_{SRS}^+$ در شناسایی تغییرات کوچک فرایند نسبت به نمودارهای کنترلی $GWMA_{SRS}^+$ و $DGWMAS_{SRS}^+$ حساس‌تر است. لازم به ذکر است که نتیجه به دست آمده برای سایر مقادیر α ، n و q صادق است. شکل (۷) نمونه‌ی دیگری از عملکرد بهتر نمودار کنترلی $GWMA_{SRS}^+$ نسبت به $GWMA_{SRS}^+$ و $DGWMAS_{SRS}^+$ با حجم نمونه $n=20$ است.



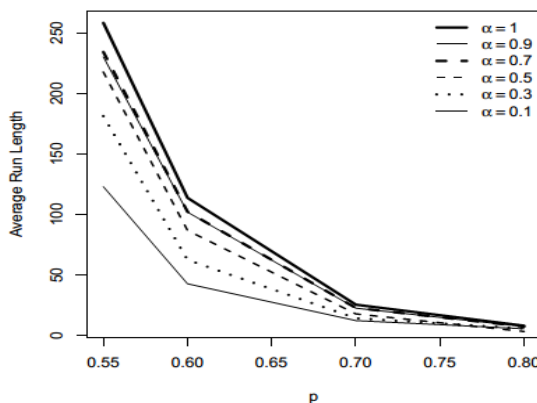
شکل ۶- منحنی ARL_1 نمودارهای کنترلی $GWMA_{SRS}^+$ و $DGWMAS_{SRS}^+$ با $n=10$ و نمودار کنترلی $GWMA_{SRS}^+$ با $k=5$ و $m=2$ بر حسب ترکیبات مختلف p و مقدارهای ثابت $q=0/5$ و $\alpha=0/5$ و حدود کنترل دقیق.



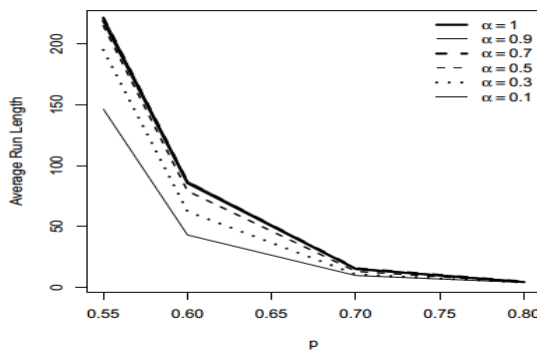
شکل ۷- منحنی ARL_1 نمودارهای کنترلی $GWMA_{SRS}^+$ و $DGWMAS_{SRS}^+$ با $n=20$ و نمودار کنترلی $GWMA_{SRS}^+$ با $k=5$ و $m=4$ بر حسب ترکیبات مختلف p و مقدارهای ثابت $q=0/5$ و $\alpha=0/5$ و حدود کنترل دقیق.

۵- نتیجه‌گیری و موضوعاتی برای پژوهش

در این مقاله، نمودار کنترلی علامت میانگین متحرک موزون تعمیم‌یافته تحت روش نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای معرفی شده است. این نمودار کنترلی یک نمودار کنترلی ناپارامتری و



شکل ۴- منحنی ARL_1 نمودار کنترلی $GWMA_{SRS}^+$ بر حسب ترکیب‌های مختلف (p, α) با مقدار ثابت $k=2$ ، $q=0/1$ ، $m=2$ و حدود کنترلی دقیق



شکل ۵- منحنی ARL_1 نمودار کنترلی $GWMA_{SRS}^+$ بر حسب ترکیب‌های مختلف (p, α) با مقدار ثابت $k=2$ ، $q=0/1$ ، $m=4$ و حدود کنترلی دقیق

۴-۱- مقایسه نمودار کنترل پیشنهادی با نمودارهای کنترلی $GWMA_{SRS}^+$ و $DGWMAS_{SRS}^+$

برای بررسی تأثیر روش نمونه‌گیری بر عملکرد نمودار کنترلی $GWMA$ و مقایسه نمودار کنترلی پیشنهادی با نمودارهای کنترلی $GWMA_{SRS}^+$ و $DGWMAS_{SRS}^+$ ، مقادیر ARL به دست آمده از شبیه‌سازی با حجم نمونه برابر، مورد مقایسه قرار می‌گیرند. به عنوان مثال در شکل (۶)، مقادیر ARL در نمودارهای کنترلی $GWMA_{SRS}^+$ و $DGWMAS_{SRS}^+$ با اندازه نمونه $n=10$ و نمودار کنترلی $GWMA_{SRS}^+$ با همان اندازه نمونه $(n=km, m=2, k=5)$ رسم شده‌اند. مشاهده می‌شود که منحنی

