

توسعه رویکردی مبتنی بر رگرسیون تکه ای برای پایش پروفایل های خطی چندگانه با اثرات متقابل در فاز ۲

علی اصغر توفیق

دانشیار، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده مهندسی صنایع، Ali.a.Tofigh@gmail.com

منوچهر منطقی

دانشیار، دانشگاه مالک اشتر، دانشکده مهندسی صنایع، Manteghi@ut.ac.ir

مهدی بشیری

دانشیار، دانشگاه شاهد، دانشکده فنی و مهندسی، گروه مهندسی صنایع، Bashiri@shahed.ac.ir

مجید جلیلی

دانشجوی دکتری، پژوهشگاه مواد و انرژی، گروه مهندسی صنایع

چکیده:

در بسیاری از کاربردهای کنترل فرایند آماری، رابطه بین متغیر پاسخ و یک یا چند متغیر کنترلی توسط یک تابع مورد ارزیابی قرار می گیرد که به آن پروفایل گفته می شود. پروفایل ها به لحاظ ماهیت متغیر پاسخ به انواع مختلفی مانند پروفایل های خطی و غیرخطی تقسیم می شود. در این تحقیق، نمودار کنترل جدیدی مبتنی بر رویکرد آزمون خطی تعمیم یافته و رگرسیون تکه ای، به منظور پایش پروفایل های خطی چندگانه با اثرات متقابل در فاز ۲ ارائه شده است. نتایج شبیه سازی نمودار کنترل پیشنهادی بیانگر عملکرد بسیار بهتر آن نسبت به نمودار کنترل مبتنی بر روش حداقل مربعات خطا است.

کلمات کلیدی: پروفایل چندگانه خطی، مدل رگرسیون تکه ای، متوسط طول دنباله، فاز ۲

¹(Corresponding author) M.jalili@merc.ac.ir

۱- مقدمه

رگرسیون تکه ای با استفاده از نقاط شکست در مشاهدات به دنبال تعیین بهترین رابطه (پروفایل) بین متغیر پاسخ و یک یا چند متغیر کنترلی بوده که این امر سبب بهبود عملکرد نمودار کنترل در تشخیص حالت خارج از کنترل در مقایسه با رویکرد رگرسیون معمولی خواهد بود.

ساختار این مقاله بدین صورت است که در بخش بعد به ارائه رویکرد حداقل مربعات خطا برای برآورد پارامترهای پروفایل های خطی می-پردازیم. در بخش سوم پروفایل های مبتنی بر رگرسیون تکه ای معرفی شده و در ادامه روش پیشنهادی برای پایش پروفایل ها مبتنی بر رگرسیون تکه ای ارائه می شود. برای نشان دادن میزان عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی، یک مطالعه شبیه سازی شده در بخش چهارم مبتنی بر شاخص متوسط طول دنباله ارائه می شود. نهایتاً نتایج تحقیق و همچنین تحقیقات آتی در بخش پنجم ارائه خواهد شد.

۲- رویکرد حداقل مربعات خطا برای برآورد پارامترهای پروفایل خطی چندگانه

یکی از روش های رایج در برآورد پارامترهای پروفایل های خطی چندگانه، رویکرد حداقل مربعات خطا^۱ است. این رویکرد بصورت رابطه (۱) تعریف می شود.

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} (X'y) \quad (1)$$

در رابطه (۱) ماتریس مشاهدات و بردار متغیر پاسخ می باشد. یکی از معایب این رویکرد، حساسیت بالای آن نسبت به تعداد زیاد مشاهدات و حتی مشاهدات پرت است که این امر سبب کاهش عملکرد نمودارهای کنترل خواهد شد. برای رفع این مشکل، در این مقاله رویکردی جدید مبتنی بر مدل رگرسیون تکه ای ارائه شده که می تواند با برآورد دقیق تر پارامترهای مدل رگرسیونی، عملکرد نمودارهای کنترل را در پایش پروفایل های خطی بهبود دهد که این رویکرد در بخش بعد ارائه خواهد شد.

کیفیت برخی از فرآیندهای صنعتی توسط رابطه میان متغیر پاسخ و یک یا چند مشخصه کیفی بیان می شود که این رابطه پروفایل نامیده می شود [۱]. انواع مختلفی از پروفایل بر اساس نوع مشخصه های کیفی توسعه داده شده اند. از این میان می توان به پروفایل های خطی^۲، پروفایل های غیرخطی^۳، پروفایل های چند متغیره^۴ و غیره اشاره کرد. پایش پروفایل ها در دو فاز ۱ و ۲ صورت می پذیرد. در فاز ۱ یک نمودار کنترل بر اساس مشاهدات موجود طراحی می شود تا پایداری فرآیند را مورد پایش قرار دهد. در این فاز پارامترهای تحت کنترل فرآیند تخمین زده می شوند و پایداری آن ها مورد بررسی قرار می گیرد.

در فاز ۲ پارامترهای تخمین زده شده در فاز ۱ مورد استفاده قرار می گیرند تا نمودارهای کنترل را برای پایش پروفایل در طول زمان طراحی کنند و همچنین تغییرهای فرآیند شناسایی شود [۲] و [۳]. وودال^۵ و همکاران [۴] مرور ادبیاتی بر برآورد پروفایل های ارائه کردند. در این حوزه می توان به مقالات متنوعی اشاره کرد که از آن جمله می توان به پژوهش های صورت گرفته توسط محمود و وودال^۶ [۵]، مونتگومری^۷ [۶]، کانگ و آلبین^۸ [۷]، ژو^۹ و همکاران [۸]، وانگ و تسونگ [۹] و ویلیامز [۱۰] اشاره کرد.

همان طور که عنوان شد، در پایش پروفایل ها رابطه میان متغیرهای پاسخ و متغیرهای مستقل مورد بررسی قرار می گیرد. این رابطه توسط روش های مختلفی از جمله رگرسیون قابل شناسایی و تعیین است. تاکنون روش های مختلفی جهت پایش پروفایل ها توسعه داده شده اند که این روش ها براساس تعداد متغیرهای مستقل و وابسته، نوع متغیر وابسته و یا شکل رابطه میان متغیرها دسته بندی می شوند. از آن جمله می توان به پروفایل خطی، پروفایل های خطی تعمیم یافته، پروفایل های دیرچلت و غیره اشاره کرد. در این تحقیق نمودار کنترل جدیدی مبتنی بر رویکرد آزمون خطی تعمیم یافته^{۱۰} و رگرسیون تکه ای برای پایش پروفایل های خطی چندگانه با اثرات متقابل در فاز ۲ ارائه شده است. مدل

