

# جایگزینی آزمون نسبت احتمال دنباله‌ای با ماسک $V$ در نمودار کنترل جمع تجمعی

عباس پرچی

استادیار، دانشگاه شهید باهنر کرمان، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، بخش آمار،

بهرام صادق‌پور گیلده

دانشیار، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده علوم ریاضی، بخش آمار\*

**چکیده** نمودار کنترل جمع تجمعی در اغلب کتب کنترل کیفیت بدون توجه به فرمول‌های آماری نهفته در پشت ماسک  $V$  مطرح شده است. در این مقاله پس از معرفی و مرور نمودار کنترل جمع تجمعی، به بررسی قاعده‌ی تصمیم‌گیری و ارتباط آن با آزمون‌های نسبت احتمال دنباله‌ای پرداخته شده است. بسیاری از مراجع و کتب کنترل کیفیت روش ماسک  $V$  را معادل آزمون جمع تجمعی با داده‌های وارون‌یافته می‌دانند. گرچه این دو روش مشابهت‌های زیادی با یکدیگر دارند، اما قواعد تصمیم‌گیری آن‌ها با یکدیگر یکسان و معادل نیست. به منظور شفاف‌سازی بیشتر، در این مقاله تشابهات و تفاوت‌های دو رویکرد مذکور مورد بررسی و مقایسه قرار گرفته شده است.

**کلمات کلیدی** آزمون نسبت احتمال دنباله‌ای، نمودار کنترل جمع تجمعی، ماسک  $V$ ، احتمال ارتکاب خطاهای نوع اول و دوم

## ۱- مقدمه

«آزمون  $SPRT$  مبتنی بر داده‌های وارون‌یافته»، با ذکر تفاوت‌ها و تشابهات دو روش، در بخش ۴ مورد بحث قرار گرفته است. بخش ۵ شامل کنکاشی برای تفسیر ماسک  $V$  است و در نهایت بخش ۶ مقاله به نتیجه‌گیری پرداخته است.

بسیاری از مراجع و کتب کنترل کیفیت [۷]، [۱۲] و [۲۲] به بررسی ماسک  $V$  با توجه به آزمون آزمون‌های نسبت احتمال دنباله‌ای  $SPRT$  پرداخته‌اند. اغلب آن‌ها «روش ماسک  $V$  در نمودار  $CUSUM$  کنترل جمع تجمعی» را معادل «آزمون  $SPRT$  مبتنی بر داده‌های وارون‌یافته» معرفی کرده و دلایل/استدلال‌هایی را نیز در این زمینه ارائه می‌دهند که برخی از آن‌ها می‌تواند برای خوانندگان گمراه‌کننده باشد. به منظور رفع برخی از ابهامات، در این تحقیق کوشش بر آن بود تا با مرور، جمع‌بندی، بیان تفاوت‌ها و تشابهات هر دو روش، به بررسی معادل بودن/نبودن آن‌ها پرداخته شود.

## ۲- نمودار کنترل $CUSUM$

به منظور بررسی تحت کنترل بودن/نبودن یک فرایند تولیدی، استفاده از نمودارهای کنترل کیفیت که معمولاً بر اساس  $m$  نمونه‌ی  $n$  تایی رسم می‌شوند، در صنعت متداول است. به منظور سهولت در ارائه و درک مفاهیم مطرح شده، در این مقاله حجم نمونه‌ها برابر  $n = 1$  در نظر گرفته شده است و این موضوع خللی به صحت و کلیت مطالب مطرح شده در این مقاله وارد نمی‌سازد. بنابراین به منظور بررسی تحت کنترل بودن میانگین یک فرایند تولیدی نرمال، با واریانس ثابت، روش رسم نمودار جمع تجمعی (نمودار  $CUSUM$ ) مبتنی بر مشاهدات  $X_1, \dots, X_m$  بصورت زیر است. ابتدا باید نقاط  $(t, S_t)$  را در صفحه‌ی مختصات  $tS_t$  رسم کرد که در آن مقادیر جمع‌های

این مقاله با ساختار زیر تدوین شده است. بخش ۲ به مرور نمودار کنترل  $CUSUM$  به همراه نکات کاربردی پرداخته است. در بخش ۳، آزمون  $SPRT$  برای بررسی تحت کنترل بودن میانگین جامعه به همراه برخی نکات تکمیلی مطرح شده است. بررسی معادل بودن «روش ماسک  $V$  در نمودار  $CUSUM$ » با

\* (Corresponding author) [sadrghpur@um.ac.ir](mailto:sadrghpur@um.ac.ir)

بنابراین بازوهای ماسک  $V$  را می‌توان شبیه به حدود کنترل در نمودارهای کنترل شوهارت<sup>۱</sup> دانست.

### چند نکته کاربردی در ترسیم ماسک $V$ :

نکات زیر برای رسم ماسک  $V$  در هنگام به‌کارگیری عملی فرمول‌های (۲) و (۳) حائز اهمیت هستند: از آنجا که هدف بررسی انحرافات از میانگین فرایند است، لذا  $\mu_0$  را اغلب برابر با میانگین کل فرایند، یعنی برابر  $\bar{x}$ ، قرار می‌دهند. بنابراین مشاهده‌ی یک روند صعودی (نزولی) در نقاط روی این نمودار بیانگر افزایش (کاهش) میزان  $i$  امین مشاهده نسبت به میانگین کل فرایند، یعنی به صورت زیر است [۲].

$$(x_i - \bar{x} < 0) x_i - \bar{x} > 0 \quad (۴) \quad (۱)$$

(۲) تعیین مقدار مثبت  $c$  بر حسب واحد  $\sigma$  صورت می‌گیرد و در صورت مجهول بودن انحراف‌معیار جامعه از انحراف‌معیار نمونه استفاده می‌شود. هر چه مقدار  $c$  بزرگتر انتخاب شود، حساسیت نمودار  $CUSUM$  در گزارش نقاط خارج از کنترل کمتر خواهد شد. زیرا اولاً، با توجه به صعودی بودن تابع  $\tan^{-1}(\cdot)$ ، در فرمول (۳) می‌توان ادعا کرد که افزایش  $c$  سبب افزایش زاویه  $\theta$  می‌شود، و ثانیاً، موجب کاهش  $d$  نیز می‌شود. بنابراین تعیین مقدار مناسب برای  $c$  قبل از رسم ماسک بسیار مهم بوده و  $c$  حداقل میزان انحراف از میانگین (بر حسب  $\sigma$ ) است که مایلیم نمودار  $CUSUM$  قدرت تشخیص این مقدار جدید انحراف‌یافته‌ی میانگین را داشته باشد [۱۲].

