

تأثیر درصد تصادفی اقلام نامعیوب بر قابلیت اطمینان محصول

دکتر کامیار صبری لقائی

استادیار، گروه مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی ارومیه^۱

مریم مظهر، mazhar.maryam9@gmail.com

دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی ارومیه

چکیده قابلیت اطمینان محصولات تولیدی با توجه به تغییرات در کیفیت تولید می‌تواند متفاوت باشد. داده‌های خرابی میدانی اطلاعات مفیدی را برای ارزیابی اینکه آیا تغییرات در قابلیت اطمینان مهم هستند یا خیر و یا شناسایی علت تغییرات ارائه می‌دهند. به منظور شناسایی این خطاها نیاز به مدل‌سازی تأثیر این خطاها بر قابلیت اطمینان محصول هستیم. در این تحقیق قصد داریم رفتار قابلیت اطمینان محصول را بر اساس درصد خطاهای کیفی مختلف که ممکن است محصولات با آن‌ها تولید شوند پیش بینی کنیم. در همین راستا دو نوع خطای کیفی یعنی اقلام نامنطبق و خطای مونتاژ به صورت جداگانه مورد بررسی قرار می‌گیرد. به منظور مدل‌سازی فرض می‌شود که درصد خطاهای کیفی از توزیع بتا و زمان‌های شکست از توزیع وایبل پیروی می‌کنند. قابلیت اطمینان، نرخ مخاطره و نمودار احتمال محصولات تحت این دو نوع خطای کیفی مطالعه می‌شوند. بر اساس نتایج این تحقیق می‌توان نوع و درصد خطاهای کیفی که محصولات با وجود آن‌ها تولید می‌شود را حدس زد.

کلمات کلیدی کیفیت، قابلیت اطمینان، توزیع وایبل، توزیع بتا، اقلام نامنطبق، خطای مونتاژ

روش‌های آماری برای شناسایی این موضوع نیاز به مدل‌سازی تأثیر تغییرات کیفیت در تولید بر قابلیت اطمینان محصول هستیم. در این تحقیق قصد داریم به بررسی اثر تغییرات کیفیت بر قابلیت اطمینان محصولات بپردازیم.

یک تعریف رسمی از قابلیت اطمینان عبارت است از: "احتمال اینکه یک محصول برای مدت مشخصی (طول عمر طراحی) در شرایط عملیاتی طراحی شده بدون شکست و به درستی کار کند." عوامل اصلی که منجر به شکست سیستم‌ها می‌شوند شامل: طراحی و پیکربندی سیستم، قابلیت اطمینان اجزای سیستم، محیط عملیاتی و تعامل بین عوامل محیطی، نقص‌های تولید و عملیات نگهداری تعمیرات پیشگیرانه و برنامه ریزی شده می‌باشند [۳]. از کیفیت با عنوان "شایستگی برای هدف" یاد می‌شود. مشخصه‌های کیفی محصولاتی که طراحی و تولید می‌شود می‌بایست مورد تأیید قرار بگیرند تا محصول با کیفیت تلقی شود. تخریب از معیارها و حدود در نظر گرفته شده برای مشخصه‌های کیفی به طرق مختلفی ممکن است اتفاق بیفتد. به عنوان مثال عدم کیفیت محصول ممکن است ناشی از خطاهای

۱- مقدمه

قابلیت اطمینان یک مفهوم متداول است که سال‌ها به عنوان یک ویژگی قابل ستایش از یک شخص یا یک محصول شناخته شده است. در سال ۱۸۱۶ کلمه قابلیت اطمینان اولین بار توسط ساموئل ت. کورلیج معرفی شد. قابلیت اطمینان هم اکنون به یک ویژگی ماندگار تبدیل شده است که دارای ویژگی‌های کیفی و کمی است که هر جنبه‌ای از دنیای فزاینده تکنولوژی امروز ما را فرا می‌گیرد [۱]. قابلیت اطمینان یکی از ابعاد کیفیت است که مصرف‌کننده‌گان معمولاً از تولیدکننده‌گان تقاضا می‌کنند. بنابراین مهم است که قابلیت اطمینان محصولات مهندسی را بهبود بخشید [۲].

قابلیت اطمینان محصولات با توجه به تغییرات در کیفیت تولید می‌تواند متفاوت باشد. داده‌های خرابی میدانی اطلاعات مفیدی را برای ارزیابی اینکه آیا تغییرات در قابلیت اطمینان مهم هستند یا خیر و یا شناسایی علت تغییرات ارائه می‌دهند. به منظور تشریح

^۱ (corresponding author) sabri@uut.ac.ir

جلوگیری می‌کند. با استفاده از مدل‌های توسعه داده شده در این مقاله می‌توان داده‌های شکست محصولات را تحلیل و انواع خطاهایی که ممکن است در مرحله تولید قابلیت اطمینان محصول را تحت تأثیر قرار دهند شناسایی و در رابطه با انجام اقدام اصلاحی تصمیم گرفت. در واقع در این تحقیق قصد داریم با توجه به تقسیم‌بندی فوق رفتار قابلیت اطمینان محصول را بر اساس درصد خطاهای کیفی مختلف که ممکن است محصولات با آن‌ها تولید شوند پیش بینی کنیم. بر اساس نتایج این تحقیق می‌توان نوع و درصد خطاهای کیفی که محصولات با وجود آن‌ها تولید می‌شوند را نیز حدس زد.

۲- مروری بر ادبیات موضوع

تاریخچه مهندسی قابلیت اطمینان به جنگ جهانی دوم بر می‌گردد زمانی که آلمان‌ها به منظور بهبود قابلیت اطمینان راکت‌های خود این مبحث را مطرح نمودند. در سال ۱۹۵۰ سازمان دفاع آمریکا کمیته‌ای را در حوزه قابلیت اطمینان بنا نهاد که در سال ۱۹۵۲ این کمیته به شورای قابلیت اطمینان تجهیزات الکترونیکی تغییر نام داد. در سال ۱۹۵۴ اولین گردهمایی در حوزه قابلیت اطمینان در آمریکا تشکیل شد و در سال ۱۹۶۲ نیز برای اولین بار رشته مهندسی قابلیت اطمینان سیستم در مقطع کارشناسی ارشد در انستیتوی هوایی اوهایو ارائه شد. امروزه قابلیت اطمینان نقش قابل توجهی را در زمینه‌های مهندسی و تکنولوژی ایفا می‌کند. کیفیت جزء لاینفک قابلیت اطمینان است و بدون آن، قابلیت اطمینان اهمیت خود را از دست می‌دهد [۵].

مطالعات انجام گرفته در زمینه کیفیت محصولات بسیار گسترده است. کیفیت دارای چندین بعد است و از جنبه‌های مختلفی می‌تواند مورد تحلیل قرار گیرد [۶]. قابلیت اطمینان یکی از ابعاد چندگانه کیفیت می‌باشد و با فرض اینکه مشخصه‌های محصولات در طول زمان دچار تغییر و افت می‌شوند به ارزیابی محصولات می‌پردازد. بخش عمده‌ای از تحقیقات در حوزه کیفیت محصولات به بررسی ویژگی‌های ثابت در طول زمان پرداخته‌اند و کیفیت را در مدت زمان کوتاهی ارزیابی کرده‌اند. اقلام با استفاده از ویژگی‌ها و مشخصه‌های ثابت و متغیر به دو دسته‌ی منطبق یا غیر منطبق طبقه بندی می‌شوند. در این تحقیق منظور از نوسانات کیفیت، تغییر در درصد اقلام نامنطبق در انباشته‌های تولیدی است. واضح است که اقلام نامنطبق قابلیت اطمینان نامطلوب‌تری نسبت به اقلام منطبق خواهند داشت. در تحقیقاتی که در مورد کیفیت محصولات صورت گرفته عمدتاً تمرکز بر این موارد بوده است:

مونتاژ و یا اجزای نامنطبق باشد. در عمل همواره درصدی از محصولات تولید شده با خطاهای کیفی به دست مشتری می‌رسند. افزایش یا کاهش درصد محصولات تولید شده با خطاهای کیفی رفتار قابلیت اطمینان محصول را تحت تأثیر قرار می‌دهد.

یک محصول مراحل برنامه ریزی، طراحی و توسعه، تولید، آزمایش، حمل و نقل، ذخیره سازی و تعمیر و نگهداری را در چرخه زندگی عادی خود می‌گذراند. هر مرحله می‌تواند دلیلی بر عدم قابلیت اطمینان محصول باشد و قابلیت اطمینان در طول چرخه زندگی تغییر می‌کند. در همین راستا مورتی [۴] به چهار مفهوم قابلیت اطمینان اشاره کرده است:

- **قابلیت اطمینان طراحی**، که به مشخصات و ویژگی‌های قابلیت اطمینان اجزای سازنده محصول بستگی دارد.
- **قابلیت اطمینان ذاتی**، که قابلیت اطمینان فرایندهای تولید است و می‌تواند متفاوت از قابلیت اطمینان طراحی به علت خطاهای تولید، خطاهای مونتاژ و عدم انطباق اجزای محصول باشد.
- **قابلیت اطمینان فروش**، که قابلیت اطمینان در مرحله فروش است و می‌تواند متفاوت از قابلیت اطمینان ذاتی باشد. این تفاوت به دلیل آسیب و یا زوال‌هایی است که ممکن است در مرحله آزمون، حمل و نقل و یا فرایند انبارش اتفاق بیافتد.
- **قابلیت اطمینان میدانی**، که بستگی به عوامل عملیاتی مانند شدت و بار مصرف، محیط عملیاتی، نیازهای عملکردی، فعالیت‌های تعمیر و نگهداری، مهارت اپراتور و قابلیت اطمینان انسانی دارد.

بروز خطا در فرایند تولید می‌تواند منجر به انحراف قابلیت اطمینان محصول از مقدار در نظر گرفته شده برای آن در مرحله طراحی شود. از جمله خطاهای متداولی که ممکن است در مرحله تولید اتفاق بیفتد خطای عدم انطباق اجزا و خطای مونتاژ است. وجود این خطاها قابلیت اطمینان محصول را کاهش می‌دهد و ممکن است نارضایتی مشتری را به همراه داشته باشد. بررسی و پیش‌بینی قابلیت اطمینان محصول قبل از رسیدن آن به دست مشتری به شناسایی خطاهای تولیدی کمک می‌کند. در واقع با انجام آزمون‌های قابلیت اطمینان بر روی محصولات و تحلیل زمان‌های شکست محصولات می‌توان به وجود خطاهای تولیدی پی برد. همچنین بررسی و تحلیل داده‌های میدانی حاصل از شکست محصولات در هنگام مصرف به شناسایی خطاهای تولیدی موجود کمک کرده و از بروز شکست‌های آتی

عملکرد صنایع خودروسازی اسپانیا در تحقق کیفیت و قابلیت اطمینان را بررسی کرده اند. در مطالعه‌ای دیگر ویلیام [۱۶] با استفاده از یک منحنی وانی^۴ شکل جدید، همبستگی بین کیفیت و قابلیت اطمینان را نشان می‌دهد. او همچنین به ارزیابی روابط متقابل بین کیفیت و قابلیت اطمینان بر روی دستگاه‌های نیمه هادی پرداخته است. در این مقاله از نوع جدیدی از منحنی وان حمام برای اندازه گیری «شکست» استفاده شده است که می‌تواند برای ارزیابی کیفیت و قابلیت اطمینان مورد استفاده قرار گیرد.