⁸Kang and Albin

⁹Zou

¹⁰Wang and Tsung

¹¹Williams

¹²Generalized Linear test

¹³Least Square Error

²Linear profile

³Nonlinear profile

⁴Multivariable profile

⁵Woodall

⁶Mahmoud and Woodall

⁷Montgomery

رابطه (۵) یک رابطه چند ضابطه ای است. می توان از طریق تعریف متغیرهای مجازی، توابع چند ضابطه ای را به یک ضابطه تقسیم کرد. برای نمونه برای تابع دو ضابطه ای رابطه (۵) داریم:

$$Y = a_1 + b_1x + kD(x-c) \quad (6)$$

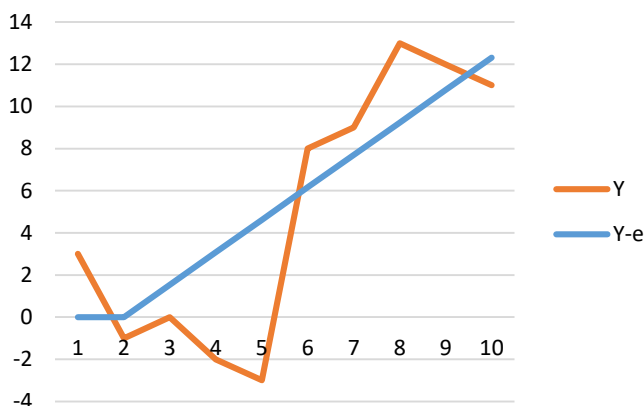
$$s.t: D = \begin{cases} 1 & \text{if } x > c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

در رابطه (۶)، D یک متغیر مجازی است و زمانی که داشته باشیم $x > c$ برابر با ۱ است و در غیر این صورت برابر با ۰ می باشد. دقت شود که ضریب k یک ضریب اصلاح کننده است، به طوریکه داریم:

$$b_1 = b_1 + k \quad (7)$$

$$a_1 = a_1 - kc \quad (8)$$

در این نوع از پروفایل‌ها انتخاب تعداد و محل مناسب برای گره‌ها از اهمیت به سزایی برخوردار است و به طور مستقیم بر عملکرد نمودار کنترل اثر می گذارد. شکل ۱ این وضعیت را برای مجموعه ای از مشاهدات نشان می دهد. در این شکل مشاهدات اصلی دارای نوسان می باشند. با انتخاب یک محل مناسب برای گره (مشاهده شماره دو) یک پروفایل رگرسیون تکه ای را که از دو پاره خط تشکیل شده است بر مشاهدات برازش شده است.



شکل ۱: مشاهدات اصلی (Y) و رگرسیون تکه ای برازش شده (Y-e)

۳- تعریف مسئله و رویکرد پیشنهادی

همانگونه که پیشتر نیز بیان شد، رویکرد حداقل مربعات خطا به دلیل حساسیت به تعداد زیاد مشاهدات و همچنین وجود مشاهدات پرت، از دقت پایینی در برآورد پارامترهای پروفایل‌های خطی برخوردار است. در این مقاله سعی شده تا با ارائه نمودار کنترل جدید مبتنی بر رگرسیون تکه‌ای، عملکرد نمودار کنترل در پایش پروفایل‌های خطی چندگانه بهبود داده شود.

۳-۱- پروفایل رگرسیون تکه‌ای

در پروفایل مبتنی بر رگرسیون تکه ای، با استفاده از نقاط شکست (گره) در مشاهدات، سعی می شود تا ارتباط دقیق‌تری بین متغیر پاسخ و متغیرهای کنترلی (پروفایل خطی چندگانه) حاصل شود. در این نوع از پروفایل‌ها، بازه مشاهدات در نقاطی که گره یا نقطه انفصال نامیده می شوند شکسته شده و این بازه‌ها توسط پروفایل‌های جداگانه ای پایش می شوند. فرض کنید که در مدلی یک گره وجود داشته باشد، در این صورت پروفایل رگرسیون تکه ای را می توان برای مشاهدات به صورت رابطه (۲) نوشت:

$$y = a_1 + b_1x \quad \text{for } x \leq c \quad (2)$$

$$y = a_2 + b_2x \quad \text{for } x > c$$

در رابطه (۲)، a_1 ، b_1 ، a_2 ، b_2 ضرایب پروفایل‌ها در دو طرف گره c می باشند. فرض کنید که دو پروفایل در نقطه شکست c پیوسته باشند. در این صورت مقدار دو پروفایل در این دو نقطه برابر است و داریم:

$$a_1 + b_1c = a_2 + b_2c \quad (3)$$

از معادله (۳) می توان مقدار a_2 را به شرح زیر نتیجه گرفت.

$$a_2 = a_1 + b_1c - b_2c = a_1 + c(b_1 - b_2) \quad (4)$$

با مقدار جدید به دست آمده برای a_2 از رابطه (۴)، پروفایل‌های مبتنی بر رگرسیون تکه ای را (رابطه (۲)) به صورت رابطه (۵) بازنویسی می شود:

$$y = a_1 + b_1x \quad \text{for } x \leq c \quad (5)$$

$$y = a_1 + c(b_1 - b_2) + b_2x \quad \text{for } x > c$$

¹⁵Break point

¹⁴Knot

۲-۲-۳- روش تقسیم بندی یکسان بر اساس چارکها^{۱۷}

در این روش به منظور تعیین محل گره ها از چارک های آماری استفاده می شود. رابطه مورد استفاده در این روش به شرح زیر است.

$$\tau_r = t \left(1 + \left[\frac{m}{k+1} \right] \right) \quad r = 1, 2, \dots, K \quad (10)$$

در رابطه فوق n تعداد مشاهدات و k نیز تعداد گره های در نظر گرفته شده است. $t_{[.]}$ نیز معرف یک چارک آماری است. این روش زمانی که مشاهدات به صورت یکنواخت پراکنده شده باشند مانند روش نخست عمل می کند. وضعیت مشاهدات بر نتیجه این روش اثرگذار می باشد.

دقت کنید که در این روش ها نمی دانیم مسئله دقیقا چه تعداد گره دارد، بلکه به صورت پیش فرض تعدادی گره در نظر می گیریم.

۳-۲-۳- روش های مدل سازی^{۱۸}

در این روش ها از ویژگی ها و اطلاعات آماری درون مشاهدات در جهت تعیین تعداد و محل گره ها استفاده می شود. در این حالت الگوریتم ها به طور عمده دارای دو بخش می باشند. بخش پیش رونده و بخش پس رونده. در بخش پیش رونده تعدادی گره تخمین زده می شود (حداکثر تعداد گره ممکن با استفاده از منطق الگوریتم) و در بخش پس رونده تعداد گره ها کاهش می یابد (باز هم با استفاده از منطق در نظر گرفته شده درون الگوریتم) [۱۱]. همچنین از روش های گام به گام^{۱۹} نیز می توان برای تعیین محل گره ها استفاده کرد [۱۲].

