تلفیق تابع زیان تاگوچی و طراحی اقتصادی نمودارهای کنترلی $\bar{X}$ در حضور داده‌های نرمال و نانرمال

محمد بامنی‌مقدم*
استاد آمار، دانشگاه علامه طباطبائی
مجتبی آقاجان‌پور پاشا
دانشجوی دکترای آمار، دانشگاه علامه طباطبائی
شبنم فانی
استادیار آمار، دانشگاه علامه طباطبائی

چکیده نمودار کنترلی، یکی از ابزار اساسی کنترل آماری کیفیت و پایش حین تولید فرایندهای تولیدی و خدماتی است. هزینه‌ی کیفیت در رویکرد کلاسیک طراحی نمودار کنترلی به این‌که مشخصه‌ی کیفیت درون یا بیرون حدود کنترلی قرار دارد بستگی دارد. از آن‌جا که ادغام رهیافت تابع زیان در فعالیت‌های پایش حین تولید مانند نمودارهای کنترلی، که برگرفته از مفهوم زیان اجتماعی کیفیت تاگوچی است و در آن هزینه‌ی کیفیت به مقدار انحراف مشخصه‌ی کیفیت از مقدار هدف وابسته است، به ارزیابی جامع‌تر فرایند و در نتیجه به تصمیم‌های بهتر در راهبرد مدیریت رهنمون می‌شود. این مقاله به تلفیق تابع زیان تاگوچی و طراحی اقتصادی نمودار کنترلی $\bar{X}$ می‌پردازد. به‌علاوه، با توجه به آن‌که داده‌های خروجی فرایند ممکن است از توزیع نرمال پیروی نکنند و یا این‌که پذیره‌های قضیه‌ی حد مرکزی در مورد آن صادق نباشند، لزوم مطالعه‌ی مدل تلفیقی در این موقعیت‌ها نیز، علاوه بر حالت توزیع نرمال، ضرورت پیدا می‌کند. در این راستا، پارامترهای طراحی اقتصادی حاصل از مدل تلفیقی در حضور داده‌های نرمال و نانرمال مقایسه خواهند شد که در آن، با توجه به گستردگی نرخ شکست افزایشی در سامانه‌های تولیدی، از طرح نمونه‌گیری نایکنواخت برای بازرسی نمونه‌ها و از مدل شوک وایبول برای سازوکار شکست فرایند استفاده شده است.

کلمات کلیدی مدل اقتصادی تعمیم‌یافته، تابع زیان تاگوچی، توزیع مشخصه‌ی کیفیت، سازوکار شکست فرآیند، مخاطره‌ی تجمعی روی فاصله‌های نمونه‌گیری

مقدمه

تغییرپذیری فرآیندهای تولیدی و خدماتی را می‌توان به دو دسته انحراف منتسب کرد. انحراف‌های تصادفی (تحت کنترل) که ویژگی ذاتی هر فرایند است و انحراف‌های بادلیل (خارج از کنترل) که حاصل وقوع اشکالی در سامانه است. هدف اصلی نمودار کنترلی، که از مهم‌ترین ابزار کنترل آماری فرایند است، تمایز بین این دو دسته از انحراف‌ها است تا با وقوع انحراف بادلیل و پیش از تولید انبوهی از محصول‌های نامنطبق، اقدام اصلاحی انجام پذیرد. این تصمیم بنیادی، بر اساس نمونه‌هایی به اندازه‌ی n، که در فاصله‌های زمانی از خروجی فرایند گرفته می‌شوند و با استفاده از آماره‌ای مانند $\bar{X}$، که آماره‌ی کنترل نامیده می‌شود، صورت می‌گیرد. در نمودار کنترلی شوهارتی $\bar{X}$، مادامی که مقدار آماره‌ی $\bar{X}$ بین حدود کنترلی نمودار یعنی $\mu - L\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ و $\mu + L\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ قرار گیرد، فرآیند تحت کنترل و در غیر این صورت، فرآیند، خارج از کنترل قلمداد می‌شود که در آن پارامتر σ در طول زمان ثابت فرض می‌شود. در حالت خارج از کنترل که پس از وقوع انحراف بادلیل رخ می‌دهد، میانگین فرایند از μ به $\mu + \delta\sigma$ انتقال می‌یابد.

تاریخ دریافت: ۹۴/۶/۱۲ تاریخ پذیرش: ۹۴/۱۲/۱۲

*Corresponding bamenimoghadam@atu.ac.ir

طراحی نمودار کنترلی در واقع تعیین اندازه‌ی نمونه n، فاصله‌های زمانی $h_j; j = ۱, ۲, \ldots$، و پهنای حدود کنترلی L است که پارامترهای طراحی نیز خوانده می‌شوند.

ابتدا تنها معیارهای آماری در طراحی مانند متوسط طول اجرا مورد توجه قرار می‌گرفت. با در نظر گرفتن ملاحظه‌های اقتصادی مانند هزینه‌های نمونه‌گیری و هزینه‌های تولید محصول نامنطبق، طراحی اقتصادی نمودارهای کنترلی توسط دانکن [۱] معرفی و توسط لورنزن و وانس [۲] بهبود یافت، با این هدف که پارامترهای طراحی به گونه‌ای تعیین شوند تا متوسط هزینه در واحد زمان برای اجرا کردن رهیافت نمودار کنترلی مینیمم شود. به همین جهت، چرخه‌ی کیفیت به‌صورت مدت زمان بین حالت‌های متوالی تحت کنترل بودن فرایند تعریف شد که شامل زمان تحت کنترل بودن فرایند، لحظه‌ی وقوع انحراف بادلیل، زمان تا لحظه‌ی وقوع هشدار درست توسط نمودار و زمان کشف و تعمیر عامل وقوع انحراف است. پس از تعمیر، مجددا فرایند به حالت تحت کنترل باز گشته و چرخه‌ی کیفیت از سر گرفته می‌شود. با توجه به قضیه‌ی تجدید پاداش [۳]، تابع هدف در مسئله‌ی بهینه‌سازی، یعنی متوسط هزینه در واحد زمان (ECT)، می‌تواند از نسبت متوسط هزینه‌ی هر چرخه (EC) به متوسط زمان آن چرخه (ET) حاصل شود.

