

طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترلی \bar{X} تحت مدل شوک وایبول تعمیم یافته‌ی جدید دو پارامتری

بشیر امینی

کارشناس ارشد دانشگاه علامه طباطبایی، bashiramini2292@gmail.com

محمد بامنی مقدم

(نویسنده مسئول) استاد گروه آمار دانشگاه علامه طباطبایی*

سمانه افتخاری حصارى

کارشناس ارشد دانشگاه علامه طباطبایی، samanef2003@yahoo.com

چکیده

کارکرد اصلی یک نمودار کنترلی، کمک به مدیریت تشخیص منابع مختلف تغییر پذیری در یک فرایند تولید است. همچنین نمودار کنترلی به طور گسترده در زمینه‌ی صنعت به عنوان یک ابزار جهت نظارت بر یک فرایند تولید به منظور بهبود کیفیت محصول استفاده می‌شود. متداول ترین نمودار کنترلی با در نظر گرفتن یک مشخصه، نمودار کنترلی \bar{X} می‌باشد. در این مقاله یک مدل طراحی اقتصادی و طراحی آماری-اقتصادی به منظور طراحی بهینه‌ی نمودارهای کنترلی \bar{X} با در نظر گرفتن توزیع وایبول تعمیم یافته‌ی جدید دو پارامتری به عنوان سازوکار شکست فرایند پیشنهاد و ارائه نموده‌ایم و در سطح نمونه گیری یکنواخت و نایکنواخت به مقایسه‌ی این دو مدل طراحی پرداخته‌ایم. از مقایسه‌ی انجام شده نتیجه می‌گیریم که مدل آماری-اقتصادی از نظر دست یافتن به خواص آماری نمودار کنترلی مطلوب از مدل اقتصادی بهتر اما پرهزینه تر می‌باشد.

کلمات کلیدی: نمودار کنترلی، طراحی آماری-اقتصادی، توزیع وایبول تعمیم یافته‌ی جدید دو پارامتری، سازوکار شکست، گودالی شکل.

۱- مقدمه

در صورت رخ دادن یک انحراف با دلیل، میانگین ممکن است به اندازه $\pm\delta\sigma$ جابجا شود.

یک نمونه به اندازه n از خروجی فرایند در h واحد از زمان (ساعت) گرفته می‌شود و میانگین نمونه را در نمودار کنترلی که شامل یک خط مرکزی (CL) که مقدار متوسط مشخصه‌ی کیفیت را در حالت تحت کنترل نشان می‌دهد و دو خط افقی دیگر که حد کنترلی بالا (UCL) و حد کنترلی پایین (LCL) نامیده می‌شود را رسم می‌کنیم، اگر در بازه حدود کنترلی قرار

شوهارت در سال ۱۹۲۴ برای اولین بار نمودار کنترلی را پایه‌گذاری نمود که بعدها دانکن در سال ۱۹۵۶ نمودار کنترلی را بر اساس معیارهای اقتصادی و با در نظر گرفتن تنها یک انحراف با دلیل توسعه داد. دانکن فرض کرد مشخصه‌ی کیفیت فرایند تولید از توزیع نرمال با میانگین μ_0 و انحراف استاندارد σ_0 پیروی می‌کند. وی ضریب حدود کنترلی را $\pm L$ در نظر گرفت که

* (Corresponding author) bamenimoghadam@atu.ac.ir

تلفیق مفاهیم دو مدل اقتصادی دانکن و لورنزن و ونس یک مدل هزینه برای طراحی اقتصادی یا طراحی آماری - اقتصادی نمودارهای کنترلی ارائه دادند و ال اورینی و رحیم (۲۰۰۳-۲۰۰۲) طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترلی \bar{X} را با سازوکار شکست گامای دو پارامتری در نظر گرفتند و در نهایت آفابیگ و مقدم (۲۰۱۴) طراحی اقتصادی نمودار کنترلی یک‌متغیره را تحت سازوکار شکست توزیع نمایی تعمیم یافته با فاصله‌های نمونه‌گیری یکنواخت مورد بررسی قرار دادند.

در بیشتر پژوهش‌هایی که ذکر شد سازوکار شکست فرایند را نمایی در نظر گرفته‌اند که طراحی مدل‌های اقتصادی را به میزان قابل ملاحظه‌ای ساده می‌کند و مدل نیز چارچوب یک مدل زنجیر مارکوف را به خود می‌گیرد. اما به‌طور کلی یک چنین فرضی در عمل ممکن است برای برخی از فرایندها مناسب نباشد. دو توزیع گاما و وایبول کاربردهایی در رشته‌های دیگر به‌عنوان توزیع طول عمر دارند. پارامترهای مکان، مقیاس و شکل این دو توزیع برای تحلیل داده‌های چوله دارای انعطاف‌پذیری کم و پارامتر شکل آن‌ها دارای نرخ خطرهای ثابت، افزایشی و کاهش‌ی هستند و به همین دلیل این دو توزیع از توزیع نمایی که دارای نرخ خطر ثابت است، مناسب‌تر می‌باشد.

چن (۱۹۹۹) یک توزیع جدید دو پارامتری از خانواده وایبول تعمیم یافته را معرفی نمود که دارای تابع نرخ شکست گودالی (وانی) شکل λ یا افزایشی (وابسته به پارامتر شکل) می‌باشد و می‌توان گفت جایگزین مناسبی برای توزیع‌های دو پارامتری است که طراحی مدل‌های اقتصادی را نسبت به توزیع‌های سه پارامتری ذکر شده به میزان قابل ملاحظه‌ای ساده می‌کند و همچنین از آن‌جا که ساخت بازه‌ی اطمینان توأم در بسیاری از برنامه‌های کاربردی قابل توجه است، مزیتی که این توزیع دارد علاوه بر این که تابع توزیع آن فرم بسته‌ای دارد، بازه‌ی اطمینان برای β و بازه‌ی اطمینان توأم برای پارامترهای β و λ فرم بسته‌ای دارد که هیچ توزیع دو پارامتری با نرخ شکست گودالی شکل وجود ندارد که بازه‌ی اطمینان آن دقیق به دست آید. از آن‌جا که داده‌های با نرخ خطر گودالی شکل در صنعت از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند، ما در این پژوهش از توزیع وایبول تعمیم یافته‌ی جدید دو پارامتری که به ازای $k < 1$ دارای نرخ خطر گودالی شکل می‌باشد، به‌عنوان توزیع سازوکار شکست فرایند استفاده می‌کنیم.

گیرد، فرایند تحت کنترل و اگر از بازه حدود کنترلی تجاوز کند فرایند خارج از کنترل می‌باشد و جهت یافتن انحراف با دلیل باید جستجو صورت گیرد. اگر هشدار مبنی بر خروج فرایند از کنترل، اشتباه باشد آن‌گاه فرایند پیوسته می‌باشد و به کار خود ادامه می‌دهد و اگر هشدار درست باشد، عملیات تعمیر یا جایگذاری قطعه معیوب صورت می‌گیرد و در نتیجه فرایند به حالت تحت کنترل انتقال یافته و چرخه جدیدی آغاز می‌شود.

هدف از تعیین پارامترهای طراحی یعنی اندازه‌ی نمونه (n)، فاصله‌ی نمونه‌گیری (h) و ضریب حدود کنترلی (L) در نمودارهای کنترلی \bar{X} ، به حداقل رساندن متوسط هزینه‌ی کل در واحد زمان است.