همان طور که گفته شد، در بسیاری از مطالعات، گره های پروفایل رگرسیون تکه ای بر اساس یک الگوریتم طراحی شده انتخاب می شوند و معیاری مناسب در جهت انتخاب تعداد مناسب گره ارائه می شود. برای نمونه مالوز^{۲۰} [۱۳] استفاده از شاخص C_p ، آکایک^{۲۱} [۱۴] استفاده از شاخص آکایک و کراون و وهبا^{۲۲} [۱۵]

دانستن محل گره ها، (مقدار c در رابطه (۶)) موجب سادگی مدل شده و آن را به یک مدل پروفایل خطی ساده یا چندگانه (در حالی که تعداد گره ها بیشتر از یک باشد) تبدیل می کند.

اما چالش استفاده و بکارگیری پروفایل رگرسیون تکه ای، زمانی است که محل گره ها مشخص نباشد. در این صورت استفاده از روش های مرسوم ممکن نیست. زمانی که گره خود یک متغیر مجهول باشد، با یک مسئله غیر خطی روبرو می شویم که نیازمند روش های حل غیر خطی است. با این حال این روش های حل نیز با افزایش تعداد گره ها کارایی خود را از دست می دهند.

از این رو این دسته از پروفایل ها نیازمند ارائه رویه های جستجوی گره هستند. سه روش عمده به منظور تعیین گره وجود دارد که در ادامه ارائه می شود.

۳-۲-۳- رویکردهای جستجوی گره در پروفایل رگرسیون تکه ای

در این زیربخش سه روش اصلی برای جستجوی گره در پروفایل رگرسیون تکه ای برای تعیین محل گره ها ارائه می شود. این روش ها عبارتند از:

۱-۲-۳- روش تقسیم بندی یکسان^{۱۶}

در این روش K گره به طور مساوی در فضای مشاهدات قرار می گیرد. مکان قرارگیری مشاهدات توسط رابطه زیر تعیین می شود. a و b کران های بازه مشاهدات می باشند.

$$\tau_r = a + \frac{(b-a)r}{(K+1)} \quad r = 1, 2, \dots, K \quad (9)$$

این روش تعیین گره مستقل از مشاهدات عمل می کند و معمولا زمانی مورد استفاده قرار می گیرد که مشاهدات به طور یکسان در فضای تحت مطالعه پراکنده باشند.

²⁰Mallows²¹Akaike²²Craven and Wahba¹⁶Equally spaced method¹⁷Equally spaced sample Quintiles as knot method¹⁸Model selection based method¹⁹Stepwise

در رابطه (۱۱) n پارامتر هموارسازی است که مشخص می کند چه تعداد مشاهده قبل و بعد از y_i به منظور هموارسازی در رابطه مورد استفاده قرار بگیرند. مقدار n می تواند از ۱ تا اندازه مشاهدات متغیر باشد. با افزایش n نوسات درون مشاهدات و اثر خطا از بین می روند. به منظور انتخاب مناسب پارامتر n لازم است تا معیاری بر اساس اغتشاش درون مشاهدات ارائه شود که تعیین کننده مقدار مناسب برای n باشد. معیار متناسب با اغتشاش درون مشاهدات به صورت رابطه (۱۲) تعریف می شود.

$$Smoothing\ Criteria = \sum_{i=2}^n \frac{|y_i - y_{i-1}|}{n-1} \quad (12)$$

رابطه (۱۲) میزان اغتشاش (تفاوت درون مشاهدات متوالی) را محاسبه کرده و میانگین آن ها را در نظر می گیرد. این معیار حد هموارسازی مشاهدات را به منظور از بین بردن اغتشاش درون مشاهدات مشخص می کند. به عبارت دیگر هر چه اغتشاش درون مشاهدات بیشتر باشد، در این صورت مقدار پارامتر $Smoothing\ Criteria$ افزایش می یابد. در نتیجه به الگوریتم هموارساز اجازه هموارسازی بیشتر داده می شود.

معیار دومی که برای هموارسازی به کار می رود معیار خطای هموارسازی است. این معیار میزان هموارسازی مشاهدات را پس از هموارسازی در نظر می گیرد.

$$Smoothing\ Error = \sum_{i=1}^n \frac{|y_i - y'_i|}{n} \quad (13)$$

اکنون با مقایسه معیارهای $Smoothing\ Criteria$ و $Smoothing\ Error$ می توان مقدار مناسب n را برای هموارسازی تعیین کرد. مقدار مناسب n به اندازه ایست که داشته باشیم:

$$Smoothing\ Error \leq Smoothing\ Criteria \quad (14)$$

پس از هموارسازی مشاهدات، گام دوم مدل که بخش بندی مشاهدات و قرار دادن گره ها درون آن هاست آغاز می شود.

استفاده از شاخص اعتبار سنجی متقابل^{۲۳} را برای انتخاب گره ها پیشنهاد دادند.

در این مقاله نمودار کنترل جدیدی جهت پایش پروفایل ها در فاز ۲ با استفاده از مدل رگرسیون تکه ای ارائه می شود. برای این منظور یک الگوریتم جستجوی گره معرفی شده و از طریق آن ضرایب لازم جهت پایش پروفایل در فاز ۲ برآورد می شود. ویژگی مدل رگرسیون پیشنهادی سبب می شود تا احتمال تعیین اشتباه خروج از ناحیه کنترل برای پروفایل کاهش یابد.

۳-۳-۳ مدل رگرسیون تکه ای برای پایش پروفایل های خطی چندگانه با اثرات متقابل

روش پیشنهادی جهت پایش یک پروفایل از سه گام اساسی تشکیل شده است. در گام نخست یک هموارسازی بر روی مشاهدات صورت می پذیرد. در گام دوم طی یک رویکرد پیش رونده تعداد گره ها برای مسئله تخمین زده می شود و در گام سوم طی یک رویکرد پس رونده تعداد گره ها کاهش می یابد.