همانطور که مشاهده شد در ادبیات موضوع مقالات محدودی به بررسی تأثیر تغییرات کیفیت بر قابلیت اطمینان محصول پرداخته‌اند. همچنین در مقالات بررسی شده تأثیر تغییرات کیفیت بر قابلیت اطمینان محصول به صورت ثابت در نظر گرفته شده است. بنابراین در این تحقیق قصد داریم تأثیر تغییرات کیفیت در مرحله تولید بر قابلیت اطمینان محصول را با تصادفی در نظر گرفتن این تأثیر مورد بررسی قرار دهیم. در همین راستا درصد اقلام معیوب را به صورت تصادفی در نظر گرفته و تأثیر خطای مونتاژ و عدم انطباق اجزاء بر قابلیت اطمینان محصولات را ارزیابی خواهیم کرد.

۳- مدل سازی تأثیر تغییرات کیفیت بر قابلیت اطمینان محصول

۳-۱- قابلیت اطمینان طراحی

$R_0(t)$ بر قابلیت اطمینان طراحی اشاره دارد. به همین ترتیب $F_0(t)$ تابع توزیع شکست محصولات را بدون تأثیر تغییرات کیفیت نشان می‌دهد که رابطه این دو به این صورت است [۱۷]:

$$R_0 = 1 - F_0(t) = 1 \int_0^t f(\zeta) d\zeta \quad (1)$$

بدین ترتیب نرخ خرابی در بازه $[t_1, t_2]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

"احتمال آنکه در فاصله زمانی $[t_1, t_2]$ ، یک خرابی در واحد زمانی اتفاق بیافتد به طوریکه هیچ خرابی قبل از این فاصله زمانی (یعنی قبل از زمان شروع t_1) اتفاق نیفتاده باشد." بدین ترتیب تابع چگالی احتمال $f_0(t)$ و تابع مخاطره (نرخ خرابی)، $r_0(t)$ ، که

۱- مدل سازی اثر تغییرات کیفیت اجزای ورودی بر فرایند تولید و کیفیت محصول، ۲- طرح‌های نمونه گیری برای پذیرش در رد/قبول اجزای تأمین شده توسط فروشندگان خارجی ۳- استفاده از نمودارهای کنترل برای تشخیص تغییرات کیفیت با توجه به تغییرات در فرایند محصول، ۴- حذف اقلام معیوب توسط بازرسی و آزمون. جزئیات این موارد را می‌توان در بسیاری از کتاب‌ها و مطالعات به عنوان نمونه در منابع [۷]، [۸] و [۹] یافت.

همانطور که اشاره شد قابلیت اطمینان یکی از ابعاد کیفیت و در ارتباط با عملکرد محصول در طول زمان است. علی‌رغم مطالعات بسیاری که در حوزه کیفیت انجام شده است مقالات محدودی به بررسی تغییرات در قابلیت اطمینان محصول به دلیل نوسانات کیفیت پرداخته‌اند. در همین راستا جیانگ [۴] به مدل سازی توزیع‌های طول عمر که می‌تواند به صورت کمی تحت تأثیر عوامل بیرونی مانند: آزمایش‌ها، فرآیند حمل و نقل و ذخیره سازی و یا عملیات قرار بگیرند پرداخته است. در همین تحقیق یک مطالعه موردی برای نشان دادن مناسب بودن و سودمندی این مدل‌ها ارائه شده است. در یک مطالعه دیگر جیانگ و مورتی [۱۰] با استفاده از روش‌های آماری به مدل سازی تأثیر تغییرات کیفیت بر قابلیت اطمینان محصول پرداخته‌اند. در این مقاله دو نوع خطای کیفی یعنی خطای مونتاژ و خطای عدم انطباق اجزاء برای محصولات در نظر گرفته شده است. جیانگ و مورتی توزیع زمان شکست محصولات با این خطاهای کیفی را وایبل در نظر گرفته‌اند و به بررسی ویژگی‌های نمودارهای نرخ شکست و قابلیت اطمینان محصولات می‌کنند که این خطاها و ترکیبی از آن‌ها را دارند پرداخته‌اند. در مقالات [۱۱] و [۱۲] از مدل‌های ترکیبی برای مدل سازی تأثیر تغییرات کیفیت بر قابلیت اطمینان استفاده شده است. در مقاله‌ای جمال الدین و همکاران [۱۳]، به بررسی وقوع اجزاء نامنطبق در تولید دسته‌ای و بحث در مورد بهینه سازی اندازه تولید با در نظر گرفتن عواقب قابلیت اطمینان ضعیف اجزاء نامنطبق و تأثیر آن بر هزینه‌های وارانتهی و هزینه‌های تولید پرداخته‌اند. لو و همکاران [۱۴] نشان داده‌اند که چگونه کیفیت و قابلیت اطمینان را می‌توان در فرآیند توسعه محصول (PDP^۲) مدیریت کرد. آن‌ها همچنین به بررسی چگونگی دسترسی به قابلیت اطمینان بالا در مقابل سرعت در ارائه محصول به بازار پرداخته‌اند. در مطالعه‌ای خاویر گونزالس بنیتو و بری دیل^۳ [۱۵] با توجه به برخی از مشاهدات تجربی، نحوه

^۴ Bathhtub

^۲ Product Development Process

^۳ Javier Gonzalez-Benito & Barrie Dale

$G(t)$ تابع توزیع مرتبط با این حالت شکست جدید است و فرض می‌شود که از توزیع وایبل پیروی می‌کند. قابلیت اطمینان، تابع چگالی و نرخ مخاطره مربوط به این حالت شکست به صورت زیر بیان می‌شود:

$$R_g(t) = 1 - G(t) \quad (5)$$

$$g(t) = \frac{dG(t)}{dt} \quad (6)$$

$$r_g(t) = \frac{g(t)}{R_g(t)} \quad (7)$$

میانگین زمان تا شکست برای این حالت شکست، بسیار کمتر از میانگین زمان شکست در نظر گرفته شده در مرحله طراحی است و همچنین با توجه به ماهیت شکست، $r_g(t)$ یک تابع کاهشی نسبت به t است [۱۰]. در واقع تمامی شکست‌ها ناشی از خطاهای مونتاژ نمی‌باشند بنابراین q به احتمال خطای مونتاژ اشاره می‌کند که در این تحقیق فرض می‌شود که از توزیع بتا $\beta \sim \text{beta}(\alpha, \beta)$ پیروی می‌کند. قابلیت اطمینان چنین محصولاتی که چندین حالت شکست دارند را می‌توان به وسیله مدل ریسک رقابتی^۵ مدل‌سازی کرد. با توجه به مدل ریسک رقابتی $R_1(t)$ یا قابلیت اطمینان محصولات تولید شده طبق معادله زیر بدست می‌آید:

$$R_1(t) = R_0(t)[1 - qG(t)] \quad (8)$$

چان و میکرو [۱۸] این مدل را بررسی کرده و آن را "مدل عمومی جمعیت شکست محدود"^۶ نامیده‌اند. در اینجا شکست به دلیل یکی از دو حالتی که با هم در حال رقابت هستند اتفاق می‌افتد. زمان وقوع شکست به علت حالت شکست معمول (به‌عنوان مثال فرسودگی) دارای تابع توزیع $F_0(t)$ است. محصول با احتمال q ممکن است به علت حالت شکست دیگری (به‌عنوان مثال، شکست در ناحیه نوزادی) از کار بیفتد. تابع توزیع این حالت شکست $G(t)$ است. در اینجا حالت شکست ثانویه همان حالت شکست ناشی از خطاهای مونتاژ در نظر گرفته می‌شود و از توزیع وایبل پیروی می‌کند که در آن، γ_1 نشان دهنده پارامتر شکل و θ_1 نشان دهنده پارامتر مقیاس این توزیع وایبل است. بنابراین داریم:

$$G(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta_1}\right)^{\gamma_1}} \quad (9)$$

در ارتباط با $F_0(t)$ یا تابع توزیع شکست هستند، به ترتیب به صورت روابط زیر می‌باشند [۱۷].

$$f_0(t) = \frac{dF_0(t)}{dt} \quad (2)$$

$$r_0(t) = \frac{f_0(t)}{R_0(t)} \quad (3)$$

به همین ترتیب با مشتق گرفتن از رابطه (۱) نسبت به t خواهیم داشت:

$$-f_0(t) = \frac{dR_0(t)}{dt} \quad (4)$$

۳-۲ تغییرات کیفیت

اکثر محصولات، پیچیده و متشکل از چندین جزء هستند. تولید محصولات شامل مونتاژ اجزایی است که تولید داخلی یا خریداری شده از فروشندگان خارجی هستند. همانطور که پیش‌تر نیز ذکر شد، با توجه به تغییرات در عملیات مونتاژ و یا استفاده از اجزایی که با مشخصات طراحی سازگار نیستند، قابلیت اطمینان ذاتی می‌تواند از قابلیت اطمینان طراحی متفاوت باشد. در اینجا مدل‌هایی را بررسی می‌کنیم که اثر تغییرات کیفیت بر قابلیت اطمینان محصول را توصیف می‌کنند. در همین راستا ابتدا به ارائه مدلی می‌پردازیم که تأثیر خطاهای مونتاژ را در نظر می‌گیرد. سپس مدلی برای ارزیابی خطای اجزای نامنطبق ارائه خواهد شد.

۳-۳ مدل اول (تأثیر خطاهای مونتاژ)

حتی ساده‌ترین محصول هم از چندین جزء مختلف تشکیل شده است. نوع عملیات مونتاژ به نوع محصول بستگی دارد. مثلاً برای یک محصول الکتریکی یکی از عملیات مونتاژ لحیم کاری است که اگر بدرستی انجام نگیرد اتصال بین اجزای سازنده محصول می‌تواند در طی یک دوره کوتاه مدت منجر به شکست زودرس شود. بنابراین خطای مونتاژ می‌تواند به عنوان حالت جدیدی از شکست مشاهده شود که با حالت‌های دیگری که در طول فرایند طراحی بررسی می‌شوند متفاوت است.