نشریه مهندسی و مدیریت کیفیت

- [5] Wilcoxon, F. (1945). "Individual comparisons by ranking methods," *Biometrics*, 1: 80-83.
- [6] Mann, H. B. and Whitney, D. R. (1947). "On a test whether one of two random variables is stochastically larger than the other," *Ann. Math. Statistics*, 18, 50-60.
- [7] Amin, R. W., Reynolds Jr, M. R., and Saad, B. (1995). "Nonparametric quality control charts based on the sign statistic," *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 24, 1597-1623.
- [8] Yang, S. F., Lin, J. S., and Cheng, S. W. (2011). "A new nonparametric EWMA sign control chart," *Expert Systems with Applications*, 38, 6239-6243.
- [9] Hou, S., & Yu, K. (2021). A non-parametric CUSUM control chart for process distribution change detection and change type diagnosis. *International Journal of Production Research*, 59(4), 1166-1186.
- [10] McIntyre, G. A. (1952). "A method of unbiased selective sampling using ranked sets," *Australian Journal of Agricultural Research*, 3, 385-390.
- [11] Takahasi, K., and K. Wakimoto. (1968). "On Unbiased Estimates of the Population Mean Based on the Sample Stratified by Means of Ordering." *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 20 (1): 1-31. doi: 10.1007/BF02911622.
- [12] Muttlak, H. A., and W. Al-Sabah. (2003). "Statistical Quality Control Based on Pair and Selected Ranked Set Sampling." *Pakistan Journal of Statistics* 19 (1): 107-128.
- [13] Abujiya, M. R., and H. Muttlak. (2004). "Quality Control Chart for the Mean Using Double Ranked Set Sampling." *Journal of Applied Statistics* 31 (10):1185-1201.
- [14] Lee, M. H. (2013). "The three statistical control charts using ranked set sampling." *In Modeling, Simulation and Applied Optimization (ICMSAO), 5th International Conference on* (pp. 1-6). IEEE.

غیرشوهارتهی است که برای شناسایی تغییرات کوچک در فرایندهایی که توزیع مشخصه کیفیت نامعلوم است، کارایی مناسبی دارد. مقادیر متوسط طول اجرا برای بررسی کارایی این نمودار کنترلی و تأثیر پارامترهای مختلف روی نمودار کنترلی پیشنهادی، محاسبه شده‌اند. با توجه به مقادیر عددی و نمودارهای رسم شده، نتیجه می‌گیریم که به واسطه تغییرات پارامتر تنظیمی α ، نمودار کنترلی $GWMA_{RSS}^+$ نسبت به نمودار کنترلی $EWMA_{RSS}^+$ برای کشف تغییرات کوچک در فرایند، حساس‌تر است و همچنین می‌توان نتیجه گرفت که نمودار کنترلی $GWMA_{SRS}^+$ نسبت به نمودارهای کنترلی $GWMA_{SRS}^+$ و $DGWMA_{SRS}^+$ در شناسایی تغییرات کوچک کارا تر و حساس‌تر است که نشان‌دهنده مزیت طرح RSS نسبت به طرح SRS است. علاوه بر این، ثابت شد که افزایش k و تعداد چرخه‌ها و مقادیر بزرگ q باعث کاهش ARL_1 و افزایش توان نمودار کنترلی در شناسایی تغییرات فرایند می‌شود. پس می‌توان گفت هدف نهایی این مقاله، که معرفی یک نمودار کنترلی با کارایی و سرعت بالا در شناسایی تغییرات کوچک فرایند بود، محقق گردید. از موضوعات جالب برای پژوهش‌های آینده می‌توان به بررسی نمودار کنترلی علامت GWMA تحت نمونه‌گیری مجموعه‌ای رتبه‌ای با رتبه‌بندی ناقص برای پایش پارامتر مکان فرایند اشاره کرد.