۳-۳-۱ هموار سازی

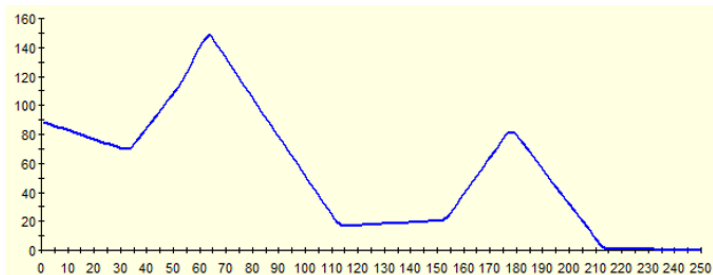
در این گام به منظور کاهش اثرات خطا بر مشاهدات از یک رویکرد هموارسازی استفاده می شود. این رویکرد بر اساس روش میانگین متحرک^۴ می باشد. رابطه مورد نظر برای هموار سازی به صورت رابطه (۱۱) ارائه می شود.

$$y_{in} = \left(\frac{y_i + y_{i-1} + y_{i-2} + \dots + y_{i-n+1}}{n} \right) + \left(\frac{y_i + y_{i+1} + y_{i+2} + \dots + y_{i+n-1}}{n} \right) \quad (11)$$

$$s.t \quad y_i = 0 \quad for \quad i = 0, -1, -2, \dots$$

²⁴Moving average

²³Cross validation



ب) پروفایل های تشکیل شده میان گره های تعیین شده

شکل ۲: عملکرد رویکرد پیشنهادی بر روی مشاهدات

حال که رویکرد تعیین گره مشخص شد، سوالی که لازم است تا به آن پاسخ داده شود آن است که چه مقدار R^2_Dis لازم است تا انتخاب شود. واضح است که مقدار R^2_Dis باید عدد بالایی باشد تا پروفایل به خوبی پایش شود. اگر مقدار R^2_Dis عدد کوچکی انتخاب شود، پایش پروفایل به خوبی صورت نمی پذیرد. در مقابل اگر مقدار R^2_Dis عدد بالایی باشد، در این صورت تعداد زیادی پروفایل تشکیل می شود. بدیهی است ماهیت مشاهدات و مقدار تغییرات نامنظم درون آن ها در انتخاب R^2_Dis مناسب، بسیار اثرگذار است.

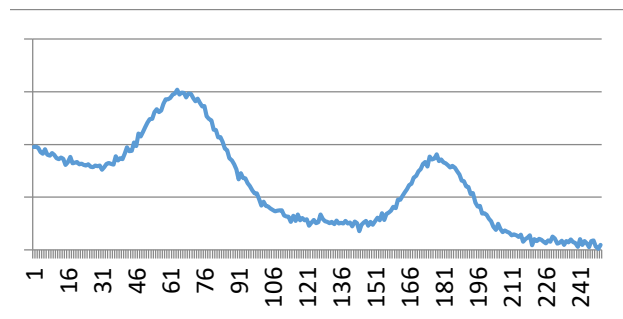
اگر تغییرات نامنظم درون مشاهدات بالا باشد، مقدار R^2_Dis باید عدد کوچکتری انتخاب شود تا حساسیت کمتری نسبت به تغییرات نامنظم داشته باشد. در مقابل اگر تغییرات نامنظم درون مشاهدات کم باشد می توان از مقادیر بیشتر R^2_Dis استفاده کرد. از این رو بهترین روش، اجرای مدل با مقادیر ۰،۹۵، ۰،۹۹ و ۰،۹۰ برای R^2_Dis و انتخاب بهترین نتیجه می باشد.

۳-۳-۳- مرحله پس رونده (حذف گره)

همان طور که شرح داده شد، در مرحله پیش رونده مشاهدات با تعدادی پروفایل پایش شده و بین هر دو پروفایل گره های پیشنهادی تشکیل می شود. حال اگر تمایل به پایش مدل با تعداد کمتری گره داشته باشیم که این امر معادل کاهش تعداد ضابطه های به دست آمده در پروفایل رگرسیون تکه ای می باشد، نیازمند رویکردی برای کاهش گره ها هستیم. به شکل ۳ دقت کنید. فرض کنید که در سمت چپ گره میان دو پروفایل حذف شود. در این صورت یک پروفایل جدید باید جایگزین آن ها شود. این پروفایل

۳-۳-۲- مرحله پیش رونده (انتخاب گره)

به منظور یافتن محل گره جدید به ترتیب مشاهدات را وارد پروفایل رگرسیونی کرده و مقدار R^2 را محاسبه می کنیم. (دقت کنید که برای یک مشاهده مقدار R^2 قابل محاسبه نیست و برای دو مشاهده لزوما داریم $R^2 = 1$ ، چراکه از هر دونقطه یک خط عبور می کند). با افزودن مشاهده سوم و به همین ترتیب مشاهدات بعدی، مقدار R^2 کاهش می یابد. چراکه هر مشاهده جدید سبب بروز یک خطا شده که این خطا سبب کاهش مقدار R^2 می شود. با در نظر گرفتن مقدار پیش فرض R^2_Dis ، چنانچه مقدار R^2 از R^2_Dis کمتر شد، روند ورود مشاهدات جدید را متوقف کرده، یک گره تشکیل می دهیم و مجددا رویکرد تعیین گره را تکرار می کنیم. پس از بررسی تمام مشاهدات، m پاره خط تشکیل شده است که مقدار R^2 هیچ کدام از آن ها از R^2_Dis کمتر نیست. شکل ۲ به خوبی این روند را نشان می دهد. در این شکل ابتدا مشاهدات اصلی نشان داده شده اند و در ادامه پروفایل های برازش شده میان گره های تعیین شده به نمایش در آمده است.



الف) مشاهدات اصلی

پارامترهای تخمینی دو روش رگرسیون تکه‌ای و حداقل مربعات خطا به پایش پروفایل‌های خطی چندگانه می‌پردازد. بدین منظور لازم است رویکرد GLT برای پایش این نوع از پروفایل‌ها در زیربخش بعدی ارائه شده است.

۳-۴- رویکرد آزمون خطی تعمیم یافته

رویکرد آزمون خطی تعمیم یافته براساس اختلاف بین مجموع مربعات خطا در دو حالت واقعی و تخمینی محاسبه می‌شود. این رویکرد [۱۶] فرض زیر را مورد آزمون قرار می‌دهد.

$$H_0: \beta = b \text{ and } \beta_1 = b_1 \text{ and } \beta_r = b_r \quad (15)$$

$$H_1: \beta \neq b \text{ and } \beta_1 \neq b_1 \text{ and } \beta_r \neq b_r$$

در رابطه بالا β ، β_1 و β_r توسط b ، b_1 و b_r تخمین زده می‌شود.