(۳) احتمال ارتکاب خطای نوع اول در نمودارهای کنترل معادل احتمال وقوع نقطه‌ای تصادفی در خارج از حدود کنترل، وقتی فرایند مشکلی ندارد و تحت کنترل است، می‌باشد. حداکثر مقدار این احتمال، که از این پس آن را با نماد  $\alpha_{CUSUM}$  نشان می‌دهیم، باید قبل از رسم نمودار  $CUSUM$  به‌طور تقریبی تعیین شود [۱۲].

(۴) به ازای  $\alpha$  ی ثابت، می‌توان نوشت

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \log(1 - \beta) = 0 \quad (۵)$$

لذا در نهایت، با فرض بسیار کوچک اختیار کردن  $\beta$ ، می‌توان بر اساس فرمول‌های  $d = -\frac{1}{c^2} \log \alpha$  و  $\theta =$

تجمعی میزان انحراف آماره‌ی نمونه از مقدار هدف  $\mu_0$  به صورت

$$s_t = \sum_{i=1}^t (x_i - \mu_0) \quad (۱)$$

به ازای  $t = 1, 2, \dots, m$  تعریف می‌شوند. یک روش برای تفسیر نمودار  $CUSUM$  قرار دادن یک ماسک  $V$ -شکل بر روی نمودار است به‌طوری‌که مانند شکل ۱ نقطه‌ی  $O$  منطبق با آخرین نقطه‌ی رسم‌شده (یعنی نقطه‌ی  $(m, s_m)$ ) بوده و پاره‌خط  $OP$  موازی محور افقی نمودار است. در مراجع [۲]، [۴]، [۵] و [۱۶]، طول پاره‌خط  $OP$  برابر

$$d = -\frac{2}{c^2} \log \frac{\alpha}{1 - \beta} \quad (۲)$$

و زاویه‌ی بین پاره‌خط  $OP$  و محور افقی برابر

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{c\sigma}{d} \right) \quad (۳)$$

معرفی شده است که در آن‌ها  $\alpha$  و  $\beta$  به ترتیب احتمالات ارتکاب خطاهای نوع اول و دوم در آزمون مطرح‌شده بوسیله‌ی نمودار  $CUSUM$ ، و  $c$  حداقل میزان انحراف از میانگین (بر حسب انحراف‌معیار  $\sigma$ ) است که مایلیم نمودار  $CUSUM$  قدرت تشخیص این مقدار جدید انحراف‌یافته‌ی میانگین را داشته باشد (در بخش‌های ۳ و ۴ به چگونگی محاسبه و ارتباط آن‌ها با آزمون نسبت احتمال دنباله‌ای (SPRT)<sup>۱</sup> بیشتر می‌پردازیم). به دلیل عدم ارتباط زاویه  $\theta$  و فاصله  $d$  به نقطه‌ی  $(t, s_t)$ ، می‌توان ادعا کرد که زاویه  $\theta$  و فاصله  $d$  در طول بررسی ثابت خواهند ماند و از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر تغییر نمی‌کنند. به خاطر همین ثبات مقادیر  $\theta$  و فاصله  $d$ ، نام ماسک برای این روش انتخاب شده است. همچنین توجه داشته باشید که با توجه به فرمول (۳)، مقدار زاویه‌ی دهانه‌ی ماسک رابطه‌ی مستقیمی با مقدار انحراف میانگین تحت فرضیه جانشین، یعنی  $c\sigma$ ، دارد.

اگر نقاط مربوط به جمع‌های تجمعی قبلی، یعنی نقاط  $(1, s_1), \dots, (t-1, s_{t-1})$ ، بین بازوهای ماسک قرار گیرند فرایند تحت کنترل و در غیر اینصورت خارج از کنترل است.

### ۳- آزمون SPRT برای بررسی تحت کنترل بودن میانگین جامعه

به منظور بررسی تحت کنترل بودن میانگین یک فرایند تولیدی نرمال (با واریانس معلوم)، می‌توان فرضیه‌های آزمون SPRT را مبتنی بر مشاهدات  $x_1, \dots, x_t$ ، به صورت زیر تعریف کرد

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_{+1}: \mu = \mu_0 + c\sigma \quad (c > 0) \end{cases} \quad (6)$$

که در آن‌ها  $\mu_0$  مقدار هدف در بررسی میانگین جامعه است. در این بخش قصد داریم تا به ازای هر نمونه‌ی تک‌عضوی، یک بار آزمون SPRT را برای فرضیه‌های فوق مبتنی بر کلیه‌ی مشاهدات بدست آمده (تا آن لحظه) در سطح معنی‌داری  $\alpha$  انجام دهیم. به این منظور، ابتدا می‌توان نسبت درست‌نمایی را مبتنی بر مشاهدات  $x_1, \dots, x_t$ ، بر حسب آماره‌ی

$$S_t = \sum_{i=1}^t (x_i - \mu_0)$$

$$\begin{aligned} \lambda_t(x_1, \dots, x_t) &= \frac{L(\mu_0)}{L(\mu_0 + c\sigma)} \\ &= \prod_{i=1}^t \left[ \frac{f(x_i; \mu_0)}{f(x_i; \mu_0 + c\sigma)} \right] \\ &= \frac{(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-t} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^t (x_i - \mu_0)^2}{2\sigma^2}\right)}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-t} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^t (x_i - \mu_0 - c\sigma)^2}{2\sigma^2}\right)} \\ &= \exp\left(\frac{tc^2}{\sigma} - \frac{c}{\sigma} S_t\right) \quad (7) \end{aligned}$$

در آزمون SPRT مقادیر احتمالات ارتکاب خطاهای نوع اول و دوم معلوم در نظر گرفته می‌شوند و نمونه‌گیری تک‌عضوی تا زمانی ادامه می‌یابد که یکی از فرضیه‌های  $H_0$  یا  $H_{+1}$  پذیرفته شوند. لازم به ذکر است که در آزمون SPRT حجم نمونه یک متغیر تصادفی با تکیه‌گاه مجموعه اعداد طبیعی  $N$  است و لذا قبل از انجام آزمون حجم نمونه مشخص نخواهد بود. بعد از مشخص نمودن مقادیر بحرانی  $A$  و  $B$  به طوری که  $A < B$ ، می‌توان پس از هر بار نمونه‌گیری (به حجم یک) از قاعده‌ی تصمیم آزمون SPRT که در ادامه آمده است استفاده نمود: اگر  $\lambda_t(x_1, \dots, x_t) \geq B$  آن‌گاه فرضیه  $H_0$  پذیرفته

را بر روی یک کاغذ شفاف ترسیم و از آن استفاده نمود [۱۲].