^۶ general limited failure population model

^۵ Competing Risk Model

با توجه به تغییرات در کیفیت برخی از اجزای سازنده محصولات، گاهی اوقات ویژگی‌های مورد انتظار محصولات برآورده نمی‌شوند و میانگین زمان تا شکست^۷ آنها بسیار کمتر از میانگین زمان تا شکست مرحله طراحی است. اقلامی که دارای خطای اجزای نامنتطبق هستند توزیع زمان تا شکست نامطلوب‌تری نسبت به توزیع زمان تا شکست در نظر گرفته شده برای محصولات در مرحله طراحی دارند (به عنوان مثال، میانگین زمان تا شکست آنها بسیار کمتر از مقدار در نظر گرفته شده در مرحله طراحی است). بیان می‌کند و رابطه قابلیت اطمینان، تابع چگالی و نرخ شکست به ترتیب به صورت روابط زیر بیان می‌شوند:

$$R_h(t) = 1 - H(t) \quad (۱۶)$$

$$h(t) = \frac{dH(t)}{dt} \quad (۱۷)$$

$$r_h(t) = \frac{h(t)}{R_h(t)} \quad (۱۸)$$

با توجه به ماهیت این حالت شکست و اینکه شکست‌ها به دلیل این نوع حالت شکست معمولاً در ناحیه فرسودگی منحنی وان حمام اتفاق می‌افتند فرض می‌شود که $r_h(t)$ یک تابع افزایشی بر حسب t است و $r_h(t) > r_0(t)$ می‌باشد. همچنین p درصدی از اقلام تولیدی است که دارای خطای عدم انطباق اجزاء می‌باشند. در این تحقیق فرض می‌شود که p از توزیع بتا $\beta(\alpha', \beta')$ پیروی می‌کند. در نتیجه $R_2(t)$ عبارت است از قابلیت اطمینان محصولات تولید شده و طبق معادله زیر بدست می‌آید:

$$R_2(t) = (1-p)R_0(t) + pR_h(t) \quad (۱۹)$$

که این رابطه یک مدل ترکیبی استاندارد است که شامل دو توزیع می‌باشد [۱۸] و [۱۹]. $H(t)$ می‌تواند ترکیبی از چندین توزیع باشد که به ویژگی‌های عدم انطباق اجزا بستگی دارد. در اینجا فرض می‌شود که $H(t)$ از توزیع وایبل پیروی می‌کند که در آن γ_2 نشان دهنده پارامتر شکل و θ_2 پارامتر مقیاس توزیع وایبل است. بنابراین داریم:

$$R_h(t) = e^{-\left(\frac{t}{\theta_2}\right)^{\gamma_2}} \quad (۲۰)$$

$$H(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta_2}\right)^{\gamma_2}} \quad (۲۱)$$

$$R_0(t) = e^{-\left(\frac{t}{\theta_0}\right)^{\gamma_0}} \quad (۱۰)$$

$$R_g(t) = e^{-\left(\frac{t}{\theta_1}\right)^{\gamma_1}} \quad (۱۱)$$

$$r_g(t) = \frac{\gamma_1}{\theta_1} \left(\frac{t}{\theta_1}\right)^{\gamma_1-1} \quad (۱۲)$$

با توجه به رابطه (۸) و جایگذاری توزیع بتا در این رابطه داریم:

$$R_1(t) = \int_0^1 R_0(t)[1 - qG(t)]f(q) dq \quad (۱۳)$$

$$R_1(t) = R_0(t) \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} G(t)\right) \quad (۱۴)$$

با جایگذاری $G(t) = 1 - R_g(t)$ در رابطه (۱۴) داریم:

$$\begin{aligned} R_1(t) &= R_0(t) \left[1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} (1 - R_g(t))\right)\right] \\ &= R_0(t) - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} R_0(t) + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} R_0(t) R_g(t) \end{aligned}$$

با تعریف $R_{0g}(t) = R_0(t) R_g(t)$ داریم:

$$R_1(t) = \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right) R_0(t) + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} R_{0g}(t) \quad (۱۵)$$

بر اساس معادله (۱۵) مشاهده می‌شود که مدل اول، یک مدل ترکیبی است که از دو زیر گروه جمعیتی تشکیل شده است. زیر گروه اول دارای تابع قابلیت اطمینان $R_0(t)$ است. به همین ترتیب زیر گروه جمعیتی دوم دارای تابع قابلیت اطمینان $R_{0g}(t)$ می‌باشد که یک مدل ریسک رقابتی عمومی است. با توجه به معادله (۱۵) و در نظر گرفتن اینکه برای t های بزرگ $\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} R_{0g}(t)\right) \approx 0$ است داریم:

$$R_1(t) \approx \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right) R_0(t)$$

۳-۴ مدل دوم (تأثیر خطاهای عدم انطباق اجزا)

^۷ Mean Time to Failure

پارامتری پیروی می‌کنند. تابع توزیع زمان شکست محصول بدون تغییرات کیفیت به صورت معادله زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$F_0(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta_0}\right)^{\gamma_0}} \quad (25)$$

که در آن پارامتر مقیاس $\theta_0 > 0$ و پارامتر شکل $\gamma_0 > 1$ (نشان دهنده نرخ شکست افزایشی) می‌باشد. به همین ترتیب تابع توزیع حالت شکست خطاهای مونتاژ طبق رابطه زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$G(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta_1}\right)^{\gamma_1}} \quad (26)$$

که حدود پارامتر مقیاس به صورت $0 < \theta_1 < \theta_0$ و پارامتر شکل $\gamma_1 < 1$ (نشان دهنده نرخ شکست کاهشی) است. همچنین تابع توزیع محصولات دارای خطاهای عدم انطباق اجزا به صورت رابطه زیر خواهد بود:

$$H(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta_2}\right)^{\gamma_2}} \quad (27)$$

که محدوده پارامتر مقیاس به صورت $0 < \theta_2 < \theta_0$ و پارامتر شکل به صورت $\gamma_2 \geq \gamma_0$ در نظر گرفته می‌شود.

۴-۱ تحلیل نمودارها

در این قسمت نمودارهای نرخ شکست و همچنین نمودارهای احتمال وایبل (WPP) مدل‌های ارائه شده را بررسی می‌کنیم.

۴-۱-۱ تابع نرخ شکست

همانطور که اشاره شد هنگامی که تغییرات کیفیت وجود ندارد ($p = q = 0$) تابع توزیع زمان شکست توسط رابطه (۲۷) بدست می‌آید. به همین ترتیب زمانی که $\gamma_0 > 1$ است تابع نرخ شکست یک تابع افزایشی خواهد بود که توسط معادله زیر بدست می‌آید:

$$r_0(t) = \frac{\gamma_0}{\theta_0} \left(\frac{t}{\theta_0}\right)^{\gamma_0-1} \quad (28)$$

۴-۱-۲ نمودار احتمال وایبل (WPP)

نمودار احتمال یک روش گرافیکی است برای ارزیابی اینکه آیا یک مجموعه داده از یک توزیع تعیین شده مانند نرمال یا وایبل پیروی

$$r_h(t) = \frac{\gamma_2}{\theta_2} \left(\frac{t}{\theta_2}\right)^{\gamma_2-1} \quad (22)$$

باتوجه به معادله (۱۹) و جایگذاری توزیع بتا در این رابطه داریم:

$$R_2(t) = \int_0^1 [(1-p)R_0(t) + pR_h(t)]f(p)dp \quad (23)$$

$$R_2(t) = \frac{1}{\alpha' + \beta'} (\beta'R_0(t) + \alpha'R_h(t)) \quad (24)$$

برای t های خیلی بزرگ با توجه به رابطه (۲۴) و اینکه

$$\frac{\alpha'}{\alpha' + \beta'} R_h(t) \approx 0 \quad \text{است داریم:}$$

$$R_2(t) \approx \frac{\beta'}{\alpha' + \beta'} R_0(t)$$

۴- تشخیص تاثیر تغییرات کیفیت

زمانی که $p = q = 0$ باشد مشکل تغییرات کیفیت وجود ندارد ولی درحالتی که $p \neq 0$ و $q \neq 0$ باشند با مشکل تغییرات کیفیت مواجه خواهیم بود. از داده‌های میدانی می‌توان برای تشخیص وجود نوسانات کیفیت بهره برد. در این‌جا داده‌های میدانی عمدتاً از نوع داده‌هایی است که از شکست‌های محصول در دوره وارانتی جمع‌آوری شده‌اند. به همین منظور از داده‌های میدانی به دو طریق زیر می‌توان استفاده کرد:

۱- از داده‌های میدانی می‌توان برای ایجاد انواع مختلف نمودارها استفاده کرد. با استفاده از ویژگی‌های برجسته این نمودارها می‌توان به وجود یا عدم وجود مشکلات کیفی و همچنین ماهیت آن‌ها (خطای مونتاژ و یا عدم انطباق اجزا) پی برد. این امر نیازمند توصیف ویژگی‌های نمودارهای مختلف مدل‌های ارائه شده است. در قسمت بعد ویژگی‌های نمودارهای هر دو مدل بررسی خواهند شد.

۲- از تکنیک‌های آماری (مانند تخمین پارامتر و آزمون فرض) می‌توان برای آزمون فرض وجود مشکلات کیفی و همچنین برآورد آن‌ها بهره برد.

همانطور که پیش‌تر هم اشاره شد، در این مطالعه فرض می‌شود که هر دو زمان شکست حالات بررسی شده از توزیع وایبل دو

با توجه به رابطه (۳۲) داریم:

$$z_i = \left(\frac{t}{\theta_i}\right)^{\gamma_i}, i = 0, 1 \quad (33)$$

$$w(t) = \frac{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} e^{z_1}}{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} G(t)\right)} \quad (34)$$

$w(t)$ با افزایش t از $\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$ تا بینهایت افزایش می‌یابد. همچنین $r_g(t)$ از بینهایت تا صفر کاهش می‌یابد. در نتیجه برای t های متوسط یا بزرگ با استفاده از معادله (۳۲) داریم:

$$r_1(t) \approx r_0(t) \quad (35)$$

که یک تابع افزایشی برحسب t است. برای t های کوچک، با توجه به معادله (۳۲) داریم:

$$r_1(t) \approx w(t)r_g(t) \quad (36)$$

در نتیجه نمودار نرخ شکست $r_1(t)$ به صورت وانی شکل است. درستی روابط (۳۵) و (۳۶) برای پارامترهای مختلف توزیع بتا با استفاده از شکل ۱ نشان داده شده است.