۶- مراجع

- [1] Shewhart, W. A. (1924). "Some applications of statistical methods to the analysis of physical and engineering data," *Bell Labs Technical Journal*, 3(1), 43-87.
- [2] Roberts, S. W. (1959). "Control chart tests based on geometric moving averages," *Technometrics*, 1(3), 239-25.
- [3] Sheu, S. H., and Lin, T. C. (2003). "the generally weighted moving average control chart for detecting small shifts in the process mean," *Quality Engineering*, 16(2), 209-231.
- [4] Arbuthnot, J. (1710). "An argument for divine providence, taken from the constant regularity observed in the births of both sexes," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 27, 186-190.

- [19] Knoth, S., Woodall, W. H., & Tercero-Gómez, V. G. (2022). The case against generally weighted moving average (GWMA) control charts. *Quality Engineering*, 34(1), 75-81.
- [20] Koti, K. M. and Jogesh Babu, G. (1996). "Sign test for ranked-set sampling," *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 25, 1617-1630.
- [21] Lu, S. L. (2015). "An extended nonparametric exponentially weighted moving average sign control chart," *Quality and Reliability Engineering International*, 31, 3-13.
- [22] Lu, S. L. (2018). Non parametric double generally weighted moving average sign charts based on process proportion. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 47(11), 2684-2700.
- [15] Hettmansperger, T. P. (1995). "The ranked-set sample sign test," *Journal of Nonparametric Statistics*, 4(3), 263-270.
- [16] Abid, M., Nazir, H. Z., Riaz, M., and Lin, Z. (2016). "Use of ranked set sampling in nonparametric control charts," *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, 39, 627-636.
- [17] Asghari, S., Sadeghpour Gildeh, B., Ahmadi, J. and Mohtashami Borzadaran, G. (2017). "Sign control chart based on ranked set sampling," *Quality Technology & Quantitative Management*, 1-21.
- [18] Ali, S., Abbas, Z., Nazir, H. Z., Riaz, M., Zhang, X., & Li, Y. (2020). On Designing Non-Parametric EWMA Sign Chart under Ranked Set Sampling Scheme with Application to Industrial Process. *Mathematics*, 8(9), 1497.

A Nonparametric GWMA Control Chart under Ranked Set Sampling for Monitoring Process Location Parameter

Mahtab Narari

Senior student, Department of Statistics, Allameh Tabatabai University, Tehran, Iran.
mahtabnazari1373@gmail.com

Mohammad Bameni Moghadam¹

(Responsible author): Full Professor, Department of Statistics, Allameh Tabatabai University, Tehran, Iran. bamenimoghadam@atu.ac.ir

Syed Rahmat Shojaei

PhD student, Department of Statistics, Allameh Tabatabai University, Tehran, Iran.
r_shojaei@atu.ac.ir

Abstract: Control charts are widely used to identify changes in the production process, and when it comes to identifying small changes in the process, non-Shewhart control charts such as exponential weighted moving average (EWMA) and generalized weighted moving average (GWMA) are better alternatives to control charts than Shewhart \bar{X} control chart. In this context, nonparametric control charts are used when the distribution of quality characteristic of the process is unknown, in which the Sign control chart is one of the most popular nonparametric control charts. In this paper, for the first time, a generalized weighted moving average sign control chart using a ranked set sampling (RSS) design is introduced. The performance of the proposed control chart is evaluated using simulated data according to the average run length evaluation criterion, and simulation studies showed that the GWMA sign control chart under the RSS design is better at detecting small process changes than the EWMA sign control chart under the RSS design. The performance of the proposed control chart has been evaluated using simulated data according to the average execution length evaluation criteria in Julia software, and the simulation studies show that due to changes in the regulatory parameter α , the $GWMA_{S_{RSS}^+}$ control chart is more sensitive than the $EWMA_{S_{RSS}^+}$ control chart in discovering small process changes, also the $GWMA_{S_{RSS}^+}$ control chart is more sensitive than the $GWMA_{S_{SRS}^+}$ and $DGWMA_{S_{SRS}^+}$ control charts are more efficient and sensitive in identifying small process changes, which shows the advantage of RSS scheme over SRS scheme. In addition, it was proved that increasing k and the number of cycles and large values of q decrease ARL_1 and increase the power of the control chart in identifying process changes.

Keywords: GWMA sign control chart, EWMA sign control chart, Ranked set sampling, Nonparametric control chart, Location parameter.