(۵) با در نظر داشتن محاسبات پیچیده و مکرر در بررسی تحت کنترل بودن/نبودن فرایند، استفاده از نرم‌افزارهای آماری *Statistica 5*، *Statgraphics 16.1*، *Minitab 14* و همچنین بسته‌ی *qcc* از نرم‌افزار *R* برای رسم آسان‌تر ماسک V در نمودارهای CUSUM به کاربران پیشنهاد می‌شود.

**نکته ۱.** به عنوان یک نمودار جمع تجمعی دیگر (بجز ماسک V)، می‌توان به نمودار لوکاس<sup>iii</sup> اشاره نمود که برای بررسی تحت کنترل بودن/نبودن فرایند مبتنی بر آماره‌ی  $S_t$  طراحی شده است. همانند نمودارهای کنترل کیفیت شوهارت، حدود کنترل نمودار لوکاس موازی یکدیگر بوده و همچنین، بررسی تحت کنترل بودن/نبودن فرایند بوسیله‌ی نمودار لوکاس معادل آزمون تحت کنترل بودن فرایند به روش نسبت درست‌نمایی<sup>iv</sup> است. علاقه‌مندان برای آشنایی بیشتر با این روش می‌توانند به مراجع [۱۵] و [۲۲] رجوع کنند.

**نکته ۲.** یکی از معیارهایی که معمولاً برای ارزیابی نمودارهای کنترل به کار می‌رود، میانگین طول دنباله نام دارد که آن را با نماد  $ARL^v$  نشان می‌دهند. میانگین طول دنباله یا میانگین طول گشت عبارت است از متوسط تعداد نمونه‌ای که جهت کشف تغییر ایجاد شده در فرایند، باید از خط تولید برداشته شود (منظور از کشف تغییر، قرار گرفتن نقطه‌ای در خارج از حدود کنترل بر روی نمودار کنترل است).

ثابت می‌شود که میانگین طول دنباله برابر عکس احتمال قرار گرفتن نقطه‌ای خارج از حدود کنترل است [۳] و به کمک این رابطه می‌توان فرمول دقیق‌تری برای  $ARL$  در نمودارهای کنترل شوهارت معرفی نمود. اما در نمودار کنترل CUSUM محاسبه احتمال قرار گرفتن نقطه‌ای خارج از حدود به صورت دنباله‌ای مطرح می‌شود و اثبات فرمول  $ARL$  نیاز به محاسبات پیچیده‌تری دارد که در این مقاله از آن صرف‌نظر شده است (به [۲۲] رجوع کنید).

$$\begin{aligned} \alpha &= P\left(\bigcup_{t=1}^{\infty} c_t \mid \theta = \theta_1\right) \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} P(c_t \mid \theta = \theta_1) \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} \left( \int \dots \int_{c_t} f(x_1, \dots, x_t) dx_1 \dots dx_t \right) \\ &\leq \sum_{t=1}^{\infty} \left( \int \dots \int_{c_t} A f(x_1, \dots, x_t) dx_1 \dots dx_t \right) \\ &= AP\left(\bigcup_{t=1}^{\infty} c_t \mid \theta = \theta_1\right) \quad (10) \end{aligned}$$

به طور مشابه، با توجه به رابطه (۹)،  $\beta \leq \frac{1-\alpha}{B}$  و بنابراین

با در نظر داشتن دو رابطه‌ی اخیر، می‌توان ادعا کرد که

$$\frac{\alpha}{1-\beta} \leq A < B \leq \frac{1-\alpha}{\beta} \quad (11)$$

از طرفی اگر آزمون  $SPRT$  را مبتنی بر  $A'$  و  $B'$  در نظر

بگیریم، آنگاه به طور مشابه  $\frac{\alpha'}{1-\beta'} \leq A' < B' \leq \frac{1-\alpha'}{\beta'}$

و یا به طور معادل

$$\frac{\alpha'}{1-\beta'} \leq \frac{\alpha}{1-\beta} < \frac{1-\alpha}{\beta} \leq \frac{1-\alpha'}{\beta'} \quad (12)$$

در نتیجه  $\alpha' - \alpha'\beta \leq \alpha - \alpha\beta$  و

$\beta' - \alpha\beta' \leq \beta - \alpha'\beta$  و لذا از جمع دو نامعادله‌ی اخیر

حکم ثابت می‌شود.  $\square$

**تذکره ۱.** در گزاره ۱ حتی اگر  $\alpha' > \alpha$  (یا  $\beta' > \beta$ ).

آن‌گاه می‌توان نشان داد که فاصله‌ی بین  $\alpha'$  و  $\alpha$  بسیار

کوچک و ناچیز خواهد بود. زیرا با توجه به نامعادله (۱۲)،

می‌توان نوشت

$$\alpha' < \frac{\alpha'}{1-\beta'} \leq \frac{\alpha}{1-\beta} = \frac{\alpha(1+\beta)}{1-\beta^2}; \alpha(1+\beta) \quad (13)$$

و بنابراین  $\alpha' - \alpha \leq \alpha\beta$  با توجه به تخمین‌های مطرح شده

در گزاره ۱ و با فرض مشخص بودن احتمالات ارتکاب خطاهای

نوع اول و دوم، قاعده‌ی تصمیم‌سختگیرانه‌تر، نسبت به آنچه در

می‌شود، اگر  $\lambda_t(x_1, \dots, x_t) \leq A$  آن‌گاه فرضیه  $H_{+1}$

پذیرفته می‌شود، و در غیر این صورت نمونه‌گیری ادامه پیدا

می‌کند. بنابراین با در نظر داشتن نسبت درست‌نمایی (۷)، می‌توان

قاعده‌ی تصمیم  $SPRT$  را در مورد  $t$  امین نقطه از نمودار کنترل

میانگین فرآیند، به صورت زیر بازنویسی کرد

$$(1) \quad \text{اگر } s_t \leq \frac{\gamma c \sigma}{\gamma} \text{ آن‌گاه } H_0 \text{ پذیرفته شود،}$$

$$(2) \quad \text{اگر } s_t \geq \frac{\gamma c \sigma}{\gamma} - \frac{\sigma}{c} \log(A) \text{ آن‌گاه } H_{+1} \text{ پذیرفته}$$

شود،

$$(3) \quad \text{اگر } \frac{tc\sigma}{\gamma} - \frac{\sigma}{c} \log(B) < s_t < \frac{tc\sigma}{\gamma} - \frac{\sigma}{c} \log(A)$$

آن‌گاه نمونه‌گیری ادامه پیدا کند (انتقال به مرحله  $t+1$ ).