دانکن سازوکار شکست مدل خود را توزیع نمایی در نظر گرفت یعنی مدت زمانی که فرایند تحت کنترل است، دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ می‌باشد که بنا به خاصیت بی‌حافظگی توزیع نمایی این مدل، مارکوفی می‌باشد.

پس از دانکن افراد دیگری هم‌چون گیبرا (۱۹۷۵)، مونتگومری (۱۹۸۰) و ونس (۱۹۸۳) مدل‌هایی را ارائه دادند که چارچوب آن‌ها نیز مارکوفی بود. لورنزن و ونس (۱۹۸۶) مدل اقتصادی متفاوتی از مدل‌های گذشته مطرح کردند که در آن به جای استفاده از خطای نوع اول و دوم از مفهوم متوسط طول اجرا استفاده کردند و همچنین در این مدل امکان تصمیم‌گیری جهت متوقف کردن یا ادامه‌ی فرایند تولید در مدت زمانی که صرف یافتن انحراف با دلیل و تعمیر می‌شود، لحاظ شده است. آن‌ها فرض نمودند که سازوکار شکست فرایند مارکوفی و توزیع وقوع شکست در فرایند نمایی است. مطالعه بر روی مدل‌های غیر مارکوفی اولین بار توسط بیکر (۱۹۷۱)، هیکس و همکاران (۱۹۷۴)، مونتگومری و هیکس (۱۹۷۶) و بنرجی و رحیم (۱۹۸۷) انجام گرفت که در این مطالعه‌ها جز در مدل بنرجی و رحیم طول فواصل نمونه‌گیری ثابت هستند. بنرجی و رحیم (۱۹۸۸) یک طرح اقتصادی برای نمودار کنترلی \bar{X} با سازوکار شکست فرایند توزیع وایبول و با فاصله نمونه‌گیری نایکنواخت را مطرح کردند و نشان دادند که طرح آن‌ها از طرح اقتصادی هو (۱۹۸۴) تحت فاصله نمونه‌گیری یکنواخت اقتصادی‌تر است. همچنین در سال ۱۹۹۷ ژانگ و براردی کار آن‌ها را تعمیم داده و یک طرح آماری-اقتصادی را برای نمودار کنترلی \bar{X} با سازوکار شکست وایبول ارائه دادند. در ادامه کاستا و رحیم (۲۰۰۱) با

² bathtub-shaped

که فرایند در ابتدا تحت کنترل بوده، مقدار ثابتی برای تمام فاصله‌ها باشد.

برای نمونه‌گیری نایک‌نواخت فواصل نمونه‌گیری را طوری انتخاب می‌کنیم که احتمال خارج شدن فرایند از حالت تحت کنترل زمانی که در ابتدای فاصله تحت کنترل بوده، برای تمام فاصله‌ها مقداری ثابت باشد و یا به عبارتی می‌توان گفت نرخ خطر تمام فواصل نمونه‌گیری یکسان باشد.

$$\int_{\omega_j}^{\omega_{j+1}} h_i(t) dt = \int_0^{h_1} h_i(t) dt$$

$$\forall j = 0.1.2. \dots$$

$$\omega_j = [\ln(1 - j + j \exp\{h_1^k\})]^{1/k}$$

$$h_j = [\ln(1 - j + j \exp\{h_1^k\})]^{1/k} - [\ln(2 - j + j \exp\{h_1^k\} - \exp\{h_1^k\})]^{1/k}$$

از عبارت قبل می‌توان فهمید که h_j تابعی از h_1 و یک تابع غیرافزایشی است. زمانی که z به سمت بی‌نهایت میل می‌کند ω_j نیز به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \omega_j = \infty \quad h_1 \geq h_2 \geq h_3 \geq \dots$$

• زمان‌های اخذ نمونه‌گیری و رسم نمودار ناچیز فرض می‌شود و تولید هنگام بازرسی و تعمیر فرایند متوقف می‌شود.

در این مدل از علائم زیر استفاده می‌شود:

n : اندازه‌ی نمونه.

h_j : طول j -امین فاصله نمونه‌گیری

$$(h_0 = 0, j = 1.2. \dots)$$

Z_0 : متوسط زمان برای جستجوی یک هشدار اشتباه.

Z_1 : متوسط زمان برای جستجوی یک هشدار درست.

Z_2 : متوسط زمان برای تعمیر فرایند.

a : هزینه‌ی ثابت نمونه‌گیری.

b : هزینه‌ی هر واحد نمونه‌گیری.

L : ضریب حدود کنترلی.

Y : هزینه‌ی هر هشدار اشتباه.

W : هزینه‌ی مکان‌یابی، تشخیص و تعمیر علت.

D_0 : هزینه‌ی چرخه‌ی کیفیت در هر ساعتی که تولید تحت کنترل است.

D_1 : هزینه‌ی چرخه‌ی کیفیت در هر ساعتی که تولید خارج از کنترل است.

در این مقاله در بخش دوم برخی از تعاریف و فرضیات مدل بنرجی و رحیم را بیان کرده‌ایم و در بخش سوم متوسط هزینه‌ی کل در واحد زمان در طراحی اقتصادی تحت مدل شوک وایبول جدید دو پارامتری با نمونه‌گیری یکنواخت و نایک‌نواخت را انجام داده‌ایم و در بخش چهارم طراحی آماری-اقتصادی بخش دوم را به دست آورده‌ایم و به مقایسه‌ی حالت نمونه‌گیری یکنواخت با نایک‌نواخت در طراحی اقتصادی و آماری-اقتصادی پرداخته‌ایم، در بخش بعد نیز مقایسه‌ی طراحی اقتصادی و طراحی آماری-اقتصادی در حالت‌های یکنواخت و نایک‌نواخت با یکدیگر و همچنین تحلیل حساسیت را انجام داده‌ایم و بخش پایانی به نتیجه‌گیری اختصاص داده شده است.

۲- تعاریف و فرضیات

در این بخش با توجه به مدل بنرجی و رحیم (۱۹۸۸) پذیره‌های این مدل را بیان می‌کنیم:

- زمانی که فرایند تحت کنترل است از توزیع وایبول تعمیم‌یافته‌ی جدید دو پارامتری پیروی می‌کند که تابع چگالی آن به صورت زیر می‌باشد

$$f(x) = \lambda k x^{k-1} \exp\{x^k + \lambda(1 - \exp\{x^k\})\}$$

که در آن $k > 0$ و $\lambda > 0$ به ترتیب پارامترهای شکل و مقیاس توزیع می‌باشند.

- فرایند تولید از طریق نمونه‌گیری‌های تصادفی به اندازه‌ی n در زمان‌های h_1, h_2, \dots, h_n مورد بررسی قرار می‌گیرد که h_j j -امین فاصله نمونه‌گیری می‌باشد. این نکته را نیز یادآور شویم که در مدل دانکن

$$h_j = h \quad (j = 1.2. \dots)$$

رسیدن به j -امین نمونه را

$$\omega_j = \sum_{i=1}^j h_i \quad (j = 1.2. \dots)$$

در نظر می‌گیریم.