دو پذیره‌ی کلیدی در یک طراحی اقتصادی به توزیع مشخصه‌ی کیفیت خروجی فرایند و سازوکار شکست آن مربوط می‌شود. دانکن و لورنزن و وانس توزیع زمان تا وقوع انحراف بادلیل یا دوره‌ی تحت کنترل بودن فرایند را توزیع نمایی در نظر گرفتند و با توجه به نرخ شکست ثابت این توزیع و ویژگی بی‌حافظگی آن، طرح نمونه‌گیری یکنواخت را، که در آن فاصله‌های نمونه‌گیری ثابت است، به کار بردند[۱] و [۲]. استفاده از توزیع نمایی در بسیاری از کاربردهای عملی به‌ویژه کاربردهای صنعتی که سامانه‌های تولیدی در آن‌ها دارای نرخ شکست افزایشی است، به ضعف جدی در مدل می‌انجامد. بنرجی و رحیم [۴]، با معرفی طرح نمونه‌گیری نایکنواخت (طرح با فاصله‌های نمونه‌گیری نابرابر)، مدل دانکن را برای سامانه‌های دارای نرخ شکست افزایشی تحت مدل شوک وایبول گسترش دادند و نتیجه گرفتند این طرح بر طرح نمونه‌گیری یکنواخت از نظر صرفه‌جویی اقتصادی برتری دارد. این رهیافت برای سامانه‌های با نرخ شکست افزایشی، کاهش فاصله‌های زمانی بین نمونه‌گیری‌ها یا افزایش فراوانی نمونه‌گیری‌ها را در پی خواهد داشت. رحیم و بنرجی [۵]، مدل تعمیم‌یافته‌ای از طراحی اقتصادی نمودار کنترلی $\bar{X}$ را برای هر طرح نمونه‌گیری و هر توزیع طول عمر دلخواه ارائه کردند. مروری بر نوشتارهای ارائه شده درباره طراحی اقتصادی نمودارهای کنترلی را می‌توان در [۶]، [۷]، [۸] و [۹] ملاحظه کرد. در مدل‌های اقتصادی کلاسیک مطرح شده در بالا که در واقع در مدل تعمیم‌یافته‌ی رحیم و بنرجی [۵] جمع‌بندی شده‌اند، هزینه‌ی تحت کنترل و هزینه‌ی خارج از کنترل سامانه به عنوان مقدارهایی ثابت و به عنوان ورودی مدل در نظر گرفته شده‌اند، اما شرحی بر این‌که این مقدارها چگونه به دست آیند ارائه نشده است.

تعریف کیفیت از دیدگاه تاگوچی می‌تواند در این راستا به کار گرفته شود. تاگوچی، کیفیت را زیان اجتماعی حاصل از تولید یک محصول پس از ارسال آن به سوی مشتری تعریف می‌کند [۱۰]. بر این مبنا، یک تابع زیان می‌تواند برای انعکاس زیان مرتبط با تغییرها و انحراف‌ها از مقدار هدف به کار گرفته شود [۱۱] و [۱۲]. تلفیق این مفهوم با طراحی نمودارهای کنترلی، کارایی تابع زیان تاگوچی را از مرحله‌ی پیش از تولید به مرحله‌ی حین تولید فعالیت‌های پایش فرایند گسترش داده و می‌تواند به تصمیم‌های بهتری رهنمون گردد. در واقع، استفاده از رهیافت کلاسیک در نمودارهای کنترلی مستلزم این است که هنگامی که مشخصه‌ی کیفیت خارج از حدود کنترلی قرار گیرد، زیان کیفیت به عنوان هزینه در نظر گرفته شود و همه‌ی محصول‌ها داخل حدود کنترلی، بدون توجه به انحراف مشخصه‌ی کیفیت‌شان از مقدار هدف، دارای کیفیت مشابه قلمداد شوند. اما این با واقعیت چندان سازگار نیست، زیرا هر انحراف از مقدار آرمانی، مشتری را متحمل زیانی متناسب آن انحراف می‌کند. در رویکرد تابع زیان، با هر تغییر یا انحراف از مقدار هدف، زیانی متناظر است حتی اگر مقدار آماره‌ی کنترل داخل حدود کنترلی باشد. تنها در نقطه‌ی هدف مقدار زیان برابر صفر است. تابع زیان درجه‌ی دوم تاگوچی می‌تواند برای تعیین زیان کیفیت یک محصول وقتی مشخصه‌ی کیفیت آن از مقدار هدف انحراف دارد به کار رود، به گونه‌ای که یک محصول با مشخصه‌ی کیفیت درون حدود کنترلی نیز، هزینه‌ای متناسب با مجذور انحرافش از مقدار هدف را متحمل خواهد کرد. بنا بر این، این رهیافت میان دو محصول درون حدود کنترلی، یکی در نزدیکی مقدار آرمانی و دیگری در نزدیکی حدود کنترلی نمودار تفاوت قائل است و این انگیزه‌ی اصلی در استفاده از آن است.