**گزاره ۱.** [۱] استفاده از تخمین‌های  $A' = \frac{\alpha}{1-\beta}$  و

$B' = \frac{1-\alpha}{\beta}$  به ترتیب برای احتمالات ارتکاب خطاهای نوع

اول و دوم در آزمون  $SPRT$ ی فرضیه  $H_0: \theta = \theta_0$  در مقابل

فرضیه  $H_1: \theta = \theta_1$ ، منجر به آزمون محتاتانه‌تر و سخت

گیرانه‌تری نسبت به آزمون مبتنی بر  $A$  و  $B$  می‌شود

به طوری که اگر  $\alpha'$  و  $\beta'$  به ترتیب احتمالات ارتکاب خطاهای

نوع اول و دوم آزمون مبتنی بر  $A'$  و  $B'$  باشند آن‌گاه

$$\alpha' + \beta' \leq \alpha + \beta$$

**اثبات:** فرض کنید با مشاهده‌ی  $x_t$  نمونه‌گیری پایان بگیرد و

بتوان برای رد  $H_0$  یا  $H_1$  تصمیم گرفت. طبق قاعده‌ی

تصمیم مطرح شده برای آزمون  $SPRT$ ، ناحیه رد و ناحیه

پذیرش فرضیه  $H_0$  به ترتیب معادل  $\bigcup_{t=1}^{\infty} c_t$  و  $\bigcup_{t=1}^{\infty} \bar{c}_t$

می‌باشند که در آن‌ها

$$\bar{c}_t = \{(x_1, \dots, x_t) \mid \lambda_t \leq A \quad (8)$$

$$, A < \lambda_j < B \text{ for } j = 1, \dots, t-1\}$$

$$\bar{c}_t = \{(x_1, \dots, x_t) \mid \lambda_t \geq \quad (9)$$

$$A, A < \lambda_j < B \text{ for } j = 1, \dots, t-1\}$$

بنابراین، با توجه به رابطه (۸)، می‌توان نوشت

( $H_1$ ) یا به طور معادل قبول ( $H_0$ ) منجر به رد  $x_1, \dots, x_2, \dots, x_t$  در مرحله  $t$  ام می‌شود اگر و تنها اگر

$$|s_t| \geq \frac{tc\sigma}{\gamma} - \frac{\sigma}{c} \log(\alpha) + \frac{\sigma}{c} \log(1 - \beta) \quad (16)$$

و در غیر این صورت نمونه‌گیری ادامه می‌یابد و نمونه‌ی تک‌عضوی دیگری گرفته می‌شود. از تلاقی دو خط

$$s_t = \frac{tc\sigma}{\gamma} - \frac{\sigma}{c} \log(\alpha) + \frac{\sigma}{c} \log(1 - \beta) \quad (17)$$

$$s_t = -\frac{tc\sigma}{\gamma} + \frac{\sigma}{c} \log(\alpha) - \frac{\sigma}{c} \log(1 - \beta) \quad (18)$$

نقطه‌ی  $(\frac{\gamma}{c^2} \log \frac{\alpha}{1-\beta}, 0)$  حاصل می‌شود. همچنین این دو خط محور عمودی را به ترتیب در نقاط  $(0, -\frac{\sigma}{c} \log \frac{\alpha}{1-\beta})$  و  $(\frac{\sigma}{c} \log \frac{\alpha}{1-\beta}, 0)$  قطع می‌کنند که این موضوع در شکل ۲ مشهود است. بنابراین، کافی است حداقل یکی از نقاط  $(1, s_1), \dots, (t, s_t)$  در یکی از نیم‌صفحه‌های (۱۴) و (۱۵) قرار گیرند، تا منجر به رد فرضیه  $H_0: \mu = \mu_0$  در مقابل فرضیه  $H_1: \mu = \mu_0 \pm c\sigma$  در مرحله  $t$  ام گردد. به دیگر سخن، دربر گرفته شدن تمامی نقاط  $(1, s_1), \dots, (t, s_t)$  توسط دو بازوی ماسک V، به معنای تحت کنترل بودن فرایند تا لحظه‌ی  $t$  بر اساس آزمون SPRT است. به منظور سهولت در رسم ماسک V، می‌توان بجای استفاده از فرمول‌های دو نیم‌صفحه‌ی (۱۴) و (۱۵)، به طور معادل از زاویه‌ی  $\theta$  و فاصله‌ی  $d$  استفاده نمود که با توجه به شکل ۲ به صورت زیر قابل محاسبه است

$$\begin{cases} d = -\frac{\gamma}{c^2} \log \frac{\alpha}{1-\beta} \\ \theta = \tan^{-1} \left( \frac{-\frac{\sigma}{c} \log \frac{\alpha}{1-\beta}}{-\frac{\gamma}{c^2} \log \frac{\alpha}{1-\beta}} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{c\sigma}{\gamma} \right) \end{cases} \quad (19)$$

بنابراین در این روش با یک ماسک ثابت روبرو هستیم که باید بر چهره‌ی آخرین نقطه، یعنی نقطه  $(t, s_t)$ ، گذاشته شود.

اوایل این بخش برای آزمون SPRT مطرح شده بود، به صورت زیر است

$$(1) \text{ اگر } S_t \leq \frac{\gamma c \sigma}{\gamma} - \frac{\sigma}{c} \log(1 - \alpha) + \frac{\sigma}{c} \log(\beta) \text{ آن‌گاه } H_0 \text{ پذیرفته شود،}$$

$$(2) \text{ اگر } S_t \leq \frac{\gamma c \sigma}{\gamma} - \frac{\sigma}{c} \log(\alpha) + \frac{\sigma}{c} \log(1 - \beta) \text{ آن‌گاه } H_{+1} \text{ پذیرفته شود،}$$

(3) و در غیر این صورت، نمونه‌گیری ادامه پیدا کند (انتقال از مرحله  $t$  به مرحله  $t+1$ ).