Aim and Introduction

In today's world, simultaneously with the expansion of information technology and the increasing dependence of human society on it, the relationship between the quality of services or manufactured products and human well-being has expanded day by day and has become so necessary that the development of the concept of quality to evaluate, create, control, improve and Maintaining quality has become inevitable. To improve the quality of production products of a process, there are various tools in statistical process control (SPC), of which control charts are one of the most important. Among the

¹ Corresponding author: bamenimoghadam@atu.ac.ir

advantages of using control charts is preventing unnecessary process adjustments, which leads to improving the process efficiency. Walter Shewhart [1] introduced the \bar{X} control chart for the first time. To identify small changes in the process, Roberts [2] introduced a memory control chart called exponential moving average (EWMA), which was effective in identifying small changes in the process average. Sheu and Lin [3] extended the EWMA control chart and introduced another control chart called the generalized weighted moving average (GWMA) control chart and showed that the GWMA control chart is more sensitive than the EWMA control chart in detecting small process changes.

Many control charts are based on the assumption of normality of the data, but since the distribution of the response variable is not always known, the use of non-parametric distributions was proposed. Arbuthnot [4] for the first time involved the non-parametric point of view in hypothesis testing and introduced a non-parametric test called "sign test". After that, Wilcoxon [5] and Mann and Whitney [6] expanded this view. Amin et al [7] introduced the Scholarly control chart based on the sign statistic. Yang et al [8] introduced the nonparametric EWMA sign chart and showed that this nonparametric control chart is more suitable for monitoring small changes in the process mean when the distribution of observations is unknown. Hou and Yu [9] introduced the nonparametric CUSUM control chart to monitor the change of arbitrary distribution and detect the change type simultaneously.

One of the other factors that play a significant role in the efficiency of control charts is the sampling method. The simplest and most common sampling method is simple random sampling (SRS), in which all members of the population have an equal chance of being selected in the sample. In simple random sampling, the sample size must be large enough so that the estimates obtained for the parameters of the society are highly accurate. But sometimes, due to the high cost of sampling and the loss of part of the information due to sampling, it is not possible to take a large sample and we are forced to take a sample with a small sample size. And this is the weakness of simple random sampling. In addition to the mentioned cases, sometimes the measurement of community units is difficult and expensive, but it is possible to rank community units easily and with little cost, in such a case, rank set sampling (RSS) is used. Most of the charts that have been introduced so far have been under the SRS scheme. The RSS scheme was first introduced by McIntyre [10] and Takahasi and Wakimoto [11] were the first to put the theoretical foundations of the rank set sampling scheme on paper and showed that the average RSS scheme is more efficient than the SRS scheme.

Considering the positive features of the RSS plan compared to the SRS plan, control charts based on the RSS plan were examined. Muttlak and Al-Sabah [12] introduced \bar{X} control chart using RSS scheme and Abujjiya and Muttlak [13] introduced \bar{X} control chart using dual RSS scheme. Lee [14] showed that \bar{X} and EWMA control charts under RSS plan have more power than SRS scheme. Considering the high efficiency of the RSS method and the uncertainty of the quality characteristic distribution in practical applications, the investigation of non-parametric control charts using the RSS method was proposed. Hettmansperger [15] introduced the sign test under the RSS scheme. Abid et al. [16] introduced the EWMA signal control chart under the RSS scheme and Asghari et al [17] showed that the efficiency of this control chart under the RSS scheme is more than the SRS scheme. Ali et al [18] introduced the EWMA signal control chart under the RSS scheme to monitor small and continuous changes in the process location parameter. In this research, the GWMA control chart is introduced with a non-parametric approach under the rank set sampling method called $GWMA_{S_{RSS}^+}$ using the exact distribution of the S_{RSS}^+ statistic. The control statistic $GWMA_{S_{RSS}^+}$ is as follows:

$$GWMA_{S_{RSS_t}^+} = \sum_{i=1}^t (q^{(i-1)\alpha} - q^{i\alpha}) S_{RSS_{t-i+1}}^+ + q^{t\alpha} GWMA_{S_{RSS_0}^+} \quad (1)$$

which $S_{RSS}^+ = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m I(X_{(j)i} - \theta > 0)$
and

$$(X_{(j)i} - \theta > 0) = \begin{cases} 1 & \text{if } X_{(j)i} - \theta > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