۲-۲-۴ محاسبه رابطه نمودار احتمال وایبل (WPP)

طبق معادله (۳۱) تبدیل وایبل، برای مدل اول داریم:

$$x = \ln(t)$$

$$y_1 = \ln \left[-\ln \left(R_0(t) \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} G(t) \right) \right) \right] \quad (37)$$

تعاریف زیر را داریم:

$$z_i = \left(\frac{t}{\theta_i}\right)^{\gamma_i}, i = 0, 1$$

$$d = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

می‌کند یا خیر. از نمودار احتمال وایبل می‌توان برای ارزیابی مناسب بودن توزیع وایبل به‌عنوان یک مدل برای داده‌ها استفاده کرد. در واقع داده‌ها زمانی از یک توزیع معین پیروی می‌کنند که در نمودار احتمال بر یک شکل مشخص منطبق شوند در غیر اینصورت نشان دهنده خروج از آن توزیع معین خواهند بود [۲۰]. برای توزیع وایبل می‌توان تبدیل زیر را بر روی تابع توزیع $F_0(t)$ اعمال کرد:

$$x = \ln(t), \quad (29)$$

$$y = \ln[-\ln(1 - F(t))]$$

نمودار y در مقابل x را نمودار احتمال وایبل (WPP) می‌نامند. برای حالتی که هیچگونه اثر تغییرات کیفیت وجود ندارد داریم:

$$y = \ln[-\ln(1 - F_0(t))] \quad (30)$$

$$= \ln[-\ln(1 - (1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta_0}\right)^{\gamma_0}}))]$$

$$= \ln[-\ln(e^{-\left(\frac{t}{\theta_0}\right)^{\gamma_0}})] = \gamma_0 \ln\left(\frac{t}{\theta_0}\right)$$

$$= \gamma_0 [\ln(t) - \ln(\theta_0)]$$

$$l_0 : y = \gamma_0 [x - \ln(\theta_0)] \quad (31)$$

شیب خط معادله (۳۱) همان پارامتر شکل، γ_0 ، تابع توزیع وایبل و عرض از مبدأ آن یک تابع لگاریتمی براساس پارامتر مقیاس، θ_0 ، توزیع وایبل است. نمودارهای احتمال وایبل (WPP) برای مدل های ۱ و ۲ در بخش‌های بعدی بررسی شده است.

۲-۴ مدل اول (تأثیر خطاهای مونتاژ)

۱-۲-۴ محاسبه نرخ شکست

$$r_g(t) = \frac{\gamma_1}{\theta_1} \left(\frac{t}{\theta_1}\right)^{\gamma_1 - 1} \text{ با توجه به } r_1(t) \text{ تابع نرخ شکست مدل اول}$$

و روابط (۳) و (۴) طبق معادله زیر بدست می‌آید:

$$r_1(t) = \frac{f(t)}{R_1(t)} = r_0(t) + w(t)r_g(t) \quad (32)$$

نمودار wpp برای مدل اول به ازای پارامترهای مختلف توزیع بتا ($\alpha, \beta < 1$, $\alpha, \beta = 1$, $\alpha, \beta > 1$) به صورت شکل ۲ است. به عنوان نمونه نمودار y_1 به ازای پارامترهای توزیع بتا ($\alpha = 2, \beta = 1$) و به ازای پارامترهای توزیع وایبل ($\theta_0 = 25, \gamma_0 = 3$) و ($\theta_1 = 0.6, \gamma_1 = 0.7$) در شکل ۲ رسم شده است. همچنین در این شکل x به ازای پارامترهای اشاره شده برابر با $x = 4.1777$ بدست می آید.

و داریم:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \ln \left[-\ln \left(e^{-z_0} \left(1-d \left(1-e^{-\left(\frac{t}{\theta_1}\right)^{\gamma_1}} \right) \right) \right) \right] \\
 &= \ln \left[-\ln \left(e^{-z_0} \right) - \ln \left(1-d \left(1-e^{-z_1} \right) \right) \right] \\
 &= \ln \left[z_0 - \ln \left(1-d + de^{-z_1} \right) \right] \\
 &= \ln \left[z_0 - \ln \left(e^{-z_1} \left((1-d)e^{z_1} + d \right) \right) \right] \\
 &= \ln \left[z_0 + z_1 - \ln \left(d + (1-d)e^{z_1} \right) \right] \tag{۳۸}
 \end{aligned}$$

زمانیکه t به صفر نزدیک می شود داریم:

$$\begin{aligned}
 z_1 \square z_0 \quad , \quad e^{z_1} \approx 1+z_1 \quad , \\
 \ln \left(d + (1-d)e^{z_1} \right) \approx (1-d)z_1
 \end{aligned}$$

با جایگذاری در رابطه (۳۸) داریم:

$$y_1 = \ln \left(z_0 + dz_1 \right) \tag{۳۹}$$

بنابراین با توجه به اینکه $z_1 \square z_0$ است مجانب چپ و راست نمودار wpp برای مدل اول به صورت روابط (۴۰) و (۴۱) زیر بدست می آید:

$$l_1 : y = \ln \left(dz_1 \right) = \gamma_1 \left[x - \ln \left(\theta_1 \right) \right] + \ln \left(d \right) \tag{۴۰}$$

$$l_0 : y = \ln \left(z_0 \right) = \gamma_0 \left[x - \ln \left(\theta_0 \right) \right] \tag{۴۱}$$

از مساوی قرار دادن دو مجانب داریم:

$$\gamma_0 \left[x - \ln \left(\theta_0 \right) \right] = \gamma_1 \left[x - \ln \left(\theta_1 \right) \right] + \ln \left(d \right)$$

$$x \left(\gamma_0 - \gamma_1 \right) = \ln \left(\theta_0^{\gamma_0} \right) - \ln \left(\theta_1^{\gamma_1} \right) + \ln \left(d \right)$$

دو مجانب یکدیگر را در نقطه x قطع می کنند:

$$x = \frac{\ln \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\theta_0^{\gamma_0} / \theta_1^{\gamma_1} \right) \right)}{\gamma_0 - \gamma_1}$$

۳-۴ مدل دوم (تأثیر خطاهای عدم انطباق اجزاء)

۱-۳-۴ محاسبه نرخ شکست

تابع نرخ شکست مدل دوم، $r_2(t)$ ، با توجه به $r_h(t) = \frac{\gamma_2}{\theta_2} \left(\frac{t}{\theta_2}\right)^{\gamma_2-1}$ و روابط (۴) و (۵) طبق معادله زیر بدست می آید:

$$r_2(t) = \frac{f_2(t)}{R_2(t)} = x(t)r_0(t) + k(t)r_h(t) \tag{۴۲}$$

که در آن:

$$z_i = \left(\frac{t}{\theta_i}\right)^{\gamma_i} \quad , \quad i = 0, 2 \quad , \quad r_h(t) > r_0(t)$$

$$x(t) = \frac{\beta' e^{-z_0}}{\beta' e^{-z_0} + \alpha' e^{-z_2}} \tag{۴۳}$$

$$k(t) = \frac{\alpha' e^{-z_0}}{\beta' e^{-z_0} + \alpha' e^{-z_2}} \tag{۴۴}$$

برای t های کوچک به ازای پارامترهای مختلف توزیع بتا و وایبل داریم:

$$r_2(t) \approx k(t)r_h(t) \tag{۴۵}$$

به همین ترتیب برای t های متوسط یا بزرگ می دانیم $k(t).r_h(t) \approx 0$ است، بنابراین به ازای پارامترهای مختلف توزیع بتا و توزیع وایبل داریم:

$$r_2(t) \approx x(t)r_0(t) \tag{۴۶}$$

$$= \ln \left[-\ln \left((1-f)e^{-z_0} + fe^{-z_2} \right) \right] \quad (48)$$

$$= \ln \left[-\ln \left(e^{-z_0} \left((1-f) + fe^{-z_2} e^{z_0} \right) \right) \right]$$

$$= \ln \left[z_0 - \ln \left((1-f) + fe^{-z_2} e^{z_0} \right) \right]$$

$$= \ln \left[z_0 - \ln \left(e^{-z_2} \left((1-f)e^{z_2} + fe^{z_0} \right) \right) \right]$$

$$= \ln \left[z_0 + z_2 - \ln \left((1-f)e^{z_2} + fe^{z_0} \right) \right] \quad (49)$$

می‌دانیم برای زمان‌های کوچک تقریب‌های $e^{z_2} \approx 1 + z_2$ و $e^{z_0} \approx 1 + z_0$ وجود دارند.

باجایگذاری این تقریب‌ها در رابطه (۴۹) داریم:

$$= \ln \left[z_0 + z_2 - \ln \left((1-f)(1+z_2) + f(1+z_0) \right) \right]$$

$$= \ln \left[z_0 + z_2 - \ln \left(1-f + z_2(1-f) + z_0f + f \right) \right]$$

$$= \ln \left[z_0 + z_2 - \ln \left(1 + z_2(1-f) + z_0f \right) \right] \quad (50)$$

می‌دانیم:

$$\ln(1+z_2(1-f) + z_0f) \approx z_2(1-f) + z_0f$$

با جایگذاری این تقریب در رابطه (۵۰) داریم:

$$= \ln \left[z_0(1-f) + z_2f \right] \quad (51)$$

بر اساس روابط قبل داریم:

$$\frac{z_2}{z_0} = \left(\frac{\theta_0}{\theta_2} \right)^{\gamma_0}$$

بنابراین با جایگذاری در رابطه ۵۱ داریم:

$$\ln \left[z_0(1-f) + z_0 \left(\frac{\theta_0}{\theta_2} \right)^{\gamma_0} f \right] = \ln z_0 + \ln \left[1-f + \left(\frac{\theta_0}{\theta_2} \right)^{\gamma_0} f \right]$$

بنابراین بجانب چپ نمودار WPP برای مدل دوم به صورت زیر است:

$$l_1 : y_2 = \gamma_0 \left(x - \ln(\theta_0) \right) + \ln \left[1-f + \left(\frac{\theta_0}{\theta_2} \right)^{\gamma_0} f \right] \quad (52)$$

به همین ترتیب برای زمان‌های بزرگ بر اساس رابطه ۵۱ و با

توجه به اینکه $z_2/z_0 = (\theta_0/\theta_2)^{\gamma_0}$ داریم:

در شکل ۳ به ازای پارامترهای مختلف توزیع بتا و پارامترهای توزیع وایبل برابر با $(\theta_0 = 25, \gamma_0 = 3)$ و $(\theta_2 = 10, \gamma_2 = 5)$ درستی روابط ۴۵ و ۴۶ بررسی شده است.

در نتیجه نمودار نرخ شکست $r_2(t)$ به صورت تک مدی (unimodal) است که در طول زمان افزایش می‌یابد و در منبع [۲۱] آن را به‌عنوان "roller coaster" نامیده‌اند.

۴-۳-۲ محاسبه رابطه نمودار احتمال وایبل (WPP)

از قسمت‌های قبل می‌دانیم که $r_h(t) > r_0(t)$ است، بنابراین برای برقراری این رابطه دو حالت را در نظر می‌گیریم:

۱- حالتی که $0 < \theta_2 < \theta_0$ و $\gamma_0 = \gamma_2$ است.

۲- حالتی که $0 < \theta_2 < \theta_0$ و $\gamma_0 < \gamma_2$ است.