نمونه‌گیری برای کنترل فرایند به وسیله‌ی نمودارهای کنترل، عملاً تا مشاهده‌ی یک نقطه خارج از حدود کنترل ادامه می‌یابد. بنابراین، نتیجه‌ی پذیرش  $H_0$  در نمودارهای کنترل اتفاقی معمول بوده و عملاً گزارش نمی‌شود و نمونه‌گیری تا پذیرش فرضیه  $H_{+1}$  ادامه می‌یابد. لذا ناحیه‌ی پذیرش فرضیه  $H_{+1}$  در مقابل  $H_0$ ، به صورت

$$S_t \geq \frac{tc\sigma}{\gamma} - \frac{\sigma}{c} \log(\alpha) + \frac{\sigma}{c} \log(1 - \beta) \quad (14)$$

است و نمونه‌گیری تا لحظه‌ی عدم برقراری این نامعادله ادامه می‌یابد. به طور مشابه، با تبدیل  $c$  به  $-c$ ، می‌توان نشان داد که ناحیه‌ی پذیرش فرضیه  $H_{-1}: \mu = \mu_0 - c\sigma$  در مقابل فرضیه  $H_0$  معادل است با

$$s_t \leq -\frac{tc\sigma}{\gamma} + \frac{\sigma}{c} \log(\alpha) - \frac{\sigma}{c} \log(1 - \beta) \quad (15)$$

ناحیه بحرانی آزمون  $H_0$  در مقابل  $H_1: \mu = \mu_0 \pm c\sigma$  معادل با اجتماع «ناحیه بحرانی آزمون  $H_0$  در مقابل  $H_{+1}$ » با «ناحیه بحرانی آزمون  $H_0$  در مقابل  $H_{-1}$ » است که با مشخص کردن دو نیم‌صفحه بامعادلات (۱۴) و (۱۵) در صفحه‌ی مختصات  $(t, s_t)$  به وسیله‌ی قاعده‌ی تصمیم زیر مشخص شده است (شکل ۲ را ببینید).

**قاعده تصمیم:** آزمون SPRT ی فرضیه  $H_0: \mu = \mu_0$  در مقابل فرضیه  $H_1: \mu = \mu_0 \pm c\sigma$  بر اساس مشاهدات

## نکات تکمیلی:

می‌سازد و این موضوع اهمیت آزمون  $SPRT$  را نسبت به دیگر آزمون‌ها آشکار می‌نماید [۲۰] و [۲۲].

(۴) می‌دانیم  $ARL_{H_{+1}} = E_{H_{+1}}(N)$  از طرفی در

آزمون  $SPRT$ ی  $H_0$  در مقابل  $H_{+1}$  (یا  $H_{-1}$ ) به کمک معادله والد ثابت می‌شود که

$$E_{H_{+1}}(N) = \frac{E_{H_{+1}}[\log \lambda(X_1, \dots, X_N)]}{E_{H_{+1}}[\log \frac{f_{+1}(X)}{f_0(X)}]} \quad (22)$$

$$\text{در آن } (1 - \beta) \log \frac{\alpha}{1 - \beta} + \beta \log \frac{1 - \alpha}{\beta}$$

تقریب مناسبی برای صورت کسر بوده (ص. ۲۱۹ از [۱]) و

بدست می‌آید.  $\frac{c^2}{\gamma}$  - نیز مخرج کسر در توزیع نرمال برابر

فرمول  $(\beta \rightarrow 0)$  های کوچک  $\beta$  در نتیجه به ازای

$$ARL_{H_{+1}}; -2c^{-2} \log \alpha \quad (23)$$

تقریب مناسبی برای میانگین طول گشت تحت فرضیه  $H_{+1}$  در آزمون  $SPRT$  است. لذا تحت فرض معادل بودن «روش ماسک  $V$  در نمودار  $CUSUM$ » با «آزمون  $SPRT$  مبتنی بر داده‌های وارون‌یافته» که در بخش ۴ مورد بحث قرار گرفته است، می‌توان برای مقایسه‌ی چندین فرایند تولیدی بر اساس نمودارهای  $CUSUM$  از رابطه (۲۳) نیز عملاً بهره گرفت.

#### ۴- مقایسه عملکرد ماسک $V$ در نمودار $CUSUM$ با آزمون $SPRT$

علی‌رغم ادعای برخی از مراجع و کتب مانند [۷]، [۱۲] و [۲۲] مبنی بر معادل بودن دو روش ماسک  $V$  و آزمون  $SPRT$  که در بخش‌های ۲ و ۳ مرور شدند، در این بخش پس از مطرح نمودن چند نکته، به مقایسه و بررسی تشابهات و تفاوت‌های این دو روش متفاوت پرداخته شده است. اما نخست باید قاعده تصمیم آزمون  $SPRT$  را بر اساس داده‌های وارون‌یافته تعریف کرد. تا کنون در روش‌های مطرح شده در این مقاله، مشاهدات  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_r, \dots$  بر اساس اندیس  $i$  مرتب شده بودند که در آن‌ها  $i$  شماره نمونه (یا زمان اخذ نمونه) با مقادیر ممکن  $t, \dots, 2, 1$  است. حال فرض کنید ترتیب این داده‌ها را بر عکس کرده، به این معنی که به ازای  $t$ ی ثابت،  $x_t$  اولین مقدار

(۱) در مورد نمودارهای کنترل، ارتکاب خطای نوع اول مترادف با این است که در حالی که تولید به خوبی انجام می‌شود از آن اشکال گرفته و در صدد تغییر آن برآمد. اگر آزمون‌های  $SPRT$ ی « $H_0$  در مقابل  $H_{+1}$ » و نیز « $H_0$  در مقابل  $H_{-1}$ » در سطح (اندازه‌ی)  $\alpha$  در نظر گرفته شوند، آنگاه آزمون  $SPRT$ ی « $H_0$  در مقابل  $H_1$ » در سطح (اندازه‌ی)  $2\alpha$  خواهد بود زیرا اندازه‌ی این آزمون برابر است با

$$\begin{aligned} \alpha_{SPRT} &= P_{\mu=\mu_0}(R) \\ &= P_{\mu=\mu_0}(R_- \cup R_+) \\ &= P_{\mu=\mu_0}(R_-) + P_{\mu=\mu_0}(R_+) \\ &\quad - P_{\mu=\mu_0}(R_- \cap R_+) \\ &\leq (=) 2\alpha \quad (20) \end{aligned}$$

که در آن  $R_-$ ،  $R_+$  و  $R$  به ترتیب نواحی بحرانی آزمون‌های  $SPRT$ ی « $H_0$  در مقابل  $H_{-1}$ »، « $H_0$  در مقابل  $H_{+1}$ » و « $H_0$  در مقابل  $H_1$ » می‌باشند.