برای محاسبه آماره GLT نیاز به محاسبه شاخص مجموع مربعات خطا در دو حالت کاهش یافته و کامل هستیم که به ترتیب در رابطه (۱۶) و (۱۷) ارائه شده است.

$$SSE(R)_j = \sum_{i=1}^n (Y_{ij} - (\beta + \beta_1 X_{ij}))^2 \quad (16)$$

$$SSE(F)_j = \sum_{i=1}^n (Y_{ij} - (b_j + b_{1j} X_{ij}))^2 \quad (17)$$

براین اساس آماره آزمون فرض (رابطه (۱۵)) بصورت رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$F_j^* = \frac{\frac{SSE(R)_j - SSE(F)_j}{df_{R_j} - df_{F_j}}}{\frac{SSE(F)_j}{df_{F_j}}} \quad (18)$$

که زمانی که فرض صفر برقرار باشد، F_j^* از توزیع F با درجات آزادی $df_{R_j} - df_{F_j}$ و df_{F_j} پیروی می‌کند. مقادیر بالا برای F_j^* سبب رد فرض صفر و برقراری فرض ۱ می‌شود. اگر $F_j^* > F_{(1-\alpha, df_{R_j} - df_{F_j}, df_{F_j})}$ برقرار باشد، در اینصورت

جدید به صورت یک خط در شکل سمت راست نشان داده شده است. همچنین دو پروفایل حذف شده با نقطه چین به نمایش درآمده‌اند.



شکل ۳: فرآیند حذف گره و جایگزینی یک پروفایل جدید

واضح است که جایگزینی یک پروفایل به جای دو پروفایل میزان پایش مدل را تضعیف می‌کند. به عبارت دیگر اکنون با تعداد کمتری پروفایل مدل پایش می‌شود و لازم است خطایی که این عمل موجب می‌شود محاسبه شود.

این خطا به صورت مساحت میان سه پروفایل (دو پروفایل اولیه و پروفایل جدید) تعریف می‌شود. این مساحت با رنگ زرد در شکل ۳ نشان داده شده است. اکنون به شرح رویکرد پیشنهادی برای حذف گره می‌پردازیم.

فرض کنید که پس از تعیین گره در مرحله پیش رونده، m پروفایل تشکیل شده است (یا $m-1$ گره). قصد داریم که تعداد گره‌ها را به مقدار پیش فرض $r-1$ برسانیم (یا r پروفایل تشکیل دهیم). بنابراین لازم است تا $m-r$ گره یا پروفایل را حذف کرده و هر دو پروفایل حذف شده را با یک پروفایل جدید جایگزین می‌نماییم.

اکنون خطای حاصل از حذف هر دو پروفایل متوالی را محاسبه می‌کنیم. یعنی فرض می‌کنیم که هر دو پروفایل متوالی را با یک پروفایل جدید جایگزین نماییم. در این صورت یک بردار خطای $m-1$ عضوی تشکیل می‌شود. بدیهی است کمترین مقدار این بردار، نشان دهنده گره ایست که حذف آن سبب کمترین مقدار خطا می‌شود. بنابراین آن گره حذف و یک پروفایل جدید جایگزین دو پروفایل گذرنده از آن گره می‌شود. این رویکرد به صورت تکراری انجام می‌شود تا تعداد گره‌ها به مقدار پیش فرض $m-1$ برسد. همانگونه که پیشتر نیز بیان شد، نمودار کنترل ارائه شده در این مقاله مبتنی بر رویکرد آزمون خطی تعمیم یافته بوده که براساس

$$x_1 \sim N(3.5, 0.1) \quad (21)$$

$$x_2 \sim N(7, 0.2) \quad (22)$$

$$\varepsilon \sim N(0, 0.5) \quad (23)$$

توجه شود که در این مقاله، مقدار حد بالای کنترل آماره GLT بگونه ای تنظیم شده است که شاخص متوسط طول دنباله در حالت تحت کنترل (ARL_0) برابر ۲۰۰ محاسبه گردد.

اکنون با استفاده از روش پیشنهادی و روش حداقل مربعات خطا و همچنین با لحاظ تغییر در ضرایب معادله شبیه سازی، مقادیر ARL را محاسبه می کنیم که به شرح جدول ۱ می باشد.

جدول ۱ نتایج ایجاد تغییر در پارامتر β را نشان می دهد. میزان تغییر توسط عبارت d_1 نشان داده شده است. همان طور که ملاحظه می شود، با افزایش میزان تغییر مقدار ARL کاهش می یابد. با مقایسه مقادیر ARL برای روش پیشنهادی در مقابل روش حداقل مربعات، به وضوح عملکرد مناسب روش پیشنهادی مشخص می گردد. همچنین نتایج ایجاد تغییر در پارامترهای β_1 و β_2 در جداول ۲ و ۳ نشان داده شده است که نتایج حاصل از تغییر در مقادیر این پارامترها نیز عملکرد بهتر روش پیشنهادی را نسبت به روش حداقل مربعات خطا نشان می دهد. اعداد درون پرانتز جدول ها نشان دهنده انحراف معیار آماره GLT مورد استفاده می باشد.

فرض صفر رد شده و این به معنای خارج از کنترل بودن فرآیند است.

در این تحقیق برای ارزیابی عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی، از شاخص متوسط طول دنباله^{۲۵} (ARL) استفاده شده که می توان طبق رابطه (۱۹) محاسبه نمود.

$$ARL = \frac{\sum_{i=1}^n RL_i}{n}, \quad (19)$$

که n تعداد تکرارهای شبیه سازی و RL_i تعداد نقاط ترسیم شده بر روی نمودار کنترل در زمان t ام بوده تا زمانی که یک نقطه خارج از حدود کنترل قرار گیرد. در ادامه با ارائه یک مثال شبیه سازی شده به بررسی عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی خواهیم پرداخت.

۴- مثال عددی

در این بخش عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی مبتنی بر رویکرد آزمون خطی تعمیم یافته و مدل رگرسیون تکه ای براساس یک مثال شبیه سازی شده ارزیابی می شود. بدین منظور و با استفاده از شاخص ARL به مقایسه نتایج حاصل از روش پیشنهادی با روش مبتنی بر رویکرد حداقل مربعات خطا می پردازیم. به منظور شبیه سازی از رابطه فرضی زیر استفاده می کنیم.

$$y = 0.5 - 2x_1 + 3x_2 + \varepsilon \quad (20)$$

تعداد ۲۰۰ مشاهده برای x_1 ، x_2 و ε به شرح روابط زیر شبیه سازی می کنیم.