The statistic S_{RSS}^+ can be rewritten as $S_{RSS}^+ = \sum_{j=1}^k S_{(j)}^+$ where the statistic $S_{(j)}^+$ has a distribution (Bin (m, $p_j = 1 - H_{(j)}(0)$)). In controlled conditions, $H(0)=1/2$ The mathematical hope and variance of S_{RSS}^+ statistic is $E[S_{RSS}^+] = \frac{n}{2}$ and $Var[S_{RSS}^+] = \frac{n}{4} \delta_0^2$ where $\delta_0^2 = 1 - \left(\frac{4}{n}\right) \sum_{j=1}^k \left(H_j(0) - \frac{1}{2}\right)^2$ (for more information, refer to Hetmansperger's article [15]). $GWMA_{S_{RSS_0}^+}$ is the initial value of the $GWMA_{S_{RSS_t}^+}$ statistic and it is assumed to be equal to the average of the S_{RSS}^+ statistic, that is, $GWMA_{S_{RSS_0}^+} = E[S_{RSS}^+] = \frac{n}{2}$. According to the value of the mathematical hope and the variance of the statistic S_{RSS}^+ , the mathematical hope and the variance of the $GWMA_{S_{RSS_t}^+}$ as $E[GWMA_{S_{RSS_t}^+}] = \frac{n}{2}$ and $Var[GWMA_{S_{RSS_t}^+}] = Q_t \delta_0^2 \frac{n}{4}$ where $Q_t = \sum_{i=1}^t (q^{(i-1)\alpha} - q^{i\alpha})^2$. Therefore, the control limits of the $GWMA_{S_{RSS}^+}$ control chart is in the form of relation (2):

$$\begin{aligned} UCL_{GWMA_{S_{RSS}^+}} &= \frac{n}{2} + L \sqrt{Q_t \delta_0^2 \frac{n}{4}} \\ CL_{GWMA_{S_{RSS}^+}} &= \frac{n}{2} \\ LCL_{GWMA_{S_{RSS}^+}} &= \frac{n}{2} - L \sqrt{Q_t \delta_0^2 \frac{n}{4}} \end{aligned} \tag{2}$$

In the control limits mentioned in relation (2), L is the coefficient of the control limits and determines the width of the control limits. This coefficient is determined so that ARL_0 has a specific value. Since the S_{RSS}^+ statistic has a binomial distribution, it is possible to obtain L values for an exact value of ARL_0 under different combinations of $GWMA_{S_{RSS}^+}$ control chart parameters do not exist. Therefore, an approximate value for ARL_0 is considered. In this article, $ARL_0 \cong 370$ is considered as the basis of control chart evaluation. Note that any other arbitrary value can be considered for ARL_0 . By drawing $GWMA_{S_{RSS_t}^+}$ control statistics at different times on the graph and measuring them with control limits, the behavior of the process is monitored. If the value of the $GWMA_{S_{RSS_t}^+}$ control statistics is between the control limits, the process is considered under statistical control. But if the value of the control statistic is outside the control limits, that means we have $GWMA_{S_{RSS_t}^+} > UCL$ or $GWMA_{S_{RSS_t}^+} < LCL$, the process is considered out of statistical control, and corrective measures are taken to return the process to a state under control.

Note: If an asymptotic value for Q_t as:

$$Q = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^t (q^{(i-1)\alpha} - q^{i\alpha})^2 \right)$$

be defined, by replacing Q_t in the control limits of equation (2), exact control limits become asymptotic control limits.

Methodology

This research is applied research in line with the introduction of the $GWMA_{S_{RSS}^+}$ control chart. One of the criteria for measuring the performance of control charts is the average run length (ARL). ARL, means the average number of points plotted on a control chart before a point fall outside the control limits. The average execution length in under-control and out-of-control mode is indicated by symbols ARL_0 and ARL_1 , respectively. The desired value of ARL_0 should be large to minimize the number of false alarms and

also the desired value of ARL_1 should be small so that changes in the process average can be detected quickly and corrective actions can be taken to restore the process to a stable state. There are many methods to calculate ARL including Markov chain, integral equations and Monte Carlo simulation. In this research, the ARL evaluation criterion has been calculated using Monte Carlo simulation in Julia software with 50,000 repetitions with exact and asymptotic control limits for the proposed control chart, and the parameter values are as follows:

$$k = \{2, 3, 4, 5, 6\}, q = \{0.1, 0.5, 0.95\}, \alpha = \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1\}, p = \{0.5, 0.55, 0.6, 0.7, 0.8\}$$