برای سامانه‌ای که نرخ مخاطره‌ی آن افزایشی است، معقول به نظر می‌رسد که طول فاصله‌های نمونه‌گیری به صورت تابعی از زمان انتخاب شود به همین علت برای ساخت چنین مدلی این ویژگی پیشنهاد می‌کند که طول فاصله‌های نمونه‌گیری چنان انتخاب شوند که احتمال خارج شدن فرایند از کنترل به شرطی

متوسط غیر شرطی زمان دوره تحت کنترل در طی یک فاصله نمونه‌گیری به گونه‌ای که انتقال از حالت تحت کنترل به حالت خارج از کنترل رخ دهد را با T نشان داده و به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\tau_j = \frac{\int_{\omega_{j-1}}^{\omega_j} (t - \omega_{j-1}) f(t) dt}{q_j}$$

$$\tau = \sum_{j=1}^{\infty} \tau_j q_j = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\omega_{j-1}}^{\omega_j} (t - \omega_{j-1}) f(t) dt$$

$$= \mu_t - \sum_{j=1}^{\infty} \omega_{j-1} \int_{\omega_{j-1}}^{\omega_j} f(t) dt$$

$$= \mu_t - \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j q_{j+1}$$

$$= \mu_t - \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j (1-p)^j p$$

$$= \mu_t - p(1-p) A(p) \quad (1.2)$$

که در رابطه‌ی (1.2)

$$A(p) = \sum_{j=1}^{\infty} (1-p)^j [\ln(1-j+j \exp\{h_1^k\})]^{1/k}$$

و همچنین تعریف می‌کنیم

$$A(\beta) = \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j [\ln(1-j+j \exp\{h_1^k\})]^{1/k}$$

۳- متوسط زمان و هزینه‌ی چرخه‌ی کیفیت

در این بخش متوسط زمان و هزینه‌ی یک چرخه‌ی کیفیت با در نظر گرفتن حالت‌های مختلف فرایند را محاسبه می‌کنیم. فرض کنید $E(T)$ ، متوسط زمان مورد انتظار در یک چرخه و $E(C)$ ، متوسط هزینه‌ی کل مورد انتظار در طول یک چرخه باشد آن‌گاه میانگین هزینه مورد انتظار در واحد زمان براساس قضیه‌ی فرایند تجدید پاداش برابر با $E(A) = \frac{E(C)}{E(T)}$ می‌باشد.

جهت به دست آوردن $E(T)$ و $E(C)$ در مدل تعریف شده در بخش اول فرایند را در هر چرخه، در پایان اولین فاصله نمونه‌گیری بررسی می‌کنیم. فرض کنید که فرایند در آغاز دومین فاصله نمونه‌گیری و مشغول کار است. اکنون حالت‌های مختلف متوسط زمان چرخه و متوسط هزینه چرخه را در این فاصله مورد بررسی قرار می‌دهیم.

α : احتمال خارج شدن از حدود کنترلی به شرطی که فرایند تحت کنترل است.

β : احتمال خارج نشدن از حدود کنترلی به شرطی که فرایند خارج از کنترل است.

ω_j : زمان لازم تا رسیدن به j -امین انتخاب نمونه است که به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\omega_j = \sum_{i=1}^j h_i \quad j = 0.1.2. \dots$$

$$\omega_0 = 0$$

p_j : احتمال این‌که فرایند در فاصله‌ی j -امین نمونه‌گیری از کنترل خارج شود به شرطی که فرایند در ابتدای همان فاصله یعنی ω_{j-1} تحت کنترل باشد، آن‌گاه

$$p_j = \frac{\int_{\omega_{j-1}}^{\omega_j} f(t) dt}{\int_{\omega_{j-1}}^{\infty} f(t) dt}$$

$$= \frac{\exp\{\lambda(1 - \exp\{\omega_{j-1}^k\}) - \lambda(1 - \exp\{\omega_j^k\})\}}{\exp\{\lambda(1 - \exp\{\omega_{j-1}^k\})\}}$$

$$= 1 - \exp\{\lambda(1 - \exp\{h_1^k\})\} = p$$

که نشان می‌دهد، احتمال خارج شدن فرایند از حالت تحت کنترل، زمانی که ابتدای فاصله تحت کنترل بوده برای تمام فاصله‌ها مقدار ثابتی است.

q_j : احتمال غیر شرطی که فرایند در فاصله j -امین نمونه‌گیری از کنترل خارج می‌شود

$$q_j = \int_{\omega_{j-1}}^{\omega_j} f(t) dt$$

$$= \exp\{\lambda(1 - \exp\{\omega_{j-1}^k\})\} - \exp\{\lambda(1 - \exp\{\omega_j^k\})\}$$

$$= \exp\{\lambda(1 - \exp\{\omega_{j-1}^k\})\} (1 - \exp\{\lambda(1 - \exp\{h_1^k\})\})$$

$$= (1-p)^{j-1} p.$$

T_j : متوسط زمان دوره‌ی تحت کنترل در j -امین فاصله است به شرطی که هشدار در همین فاصله رخ دهد. در این صورت، متوسط غیر شرطی زمان دوره تحت کنترل در طی یک فاصله نمونه‌گیری به گونه‌ای که انتقال از حالت تحت کنترل به حالت خارج از کنترل رخ دهد را با T نشان داده و به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\tau_j = \frac{\int_{\omega_{j-1}}^{\omega_j} (t - \omega_{j-1}) f(t) dt}{q_j}$$

T_j : متوسط زمان دوره‌ی تحت کنترل در j -امین فاصله است به شرطی که هشدار در همین فاصله رخ دهد. در این صورت،

حالت‌های ممکن در پایان اولین فاصله نمونه‌گیری، متوسط هزینه در طول زمان h_1 و متوسط هزینه‌ی باقی‌مانده در چرخه برای هر حالت را ارائه می‌دهد.

$$Q = \sum_{j=1}^{\infty} \exp(\lambda(1 - \exp\{(j h_1)^k\}))$$

$$E(T) = hQ + \alpha Z_0 Q + Z_1 + Z_2 + \frac{h}{1 - \beta}$$

$$E(C) = (a + bn + \alpha Y + D_0 h)Q + (D_0 - D_1)(\mu_t - hQ) + \frac{a + bn + D_1 h}{1 - \beta} + W$$

محاسبه می‌شود. در این مدل نیز با تقسیم متوسط هزینه‌ی کل مورد انتظار در طول یک چرخه $E(C)$ بر متوسط زمان مورد انتظار در یک چرخه $E(T)$ ، متوسط هزینه کل در واحد زمان $E(A)$ حاصل می‌شود.

۴- طراحی آماری-اقتصادی تحت مدل شوک وایبول تعمیم‌یافته‌ی جدید دو پارامتری

در این بخش به طور مختصر تعاریف دو طراحی اقتصادی و آماری-اقتصادی بیان می‌شود و سپس در دو حالت نمونه‌گیری یکنواخت و نایکنواخت، به مقایسه‌ی این دو طرح می‌پردازیم.

حالتی را در نظر بگیرید که یک نمودار کنترلی با دیدگاهی اقتصادی طراحی می‌شود، به‌عنوان مثال با در نظر گرفتن هزینه‌های نمونه‌گیری، آزمایش و بازرسی، هزینه‌های مربوط به هشدارهای خارج از کنترل و برطرف نمودن انحراف‌های با دلیل و هزینه‌ها مربوط به دریافت محصول معیوب به وسیله‌ی مشتری که همگی بستگی به انتخاب پارامتر مناسب دارند، در این حالت این‌گونه طراحی‌ها را طراحی اقتصادی نمودارهای کنترلی می‌نامند. در طراحی اقتصادی کاربر علاوه بر پارامترهای توزیع (های) متغیر (های) پاسخ، پارامترهای هزینه و توزیع فرایند را در یک طراحی بهینه‌ی اقتصادی برآورد می‌کند.