جدول ۱: مقدار ARL برای روش پیشنهادی و روش حداقل مربعات خطا با شیفیت در مقدار β (d_1)

۱	۰,۹	۰,۸	۰,۷	۰,۶	۰,۵	۰,۴	۰,۳	۰,۲	۰,۱	شیفت ARL
۱۱۰,۹۵ (۳,۵۴)	۱۲۰,۴۸ (۳,۵۳)	۱۴۶,۱۳ (۴,۶۰)	۱۴۷,۵۵ (۴,۸۱)	۱۶۰,۹۸ (۵,۰۵)	۱۶۱,۱۴ (۵,۳۲)	۱۷۶,۴۹ (۵,۶۱)	۱۹۱,۵۹ (۶,۰۶)	۱۸۹,۵۹ (۶,۰۹)	۱۹۲,۷۳ (۶,۲۵)	روش پیشنهادی
۱۷۷,۲۱ (۵,۶۸)	۱۷۷,۲۳ (۵,۶۹)	۱۸۰,۱۲ (۵,۷۳)	۱۸۰,۵۶ (۵,۷۸)	۱۸۸,۴۰ (۶,۰۲)	۱۸۹,۷۵ (۶,۱۱)	۱۹۲,۳۱ (۶,۲۶)	۱۹۵,۴۴ (۶,۹۳)	۱۹۷,۲۳ (۷,۰۱)	۱۹۹,۸۱ (۷,۲۳)	روش حداقل مربعات خطا

²⁵Average Run Length

جدول ۲: مقدار ARL برای روش پیشنهادی و روش حداقل مربعات خطا با شیفت در مقدار $\beta_1 (d_1)$

۱	۰,۹	۰,۸	۰,۷	۰,۶	۰,۵	۰,۴	۰,۳	۰,۲	۰,۱	شیفت ARL
۱,۷۸	۲,۳۶	۳,۱۲	۴,۸۸	۷,۷۸	۱۳,۷۳	۲۷,۴۶	۵۴,۱۰	۱۰۶,۷۰	۱۶۸,۱۴	روش پیشنهادی (۵,۲۲)
(۰,۰۴)	(۰,۰۶)	(۰,۰۸)	(۰,۱۴)	(۰,۲۴)	(۰,۴۱)	(۰,۸۴)	(۱,۶۲)	(۳,۲۶)	(۵,۲۲)	
۱۶۹,۶۸	۱۷۰,۴۵	۱۷۴,۱۸	۱۷۷,۳۳	۱۸۰,۹۵	۱۸۷,۱۸	۱۹۰,۲۱	۱۹۳,۲۲	۱۹۶,۱۲	۱۹۸,۶۰	روش حداقل مربعات خطا (۷,۱۰)
(۵,۴۰)	(۵,۴۲)	(۵,۵۶)	(۵,۷۰)	(۵,۸۲)	(۶,۰۰)	(۶,۱۹)	(۶,۴۵)	(۶,۶۵)	(۷,۱۰)	

جدول ۳: مقدار ARL برای روش پیشنهادی و روش حداقل مربعات خطا با تغییر در مقدار $\beta_1 (d_1)$

۱	۰,۹	۰,۸	۰,۷	۰,۶	۰,۵	۰,۴	۰,۳	۰,۲	۰,۱	شیفت ARL
۱,۰۰	۱,۰۲	۱,۰۹	۱,۲۵	۱,۷۳	۲,۸۶	۷,۴۲	۲۳,۷۸	۸۰,۹۷	۱۶۷,۲۲	روش پیشنهادی (۵,۰۹)
(۰,۰۰)	(۰,۰۰)	(۰,۰۱)	(۰,۰۲)	(۰,۰۴)	(۰,۰۷)	(۰,۲۲)	(۰,۷۳)	(۲,۵۳)	(۵,۰۹)	
۱۶۱,۲۲	۱۶۷,۱۳	۱۷۰,۳۳	۱۷۷,۳۳	۱۸۰,۱۴	۱۸۶,۱۶	۱۸۹,۳۲	۱۹۴,۹۰	۱۹۸,۳۵	۲۰۰,۶۱	روش حداقل مربعات خطا (۷,۳۸)
(۵,۳۴)	(۵,۳۹)	(۵,۴۱)	(۵,۷۰)	(۵,۸۰)	(۵,۹۱)	(۶,۰۳)	(۶,۶۷)	(۷,۰۵)	(۷,۳۸)	

جدول ۴ مقدار شیفت متقابل در پارامترهای β_1 و β_2 را نشان می دهد که مشاهده می شود با افزایش مقدار این دو پارامتر میزان ARL به سرعت نزول می کند.

جدول ۴: مقدار ARL برای روش پیشنهادی و روش حداقل مربعات خطا با تغییر در مقدار $\beta_1 (d_1)$ و $\beta_2 (d_2)$

۰,۱	۰,۲	۰,۳	۰,۴	۰,۵	d_1 d_2	ARL
۱۹۴,۳۱	۱۸۳,۳۳	۱۸۲,۶۶	۱۶۰,۴۴	۱۵۰,۰۲	۰,۱	(۴,۷۴)
(۶,۱۷)	(۵,۵۲)	(۵,۷۱)	(۵,۱۳)	(۴,۷۴)		
۱۶۱,۶	۱۴۲,۷۴	۱۲۶,۹۷	۱۲۴,۵۱	۱۰۸,۹۵	۰,۲	(۳,۳۳)
(۵,۲۶)	(۴,۶۸)	(۴,۲۰)	(۳,۹۲)	(۳,۳۳)		
۱۱۲,۱۵	۱۰۳,۵۲	۸۷,۵۳	۷۵,۹۰	۶۰,۵۶	۰,۳	(۱,۹۵)
(۳,۵۲)	(۳,۰۶)	(۲,۷۱)	(۲,۳۹)	(۱,۹۵)		
۶۷,۴۵	۵۸,۶۶	۴۷,۸۷	۴۱,۴۳	۳۵,۰۴	۰,۴	(۱,۰۷)
(۲,۱۰)	(۱,۷۴)	(۱,۴۱)	(۱,۳۲)	(۱,۰۷)		
۳۷,۲۴	۳۱,۷۵	۲۶,۶۲	۲۱,۶۹	۱۸,۳۱	۰,۵	(۰,۵۴)
(۱,۱۴)	(۰,۹۶)	(۰,۸۱)	(۰,۶۵)	(۰,۵۴)		