(۲) ارتکاب خطای نوع دوم به این معنی است که در حالی که توزیع مبنای تغییر کرده و کنترل آماری وجود ندارد، نمودار کنترل به این مسئله پی نبرده و لذا تصور شود که شرایط عادی است. از آنجا که در نمودارهای کنترل این آزمون مرتباً تکرار می‌شود، می‌توان ادعا کرد که با گذشت زمان احتمال رخداد چنین اشتباهی کاهش پیدا می‌آید. بنابراین به ازای  $\alpha$ ی ثابت  $\lim_{\beta \rightarrow 0} \log(1 - \beta) = 0$  و در نتیجه به ازای  $\beta$ های بسیار کوچک می‌توان رابطه‌ی (۱۶) در قاعده تصمیم را به صورت زیر بازنویسی نمود

$$|s_t| \geq \frac{tc\sigma}{\gamma} - \frac{\sigma}{c} \log(\alpha) \quad (21)$$

(۳) قبل از انجام آزمون  $SPRT$  حجم نمونه برای اتخاذ تصمیم نهایی معلوم نبوده و در واقع یک متغیر تصادفی است. اگر این متغیر تصادفی را با  $N$  نشان دهیم، آنگاه طبق معادله والد  $V_i$  به ازای  $\alpha$  و  $\beta$ ی ثابت، آزمون  $SPRT$  هر دو مقدار  $E_{H_0}(N)$  و  $E_{H_1}(N)$  را هم‌زمان کمینه

(۱) زاویه‌ی  $\theta$  و فاصله‌ی  $d$  برای رسم ماسک V به ترتیب معادل زاویه‌ی  $\theta$  و فاصله‌ی  $d$  برای رسم ناحیه‌ی بحرانی در قاعده تصمیم آزمون SPRT بر اساس داده‌های وارون یافته می‌باشند.

(۲) با توجه به فرمول‌های (۱) و (۲۵)، به ازای مشاهدات  $x_1, \dots, x_m$  مقادیر آماره‌های  $s_t$  و  $s_t^{\leftarrow}$  در آخرین نقطه برابرند، یعنی  $s_m = s_m^{\leftarrow}$ .

**تفاوت‌ها:** به منظور نمایان‌سازی تمایز بین این دو رویکرد، برخی از تفاوت‌های بین دو رویکرد در زیر مطرح شده است:

(۱) گر چه ماسک هر دو روش ظاهراً معادل هستند، اما نباید فراموش کرد که ماسک V در صفحه مختصات  $ts_t$  و ماسک آزمون SPRT با داده‌های وارون یافته در صفحه مختصات  $ts_t^{\leftarrow}$  رسم شده است.

(۲) علی‌رغم بند ۲ از تشابهات، سایر مقادیر آماره‌های  $s_t$  و  $s_t^{\leftarrow}$ ، به ازای ۱ و ۲، با یکدیگر برابر نبوده و لذا عطف به تفاوت ۱ می‌توان ادعا کرد که قاعده تصمیم‌گیری در دو روش کاملاً متفاوت هستند.

(۳) فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو بازوی ماسک V از آخرین نقطه‌ی رسم شده در نمودار CUSUM برابر  $d$  است، اما در روش SPRT فاصله نقطه تلاقی دو مرز بحرانی از اولین نقطه رسم شده بر روی نمودار برابر  $d + 1$  است.

(۴) ماسک V-شکل (مرز ناحیه‌ی بحرانی) در شکل ۲ بر اساس اولین نقطه، و یا به طور دقیق‌تر بر اساس مبداء مختصات، رسم شده و لذا برای سایر نقاط جدید نیز ثابت خواهد ماند. اما ماسک V در نمودار CUSUM بر اساس آخرین نقطه‌ی مشاهده شده رسم می‌شود و در نتیجه مکانش با هر مشاهده‌ی جدید، هم از نظر عرضی و هم از نظر طولی، تغییر می‌کند.

(۵) احتمال ارتکاب خطای نوع اولی که قبل از رسم ماسک V باید مقدار آن تعیین شود، ربطی به احتمال ارتکاب خطای نوع اول آزمون SPRT ندارد [۲۳]. این در حالی است که برخی از نویسندگان [۱۲] و [۲۲] به اشتباه تساوی این دو احتمال را مطرح نموده‌اند. اما با توجه به مجهول و

مشاهده شده،  $x_{t-1}$  دومین مقدار مشاهده شده، و  $x_1$  درنهایت  $t$  امین مقدار مشاهده شده‌ی نمونه در نظر گرفته می‌شود. لذا ترتیب داده‌ها به صورت  $x_1, \dots, x_{t-1}, x_t$  تغییر خواهند کرد و مبتنی بر این مشاهدات به اصطلاح وارون یافته، قاعده‌ی تصمیم آزمون SPRT را می‌توان بازنویسی کرد.

**قاعده تصمیم بر اساس داده‌های وارون یافته:** آزمون

SPRTی فرضیه  $H_0: \mu = \mu_0$  در مقابل فرضیه  $H_1: \mu = \mu_0 \pm c\sigma$ ، بر اساس مشاهدات  $x_1, \dots, x_{t-1}, x_t$  منجر به رد  $H_0$  (یا به‌طور معادل قبول  $H_1$ ) در مرحله‌ی  $t$  ام می‌شود، اگر و تنها اگر  $t$  یی در  $\{1, 2, \dots, m\}$  موجود باشد به طوری که

$$|s_t^{\leftarrow}| \geq \frac{1}{2} \quad (24)$$

و در غیر این صورت نمونه‌گیری ادامه می‌یابد و نمونه‌ی تک‌عضوی دیگری گرفته می‌شود. در رابطه (۱۵)، توجه داشته باشید که به ازای  $t = 1, 2, \dots, m$  آماره‌ی

$$\sum_{i=1}^t (x_{m-i+1} - \mu). \quad (25)$$

تعمیم یافته‌ی آماره‌ی  $s_t$  مبتنی بر مشاهدات وارون یافته است که در حقیقت میزان انحرافات آماره‌ی نمونه از مقدار هدف  $\mu_0$  را به ازای  $t$  تا مشاهده‌ی اول از مشاهدات وارون یافته  $x_1, \dots, x_{t-1}, x_m$  جمع‌بندی می‌کند. اغلب مراجع کنترل کیفیت، که به بررسی ماسک V با توجه به آزمون SPRT پرداخته‌اند، روش ماسک V را معادل آزمون SPRT مبتنی بر داده‌های وارون یافته معرفی کرده‌اند [۷]، [۱۲] و [۲۲]. اما به نظر نویسندگان این مقاله، که منطبق با مقاله [۲۳] است، این دو رویکرد کاملاً متفاوت و متمایز هستند.