همان‌طور که می‌دانیم طراحی اقتصادی فقط هزینه را در نظر می‌گیرد و از خواص آماری نمودار کنترلی غافل مانده است به همین دلیل سانینگا (۱۹۸۹) طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترلی را معرفی نمود. طراحی آماری-اقتصادی علاوه بر جنبه‌های اقتصادی، جنبه‌های آماری نمودارهای کنترلی را هم مورد توجه قرار می‌دهد و این‌گونه معایب طراحی اقتصادی را برطرف می‌نماید. می‌دانیم که هدف هر دو طرح از نمودار کنترلی، حداقل نمودن متوسط هزینه‌ی کل در واحد زمان می‌باشد اما در

جدول ۱-۳ فهرستی از کلیه حالت‌های ممکن در پایان اولین فاصله نمونه‌گیری، مقدار متوسط زمان باقی‌مانده در چرخه و احتمال‌های مربوط را ارائه می‌دهد. جدول ۲-۳ فهرستی از کلیه

جدول ۱-۳

حالت یا وضعیت	احتمال	متوسط زمان باقی‌مانده چرخه
۱ خارج از کنترل و دارای هشدار	$(1 - \beta)p$	$Z_1 + Z_2$
۲ خارج از کنترل و بدون هشدار	$Z_1 + Z_2 + (1 - \beta) \sum_{j=1}^{\infty} (\omega_j - h_1) \beta^{j-1}$	βp
۳ تحت کنترل و بدون هشدار	$E(T_1)$	$(1 - \alpha)(1 - p)$
۴ تحت کنترل و دارای هشدار غلط	$E(T_1) + Z_0$	$\alpha(1 - p)$

جدول ۲-۳

حالت یا وضعیت	متوسط هزینه در طول زمان h_1	متوسط هزینه باقیمانده
۱ خارج از کنترل و دارای هشدار	$a + bn + D_0 \tau_1 + D_1(h_1 - \tau_1)$	W
۲ خارج از کنترل و بدون هشدار	$a + bn + D_0 \tau_1 + D_1(h_1 - \tau_1)$	$W + R$
۳ تحت کنترل و بدون هشدار	$a + bn + D_0 h_1$	$E(C_1)$
۴ تحت کنترل و دارای هشدار غلط	$a + bn + D_0 h_1$	$Y + E(C_1)$

حال با توجه به جداول محاسبه شده، می‌توان به سادگی $E(T)$ و $E(C)$ در حالت نمونه‌گیری نایکنواخت را محاسبه نمود

$$E(T) = Z_1 + Z_2 + \frac{p\beta}{1 - p - \beta} [pA(p) - (1 - \beta)A(\beta)] + \frac{\alpha(1 - p)}{p} Z_0 + pA(p)$$

$$E(C) = (a + bn) \left(\frac{1}{p} + \frac{\beta}{1 - \beta} \right) + (D_0 - D_1)\mu_t + \frac{\alpha Y(1 - p)}{p} + W + D_1 p A(p) + \frac{D_1 p \beta}{1 - p - \beta} [pA(p) - (1 - \beta)A(\beta)]$$

و در نتیجه $E(A)$ نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$E(A) = \frac{E(C)}{E(T)}$$

برای به دست آوردن طراحی اقتصادی نمودار کنترلی \bar{X} تحت سازوکار شکست فرایند وایبول تعمیم یافته جدید دو پارامتری با نمونه‌گیری یکنواخت، فواصل نمونه‌گیری را ثابت در نظر می‌گیریم که در نتیجه میانگین هزینه مورد انتظار در واحد زمان به صورت

که در آن α و p به ترتیب خطای نوع اول و توان در سطح تغییر δ ، α_u کران بالا برای α و p_l کران پایین برای p است. همچنین $E(A)$ نشان دهنده‌ی متوسط کل هزینه در واحد زمان است.

در جداول ۲-۴ و ۳-۴ به ترتیب طراحی اقتصادی و آماری-اقتصادی نمودار کنترلی \bar{X} به ازای مقادیر مختلف پارامترهای توزیع وایبول تعمیم یافته جدید دو پارامتری را نشان می‌دهد. در این جداول برای مقادیر مختلف پارامتر شکل k و پارامتر مقیاس λ ، به مقایسه‌ی پارامترهای طراحی و متوسط هزینه در واحد زمان دو طرح نمونه‌گیری یکنواخت و نایکنواخت، سازوکار شکست توزیع وایبول تعمیم یافته جدید دو پارامتری می‌پردازیم. پارامترهای زمان برحسب ساعت، هزینه به دلار و اندازه‌ی تغییر در جدول ۱-۴ که برگرفته از مقادیر واقعی مقاله‌ی بنرجی و رحیم (۱۹۸۸) آورده شده است.

طراحی آماری-اقتصادی با توجه به نیاز طراح، محدودیت‌های آماری اعمال می‌شود که با توجه به این محدودیت‌ها، متوسط هزینه در واحد زمان می‌نیم می‌شود. طراحی آماری-اقتصادی معمولاً هزینه‌ی بیش‌تری نسبت به طراحی اقتصادی دارد اما کیفیت محصولات را در سطح مطلوبی از خطا و توان بالا کنترل می‌کند. در واقع طراحی آماری-اقتصادی همان طراحی اقتصادی است که در آن محدودیت‌های آماری در مدل لحاظ می‌شود. در نتیجه پذیره‌های مدل اقتصادی برای مدل آماری-اقتصادی نیز صادق است. یک فرمول کلی برای مدل طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترلی \bar{X} به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} \text{Min } E(A) \\ \alpha \leq \alpha_u, \quad p \geq p_l \end{cases}$$