الکساندر و همکاران [۱۳]، مدل اقتصادی دانکن را با تابع زیان تاگوچی ترکیب کرده و مدلی ارائه کردند که زیان متناظر با تغییرات حاصل از انحراف‌های تصادفی و انحراف‌های بادلیل را در طراحی اقتصادی نمودارهای کنترلی به کار می‌گیرد. این مدل به

پذیره‌های مدل دانکن محدود است، گرچه استفاده‌ی دقیقی نیز از فلسفه‌ی تاگوچی در آن صورت نگرفته است. دوفوا و بن‌دایا [۱۴] از تابع زیان درجه دوم تاگوچی برای تعریف هزینه‌ی تحت کنترل کیفیت و هزینه‌ی خارج از کنترل کیفیت به عنوان تابع‌هایی از پارامترهای طراحی استفاده کردند که می‌تواند در طراحی اقتصادی نمودارهای کنترلی به کار رود. در این مقاله، از کمیت‌های فوق در ارائه‌ی مدل تلفیقی از تابع زیان تاگوچی و طراحی اقتصادی تعمیم‌یافته‌ی نمودار کنترلی $\bar{X}$ بهره گرفته و آن را برای سامانه‌های با نرخ شکست افزایشی که از توزیع طول عمر وایبول پیروی می‌کنند به کار می‌بریم. گرچه تاکنون تابع‌های زیان دیگری مانند زیان متقارن درجه‌ی دوم، زیان متقارن خطی و ... معرفی شده‌اند که در موقعیت‌های مختلف به‌کارگیری آن‌ها توجیه بیش‌تری دارد، مع‌الوصف در این مقاله تنها به تابع زیان درجه‌ی دوم تاگوچی پرداخته می‌شود. تفاوت تابع‌های زیان متعدد در تلفیق با طراحی اقتصادی به محاسبه‌ی دو کمیت هزینه‌ی تحت کنترل کیفیت و هزینه‌ی خارج از کنترل کیفیت منحصر است. از طرف دیگر، به دلیل رایج بودن توزیع نرمال در مشخصه‌های کیفیت و وجود قضیه‌ی حد مرکزی، بیش‌تر پژوهش‌های صورت گرفته در طراحی نمودارهای کنترلی $\bar{X}$ بر اساس توزیع نرمال انجام پذیرفته است. گاهی اوقات، پذیره‌ی نرمال بودن توزیع مشخصه‌ی کیفیت و یا پذیره‌های قضیه‌ی حد مرکزی قابل قبول نیست. در ادبیات موضوع، دو توزیع بِر و جانسون، که به‌ترتیب برای اولین بار در [۱۵] و [۱۶] معرفی شده‌اند، به عنوان توزیع مشخصه‌ی کیفیت نانرمال به کار برده شده‌اند که بر داده‌های نانرمال متعددی تطابق بسیار خوبی دارند. انتخاب توزیع بِر برای داده‌های نانرمال در این مقاله، به این خاطر است که تابع توزیع آن دارای فرم بسته است که موجب سادگی محاسبات مربوط به مدل تلفیقی می‌شود [۱۷]، [۱۸] و [۱۹].

مطالب موردنظر در این مقاله به ترتیب زیر ارائه می‌شوند. در بخش دوم، مدل تلفیقی تعمیم‌یافته‌ی حاصل از ادغام تابع زیان تاگوچی و طراحی اقتصادی تعمیم‌یافته‌ی نمودار کنترلی $\bar{X}$، که برای هر توزیع طول عمر و هر طرح نمونه‌گیری قابل استفاده است، ارائه خواهد شد. بخش سوم به تاثیر توزیع مشخصه‌ی کیفیت بر مدل تلفیقی خواهد پرداخت. در بخش چهارم، نتایج عددی حاصل از طراحی اقتصادی تحت مدل شوک وایبول و داده‌های مشخصه‌ی کیفیت نرمال و نانرمال ارائه و با هم مقایسه خواهند شد.

تبیین مدل تلفیقی تعمیم‌یافته

در این بخش، ابتدا مدل اقتصادی تعمیم‌یافته‌ی ارائه شده توسط رحیم و بنرجی [۵] و مفهوم‌ها و نمادهای آن را مرور کرده، سپس با ادغام تابع زیان تاگوچی، مدل تلفیقی را ارائه می‌کنیم. توزیع طول عمر دلخواه F را به عنوان سازوکار شکست فرایند در نظر می‌گیریم که تابع چگالی متناظر آن f است. نمونه‌هایی تصادفی به اندازه‌ی n در نقطه‌های زمانی $\omega_j; j = ۱,۲, \dots$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $\omega_j = \sum_{i=۱}^{j} h_i$ و $lim_{j\to\infty} F(\omega_j) = ۱$، که در آن h_i فاصله‌ی نمونه‌گیری iام است، یعنی $h_i = \omega_i - \omega_{i-۱}$. به‌علاوه، p_j را احتمال شرطی آن تعریف می‌کنیم که فرایند در طول فاصله‌ی نمونه‌گیری $(\omega_{j-۱}, \omega_j)$ از کنترل خارج شود به شرط آن‌که در ابتدای فاصله نمونه‌گیری یعنی در نقطه‌ی $\omega_{j-۱}$، در حالت تحت کنترل باشد. به عبارت دیگر، $p_j = \frac{\int_{\omega_{j-۱}}^{\omega_j} f(t)dt}{\int_{\omega_{j-۱}}^{\infty} f(t)dt}$. تعریف می‌کنیم $p_. = ۰$. در این صورت،

$$ET = \sum_{j=۱}^{\infty} h_j \prod_{i=۰}^{j-۱}(۱-p_i) + \alpha Z_. \sum_{j=۱}^{\infty}\prod_{i=۱}^{j}(۱-p_i) + \beta \sum_{j=۱}^{\infty} p_j \prod_{i=۰}^{j-۱}(۱-p_i) \sum_{i=j+۱}^{\infty} h_i\, \beta^{i-j-۱} + Z_۱ \qquad (۱)$$