**تشابهات:** تشابهات زیر بین «روش ماسک V در نمودار CUSUM» و «آزمون SPRT مبتنی بر داده‌های وارون یافته» موجبات این سوء تفاهم برخی از نویسندگان مانند [۷]، [۱۲] و [۲۲] را فراهم ساخته است که به منظور مقایسه‌ی بهتر دو رویکرد، در ادامه به مرور آن‌ها پرداخته شده است:

[۱۲]، [۱۳]، [۱۶] و [۲۲] نیز بر همین باور بودند. اما زانلا [۲۳] معادل بودن آزمون‌های  $SPRT$  بر اساس داده‌های معمولی و داده‌های وارون یافته را با اثبات

$$\alpha < \alpha \text{ آزمون } SPRT \text{ با داده‌های معمولی}$$

و یا به‌طور معادل

$$RL > ARL \text{ آزمون } SPRT \text{ با داده‌های معمولی}$$

نفی کرد. لذا به نظر نویسندگان این مقاله، که منطبق با نظر زانلا [۲۳] و بر خلاف عقیده جانسون [۱۲] است، نمی‌توان از رابطه‌ی بین ماسک  $V$  و آزمون  $SPRT$  برای داده‌های وارون یافته برای تفسیر ماسک  $V$  استفاده نمود. شاید بتوان در آینده این روش را به گونه‌ای اصلاح نمود که انطباق بیشتری با آزمون‌های آماری (مثلاً آزمون  $SPRT$ ) داشته باشد و در این صورت می‌توان آن را به‌وسیله‌ی آزمون آماری مورد نظر تفسیر کرد.

#### ۶- نتیجه‌گیری

از آنجا که نمودارهای کنترل جمع تجمعی در مقابل تغییرات کوچک فرایند بسیار حساس هستند، لازم است تا تغییرات کشف شده توسط یک روش علمی برای تعیین حالات خارج از کنترل، آزمون شوند. یکی از روش‌های متداول استفاده از ماسک  $V$  برای تشخیص تحت کنترل بودن/نبودن فرایند در نمودار  $CUSUM$  است. برخلاف نظر برخی از مراجع کنترل کیفیت که روش ماسک  $V$  را معادل آزمون  $SPRT$  با داده‌های وارون یافته می‌دانند، این مقاله قواعد تصمیم‌گیری دو رویکرد را کاملاً مجزا و متفاوت تشخیص داده است و به منظور تفهیم و شفاف‌سازی بیشتر، در این مقاله تشابهات و تفاوت‌های دو رویکرد مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

نامشخص بودن ایده‌ی آماری به‌کار گرفته‌شده در روش ماسک  $V$ ، حال این سؤال مطرح می‌شود که احتمال ارتکاب خطای نوع اول در روش ماسک  $V$  چیست؟ با در نظر داشتن رابطه‌ی

$$(۲۶) \text{ آزمون } SPRT \text{ با داده‌های معمولی}$$

که توسط زانلا [۲۳] مطرح شد، حداقل می‌توان گفت که احتمال ارتکاب خطای نوع اول در ماسک  $V$  یک کران بالا برای احتمال ارتکاب خطای نوع اول در آزمون  $SPRT$  است که در این مقاله تاکنون با نماد آزمون  $SPRT$  با داده‌های معمولی  $\alpha$  و یا نماد نشان داده شده است.

**ملاحظه ۱.** از رابطه‌ی (۲۳) می‌توان رابطه‌ی معکوس بین  $\alpha$  و  $ARL$  را در آزمون  $SPRT$  بر اساس داده‌های معمولی (و یا به طور مشابه بر اساس داده‌های وارون یافته) دریافت. لذا تحت فرضیه‌ی معادل بودن «روش ماسک  $V$  در نمودار  $CUSUM$ » با «آزمون  $SPRT$  مبتنی بر داده‌های وارون یافته»، می‌توان از نامعادله‌ی (۲۶) نامعادله‌ی کاربردی زیر را نتیجه گرفت

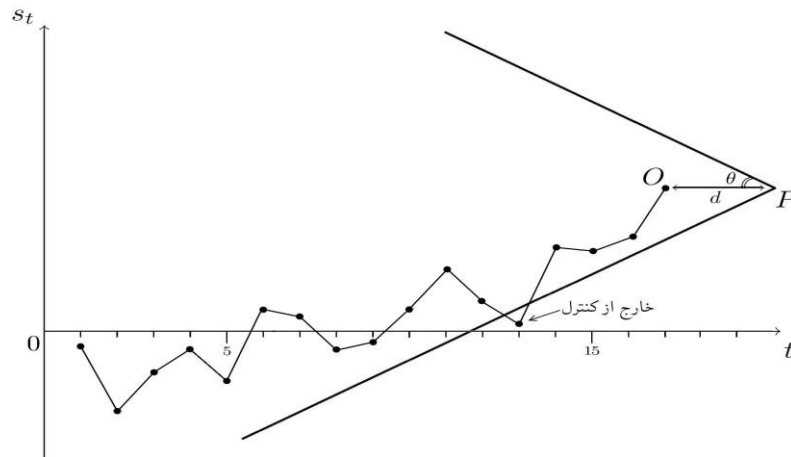
$$ARL \text{ آزمون } SPRT \text{ با داده‌های معمولی}$$

(۲۷)