جدول ۴-۱: مقدار پارامترهای زمان، هزینه و اندازه‌ی تغییر

Z_0	Z_1	Z_2	a	b	D_0	D_1	Y	W	δ
۰/۲۵	۰/۲۵	۰/۷۵	۲۰	۴/۲۲	۵۰	۹۵۰	۵۰۰	۱۱۰۰	۰/۵

جدول ۴-۲: مقایسه‌ی نمونه‌گیری یکنواخت و نایکنواخت در طراحی اقتصادی

مجموعه	پارامترهای توزیع		فاصله نمونه‌گیری نایکنواخت					فاصله نمونه‌گیری یکنواخت			
	λ	k	mean	n	h_1	L	$E(A)$	n	h	L	$E(A)$
۱	۰/۲	۰/۷	۱/۹۳	۲۲	۲/۲۱	۰/۸۳	۴۴۸/۰۶	۱۸	۱/۱۹	۱/۱۲	۶۱۸/۷۵
۲	۰/۰۵	۰/۷	۴/۱	۲۲	۲/۵۱	۱/۵	۲۸۶/۷۶	۲۲	۱/۴۷	۱/۳۶	۴۶۲/۱۹
۳	۰/۰۰۵	۰/۷	۹/۴۶	۱۱	۴/۴۱	۱/۸۴	۱۳۰/۰۲	۲۵	۲	۱/۵	۳۲۱/۰۴
۴	۰/۰۰۰۵	۰/۷	۱۶/۳۸	۵	۷/۵۵	۲/۰۶	۶۳/۸	۲۷	۲/۵۲	۱/۵۵	۲۵۲/۰۵
۵	۰/۲	۰/۶	۲/۲۵	۲۴	۱/۹۴	۱/۰۹	۴۱۹/۲۵	۱۹	۱/۱۸	۱/۲۱	۵۸۷/۹۳
۶	۰/۰۵	۰/۶	۵/۳۳	۲۳	۲/۵۷	۱/۵۳	۲۴۷/۶	۲۳	۱/۵۸	۱/۴۲	۴۱۴/۲۴
۷	۰/۰۰۵	۰/۶	۱۳/۹۳	۱۲	۴/۹۸	۱/۸۵	۱۰۱/۱۹	۲۶	۲/۳۴	۱/۵۴	۲۷۰/۷
۸	۰/۰۰۰۵	۰/۶	۲۶/۲۷	۶	۹/۳۳	۲/۰۷	۴۴/۹۹	۲۷	۳/۰۹	۱/۵۹	۲۰۶/۱۸
۹	۰/۲	۰/۵	۲/۸۳	۲۶	۱/۸	۱/۲	۳۷۲/۱۴	۲۰	۱/۳۱	۱/۳۱	۵۴۱/۹۷
۱۰	۰/۰۵	۰/۵	۷/۷۷	۲۴	۲/۵۸	۱/۵۶	۲۰۲/۸۵	۲۴	۱/۷۹	۱/۴۸	۳۵۲/۲۳
۱۱	۰/۰۰۵	۰/۵	۲۰/۰۴	۱۴	۵/۶۴	۱/۸۵	۷۴/۰۵	۲۷	۲/۹۶	۱/۵۸	۲۱۴/۱۲

جدول ۴-۳: مقایسه‌ی نمونه‌گیری یکنواخت و نایکنواخت در طراحی آماری-اقتصادی

مجموعه	پارامترهای توزیع		فاصله نمونه‌گیری یکنواخت					فاصله نمونه‌گیری یکنواخت			
	λ	k	mean	n	h_1	L	$E(A)$	n	h	L	$E(A)$
۱	۰/۲	۰/۷	۱/۹۳	۴۲	۲/۰۳	۱/۹۶	۴۷۳/۹	۴۲	۱/۳۹	۱/۹۶	۶۴۵/۷
۲	۰/۰۵	۰/۷	۴/۱	۴۲	۲/۶۶	۱/۹۶	۲۹۸/۷	۴۲	۱/۷۲	۱/۹۶	۴۷۸/۴
۳	۰/۰۰۵	۰/۷	۹/۴۶	۴۲	۵/۰۷	۱/۹۶	۱۴۷	۴۲	۲/۳۳	۱/۹۶	۳۳۰/۲
۴	۰/۰۰۰۵	۰/۷	۱۶/۳۸	۴۲	۹/۰۲	۱/۹۶	۸۳/۲۷	۴۲	۲/۹۱	۱/۹۶	۲۵۸/۵
۵	۰/۲	۰/۶	۲/۲۵	۴۲	۱/۹۴	۱/۹۶	۴۳۹/۶	۴۲	۱/۴۲	۱/۹۶	۶۱۲/۸
۶	۰/۰۵	۰/۶	۵/۳۳	۴۲	۲/۷۴	۱/۹۶	۲۵۷/۱	۴۲	۱/۸۶	۱/۹۶	۴۲۸
۷	۰/۰۰۵	۰/۶	۱۳/۹۳	۴۲	۵/۷۹	۱/۹۶	۱۱۴	۴۲	۲/۷۲	۱/۹۶	۲۷۷/۹
۸	۰/۰۰۰۵	۰/۶	۲۶/۲۶	۴۲	۱۱/۴۳	۱/۹۶	۵۸/۷	۴۲	۳/۵۷	۱/۹۶	۲۱۱
۹	۰/۲	۰/۵	۲/۸۳	۴۲	۱/۸۳	۱/۹۶	۳۸۸/۹	۴۲	۱/۴۸	۱/۹۶	۵۶۴/۱
۱۰	۰/۰۵	۰/۵	۷/۷۷	۴۲	۲/۷۴	۱/۹۶	۲۰۹/۶	۴۲	۲/۱۱	۱/۹۶	۳۶۳/۲
۱۱	۰/۰۰۵	۰/۵	۲۴/۰۴	۴۲	۶/۶۱	۱/۹۶	۸۲/۴۴	۴۲	۳/۴۲	۱/۹۶	۲۱۹/۲
$p=0/9$ و $\alpha=0/05$											

نوع اول در جدول ۵.۱ به اندازه‌ی ۲۰ درصد و در جدول ۵-۲ به اندازه‌ی ۲۱ درصد کاهش یافته است و توان آزمون نیز به ترتیب ۱۱ و ۶ درصد بهبود یافته است. این بهبود عملکرد آماری منجر به بیش‌تر شدن فراوانی نمونه‌گیری (در جدول ۵-۱ از ۲۲ به ۴۲ و در جدول ۵-۲ از ۱۸ به ۴۲)، کاهش فاصله‌ی نمونه‌گیری (در جدول ۵-۱ از ۲/۲۱ ساعت به ۲/۰۳ ساعت) و افزایش فاصله‌ی نمونه‌گیری (در جدول ۵-۲ از ۱/۱۹ ساعت به ۱/۳۹ ساعت) و افزایش ضریب حدود کنترلی شده است (در جدول ۵-۱ از ۰/۸۳ به ۱/۹۶ و در جدول ۵-۲ از ۱/۱۲ به ۱/۹۶).

جدول ۵-۱: مقایسه طراحی اقتصادی و آماری-اقتصادی در حالت نمونه‌گیری نایکنواخت

	طراحی اقتصادی	طراحی آماری-اقتصادی
n	۲۲	۴۲
h_1	۲/۲۱	۲/۰۳
L	۰/۸۳	۱/۹۶
α	۰/۲۵	۰/۰۵
p	۰/۷۹	۰/۹
$E(A)$	۴۴۸/۰۶	۴۷۳/۹

جدول ۵-۲: مقایسه طراحی اقتصادی و آماری-اقتصادی در حالت نمونه‌گیری یکنواخت

	طراحی اقتصادی	طراحی آماری-اقتصادی
n	۱۸	۴۲
h_1	۱/۱۹	۱/۳۹
L	۱/۱۲	۱/۹۶
α	۰/۲۶	۰/۰۵
p	۰/۸۴	۰/۹
$E(A)$	۶۱۸/۷۵	۶۴۵/۷

در این جدول برای مقایسه‌های بین هزینه‌ی دو طرح نمونه‌گیری یکنواخت و نایکنواخت سازوکار شکست توزیع وایبول تعمیم‌یافته جدید دو پارامتری از پارامترهای زمان و فرایند جدول ۴-۱ و همان ۱۱ ترکیب پارامتر توزیع فرایند شکست جدول ۴-۲ استفاده شده است. همچنین جدول ۴-۳ دارای محدودیت ۰/۰۵ برای کران بالای α و ۰/۹ برای کران پایین p است. مشاهده می‌شود که محدودیت‌های آماری در مقایسه دو طرح نمونه‌گیری نایکنواخت با یکنواخت بی اثر بوده و این جدول مانند جدول ۴-۲ برتری نمونه‌گیری نایکنواخت در تعیین پارامترهای طراحی و متوسط هزینه طراحی آماری-اقتصادی نشان می‌دهد.