حال رابطه نمودار احتمال وایبل را در این دو حالت بررسی می‌کنیم:

حالت ۱- در این حالت طبق معادله (۳۱) برای توزیع وایبل در مدل دوم داریم:

$$x = \ln(t)$$

$$y_2 = \ln \left[-\ln \left(\frac{\beta'}{\alpha' + \beta'} R_0(t) + \frac{\alpha'}{\alpha' + \beta'} R_h(t) \right) \right] \quad (49)$$

همچنین تعاریف زیر را داریم:

$$f = \frac{\alpha'}{\alpha' + \beta'}$$

$$(1-f) = \frac{\beta'}{\alpha' + \beta'}$$

$$z_i = \left(\frac{t}{\theta_i} \right)^{\gamma_i}, \quad i = 0, 2$$

با جایگذاری در رابطه (۴۷) و با فرض اینکه $H(t)$ ترکیبی از دو تابع توزیع وایبل می‌باشد داریم:

$$y_2 = \ln \left[-\ln \left((1-f) R_0(t) + f R_h(t) \right) \right]$$

نمودار wpp برای مدل دوم برای حالتی که دو پارامتر شکل توزیع وایبل متفاوت هستند، به ازای پارامترهای مختلف توزیع بتا و با توجه به اینکه $r_h(t) > r_0(t)$ است، به صورت شکل ۵ بدست می‌آید. در این شکل پارامترهای توزیع بتا برابر با $\alpha = 2, \beta = 1$ و پارامترهای توزیع وایبل برابر با $\theta_0 = 25, \gamma_0 = 2$ و $\theta_2 = 10, \gamma_2 = 5$ تنظیم شده‌اند.

۵- مثال عددی و تحلیل حساسیت

در این بخش با ارائه مثال عددی نمودارهای قابلیت اطمینان، نرخ شکست و نمودارهای wpp برای دو مدل مذکور بررسی می‌شوند. پارامترهای توزیع وایبل به این صورت در نظر گرفته شده‌اند $(\theta_0 = 25, \gamma_0 = 3)$ و $(\theta_1 = 0.6, \gamma_1 = 0.7)$ و $(\theta_2 = 10, \gamma_2 = 5)$.

۵-۱ مدل اول

به‌عنوان مثال شکل ۶ نمودار قابلیت اطمینان مدل اول به ازای پارامترهای مختلف توزیع بتا را نشان می‌دهد. نمودار نرخ شکست $r_1(t)$ به صورت وانی شکل است. جدول ۱ نحوه رفتار نمودار نرخ شکست $r_1(t)$ به ازای پارامترهای مختلف توزیع بتا $(\alpha, \beta < 1, \alpha, \beta = 1, \alpha, \beta > 1)$ را نشان می‌دهد. به‌عنوان مثال شکل ۷ نمودار نرخ شکست $r_1(t)$ به ازای ثابت نگه داشتن β و افزایش α در حالت $\alpha, \beta < 1$ و به ازای پارامترهای توزیع وایبل $(\theta_0 = 25, \gamma_0 = 3)$ و $(\theta_1 = 0.6, \gamma_1 = 0.7)$ را نشان می‌دهد. نمودار نرخ شکست $r_1(t)$ با کاهش α و β برای $(\alpha, \beta < 1)$ و $(\alpha, \beta > 1)$ همانطور که در شکل‌های ۸-الف و ۸-ب نشان داده شده است، کاهش می‌یابد.

نمودار نرخ شکست $r_1(t)$ با افزایش α و β برای $\alpha, \beta < 1$ و $(\alpha, \beta > 1)$ همانطور که در شکل‌های ۹-الف و ۹-ب نشان داده شده است، افزایش می‌یابد.

نمودار wpp برای مدل اول به صورت S شکل است. جدول ۲ نحوه رفتار این نمودار به ازای پارامترهای مختلف توزیع بتا را نشان می‌دهد. به‌عنوان مثال شکل ۱۰ نمودار wpp با ثابت نگه داشتن β و افزایش α در حالت $\alpha, \beta < 1$ و افزایش α و β وایبل $(\theta_0 = 25, \gamma_0 = 3)$ و $(\theta_1 = 0.6, \gamma_1 = 0.7)$ را نشان می‌دهد.

$$\begin{aligned} & \ln \left[z_0 + z_2 - \ln \left((1-f) e^{z_2} + f e^{z_0} \right) \right] \\ &= \ln \left[z_0 + z_2 - z_2 - \ln \left((1-f) + f e^{-z_2} e^{z_0} \right) \right] \\ &= \ln \left[z_0 - \ln \left((1-f) + f e^{-z_2} e^{z_0} \right) \right] \end{aligned}$$

بنابراین مجانب راست نمودار wpp برابر خواهد بود با :

$$l_0 : y_2 = \ln(z_0) = \gamma_0 (x - \ln(\theta_0))$$

نمودار wpp برای مدل دوم به ازای پارامترهای مختلف توزیع بتا به صورت شکل ۴ بدست می‌آید. در این شکل پارامترهای توزیع بتا برابر با $\alpha = 2, \beta = 1$ و پارامترهای توزیع وایبل برابر با $\theta_0 = 25, \gamma_0 = 5$ و $\theta_2 = 10, \gamma_2 = 5$ در نظر گرفته شده‌اند. حالت ۲- در این حالت دو پارامتر توزیع وایبل متفاوت می‌باشند و $\theta_0 / \theta_2 \square 1$ است. بنابراین، برای t های کوچک و با توجه به اینکه $\gamma_0 < \gamma_2$ است، مجانب چپ نمودار wpp به صورت زیر بدست می‌آید.

به دلیل اینکه برای t های کوچک $R_h(t)$ سریعتر از $R_0(t)$ به سمت ۱ میل می‌کند، با توجه به رابطه (۵۰) داریم:

$$\begin{aligned} &= \ln \left(-\ln \left((1-f) e^{-z_0} + f \right) \right) \\ &= \ln \left(-\ln \left(e^{-z_0} \left((1-f) + f e^{z_0} \right) \right) \right) \\ &= \ln \left(z_0 - \ln \left((1-f) + f e^{z_0} \right) \right) \end{aligned} \tag{۵۳}$$

همچنین برای زمان‌های کوچک روابط زیر را داریم:

$$z_1 \square z_0, \quad e^{z_0} \approx 1 + z_0$$

باجایگذاری در رابطه (۵۲) داریم:

$$\begin{aligned} &= \ln \left(z_0 - \ln \left((1-f) + f (1 + z_0) \right) \right) \\ &= \ln \left(z_0 - \ln (1 + f z_0) \right) \\ &\text{با توجه به تقریب } \ln(1 + f z_0) \approx f z_0 \text{ داریم:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \ln(z_0 - f z_0) = \ln(z_0(1-f)) \\ l_1 : y_2 &= \gamma_0 [x - \ln(\theta_0)] + \ln(1-f) \end{aligned} \tag{۵۴}$$

در این حالت نیز مجانب راست بر اساس منطق استفاده شده برای حالت قبل برابر با رابطه زیر بدست می‌آید:

$$l_0 : y_2 = \ln(z_0) = \gamma_0 (x - \ln(\theta_0))$$

نمودار y_2 با کاهش α' و β' برای $(\alpha', \beta' < 1)$ و $(\alpha', \beta' > 1)$ همانطور که در شکل‌های ۱۹-الف و ۱۹-ب برای حالتی که $(\gamma_0 \neq \gamma_2)$ نشان داده شده است، در بازه $t \in [-4.6, -0.95]$ افزایش و در بازه $t \in [0.95, 4.6]$ کاهش می‌یابد.

نمودار y_2 با افزایش α' و β' برای $(\alpha', \beta' < 1)$ و $(\alpha', \beta' > 1)$ همانطور که در شکل‌های ۲۰-الف و ۲۰-ب نشان داده شده است، در بازه $t \in [-4.6, -0.95]$ کاهش و در بازه $t \in [0.95, 4.6]$ افزایش می‌یابد.

نمودار y_2 با کاهش α' و β' برای $(\alpha', \beta' < 1)$ و $(\alpha', \beta' > 1)$ همانطور که در شکل‌های ۲۱-الف و ۲۱-ب برای حالتی که $(\gamma_0 = \gamma_2)$ نشان داده شده است، در تمام بازه‌های زمانی کاهش می‌یابد.

نمودار y_2 با افزایش α' و β' برای $(\alpha', \beta' < 1)$ و $(\alpha', \beta' > 1)$ همانطور که در شکل‌های ۲۲-الف و ۲۲-ب برای حالتی که $(\gamma_0 = \gamma_2)$ نشان داده شده است، در تمام بازه‌های زمانی افزایش می‌یابد.

۳-۵ تخمین پارامترهای توزیع خطای کیفی

در این قسمت نحوه تشخیص وجود خطاهای کیفی و چگونگی برآورد آن‌ها در قالب یک مثال بیان می‌شود. اتصالات بدنه در یک محصول توسط پیچ خاصی صورت می‌گیرد. با توجه به افزایش شکست این پیچ در مراجعات گارانتی آزمون قابلیت اطمینانی بر روی این محصول انجام می‌گیرد تا دلیل بروز شکست‌ها مشخص شود. به همین منظور ۳۰ عدد از این محصول انتخاب و تحت آزمون قابلیت اطمینان قرار می‌گیرند. در این آزمون محصول مورد نظر به صورت پیوسته مورد استفاده قرار می‌گیرد تا زمانی که شکستی در آن اتفاق بیفتد. بر اساس مطالعات گذشته می‌دانیم که این پیچ‌ها ممکن است در اثر مونتاژ نامناسب یا عدم انطباق مواد به کار رفته در آن دچار شکست شوند. در همین راستا زمان‌های شکست این محصولات به صورت جدول ۵ بدست می‌آیند. بر اساس اطلاعات گذشته می‌دانیم که توزیع زمان شکست این پیچ تحت آزمون مور نظر وایبل با پارامترهای $(\theta_0 = 25, \gamma_0 = 3)$ می‌باشد. به منظور بررسی وجود خطاهای کیفی، نمودار احتمال وایبل داده‌ها را بر اساس احتمالات تجمعی تجربی رسم می‌کنیم. این نمودار در شکل ۲۳-الف نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود نمودار بدست آمده مشابه نمودار wpp مدل اول که در شکل ۲ رسم شد می‌باشد. بنابراین می‌توان حدس زد که این دسته از محصولات با خطای مونتاژ

نمودار wpp برای مدل اول با کاهش α و β در حالت $(\alpha, \beta < 1)$ و $(\alpha, \beta > 1)$ همانطور که در شکل‌های ۱۱-الف و ۱۱-ب نشان داده شده است، کاهش می‌یابد. نمودار wpp با افزایش α و β برای $(\alpha, \beta < 1)$ و $(\alpha, \beta > 1)$ همانطور که در شکل‌های ۱۲-الف و ۱۲-ب نشان داده شده است، افزایش می‌یابد.

۲-۵ مدل دوم

شکل ۱۳ نمودار قابلیت اطمینان مدل دوم به ازای پارامترهای مختلف توزیع بتا را نشان می‌دهد.

شکل نمودار نرخ شکست $r_2(t)$ به صورت roller coaster است. در حالتی که $\gamma_0 \approx \gamma_2$ نرخ مخاطره بشدت افزایشی است. با ارائه یک مثال عددی نمودار نرخ شکست $r_2(t)$ به ازای پارامترهای مختلف توزیع بتا برای مدل دوم در شکل ۱۴ نشان داده شده است. پارامترهای توزیع وایبل به این صورت در نظر گرفته شده است: $(\theta_0 = 25, \gamma_0 = 5)$ و $(\theta_1 = 0.6, \gamma_1 = 0.7)$ و $(\theta_2 = 10, \gamma_2 = 5)$.