۱۹۹,۶۹ (۶,۹۴)	۲۰۰,۳۶ (۷,۳۷)	۱۹۸,۹۸ (۶,۸۹)	۱۹۸,۱۵ (۷,۲۰)	۱۹۸,۲۵ (۷,۰۴)	۰,۱	روش حداقل مربعات خطا
۱۹۷,۳۴ (۶,۸۹)	۱۹۵,۲۱ (۶,۶۰)	۱۹۴,۲۹ (۶,۵۵)	۱۹۳,۴۹ (۶,۹۱)	۱۹۰,۷۱ (۶,۱۸)	۰,۲	
۱۷۷,۲۵ (۵,۸۹)	۱۶۵,۷۲ (۵,۰۴)	۱۵۱,۹۷ (۴,۶۳)	۱۴۹,۳۰ (۴,۲۸)	۱۴۰,۰۸ (۱,۹۵)	۰,۳	
۱۶۷,۳۹ (۳,۹۹)	۱۵۳,۶۴ (۴,۵۹)	۱۵۰,۰۷ (۴,۱۹)	۱۴۳,۰۶ (۳,۲۹)	۱۳۱,۱۵ (۳,۰۷)	۰,۴	
۱۶۴,۲۶ (۵,۷۷)	۱۶۰,۱۸ (۴,۳۷)	۱۵۰,۳۷ (۴,۰۵)	۱۴۰,۱۸ (۳,۶۷)	۱۲۹,۳۷ (۳,۷۸)	۰,۵	

جداول ۵ و ۶ نیز مقادیر ARL حاصل از تغییر در پارامترهای β_1 و β_2 و همچنین β را برای روش پیشنهادی و روش حداقل مربعات خطا مقایسه کرده است.

جدول ۵: مقدار ARL برای روش پیشنهادی و روش حداقل مربعات خطا با تغییر در مقدار $\beta_1(d_r)$ و $\beta_2(d_r)$

۰,۱	۰,۲	۰,۳	۰,۴	۰,۵	d_r d_r	ARL
۱۲۲,۵۴ (۴,۰۷)	۸۰,۴۸ (۲,۴۶)	۴۵,۱۰ (۱,۳۹)	۲۳,۳۴ (۰,۷۳)	۱۳,۴۶ (۰,۳۹)	۰,۱	روش پیشنهادی
۴۳,۷۶ (۱,۳۶)	۲۲,۳۲ (۰,۷۳)	۱۲,۴۸ (۰,۳۹)	۷,۵ (۰,۲۲)	۴,۴۹ (۰,۱۳)	۰,۲	
۱۲,۷۳ (۰,۴۰)	۷,۱۵ (۰,۲۱)	۴,۶ (۰,۱۳)	۲,۹۷ (۰,۰۸)	۲,۲۳ (۰,۰۵)	۰,۳	
۴,۶۸ (۰,۱۳)	۳,۲۰ (۰,۰۹)	۲,۲۴ (۰,۰۵)	۱,۷۵ (۰,۰۴)	۱,۴۷ (۰,۰۳)	۰,۴	
۲,۱۶ (۰,۰۵)	۱,۷۸ (۰,۰۴)	۱,۵۱ (۰,۰۳)	۱,۲۸ (۰,۰۲)	۱,۱۸ (۰,۰۱)	۰,۵	
۱۸۶,۹۷ (۵,۳۹)	۱۴۹,۳۱ (۵,۰۷)	۱۲۳,۱۸ (۴,۷۶)	۱۰۸,۲۷ (۳,۱۰)	۷۲,۳۱ (۲,۰۶)	۰,۱	روش حداقل مربعات خطا
۱۴۸,۹۸ (۵,۰۸)	۱۱۶,۶۹ (۴,۹۸)	۹۶,۲۸ (۴,۰۸)	۸۳,۰۷ (۳,۷۵)	۴۳,۱۷ (۳,۲۸)	۰,۲	
۱۲۷,۰۹ (۳,۰۸)	۱۰۳,۱۷ (۲,۸۹)	۸۳,۱۴ (۲,۵۸)	۶۱,۷۵ (۲,۰۷)	۳۹,۷۹ (۱,۰۸)	۰,۳	

۱۰۹,۲۷ (۲,۷۹)	۸۰,۲۶ (۲,۳۷)	۵۷,۳۴ (۲,۷۵)	۳۶,۷۲ (۱,۲۷)	۲۰,۴۷ (۱,۶۷)	۰,۴
۸۱,۱۹ (۲,۷۴)	۶۰,۶۷ (۱,۰۴)	۳۹,۹۴ (۲,۰۷)	۲۱,۳۸ (۲,۰۱)	۱۵,۲۰ (۱,۰۹)	۰,۵

جدول ۶: مقدار ARL برای روش پیشنهادی و روش حداقل مربعات خطا با تغییر در مقدار $\beta_1 (d_1)$ و $\beta_2 (d_2)$

d_1	d_2	ARL
۰,۱	۰,۱	۱۵۶,۲۹ (۵,۱۷)
۰,۲	۰,۱	۱۴۹,۹۵ (۴,۸۳)
۰,۳	۰,۱	۱۳۵,۲۸ (۴,۰۴)
۰,۴	۰,۱	۱۱۹,۲۶ (۳,۸۱)
۰,۵	۰,۱	۱۰۸,۵۳ (۳,۴۰)
۰,۱	۰,۲	۷۰,۵۶ (۲,۲۶)
۰,۲	۰,۲	۵۷,۹۴ (۱,۷۸)
۰,۳	۰,۲	۴۸,۰۴ (۱,۴۴)
۰,۴	۰,۲	۳۸,۸۱ (۱,۲۰)
۰,۵	۰,۲	۳۲,۳۰ (۱,۰۰)
۰,۱	۰,۳	۲۰,۳۸ (۰,۶۳)
۰,۲	۰,۳	۱۵,۷۶ (۰,۴۶)
۰,۳	۰,۳	۱۲,۹۶ (۰,۴۰)
۰,۴	۰,۳	۱۱,۹۲ (۰,۳۶)
۰,۵	۰,۳	۹,۸۲ (۰,۳۱)
۰,۱	۰,۴	۶,۵۷ (۰,۱۸)
۰,۲	۰,۴	۵,۳۴ (۰,۱۵)
۰,۳	۰,۴	۴,۹۶ (۰,۱۳)
۰,۴	۰,۴	۴,۲۵ (۰,۱۲)
۰,۵	۰,۴	۳,۶۷ (۰,۱۰)
۰,۱	۰,۵	۲,۸۵ (۰,۰۷)
۰,۲	۰,۵	۲,۴۵ (۰,۰۶)
۰,۳	۰,۵	۲,۲۸ (۰,۰۶)
۰,۴	۰,۵	۲,۱۹ (۰,۰۵)
۰,۵	۰,۵	۲,۰۳ (۰,۰۴)
۰,۱	۰,۱	۱۹۲,۱۵ (۵,۱۱)
۰,۲	۰,۱	۱۸۶,۶۷ (۵,۲۴)
۰,۳	۰,۱	۱۶۹,۹۴ (۵,۰۲)
۰,۴	۰,۱	۱۵۲,۲۸ (۴,۴۸)
۰,۵	۰,۱	۱۴۶,۶۲ (۴,۳۹)
۰,۱	۰,۲	۱۶۹,۹۲ (۵,۰۷)
۰,۲	۰,۲	۱۴۳,۳۷ (۴,۸۷)
۰,۳	۰,۲	۱۲۵,۰۷ (۴,۰۹)
۰,۴	۰,۲	۱۰۸,۸۴ (۳,۸۹)
۰,۵	۰,۲	۸۱,۱۷ (۲,۶۴)
۰,۱	۰,۳	۱۵۲,۲۶ (۲,۸۹)
۰,۲	۰,۳	۱۲۱,۱۷ (۳,۰۱)
۰,۳	۰,۳	۹۹,۶۷ (۲,۰۴)
۰,۴	۰,۳	۶۸,۸۱ (۳,۰۷)
۰,۵	۰,۳	۵۳,۰۷ (۲,۰۴)
۰,۱	۰,۴	۱۰۷,۶۳ (۲,۹۸)
۰,۲	۰,۴	۸۱,۲۷ (۳,۰۴)
۰,۳	۰,۴	۶۰,۱۷ (۲,۱۸)
۰,۴	۰,۴	۳۹,۱۸ (۲,۴۱)
۰,۵	۰,۴	۲۴,۱۰ (۱,۵۷)
۰,۱	۰,۵	۸۱,۱۲ (۲,۵۷)
۰,۲	۰,۵	۵۹,۳۷ (۲,۶۱)
۰,۳	۰,۵	۳۹,۷۱ (۳,۰۴)
۰,۴	۰,۵	۲۰,۰۳ (۱,۰۷)
۰,۵	۰,۵	۱۱,۰۸ (۰,۶۸)