و

$$EC = D_. \sum_{j=۱}^{\infty} h_j \prod_{i=۰}^{j-۱}(۱-p_i) + \alpha Y \sum_{j=۱}^{\infty}\prod_{i=۱}^{j}(۱-p_i) + (D_. - D_۱)\tau + (D_۱ - D_۰)\sum_{j=۱}^{\infty} \omega_j\, p_j \prod_{i=۰}^{j-۱}(۱-p_i) + D_۱\beta \sum_{j=۱}^{\infty} p_j \prod_{i=۰}^{j-۱}(۱-p_i) \sum_{i=j+۱}^{\infty} h_i\, \beta^{i-j-۱} + (a+bn)\left[\frac{\beta}{۱-\beta} + \sum_{j=۰}^{\infty}. \prod_{i=۱}^{j}(۱-p_i)\right] + W \qquad (۲)$$

که در آن τ میانگین زمان دوره‌ی تحت کنترل، $Z_.$ میانگین زمان هشدار اشتباه، $Z_۱$ میانگین زمان کشف و تعمیر انحراف بادلیل، a هزینه‌ی ثابت نمونه‌گیری، b هزینه‌ی متغیر نمونه‌گیری، Y هزینه‌ی هر هشدار غلط، W هزینه‌ی کشف و تعمیر انحراف بادلیل، $D_.$ هزینه‌ی کیفیت در هر ساعت در دوره‌ی تحت کنترل، $D_۱$ هزینه‌ی کیفیت در هر ساعت در دوره‌ی خارج از کنترل، α احتمال خطای نوع اول و β احتمال خطای نوع دوم است. البته صورت معادلی برای عبارات ۱ و ۲ بر

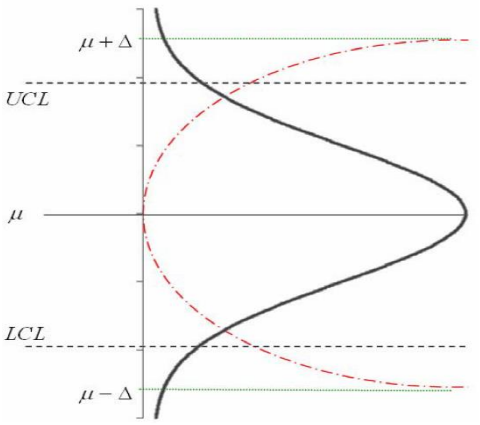
اساس تابع توزیع طول عمر F با توجه به رابطه‌های زیر به راحتی قابل دست‌یابی است:

$$\prod_{i=۱}^{j}(۱-p_i) = ۱ - F(\omega_j)$$

$$p_j \prod_{i=۰}^{j-۱}(۱-p_i) = F(\omega_j) - F(\omega_{j-۱})$$

حال با توجه به آن که $ECT = \frac{EC}{ET}$، مینیمم‌سازی متوسط هزینه در واحد زمان با استفاده از رابطه‌های ۱ و ۲، پارامترهای بهینه‌ی طراحی اقتصادی، یعنی n، h_j و L را در اختیار خواهد گذاشت. برای ساده‌سازی این مسئله‌ی برنامه‌ریزی غیرخطی، رحیم و بنرجی [۵] پیشنهاد کردند که فاصله‌های نمونه‌گیری به‌گونه‌ای انتخاب شوند که مخاطره‌ی تابع خطر تجمعی روی هر فاصله‌ی نمونه‌گیری ثابت باشد، مشابه با آنچه در توزیع نمایی به‌ازای طرح نمونه‌گیری یکنواخت رخ می‌دهد. این فرض معادل با آن خواهد بود که برای هر $j = ۱,۲, \dots$ ، $p_j = p$. در این صورت، h_jها تابعی از $h_۱$ خواهند بود و تعیین پارامترهای طراحی به n، $h_۱$ و L تقلیل پیدا می‌کند. در مدل فوق، هزینه‌ی تحت کنترل و هزینه‌ی خارج از کنترل سامانه به عنوان مقدارهایی ثابت و به عنوان ورودی مدل در نظر گرفته شده‌اند که چندان با واقعیت سازگار نیست. تاگوچی [۱۰] پیشنهاد کرد که بایستی بین محصول‌های تولیدی با مشخصه‌ی کیفیت متفاوت حول مقدار هدف تفاوت قایل شد، به این صورت که هرچه مشخصه‌ی کیفیت از مقدار هدف دورتر باشد، هزینه‌ی اجتماعی کیفیت بالاتر در نظر گرفته شود و در نتیجه محصول مطلوب‌تر خواهد بود. تابع زیان درجه‌ی دوم تاگوچی می‌تواند برای تعیین زیان کیفیت یک محصول وقتی مشخصه‌ی کیفیت آن از مقدار هدف انحراف دارد به کار رود. دوفوا و بن‌دایا [۱۴] با بهره‌گیری از این تابع زیان به تعریف هزینه‌ی تحت کنترل کیفیت و هزینه‌ی خارج از کنترل کیفیت پرداختند که در زیر می‌آید:

فرض کنیم Δ، آستانه‌ی دوجانبه‌ی محصول تولیدی و A، هزینه‌ی دوباره‌کاری یا امحاء یک واحد با انحراف از مقدار هدف Δ باشد. به‌علاوه، فرایند قابل است و بنا بر این، دم‌های توزیع میانگین نمونه‌ای خارج از حدود مشخصه‌های طراحی، قابل اغماض خواهند بود. شکل ۱، که تلفیق رهیافت تابع زیان در طراحی نمودار کنترلی را شرح می‌دهد، کارگشاست. با این پذیره‌ها، هزینه‌ی تحت کنترل کیفیت سامانه در تلفیق تابع زیان تاگوچی به‌صورت زیر بیان می‌شود:



شکل ۱. رویکرد تابع زیان در طراحی نمودار کنترلی

$$L_{in}(n,L) = \frac{A}{\Delta^۲}\int_{\mu-L\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}^{\mu+L\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}(\bar{x}-\mu)^۲ f(\bar{x})d\bar{x} \qquad (۳)$$

با این پذیره‌ها، هزینه‌ی تحت کنترل کیفیت سامانه در تلفیق تابع زیان تاگوچی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$L_{in}(n,L) = \frac{A}{\Delta^۲}\int_{\mu-L\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}^{\mu+L\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}(\bar{x}-\mu)^۲ f(\bar{x})d\bar{x} \qquad (۳)$$

که در آن، f تابع چگالی احتمال $\overline{X}$ در حالت تحت کنترل است. به‌علاوه، هزینه‌ی خارج از کنترل به‌صورت زیر است:

$$L_{out}(n,L) = \frac{A}{\Delta^۲}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}(\bar{x}-\mu)^۲ f(\bar{x})d\bar{x} - \int_{\mu-L\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}^{\mu+L\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}(\bar{x}-\mu)^۲ f(\bar{x})d\bar{x}\right] \qquad (۴)$$

که در آن، f تابع چگالی احتمال $\overline{X}$ در حالت خارج از کنترل است. اکنون از کمیت‌های فوق در تعدیل مدل اقتصادی تعمیم‌یافته‌ی رحیم و بنرجی (۱۹۹۳) استفاده می‌کنیم. توجه کنیم که متوسط زمان چرخه در مدل تلفیقی، همان رابطه‌ی ۱ است و تغییر نخواهد کرد، اما متوسط هزینه‌ی چرخه از طریق هزینه‌های تحت کنترل و خارج از کنترل کیفیت در معادله‌های ۳ و ۴ از تابع زیان تاگوچی تاثیر می‌پذیرد. بنا بر این، متوسط هزینه‌ی چرخه در مدل تلفیقی که آن‌را متوسط هزینه‌ی تلفیقی (IEC) می‌گوییم، به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$IEC = PL_{in}\sum_{j=۱}^{\infty} h_j \prod_{i=۰}^{j-۱}(۱-p_i)$$

$$+\alpha Y \sum_{j=۱}^{\infty}\prod_{i=۱}^{j}(۱-p_i) + P(L_{in}-L_{out})\tau$$

$$+(L_{out}-L_{in})\sum_{j=1}^{\infty}\omega_j p_j\prod_{i=0}^{j-1}(1-p_i)$$
$$+PL_{out}\beta\sum_{j=1}^{\infty}p_j\prod_{i=0}^{j-1}(1-p_i)\sum_{i=j+1}^{\infty}h_i\beta^{i-j-1}$$
$$+(a+bn)\left[\frac{\beta}{1-\beta}+\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{j}(1-p_i)\right]+W \qquad (۵)$$

که در آن، P نرخ تولید است. حال تابع هدف مدل تلفیقی در مسئله مینیمم‌سازی، یعنی متوسط هزینه‌ی تلفیقی در واحد زمان $(IECT)$ از تقسیم رابطه‌ی ۵ بر رابطه‌ی ۱ به دست می‌آید و حل این مسئله‌ی بهینه‌سازی، پارامترهای بهینه‌ی مدل اقتصادی تلفیق‌شده با تابع زیان تاگوچی را در اختیار می‌گذارد. توجه به رابطه‌های ۱ و ۵ مشخص خواهد کرد که توزیع مشخصه‌ی کیفیت از طریق احتمال خطاهای نوع اول و دوم و هزینه‌های تحت کنترل و خارج از کنترل کیفیت بر مدل تلفیقی اثر می‌گذارد که در بخش بعدی به طور مفصل به آن پرداخته خواهد شد.

۳- تاثیر توزیع مشخصه‌ی کیفیت بر مدل تلفیقی

محاسبه‌ی دو کمیت بنیادین ET و EC در مدل تلفیقی طراحی اقتصادی نمودارهای کنترلی، بیش از همه به سازوکار شکست فرایند وابسته است، به جز این که احتمال خطای نوع اول α، هزینه‌ی تحت کنترل L_{in}، احتمال خطای نوع دوم β، و هزینه‌ی خارج از کنترل L_{out}، به آماره‌ی کنترل $\bar{X}$ و توزیع آن بستگی دارد. در این بخش، در دو زیربخش جداگانه برای دو موقعیت داده‌های نرمال و نانرمال، رویه‌های محاسباتی برای این کمیت‌های چهارگانه ارائه خواهند شد.