جدول ۳ نحوه رفتار نمودار نرخ شکست $r_2(t)$ به ازای پارامترهای مختلف توزیع بتا را نشان می‌دهد. شکل ۱۵ نمودار نرخ شکست $r_2(t)$ در حالت ثابت نگه داشتن β' و افزایش α' به ازای $\alpha', \beta' < 1$ و به ازای پارامترهای توزیع وایبل $(\theta_0 = 25, \gamma_0 = 3)$ و $(\theta_2 = 10, \gamma_2 = 5)$ ، را نشان می‌دهد.

نمودار نرخ شکست $r_2(t)$ با کاهش α' و β' برای $(\alpha', \beta' < 1)$ و $(\alpha', \beta' > 1)$ همانطور که در شکل‌های ۱۶-الف و ۱۶-ب نشان داده شده است، کاهش می‌یابد.

نمودار نرخ شکست $r_2(t)$ با افزایش α' و β' برای $(\alpha', \beta' < 1)$ و $(\alpha', \beta' > 1)$ همانطور که در شکل‌های ۱۷-الف و ۱۷-ب نشان داده شده است، افزایش می‌یابد.

جدول ۴ نحوه رفتار نمودار wpp برای مدل دوم به ازای پارامترهای مختلف توزیع بتا در حالتی که $(\gamma_0 \neq \gamma_2)$ باشد را نشان می‌دهد. شکل ۱۸ نمودار wpp به ازای ثابت نگه داشتن β' و افزایش α' در حالت $\alpha', \beta' < 1$ به ازای پارامترهای توزیع وایبل $(\theta_0 = 25, \gamma_0 = 3)$ و $(\theta_2 = 10, \gamma_2 = 5)$ ، را نشان می‌دهد.

۶- نتیجه گیری

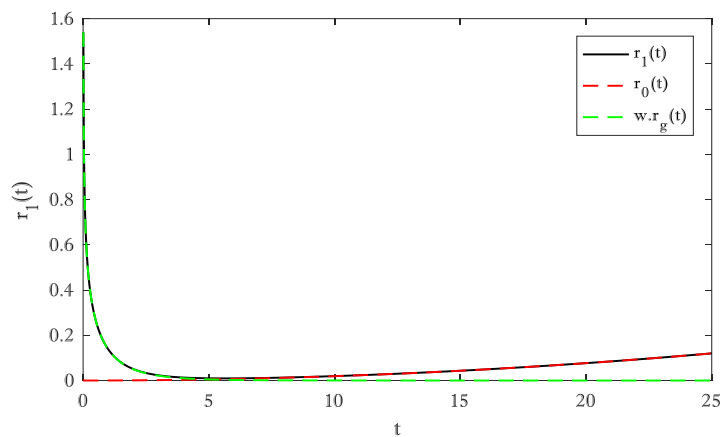
در این مقاله، به بررسی اثرات تغییرات کیفیت (خطاهای مونتاژ و عدم انطباق اجزاء) بر قابلیت اطمینان محصول و مدل سازی آنها از طریق دو مدل مختلف پرداختیم. در همین راستا فرض شد که زمان شکست محصولات از توزیع وایبل پیروی می کند. به همین منظور فرض شد که زمان شکست با خطاهای کیفی مختلف (خطاهای مونتاژ، عدم انطباق اجزاء) توزیع وایبل مختص به خود را دارند. همچنین فرض شد که درصد خطاهای کیفی از توزیع بتا پیروی می کنند. ویژگی های نمودارهای نرخ شکست و نمودار احتمال وایبل برای دو مدل ارائه شد. بر اساس نتایج این مقاله و داده های میدانی می توان به وجود یا عدم وجود هر یک از نوسانات کیفی ذکر شده پی برد. به همین منظور با رسم نمودار احتمال زمان های شکست و مقایسه این نمودار احتمال با نمودارهای احتمال بدست آمده برای خطاهای کیفی مختلف می توان حدس زد که محصولات بر اساس کدام خطای کیفی تولید شده اند. به همین ترتیب پس از برازش مدل مربوطه به داده های زمان شکست می توان پارامترهای توزیع بتای درصد خطاهای کیفی را محاسبه و بر اساس آن در رابطه با انجام اقدام اصلاحی تصمیم گرفت. در همین راستا مثال ها و تحلیل های مختلف مورد بررسی قرار گرفتند. در تحقیقات آتی می توان تأثیر سایر خطاهای کیفی و ترکیب آنها را بر مدل های زمان شکست مورد بررسی قرار داد. همچنین می توان روش هایی برای پایش درصد خطاهای کیفی بدست آمده ارائه داد.

تولید شده اند. از قبل می دانیم توزیع زمان شکست محصولاتی که با خطای مونتاژ تولید می شوند وایبل با پارامترهای $(\theta_1 = 0.6, \gamma_1 = 0.7)$ است. به همین منظور از روش حداکثر درستنمایی استفاده کرده و فقط پارامترهای توزیع درصد خطای مونتاژ را برآورد می کنیم. در اینجا به منظور سادگی فرض شده است که پارامترهای توزیع وایبل را می دانیم. با این حال می توان پارامترهای توزیع وایبل را نیز به همراه پارامترهای توزیع درصد خطاهای کیفی برآورد کرد. نتیجه حاصل از تخمین پارامترهای توزیع درصد خطای مونتاژ به صورت $\alpha = 201.44$ و $\beta = 635.97$ بدست می آید. نمودار احتمال به ازای پارامترهای برآورد شده در شکل (۲۳-ب) نشان داده شده است. مقدار $-2\log(\text{Likelihood})$ برای این برازش برابر با $202,9635$ محاسبه می شود. در همین راستا مدل ۲ را نیز بر داده ها برازش می کنیم که مقدار $-2\log(\text{Likelihood})$ برای این مدل برابر با $313,3824$ بدست می آید. همانطور که ملاحظه می شود این مقدار برای مدل اول کمتر است که حاکی از برازش بهتر این مدل بر داده ها دارد. مقدار P-value حاصل از برازش مدل ۱ بر داده ها با استفاده از آزمون مربع کای پیرسون برابر با $0,9238$ بدست می آید که مؤید برازش مناسب مدل ۱ بر داده ها است.

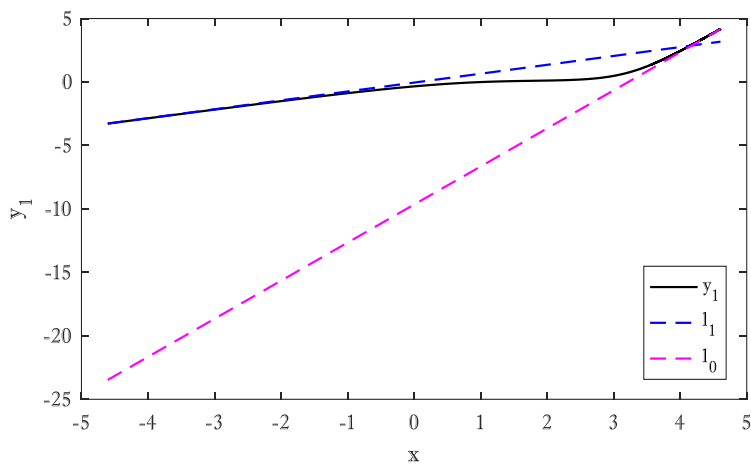
پس از بدست آوردن پارامترهای توزیع درصد خطای مونتاژ می توان بررسی نمود که آیا درصد خطای موجود مورد قبول است یا خیر. به عنوان نمونه در این مثال میانگین درصد خطای مونتاژ بر اساس رابطه میانگین توزیع بتا تقریباً برابر با ۲۴ درصد بدست می آید (یعنی حدود ۲۴ درصد از اتصالات با مونتاژ نامناسب صورت می گیرند) که مقدار زیادی است و فرایند تولید باید بازنگری و اصلاح شود. تابع قابلیت اطمینان برای این سطح از درصد خطای مونتاژ به صورت شکل ۲۴ بدست می آید. همانطور که مشاهده می شود قابلیت اطمینان در ابتدای عمر محصول با شیب تندی افت پیدا می کند.

مراجع

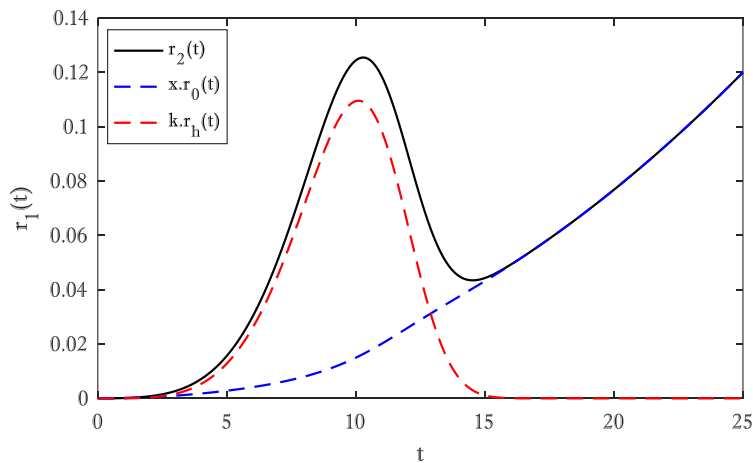
- [1]. Saleh, J.H. and K. Marais, Highlights from the early (and pre-) history of reliability engineering. *Reliability engineering & system safety*, 2006. 91(2): p. 249-256.
- [2]. Noorossana, R. and K. Sabri-Laghaie, System reliability with multiple failure modes and time scales. *Quality and Reliability Engineering International*, 2016. 32(3): p. 1109-1126.
- [3]. Elsayed, E., Invited paper Perspectives and challenges for research in quality and reliability engineering. *International Journal of Production Research*, 2000. 38(9): p. 1953-1976.
- [4]. Jiang, R., Three new life distribution models for modeling field failure data. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 2012. 41(21): p. 3974-3987.
- [5]. Denson, W., The history of reliability prediction. *IEEE Transactions on reliability*, 1998. 47(3): p. SP321-SP328.
- [6]. Garvin, D.A., *Managing quality: The strategic and competitive edge*. 1988: Simon and Schuster.
- [7]. Perry, R.L., *Acceptance Sampling in Quality Control*. 1984, Taylor & Francis Group.
- [8]. Juran, J.M. and F.M. Gryna, *Juran's Quality Control Handbook*, 4th Edition, pag. AII, 1988. 3.
- [9]. Del Castillo, E., *Statistical process adjustment for quality control*. Vol. 369. 2002: Wiley-Interscience.
- [10]. Jiang, R. and D. Murthy, Impact of quality variations on product reliability. *Reliability Engineering & System Safety*, 2009. 94(2): p. 490-496.
- [11]. Attardi, L., M. Guida, and G. Pulcini, A mixed-Weibull regression model for the analysis of automotive warranty data. *Reliability Engineering & System Safety*, 2005. 87(2): p. 26.
- [12]. Majeske, K.D., A mixture model for automobile warranty data. *Reliability Engineering & System Safety*, 2003. 81(1): p. 71-77.
- [13]. Djamaludin, I., D. Murthy, and R. Wilson, Quality control through lot sizing for items sold with warranty. *International Journal of Production Economics*, 1994. 33(1-3): p. 97-107.
- [14]. Lu, Y., et al., Reliability in a time-driven product development process. *Quality and Reliability Engineering International*, 1999. 15(6): p. 427-430.
- [15]. González-Benito, J. and B. Dale, Supplier quality and reliability assurance practices in the Spanish auto components industry: a study of implementation issues. *European Journal of Purchasing & Supply Management*, 2001. 7(3): p. 187-196.
- [16]. Roesch, W.J., Using a new bathtub curve to correlate quality and reliability. *Microelectronics Reliability*, 2012. 52(12): p. 2864-2869.
- [17]. Elsayed, E.A., *Reliability engineering*. Vol. 88. 2012: John Wiley & Sons.
- [18]. Chan, V. and W.Q. Meeker, A failure-time model for infant-mortality and wearout failure modes. *IEEE Transactions on Reliability*, 1999. 48(4): p. 377-387.
- [19]. Jiang, R. and D. Murthy, Modeling failure-data by mixture of 2 Weibull distributions: a graphical approach. *IEEE Transactions on Reliability*, 1995. 44(3): p. 477-488.
- [20]. Wadsworth, H.M. and H. Wadsworth, *Handbook of statistical methods for engineers and scientists*. 1989.
- [21]. Wong, K.L. and D.L. Lindstrom, Off the bathtub onto the roller-coaster curve (electronic equipment failure). in *Reliability and Maintainability Symposium*, 1988. Proceedings., Annual. 1988. IEEE.