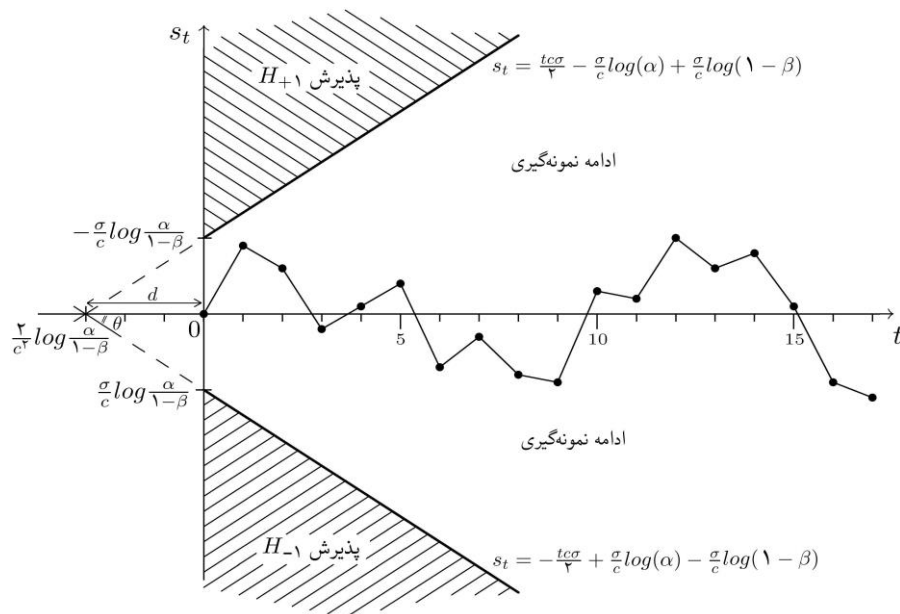
#### ۵- کنکاش برای تفسیر ماسک $V$

جانسون [۱۲] معتقد بود که اولاً آزمون  $SPRT$  بر اساس داده‌های معمولی معادل آزمون  $SPRT$  مبتنی بر داده‌های وارون یافته است، و ثانیاً، آزمون  $SPRT$  بر اساس داده‌های وارون یافته معادل ماسک  $V$  در نمودار  $CUSUM$  است. علاوه بر جانسون [۱۲]، نویسندگان دیگری هم‌چون [۷]، [۸]، [۱۱]





شکل ۱: نمودار کنترل CUSUM و ماسک V برای ۱۷ آمین میانگین ثابت شده در فرایند



شکل ۲: نواحی رد و پذیرش فرضیه «تحت کنترل بودن میانگین» در آزمون SPRT

## مراجع

[5] نقدریان، ک. (۱۳۸۴). کنترل کیفیت آماری. انتشارات دانشگاه علم و صنعت.

[6] Armitage, P. (1950). Sequential Analysis with More than Two Alternative Hypotheses, and its Relation to Discriminant Function Analysis. *Journal of the Royal Statistical Society*, 12(1), 137-144.

[7] Biswas, S. (1996). *Statistics of Quality Control: Sampling Inspection and Reliability*. New Age International Publishers Eastern Ltd.

[8] Goel, A. L. (1982). Cumulative Sum Control Charts. *Encyclopedia of Statistical Sciences*. S. Kots and N. L. Johnson, Eds, Vol. 2, John Wiley & Sons, New York, 233-241.

[1] بهبودیان، ج. (۱۳۷۰). آمار ریاضی. انتشارات امیرکبیر.

[2] پرچمی، ع. و ماشین‌چی، م. (۱۳۹۱). کنترل کیفیت آماری. انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان.

[3] مقدس، س.م. و صالح‌اولیاء، م. (۱۳۷۰). کنترل کیفیت: سیستم، سازماندهی، روش‌های آماری. جهاد دانشگاهی صنعتی شریف.

[4] مونتگمری (۱۳۷۶). کنترل کیفیت آماری. ترجمه‌ی رسول نورالسنا. انتشارات دانشگاه علم و صنعت.

- [19] Polunchenko, A. S. (2016). A Note on Efficient Performance Evaluation of the Cumulative Sum Chart and the Sequential Probability Ratio Test. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, Accepted.
- [20] Rohatgi, V.K. , & Ehsanes Saleh, A.K. (2001). *An Introduction to Probability and Statistics*. John Wiley & Sons, New York, 2nd edition.
- [21] Srinivasa Rao, G. (2013). One-sided cumulative sum (CUSUM) control charts for the erlang-truncated exponential distribution. *Computational Methods in Science and Technology*, 19(4), 229-234.
- [22] Wieringa, J.E. (1999). *Statistical process control for serially correlated data*. PhD Thesis. University of Groningen, Netherlands.
- [23] Zanella, A. (1991). On the relation between Wald's sequential tests and the cusum control charts for sample means: correcting a wrong interpretation. *Statistica Applicata*, 4, 493-519.
- [9] Goel, A. L. (2011). Cumulative sum control charts. In *Handbook of Methods and Applications of Statistics: Engineering, Quality Control, and Physical Sciences*, N Balakrishnan (ed.). John Wiley & Sons: New York, 120-129.
- [10] Graham, M. A., Chakraborti, S., Mukherjee, A. (2014). Design and implementation of CUSUM exceedance control charts for unknown location. *International Journal of Production Research*, 52(18), 5546-5564.
- [11] Grant, E. L., Leavenworth, R. S. (1988). *Statistical Quality Control*. 6th Ed., McGraw. New York.
- [12] Johnson, N. L. (1961). A simple theoretical approach to cumulative sum control charts. *Journal of the American Statistical Association*, 56, 835-840.
- [13] Johnson, N. L. , & Leone, F. C. (1964). *Statistics and Experimental Design in Engineering and the Physical Science*, 1, John Wiley & Sons, New York.
- [14] Jones, L. A. , Champ, C. W., Rigdon, S. E. (2004). The run length distribution of the CUSUM with estimated parameters. *Journal of Quality Technology*, 36(1), 95-108.
- [15] Lucas, J. M. , & Crosier R. B. (1982). Fast initial response for CUSUM schemes: Give your CUSUM a head start. *Technometrics*, 24(3), 199-205.
- [16] Montgomery, D.C. (1985). *Introduction to Statistical Quality Control*. John Wiley & Sons, New York.
- [17] Mood, A.M., Graybill, F.A. , & Boes, D.C. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics*. McGraw-Hill, Tokyo.
- [18] Mukherjee, A., Graham, M. A., Chakraborti S. (2013). Distribution-free exceedance CUSUM control charts for location. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, 42(5), 1153– 1187.

<sup>i</sup> Sequential Probability Ratio Test (SPRT)

<sup>ii</sup> Shewhart

<sup>iii</sup> Lucas

<sup>iv</sup> Likelihood Ratio Test (LRT)

<sup>v</sup> Average Run Length (ARL)

<sup>vi</sup> معادله والد (Wald's equation):