Findings

According to the ARL values obtained for the $GWMA_{SRSS}^+$ control chart, it was proved that under the fixed values of q and $\alpha > 0.5$, with the increase of k , ARL_1 decreases. It can also be concluded that increasing the value of q and the number of cycles leads to a decrease in ARL_1 . In addition, it was proved that under constant values of parameters k , m , and q when $\alpha = 1$, which represents the $EWMA_{SRSS}^+$ control chart, the chart has a lower ARL than other values of α . So, it can be concluded that the effectiveness of the $GWMA_{SRSS}^+$ control chart in identifying changes, especially small changes, is better than the $EWMA_{SRSS}^+$ chart. In addition to the above, the optimal values of the control chart parameters $GWMA_{SRSS}^+$ for different changes (small, medium and large) are summarized in table (1). In table (1), the difference in the ratio of changes in the process from under control to out of control means $|p_1 - p_0|$ It is indicated by Δ and $\Delta = 0.05$ represents small changes, $\Delta = 0.1$ represents medium changes and $\Delta = \{0.3, 0.2\}$ represents large changes. Is. The basis of choosing the values in table (1) is that among the simulated values for ARL, the lowest value of ARL_1 corresponding to different values of k , m , α and q under each value of Δ is selected and the value of L and the parameters k , m , α and q for this minimum value ARL_1 are considered as the optimal value. The following useful results are obtained from table (1):

1. The $GWMA_{SRSS}^+$ control chart is more effective in identifying small process changes than the $EWMA_{SRSS}^+$ control chart.
2. The $GWMA_{SRSS}^+$ control chart is not an optimal chart for identifying large process changes, but it can compete with the $EWMA_{SRSS}^+$ control chart.
3. To monitor small process changes in the control chart $GWMA_{SRSS}^+$ large values for k , m , α and q is recommended.
4. Also, to investigate the effect of the sampling method on the performance of the GWMA control chart and to compare the proposed control chart with the $GWMA_{SSRS}^+$ and $DGWMA_{SSRS}^+$ control charts, the ARL values obtained from the simulation with equal sample size, are compared. For example, in Figure (1), ARL values in $GWMA_{SSRS}^+$ and $DGWMA_{SSRS}^+$ control charts with sample size $n=10$ and control chart $GWMA_{SRSS}^+$ with the same sample size ($k=5$, $m=2$ and $n=km$) are plotted. It can be seen that the bold curve that shows they are plotted $GWMA_{SRSS}^+$ control chart is lower than the other curves, i.e. the $GWMA_{SSRS}^+$ and $DGWMA_{SSRS}^+$ control charts which indicate The reduction of ARL_1 is this control chart compared to the other two control charts. Therefore, it can be concluded that $GWMA_{SRSS}^+$ control chart is more sensitive in identifying small process changes than $GWMA_{SSRS}^+$ and $DGWMA_{SSRS}^+$ control charts. It should be noted that the obtained result is valid for other values of α , n and q .

Table 1: Optimal values of $GWMA_{S_{RSS}^+}$ control chart parameters under different change ratios, when $ARL_0 \cong 370$.

control limits	m	$ p_1 - p_0 = \Delta$	schemes	The optimal design					ARL_1	$SDRL_1$	
				k^*	q^*	α^*	λ^*	L^*			
exact	2	0.05	GWMA	6	0.95	0.9	-	2.537	19.44	6.27	
			EWMA	6	-	-	0.05	2.527	20.14	15.66	
		0.1	GWMA	6	0.95	0.9	-	2.537	6.27	4.20	
			EWMA	6	-	-	0.05	2.527	6.29	4.25	
		0.2	GWMA	6	0.95	1	-	2.527	2.06	1.22	
			EWMA	6	-	-	0.05	2.527	2.06	1.22	
	0.3	GWMA	6	0.95	1	-	2.527	1.16	0.43		
		EWMA	6	-	-	0.05	2.527	1.16	0.43		
	asymptotic	2	0.05	GWMA	6	0.95	0.9	-	2.494	25.67	13.80
				EWMA	6	-	-	0.05	2.491	25.80	14.16
			0.1	GWMA	6	0.95	1	-	2.491	10.34	3.76
				EWMA	6	-	-	0.05	2.491	10.34	3.76
0.2			GWMA	6	0.5	0.9	-	2.951	3.03	1.79	
			EWMA	6	-	-	0.5	2.943	3.03	1.80	
0.3		GWMA	6	0.5	1	-	2.943	1.52	0.65		
		EWMA	6	-	-	0.3	2.943	1.52	0.56		