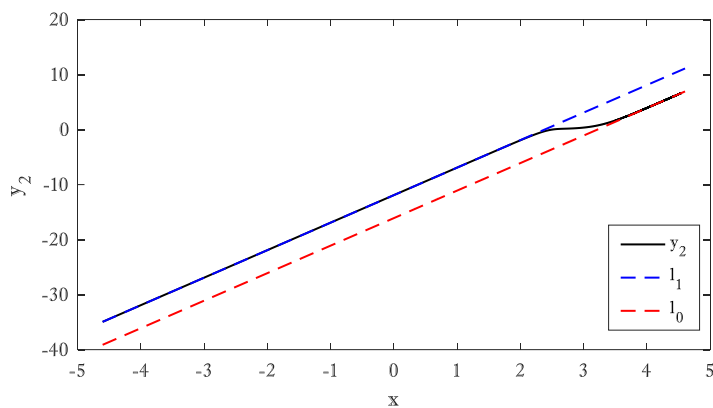
شکل ۱. نمودار تابع نرخ شکست $r_1(t)$



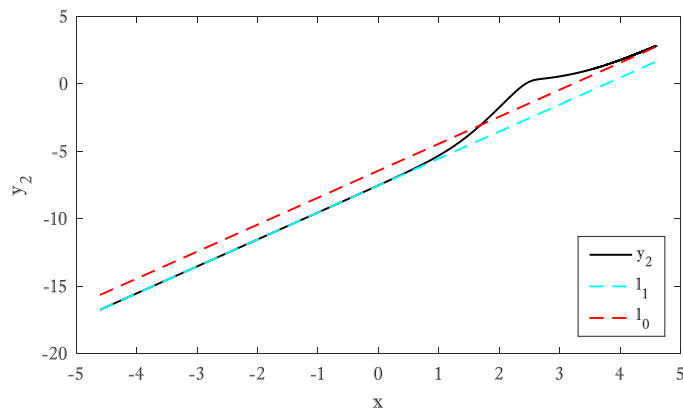
شکل ۲. نمودار wpp مدل اول



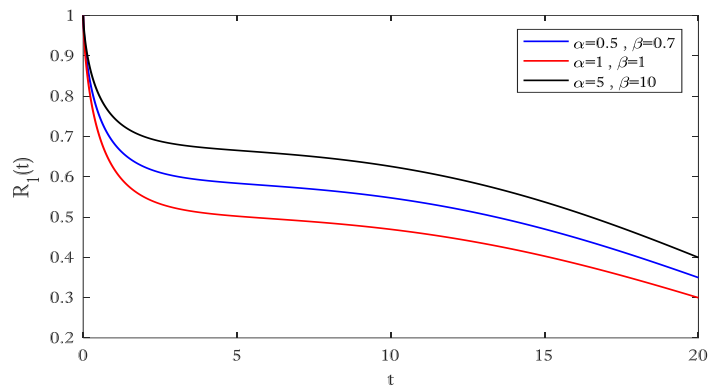
شکل ۳. نمودار تابع نرخ شکست $r_2(t)$



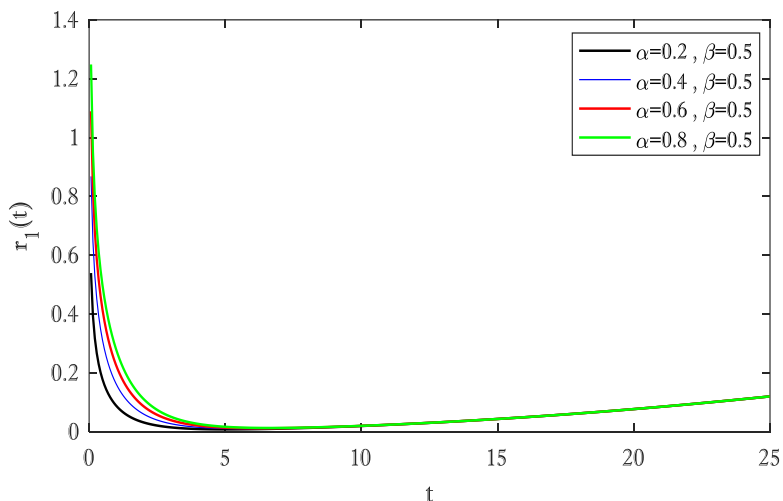
شکل ۴. نمودار wpp مدل دوم برای حالتی که $(\gamma_0 = \gamma_2)$



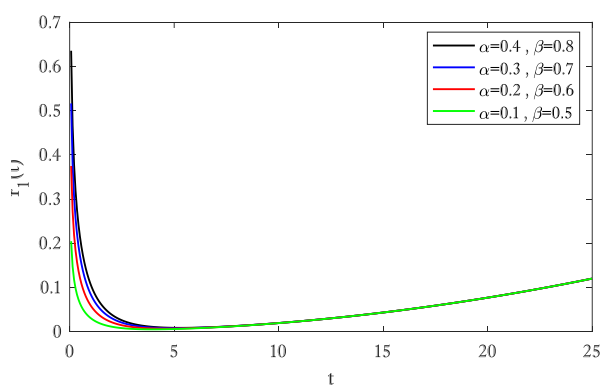
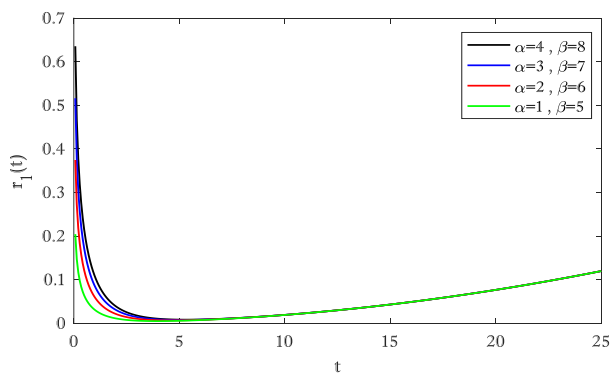
شکل ۵. نمودار wpp مدل دوم برای حالتی که $\theta_0 / \theta_2 \leq 1$



شکل ۶. نمودار تابع قابلیت اطمینان $R_1(t)$



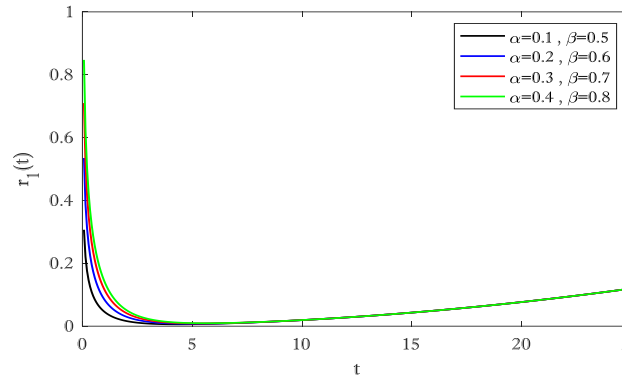
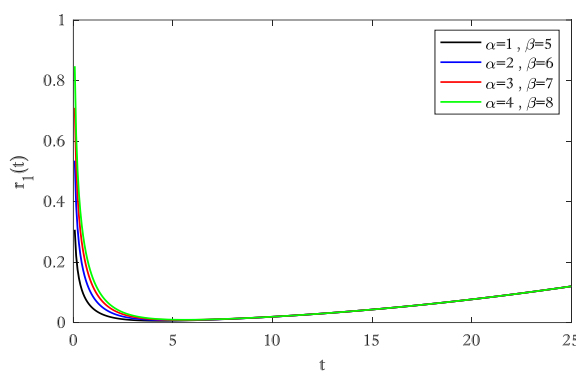
شکل ۷. نمودار تابع نرخ شکست $r_1(t)$ در حالت ثابت بودن β و افزایش α



(ب)

(الف)

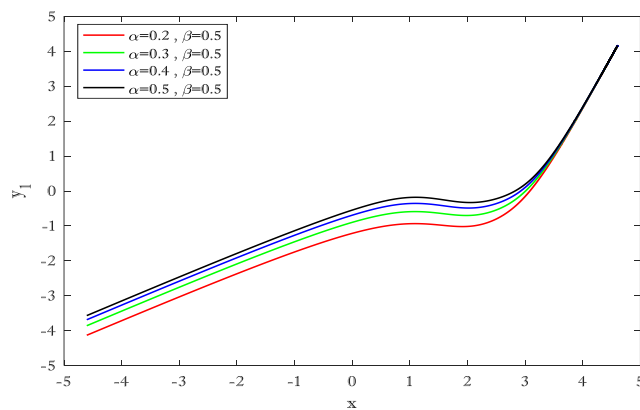
شکل ۸. نمودار $r_1(t)$ با کاهش α و β به ازای (الف) - $(\alpha, \beta < 1)$ و (ب) - $(\alpha, \beta > 1)$



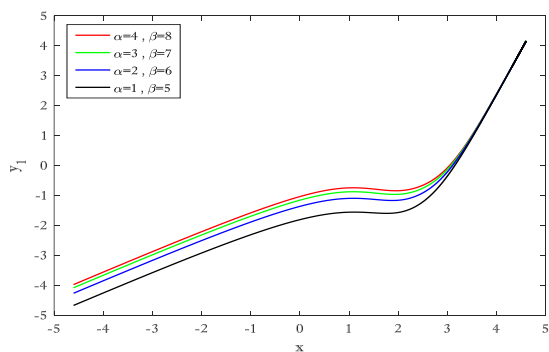
(ب)