۳-۱ حالت نرمال

اگر $\bar{X}$ دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف‌معیار $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ در نظر گرفته شود -این فرض می‌تواند نتیجه‌ای از این باشد که مشخصه‌ی کیفیت دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف‌معیار σ فرض شود یا این‌که از قضیه‌ی حد مرکزی به طور تقریبی نتیجه شود، آن‌گاه

$$\alpha = P\left(\bar{X} > \mu_0 + L\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\middle|\mu=\mu_0\right)$$
$$+P\left(\bar{X} < \mu_0 - L\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\middle|\mu=\mu_0\right) = 2\Phi(-L) \qquad (۶)$$
$$\beta = P\left(\mu_0 - L\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{X} \le \mu_0 + L\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\middle|\mu=\mu_0+\delta\sigma\right)$$
$$= \Phi\left(L-\delta\sqrt{n}\right) - \Phi\left(-L-\delta\sqrt{n}\right) \qquad (۷)$$

که در آن، Φ تابع توزیع نرمال استاندارد است. به‌علاوه، تحت فرض نرمال بودن توزیع آماره‌ی $\bar{X}$، هزینه‌های تحت کنترل و خارج از کنترل کیفیت به ترتیب زیر خواهند بود:

$$L_{in}(n,L) = \frac{A\sigma^2}{n\Delta^2}\left[1-\frac{2L}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-L^2}{2}}-\alpha\right] \qquad (۸)$$

و

$$L_{out}(n,L) = \frac{A\sigma^2}{n\Delta^2}\left[(1+\delta^2 n)(1-\beta)+\frac{L+\delta\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(L-\delta\sqrt{n})^2}{2}} + \frac{L-\delta\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(L+\delta\sqrt{n})^2}{2}}\right] \qquad (۹)$$

رابطه‌های چهارگانه‌ی ۶، ۷، ۸ و ۹ برای محاسبات در بخش عددی برای حالت نرمال به کار گرفته می‌شوند.

۳-۲ حالت نانرمال

در فقدان فرض نرمال بودن توزیع آماره‌ی $\bar{X}$ – به خاطر فقدان فرض نرمال بودن توزیع مشخصه‌ی کیفیت یا فقدان وجود پذیره‌های قضیه‌ی حد مرکزی مانند اندازه‌ی نمونه‌ی بزرگ - توزیع بِر یک توزیع مناسب در برازش با داده‌های نانرمال است که به خاطر آن که تابع توزیع آن دارای فرم بسته است، محاسبات مربوط به کمیت‌های چهارگانه را نیز ساده می‌سازد. این توزیع که توسط بِر [۱۵] ارائه شد، دارای تابع چگالی احتمال $f(x)=\frac{ckx^{c-1}}{(1+x^c)^k}$ و تابع توزیع $F(x)=1-\frac{1}{(1+x^c)^k}$ است. میانگین، انحراف‌معیار، ضریب چولگی و ضریب کشیدگی خانواده‌ی توزیع‌های بِر در جدول‌هایی (جدول II و جدول III) نشان داده شده است [۱۵]. این جدول‌ها محقق را قادر می‌سازند تا تبدیل استانداردی بین یک متغیر تصادفی دلخواه X و متغیر Q با توزیع بِر به‌صورت زیر ایجاد نماید:

(۱) ضریب چولگی و ضریب کشیدگی داده‌های اصلی براورد می‌شود.

(۲) ضریب چولگی و ضریب کشیدگی برای توزیع بِر از جدول (II) و با توجه به خروجی مرحله‌ی (۱) حاصل می‌شود.

(۳) میانگین و انحراف معیار توزیع بِر از جدول (III) و با توجه به خروجی مرحله‌ی (۲) به دست می‌آید.

جدول ۱. پارامترهای بهینه در طراحی اقتصادی و معیارهای آماری حاصل (توزیع نرمال)

λ	v	n	h_1	L	α	$1-\beta$	$IECT$
۰/۰۵	۲	۳	۴/۸۵۹۲	۱/۱۴۰۴	۰/۲۵۴۱	۰/۹۸۹۹	۱۵/۳۴۰۶
۰/۰۲	۲	۳	۶/۰۹۴۰	۱/۳۸۱۲	۰/۱۶۷۲	۰/۹۸۱۴	۱۲/۲۶۱۴
۰/۰۰۲	۲	۴	۱۲/۸۲۶۱	۱/۵۰۷۸	۰/۱۳۱۶	۰/۹۹۳۶	۶/۷۳۱۱
۰/۰۰۲	۳	۳	۷/۵۲۱۰	۱/۱۷۹۱	۰/۲۳۸۴	۰/۹۸۸۸	۱۰/۹۵۴۵
۰/۰۰۰۲	۳	۴	۱۳/۳۵۹۵	۱/۳۳۱۰	۰/۱۸۳۲	۰/۹۹۶۲	۷/۲۶۲۴

جدول ۲. پارامترهای بهینه در طراحی اقتصادی و معیارهای آماری حاصل (توزیع بِر)