۵- مقایسه طراحی اقتصادی و طراحی آماری-اقتصادی

برای مقایسه‌ی بین دو طراحی اقتصادی و آماری-اقتصادی می‌توان از جدول ۵-۱ و ۵-۲ که به ترتیب جدول‌های طراحی اقتصادی و آماری-اقتصادی نمودار کنترلی \bar{X} تحت توزیع وایبول تعمیم یافته‌ی جدید دو پارامتری به ازای $k = 0/7$ و $\lambda = 0/2$ در حالت نایکنواخت و یکنواخت هستند، استفاده کرد.

نرخ خطای نوع اول در جدول‌های ۵-۱ و ۵-۲ برابر ۰/۲۶ و ۰/۲۶ است که این مقدار بسیار زیاد بوده و سبب افزایش هشدار اشتباه می‌شود. همچنین مقدار توان برابر ۰/۷۹ و ۰/۸۴ است که این مقدار توان می‌تواند در بعضی موارد مناسب نباشد. نرخ خطای

۵-۱- تحلیل حساسیت طراحی آماری-اقتصادی

یک تحلیل حساسیت مناسب برای طراحی آماری-اقتصادی، به طراحان کمک می‌کند تا به آسانی اثر تصمیماتشان روی هزینه، اندازه‌ی نمونه، فاصله‌ی نمونه‌گیری و ضریب حدود کنترلی را مشاهده کنند.

در این بخش ما اثر کران‌های مختلف نرخ خطای نوع اول (α)، توان آزمون (p) و اندازه‌ی تغییر (δ) را روی مینیمم متوسط هزینه بر واحد زمان و سه پارامتر طراحی بررسی می‌کنیم. مقدار کران‌های تحلیل حساسیت (هنگامی که ثابت یا متغیر هستند) در جدول ۵-۱-۱ نشان داده شده‌اند.

جدول ۵-۱-۱: محدوده‌ی تحلیل حساسیت

متغیر			ثابت		
α_u	p_l	δ	α_u	p_l	δ
۰/۰-۰۰۵/۳	۰/۰-۵/۹۷۵	۰/۲-۲	۰/۰۵	۰/۹	۰/۵

مقدارهایی که برای هر متغیر حساسیت بررسی شده از محدوده بسیار حساس به نسبتا غیر حساس انتخاب شده است. پارامترهای زمان و هزینه همان مقدارهای جدول ۴-۱ و پارامترهای توزیع فرایند k و λ به ترتیب برابر ۰/۷ و ۰/۰۰۰۵ در نظر گرفته‌ایم. شکل‌های ۵-۱-۱، ۵-۲، ۵-۳ به ترتیب تحلیل حساسیت نرخ خطای نوع اول (α)، توان آزمون (p) و اندازه‌ی تغییر (δ) را روی پارامترهای طراحی و متوسط هزینه نمایش می‌دهد. مقدارهای خروجی برنامه‌ی این شکل‌ها را می‌توان در جدول ۵-۱-۲ مشاهده کرد.

جدول ۵-۱-۲: جدول تحلیل حساسیت α_u

α_u	$E(A)$	n	h_1	L	α	p
۰/۰۰۵	۳۳۰/۴	۶۷	۲/۸۵	۲/۸۱	۰/۰۰۴۹	۰/۹
۰/۰۱	۳۲۰/۶	۶۰	۲/۷۹	۲/۵۷	۰/۰۱	۰/۹۰۴
۰/۰۵	۲۹۸/۷	۴۲	۲/۶۶	۱/۹۶	۰/۰۴۹	۰/۸۹۹

جدول ۵-۱-۴: جدول تحلیل حساسیت δ

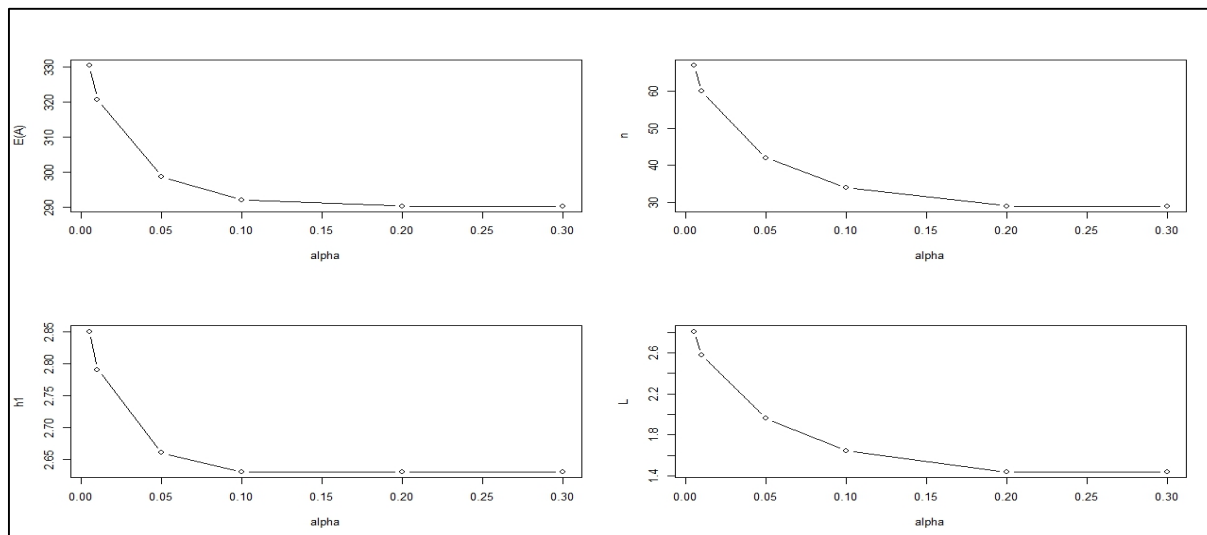
δ	$E(A)$	n	h_1	L	α	p
۰/۲	۵۳۰/۲	۲۶۳	۳/۸۳	۱/۹۶	۰/۰۵	۱
۰/۲۵	۴۴۷/۲	۱۶۸	۳/۴۷	۱/۹۶	۰/۰۴۹	۱
۰/۳	۳۹۴/۷	۱۱۷	۳/۲۱	۱/۹۶	۰/۰۵	۰/۹۹۹۷
۰/۴	۳۳۲/۹	۶۶	۲/۸۷	۱/۹۶	۰/۰۵	۰/۹۸۲۲
۰/۵	۲۹۸/۷	۴۲	۲/۶۶	۱/۹۶	۰/۰۵	۰/۸۹۹۸
۰/۷۵	۲۵۸/۴	۱۹	۲/۳۹	۱/۹۶	۰/۰۵	۰/۹۰۴۸
۱	۲۴۱/۲	۱۲	۲/۲۷	۲/۱۰	۰/۰۳	۰/۶۶۷۶
۱/۲۵	۲۳۰/۸	۹	۲/۲۱	۲/۲۸	۰/۰۱۸	۰/۴۰۸۵
۱/۵	۲۲۳/۸	۷	۲/۱۶	۲/۴۱	۰/۰۱۳	۰/۳۵۵۷
۲	۲۱۵/۳	۵	۲/۱۰	۲/۶۱	۰/۰۰۷	۰/۱۱۷۲

داده‌های حساسیت α_u و p_l در جداول ۵-۱-۱ و ۵-۱-۲ حساسیت هزینه‌ی مشابهی را در محدوده‌ی مورد بررسی بیان می‌کند. در محدوده‌ی مورد بررسی α ، متوسط هزینه در واحد زمان از ۲۹۰/۴ دلار برای $\alpha_u = ۰/۳$ تا ۳۳۰/۴ دلار برای $\alpha_u = ۰/۰۰۵$ افزایش می‌یابد در محدوده‌ی مورد بررسی p نیز متوسط هزینه در واحد زمان از ۲۹۲/۶ دلار برای $p_l = ۰/۵$ تا ۳۱۸/۳ دلار برای $p_l = ۰/۹۷۵$ افزایش می‌یابد. نقطه‌ی عطف جدول ۵-۱-۲ در $\alpha_u = ۰/۲$ رخ می‌دهد که مقدار α محدود نمی‌شود و هزینه و پارامترهای طراحی ثابتی را از این مقدار به بعد داریم. این نقطه عطف در جدول ۵-۱-۳ برای $p_l = ۰/۷۵$ رخ می‌دهد.