۵- نتایج و پیشنهادات آتی

کاهش خطای نوع یک در پایش این نوع از پروفایل‌ها شده است. برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی در این تحقیق، سعی شده تا با ترکیب رویکرد رگرسیون تکه‌ای با آماره آزمون خطی تعمیم-یافته، به پایش پروفایل‌های خطی چندگانه با اثرات متقابل در فاز ۲ بپردازیم. بدین منظور با استفاده از شاخص متوسط طول دنباله، عملکرد نمودارهای کنترل مبتنی بر رویکرد رگرسیون تکه‌ای و

در این تحقیق، رویکردی جدید مبتنی بر مدل رگرسیون خطی تکه‌ای برای پایش پروفایل‌های خطی چندگانه با اثرات متقابل ارائه شد. همانگونه که پیشتر نیز بیان شد، مزیت این روش نسبت به روش‌های موجود تخمین پارامتر و برازش پروفایل‌های خطی، حساسیت پایین آن نسبت به داده‌های آلوده بوده که این امر سبب

[5] Mahmoud MA, Woodall WH. (2004) "Phase I analysis of linear profiles with calibration applications". *Technometrics*, 46 (4), pp.380-391.

[6] Montgomery DC. (2005) "Introduction to Statistical Quality Control", Ed., 5th. Wiley: New York.

[7] Kang L, Albin SL. (2000) "On-line monitoring when the process yields a linear profile". *Journal of Quality Technology*, 32 (4), pp. 418-426.

[8] Zou C, Tsung F, Wang Z. (2007) "Monitoring general linear profiles using multivariate exponentially weighted moving average schemes". *Technometrics*, 49 (4), pp. 395-408.

[9] Wang K, Tsung F. (2005) "Using profile monitoring techniques for a data-rich environment with huge sample size". *Quality and Reliability Engineering International*. 21 (7), pp. 677-688.

[10] Williams JD, Birch JB, Woodal WH, Ferry NH. (2007) "Statistical monitoring of heteroscedastic dose response profiles from high-throughput screening". *Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*, 12 (2), pp. 216-235.

[11] C. J. Stone, M. H. Hanson, C. Kooperberg and Y. K. Truong, (1997) "Polynomial splines and their tensor products in extended linear modeling", *Annals of Statistics* 25 (4), pp 1371-1425.

[12] L. C. Marsh and D. R. Cormier, (2002) "Spline regression models", A Sage publication, London.

[13] C.L. Mallows, (1973) "Some comments on Cp". *Technometrics* 15, 661-675.

روش حداقل مربعات خطا برای پایش پروفایل های مذکور مورد مقایسه قرار گرفت. آنچه که از نتایج شبیه سازی برمی آید، برتری قابل توجه عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی در مقابل نمودار کنترل مبتنی بر آماره آزمون خطی تعمیم یافته و روش حداقل مربعات خطا بوده است. براین اساس می توان گفت که رویکرد پیشنهادی به خوبی توانسته است حساسیت نمودار کنترل آزمون خطی تعمیم یافته را نسبت به حالت خارج از کنترل افزایش دهد. یکی از مهمترین موضوعات پیش روی سایر محققان، به کارگیری رویکرد پیشنهادی برای پایش این نوع از پروفایل ها با استفاده از سایر نمودارهای کنترل مانند نمودار کنترل T^2 و مقایسه نتایج آن با نتایج حاضر است. علاوه براین می توان رویکرد پیشنهادی را برای پایش پروفایل های خطی چندجمله ای با اثرات متقابل توسعه داد.

منابع

[1] Sharafi A, M Aminnayeri, Amiri A. (2013) "An MLE approach for estimating the time of step changes in Poisson regression profiles". *Scientia Iranica*, 20(3), pp. 855-860.

[2] Niaki STA, Khedmati M, Soleymanian ME. (2014) "Statistical monitoring of auto correlated simple linear profiles based on principal components analysis". *Communications in Statistics-Theory and Methods*.

[3] Amiri A, Jensen WA, and Kazemzadeh RB. (2010) "A case study on monitoring polynomial profiles in the automotive industry". *Quality and Reliability Engineering International*, 26(5), pp. 509-520.

[4] Woodall WH, Spitzner DJ, Montgomery DC, Gupta S. (2004) "Using control charts to monitor process and product quality profiles". *Journal of Quality Technology*, 36 (3), pp. 309-320.

by the method of generalized cross validation". Numerische Mathematik 31, 377–403.

[16] Niaki, S.T.A., Abbasi, B. and Arkat, J., (2007). A generalized linear statistical model approach to monitor profiles. International Journal of Engineering Transactions A Basics, 20(3), 233-242.

[14] H. Akaike, (1973) "Information theory and an extension of the maximum likelihood principle". 2nd International Symposium on Information Theory. Academiai Kiado, Budapest.

[15] P.Craven, G. Wahba, (1979) "Smoothing noisy data with spline functions: estimating the correct degree of smoothing