λ	v	n	h_1	L	α	$1-\beta$	$IECT$
۰/۰۵	۲	۳	۴/۷۷۶۹	۱/۱۱۸۶	۰/۲۳۹۴	۰/۹۹۳۴	۱۵/۲۹۳۸
۰/۰۲	۲	۳	۶/۰۳۰۵	۱/۲۶۲۵	۰/۱۸۶۷	۰/۹۸۷۹	۱۲/۱۲۲۱
۰/۰۰۲	۲	۳	۱۲/۷۴۳۳	۱/۲۷۶۰	۰/۱۸۲۳	۰/۹۸۷۳	۶/۷۰۷۷
۰/۰۰۲	۳	۳	۷/۴۴۹۹	۱/۱۳۰۶	۰/۲۳۴۶	۰/۹۹۳۱	۱۰/۹۰۵۹
۰/۰۰۰۲	۳	۳	۱۳/۲۸۳۹	۱/۱۸۸۲	۰/۲۱۲۷	۰/۹۹۱۱	۷/۲۲۶۵

(۴) تبدیل استاندارد بین Q با توزیع بِر و متغیر تصادفی دلخواه X به‌صورت $\frac{X-\bar{X}}{S_X}=\frac{Q-M}{S}$ است که در آن $\bar{X}$ و S_X به‌ترتیب میانگین و انحراف‌معیار نمونه‌ی اصلی، و M و S به‌ترتیب میانگین و انحراف‌معیار خانواده‌ی توزیع‌های بِر متناظر با نمونه‌ی اصلی هستند. برای محاسبه‌ی کمیت‌های چهارگانه، فرض می‌کنیم $\bar{X}$ همان متغیر با توزیع دلخواه باشد.

در حالت تحت کنترل بودن فرایند، $\bar{X}$ با معادله‌ی $\bar{X}=\mu_0+\frac{(Q-M)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{S}$ به توزیع بِر مرتبط می‌شود.

بنا بر این،

$$\alpha = 1+\frac{1}{[1+(M+LS)^c]^k}-\frac{1}{[1+(M-LS)^c]^k} \qquad (10)$$

$$L_{in}(n,L)=\frac{A\sigma^2}{n\Delta^2S^2}\int_{M-LS}^{M+LS}\frac{ck(q-M)^2q^{c-1}dq}{(1+q^c)^{k+1}} \qquad (11)$$

حال فرض کنیم انحراف بادلیل رخ داده و فرایند به حالت خارج از کنترل انتقال یافته است. در این حالت، تبدیل استاندارد به‌صورت $\bar{X}=\mu_0+\delta\sigma+\frac{(Q-M)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{S}$ است. بنا بر این،

$$\beta=\frac{1}{[1+(M-LS-S\delta\sqrt{n})^c]^k}-\frac{1}{\left[1+(M+LS-S\delta\sqrt{n})^c\right]^k} \qquad (12)$$

$$L_{out}(n,L)=\frac{A\sigma^2}{n\Delta^2S^2}\times$$
$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ck\left(q-M+\sqrt{n}S\delta\right)^2q^{c-1}dq}{(1+q^c)^{k+1}}\right.$$
$$\left.-\int_{M-LS-\delta\sqrt{n}S}^{M+LS-\delta\sqrt{n}S}\frac{ck\left(q-M+\delta\sqrt{n}S\right)^2q^{c-1}dq}{(1+q^c)^{k+1}}\right] \qquad (13)$$

در بخش عددی، با توجه به داده‌های موجود در [۲۰]، ضریب چولگی و ضریب کشیدگی داده‌های اصلی به ترتیب ۰,۶۳۵ و ۴,۶۳۰ می‌باشند. بنابر این، ضریب چولگی و ضریب کشیدگی

توزیع بِر به ترتیب $c = ۵$ و $k = ۲$ خواهند بود و از این‌جا، $M = ۰.۸۵۵۱۷$ و $S = ۰.۲۴۷۹۴$.

به این ترتیب، رابطه‌های چهارگانه‌ی ۱۰، ۱۱، ۱۲ و ۱۳ برای محاسبات لازم در حالت نانرمال به کار گرفته می‌شوند.

۴- نتایج عددی

در این بخش، نتایج عددی حاصل از طراحی اقتصادی نمودار کنترلی $\bar{X}$ تحت طرح نمونه‌گیری نایکنواخت و نیز به ازای مشخصه‌های کیفیت نرمال و نانرمال به‌ترتیب در جدول‌های ۱ و ۲ ارائه شده است. مقدارهای مختلف برای پارامتر مقیاس λ و پارامتر شکل υ توزیع وایبول به عنوان سازوکار شکست فرایند با نرخ شکست افزایشی به کار گرفته شده‌اند. به‌علاوه، فرض می‌کنیم $Z_0 = ۰.۲۵$ ساعت، $Z_1 = ۱$ ساعت، $a = ۴$ دلار، $b = ۱.۲$ دلار، $Y = ۲۵$ دلار، $W = ۵۰$ دلار، $P = ۱۰۰$ دلار، $A = ۵$، و $\frac{\sigma}{\Delta} = ۰.۱$ پارامترهای ورودی مدل تلفیقی باشند.

مقایسه‌ی نتایج جدول‌های (۱) و (۲) نشان می‌دهد که تحت مدل شوک وایبول با پارامترهای مقیاس و شکل در نظر گرفته شده، اختلاف قابل‌ملاحظه‌ای بین استفاده از توزیع نرمال و توزیع بِر در مدل تلفیقی وجود ندارد.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، مدل هزینه‌ی تعمیم‌یافته‌ی رحیم و بنرجی (۱۹۹۳) برای تلفیق تابع زیان تاگوچی در طراحی اقتصادی نمودار کنترلی $\bar{X}$ به کار گرفته شده است. این ادغام از دو جهت اهمیت دارد. اول این‌که مفهوم زیان اجتماعی کیفیت از منظر تاگوچی را از مرحله‌ی پیش از ساخت به مرحله‌ی حین ساخت محصول گسترش می‌دهد و دوم، برای هر طرح نمونه‌گیری و هر توزیع طول عمر قابل استفاده است.