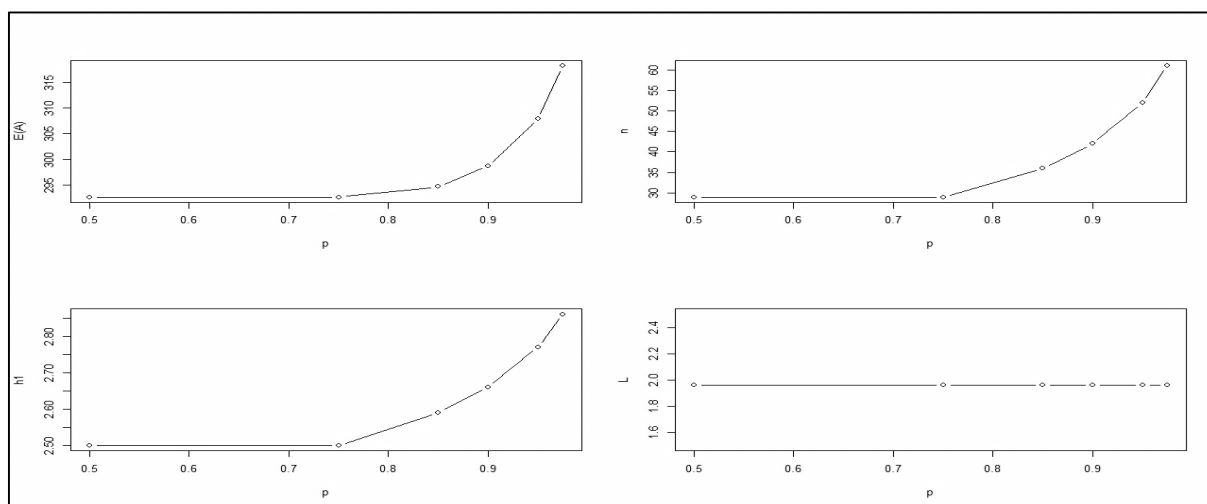
جدول ۵-۱-۳: جدول تحلیل حساسیت p_l

p_l	$E(A)$	n	h_1	L	α	p
۰/۹۷۵	۳۱۸/۳	۶۱	۲/۸۶	۱/۹۶	۰/۰۵	۰/۹۷۴
۰/۹۵	۳۰۷/۹	۵۲	۲/۷۷	۱/۹۶	۰/۰۵	۰/۹۵
۰/۹	۲۹۸/۷	۴۲	۲/۶۶	۱/۹۶	۰/۰۵	۰/۸۹۹۷
۰/۸۵	۲۹۴/۶	۳۶	۲/۵۹	۱/۹۶	۰/۰۵	۰/۸۵۱
۰/۷۵	۲۹۲/۶	۲۹	۲/۵	۱/۹۶	۰/۰۵	۰/۷۶۸
۰/۵	۲۹۲/۶	۲۹	۲/۵	۱/۹۶	۰/۰۵	۰/۷۶۸

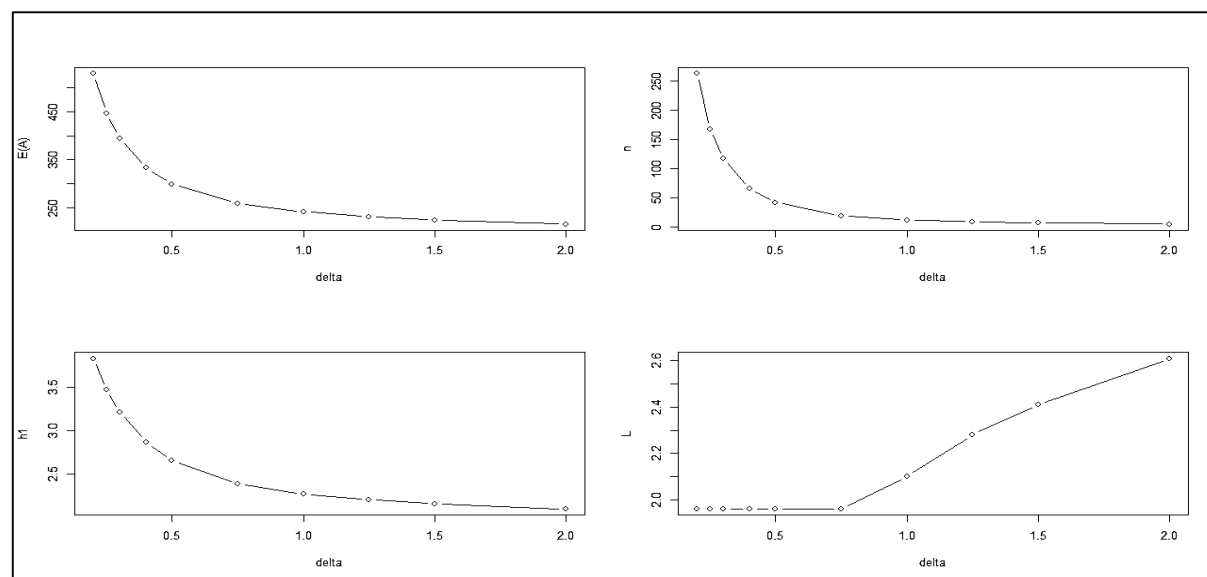
تحلیل اندازه‌ی تغییر در شکل ۵-۱-۳ برای مقدارهای بزرگ‌تر از ۰/۷۵ عدم حساسیت هزینه و فاصله‌ی نمونه‌گیری و برای مقدارهای کوچک‌تر از ۰/۷۵ حساسیت بسیار شدید را نشان می‌دهد. اندازه‌ی نمونه حساسیت زیادی به سطح تغییر دارد به‌گونه‌ای که بیش‌ترین مقدار در $\delta = ۰/۲$ برابر ۲۶۳ و کم‌ترین مقدار در $\delta = ۲$ برابر ۵ است. توجه داشته باشید ضریب حدود کنترلی برای مقدارهای کوچک‌تر از ۰/۷۵ ثابت و برای بزرگ‌تر از آن حساسیت نشان می‌دهد.