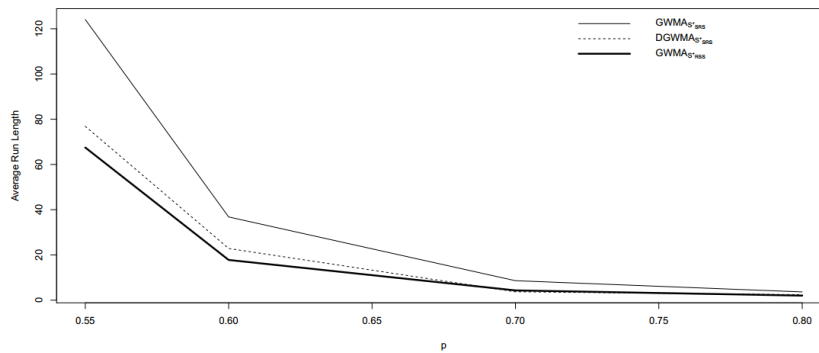


Figure 1- ARL_1 curve of $GWMA_{S_{RSS}^+}$ and $DGWMA_{S_{RSS}^+}$ control charts with $n=10$ and $GWMA_{S_{RSS}^+}$ control chart with $k=5$ and $m = 2$ according to different combinations of p and constant values of $q = 0.5$ and $\alpha = 0.5$ and precise control limits

Discussion and Conclusion

In this article, the generalized weighted moving average sign control chart is introduced under the rank set sampling method. This control chart is a non-parametric and non-exponential control chart that is effective for identifying small changes in processes where the quality characteristic distribution is unknown. The average values of the execution length to check the effectiveness of this control chart and the effect of different parameters on the proposed control chart are calculated. have become. According to the numerical values and the graphs drawn, we conclude that due to the changes of the adjustment parameter α , the $GWMA_{S_{RSS}^+}$ control chart is better than the $EWMA_{S_{RSS}^+}$ control chart is more sensitive to detect small changes in the process, and it can also be concluded that the $GWMA_{S_{RSS}^+}$ control chart is better than the $GWMA_{S_{RSS}^+}$ and $DGWMA_{S_{RSS}^+}$ control charts is more efficient and sensitive in identifying small changes, which shows the

advantage of RSS scheme over SRS scheme. In addition, it was proved that increasing k and the number of cycles and large values of q decrease ARL_1 and increase the power of the control chart in identifying process changes. So, it can be said that the final goal of this article, which was to introduce a control chart with high efficiency and speed in identifying small process changes, has been achieved.

Reference

- [1] Shewhart, W. A. (1924). "Some applications of statistical methods to the analysis of physical and engineering data," *Bell Labs Technical Journal*, 3(1), 43-87.
- [2] Roberts, S. W. (1959). "Control chart tests based on geometric moving averages," *Technometrics*, 1(3), 239-25.
- [3] Sheu, S. H., and Lin, T. C. (2003). "the generally weighted moving average control chart for detecting small shifts in the process mean," *Quality Engineering*, 16(2), 209-231.
- [4] Arbuthnot, J. (1710). "An argument for divine providence, taken from the constant regularity observed in the births of both sexes," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 27, 186-190.
- [5] Wilcoxon, F. (1945). "Individual comparisons by ranking methods," *Biometrics*, 1: 80-83.
- [6] Mann, H. B. and Whitney, D. R. (1947). "On a test whether one of two random variables is stochastically larger than the other," *Ann. Math. Statistics*, 18, 50-60.
- [7] Amin, R. W., Reynolds Jr, M. R., and Saad, B. (1995). "Nonparametric quality control charts based on the sign statistic," *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 24, 1597-1623.
- [8] Yang, S. F., Lin, J. S., and Cheng, S. W. (2011). "A new nonparametric EWMA sign control chart," *Expert Systems with Applications*, 38, 6239-6243.