در تحلیل عددی، با توجه به افزایشی بودن نرخ شکست بسیاری از سامانه‌های تولیدی صنعتی، از توزیع وایبول به عنوان سازوکار شکست فرایند و طرح نمونه‌گیری نایکنواخت استفاده شده است و نتایج آن در جدول‌هایی خلاصه شده است. برای بررسی جامع‌تر، مدل تلفیقی تعمیم‌یافته تحت داده‌های نرمال و نانرمال به‌صورت نظری و عددی مورد بررسی قرار گرفته است. مدل تلفیقی می‌تواند در پژوهش‌های آتی برای موقعیت‌هایی که تابع‌های زیان دیگر کاربرد بهتری دارند تعدیل شده و به کار گرفته شود.

مراجع

[۱] Duncan, J. (۱۹۵۶). *The Economic Design of $\bar{X}$–Charts Used to Maintain Current Control of a Process. J. American Statistical Association,* ۵۱, ۲۲۸-۲۴۲.

[۲] Lorenzen, T. J. & Vance, L. C. (۱۹۸۶). *The Economic Design of Control Charts: A Unified Approach. Technometrics,* ۲۸, ۳-۱۰.

[۳] Ross, S. M. (۱۹۷۰). *Applied Probability Models with Optimization Applications*. San Francisco: Holden-Day.

[۴] Banerjee, P. K. & Rahim, M. A. (۱۹۸۸). *Economic Design of $\bar{x}$-Control Charts Under Weibull Shock Models. Technometrics,* ۳۰, ۴۰۷-۴۱۴.

[۵] Rahim, M. A. & Banerjee, P. K. (۱۹۹۳). *A Generalized Model for Economic Design of $\bar{x}$–Control Charts for Production Systems with Increasing Failure Rate and Early Replacement. Naval Research Logistics,* ۴۰, ۷۸۷-۸۰۹.

[۶] Gibra, I. (۱۹۷۵). *Recent developments in control charts techniques. Journal of Quality Technology,* ۷, ۱۸۳-۱۹۲.

[۷] Montgomery, D. (۱۹۸۰). *The economic design of control charts: A review and literature survey. Journal of Quality Technology,* ۱۲, ۷۵-۸۷.

[۸] Vance, L. (۱۹۸۳). *A bibliography of statistical quality control chart techniques. Journal of Quality Technology,* ۱۵, ۵۹-۶۲.

[۹] Ho, C. & Case, K. E. (۱۹۹۴). *Economic design of control charts, a literature review for ۱۹۸۱-۱۹۹۱. Journal of Quality Technology,* ۲۶, ۳۹-۵۳.

[۱۰] Taguchi, G. (۱۹۸۶). *Introduction to Quality Engineering. Designing Quality into Products and Processes.* Asian Productivity Organization.

[۱۱] Taguchi, G. & Wu, Y. (۱۹۷۹). *Introduction to Off-Line Quality Control.* Tokyo: Central Japan Quality Control Association.

[۱۲] Taguchi, G., Elsayed, E. A. & Hsiang, T. (۱۹۸۹). *Quality Engineering in Production Systems*. New York: McGraw-Hill.

[۱۳] Alexander, S. M., Dillman, M. A., Usher, J. S. & Damodaran, B. (۱۹۹۵). *Economic design of control charts using the Taguchi loss function.*

Computers and Industrial Engineering, ۲۸, ۶۷۱-۶۷۹.

[۱۴] Duffuaa, S. O. & Ben-Daya, M. (۲۰۰۳). *Integration of Taguchi's loss function approach in the economic design of x –chart. International Journal of Quality & Reliability Management*, ۲۰(۵), ۶۰۷-۶۱۹.

[۱۵] Burr, IW. (۱۹۴۲). *Cumulative frequency functions. Annal Math Stat*, ۱۳, ۲۱۵–۲۳۲.

[۱۶] Johnson, N. L. (۱۹۴۹). *Systems of frequency curves generated by methods of translation. Biometrika*, ۳۶, ۱۴۹-۱۷۶.

[۱۷] Chen, H. & Cheng, Y. (۲۰۰۷). *Non-normality effects on the economic-statistical design of $\bar{X}$ charts with Weibull in-control time. European Journal of Operational Research*, ۱۷۶, ۹۸۶-۹۹۸.

[۱۸] Chen, F. L. & Yeh, C. H. (۲۰۰۹). *Economic statistical design of non-uniform sampling scheme Xbar control charts under non-normality and Gamma shock using genetic algorithm. Expert Systems with Applications*, ۳۶, ۹۴۸۸-۹۴۹۷.

[۱۹] Chen, F. L. & Yeh, C. H. (۲۰۱۱). *Economic statistical design for x-bar control charts under non-normal distributed data with Weibull in-control time. Journal of the Operational Research Society*, ۶۲, ۷۵۰-۷۵۹.

[۲۰] Rahim, M. A. (۱۹۹۳). *Economic design of $\bar{X}$ control charts assuming Weibull distribution in-control times. Journal of Quality Technology*, ۲۵(۴), ۲۹۶-۳۰۵.