شکل ۱-۵-۱: نتایج تحلیل حساسیت نرخ خطای نوع اول (α)



شکل ۱-۵-۲: نتایج تحلیل حساسیت توان (p)



شکل ۱-۵-۳: نتایج تحلیل حساسیت اندازه‌ی تغییر (δ)

۶- خلاصه و نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک مدل اقتصادی را برای طراحی بهینه‌ی نمودارهای کنترلی \bar{X} پیشنهاد و آن را بسط و گسترش دادیم. در این مدل فرض کردیم که سازوکار شکست فرایند از توزیع وایبول تعمیم یافته‌ی جدید دو پارامتری پیروی می‌کند. همچنین با استفاده از محدودیت‌هایی بر روی نرخ خطای اول و توان، طراحی آماری-اقتصادی این مدل را توسعه دادیم. برای طراحی بهینه از روش نمونه‌گیری نایکنواخت و یکنواخت در دو طراحی، پارامترهای طراحی و متوسط هزینه‌ی بهتری را نسبت به نمونه‌گیری یکنواخت دارد. نشان دادیم که طراحی نمودار کنترلی آماری-اقتصادی از نظر دست یافتن به خواص آماری نمودار کنترلی مطلوب بهتر از طراحی اقتصادی عمل می‌کند، اما این طراحی پرهزینه‌تر از طراحی اقتصادی است. در بعضی موقعیت‌ها، با کمی افزایش هزینه می‌توان خواص آماری نمودارهای کنترلی را بهبود بخشید. در بخش آخر یک تحلیل حساسیت بر روی طراحی آماری-اقتصادی برای بررسی اثر نسبی نرخ خطای نوع اول، توان و اندازه‌ی تغییر اعمال کردیم که نتایج این تحلیل حساسیت برای کاربران نمودار کنترلی (با توجه به تهیه رهنمودی برای سنجش تصمیم بین هزینه و خواص آماری) ارزشمند خواهد بود.

سپاس‌گزاری: این پژوهش با حمایت معنوی و مالی معاونت محترم پژوهشی دانشگاه علامه طباطبائی از هسته‌ی کیفیت انجام گرفته است.

شکل‌های ۱-۵، ۲-۱، ۳-۱، ۳-۵ همچنین بیان می‌کنند که در بعضی مواقع طراحی آماری-اقتصادی شبیه به طراحی آماری عمل می‌کند طراحی آماری وقتی رخ می‌دهد که نرخ خطای نوع اول و توان آزمون در حدودشان محدود شده‌اند. این رخداد را برای مثال می‌توان در تحلیل حساسیت α برای کران بالای ۰/۰۵ مشاهده کرد. همچنین در تحلیل حساسیت p برای کران پایین ۰/۹۰ نیز طراحی آماری-اقتصادی شبیه طراحی آماری است. در نظر گرفتن خواص آماری در طراحی نمودار کنترلی کیفیت مفهوم کاربردی معناداری دارد. نرخ خطای نوع اول یا نرخ هشدار اشتباه احتمال در نظر گرفتن میانگین تغییر یافته ناشی از انحراف با دلیل است، وقتی که در حقیقت تغییری نداشته است. تعداد زیاد هشدارهای اشتباه به سرعت اعتماد متصدی را در استفاده از نمودارها از بین می‌برد و هزینه‌های غیر ضروری تحقیق را تحمیل می‌کند. توان احتمال تشخیص درست یک تغییر در فرایند است وقتی که در حقیقت این تغییر وجود دارد. به عبارت دیگر قابلیت یک نمودار کنترلی برای کشف تغییر نامطلوب در فرایند تولید با میزان توان آن مشخص می‌شود مقدار توان کم، هزینه‌های بیش از اندازه‌ی ناشی از ناتوانی نمودار کنترلی برای تشخیص معنادار فرایند را به دنبال دارد.

قاعده کلی برای انتخاب کران‌های خواص آماری طراحی آماری-اقتصادی وجود ندارد. آن‌ها باید بر اساس وضعیت خاص خود و عواقب اقتصادی و آماری انتخاب شوند. تحلیل حساسیت در شکل‌گیری این انتخاب مفید خواهد بود.

۷- مراجع

- [1] Shewhart, W. (1924). *The application of statistics as an aid in maintaining quality of a manufactured product*. *Journal of the American Statistical Association*, 20, 546-548.
- [2] Duncan, A.J. (1956). *The economic design of \bar{X} charts used to maintain current control of a process*. *Journal of the American Statistical Association*, 51, 228-242.
- [3] Gibra, I.N. (1975). *Recent Developments in Control Charts Techniques*. *Journal of Quality Technology*, 7, 183-192.
- [4] Montgomery, D. C. (1980). *The Economic Design of Control Charts: A Review of Literature Survey*. *Journal of Quality Technology*, 12, 75-87.
- [5] Vance, L. C. (1983). *A Bibliography of Statistical Quality Control Chart Techniques, 1970-1980*. *Journal of Quality Technology*, 15, 59-62.
- [6] Lorenzen, T.J., & Vance, L.C. (1986). *The economic design of control charts: A Unified Approach*. *Technometrics*, 28, 3-10.
- [7] Baker, K. R. (1971). *Two process models in the economic design of an \bar{X} chart*. *AIIE Transactions*, 3, 257-263.
- [8] Heikes, R. G., Montgomery, D. C., & Yeung, J. Y. (1974). *Alternative Process Models in the Economic Design of T2 Control Charts*. *IIE Transactions*, 6, 55-61.
- [9] Montgomery, D. C., & Heikes, R. G. (1976). *Process failure mechanisms and optimal design of fraction defective control charts*. *AIIE Transactions*, 8, 467-472.
- [10] Banerjee, P. K., & Rahim, M. A. (1987). *The economic design of control charts: a renewal theory approach*. *Engineering Optimization+ A35*, 12, 63-73.
- [11] Banerjee, P.K., & Rahim, M.A. (1988). *Economic design of \bar{X} - control charts under Weibull shock models*. *Technometrics*, 30, 407-414.
- [12] Hu, P.W. (1984). *Economic design of an \bar{X} - control chart under non-poisson process shift*. *Abstract, TIMS/ORSA joint national meeting, San Francisco*, 87, 14-16.
- [13] Zhang, G., & Berardi, V. (1997). *Economic statistical design of \bar{X} - control charts for systems with weibull in-control times*. *Computers and industrial engineering*, 32, 575-586.
- [14] Costa, A. F., & Rahim, M. (2001). *Economic design of \bar{X} charts with variable parameters: the Markov chain approach*. *Journal of Applied Statistics*, 28, 875-885.
- [15] Al-Oraini, H. A., & Rahim, M. A. (2002). *Economic statistical design of \bar{X} - control charts for systems with Gamma($\lambda,2$) in-control times*. *Computers and industrial engineering*, 43, 645-654.
- [16] Al-Oraini, H. A., & Rahim, M. A. (2003). *Economic statistical design of \bar{X} - control charts for systems with gamma(5; 2) in-control times*. *Journal of Applied Statistics*, 30, 397-409
- [17] Aghabeig, D., & Moghadam, M.B. (2014). *The Economic design of \bar{X} - control charts under generalized exponential shock models with uniform sampling intervals*. *European Online Journal of Natural and Social Sciences*, 2, 1540-1545.
- [18] Chen, Z. (1999). *A new two-parameter lifetime distribution with bathtub shape or increasing failure rate function*. *Statistics and Probability Letters*, 49, 155-161.
- [19] Saniga, E. M. (1989). *Economic statistical control-chart design swith an application to \bar{X} and R charts*. *Technometrics*, 31, 313-320.