(الف)

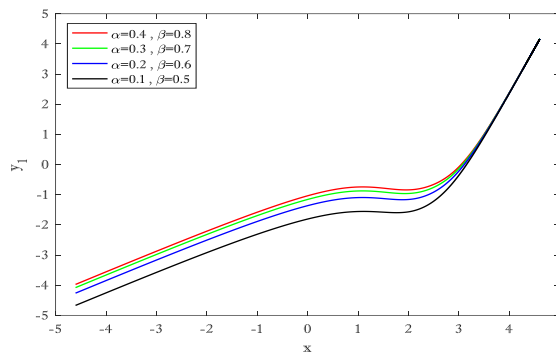
شکل ۹. نمودار $r_1(t)$ با افزایش α و β به ازای (الف) - $(\alpha, \beta < 1)$ و (ب) - $(\alpha, \beta > 1)$



شکل ۱۰. نمودار wpp در حالت ثابت بودن β و افزایش α

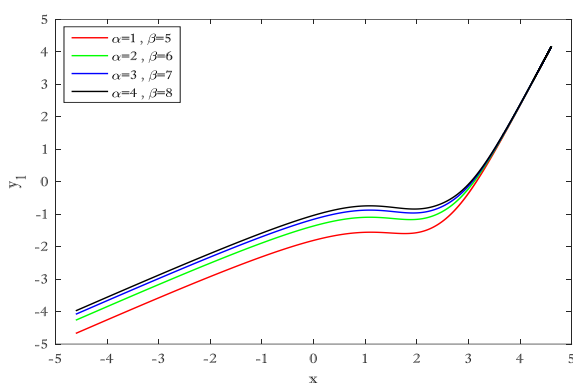


(ب)

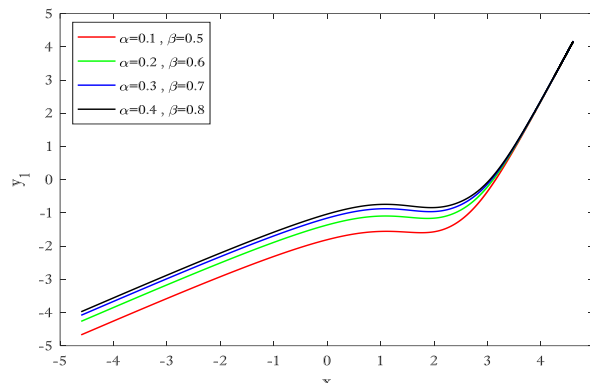


(الف)

شکل ۱۱. نمودار wpp با کاهش α و β به ازای (الف) $(\alpha, \beta < 1)$ و (ب) $(\alpha, \beta > 1)$

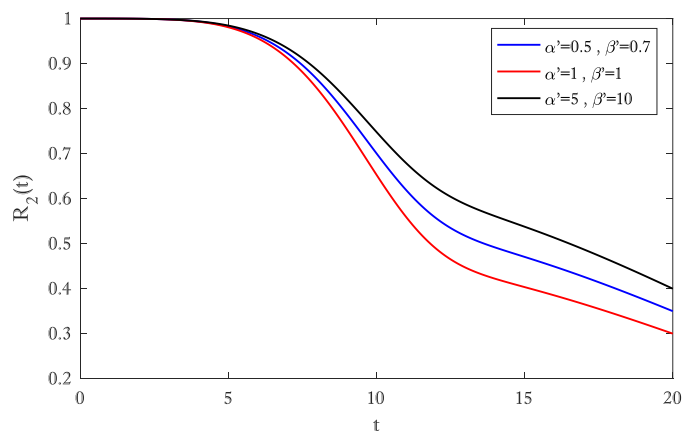


(ب)

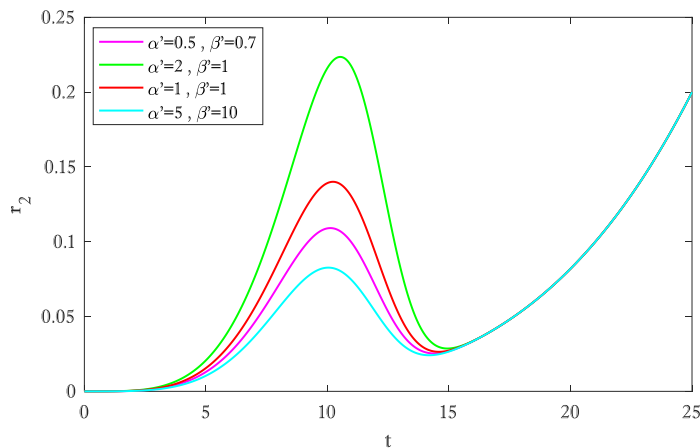


(الف)

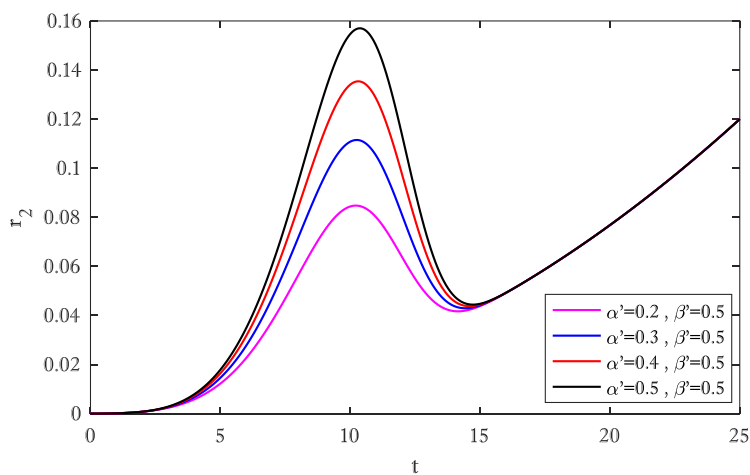
شکل ۱۲. نمودار wpp با افزایش α و β به ازای (الف) $(\alpha, \beta < 1)$ و (ب) $(\alpha, \beta > 1)$



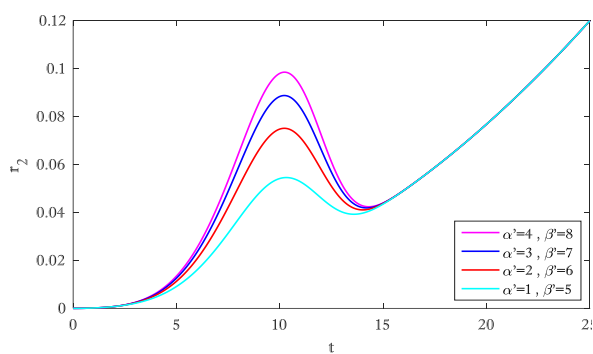
شکل ۱۳. نمودار تابع قابلیت اطمینان $R_2(t)$



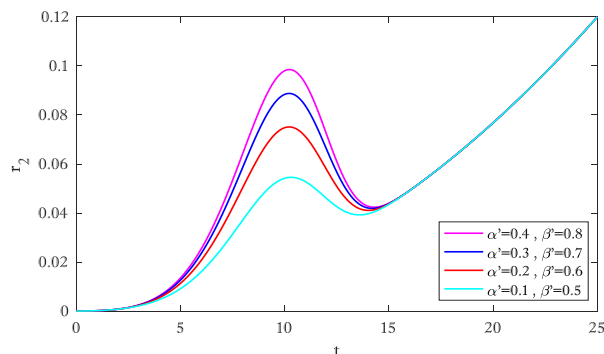
شکل ۱۴. نمودار تابع نرخ شکست $r_2(t)$ در حالت $\gamma_0 \approx \gamma_2$



شکل ۱۵. نمودار تابع نرخ شکست $r_2(t)$ در حالت ثابت بودن β' و افزایش α'

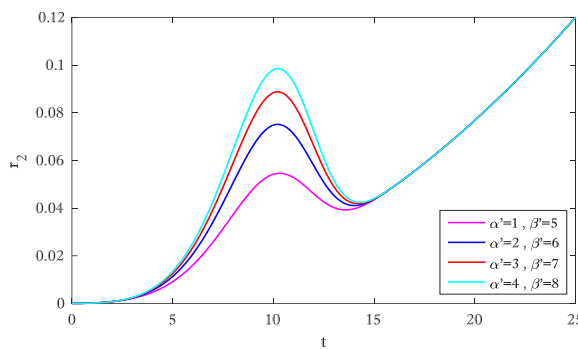


(ب)

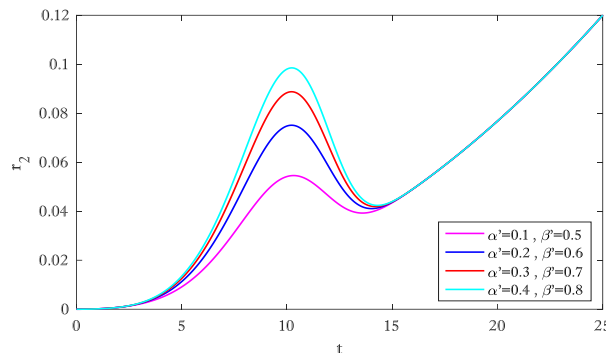


(الف)

شکل ۱۶. نمودار $r_2(t)$ با کاهش α' و β' به ازای (الف) - ($\alpha', \beta' < 1$) و (ب) - ($\alpha', \beta' > 1$)

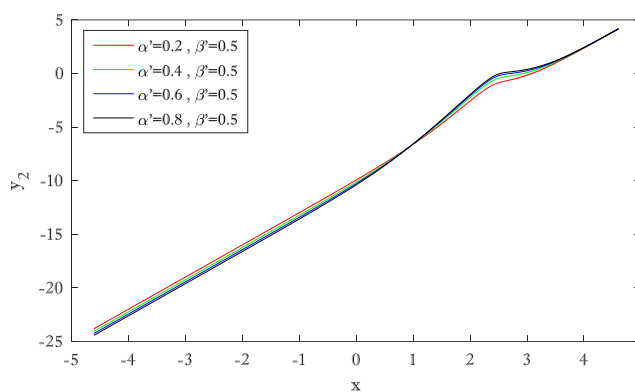


(ب)

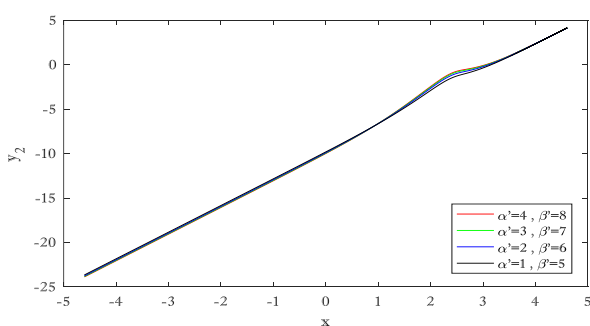


(الف)

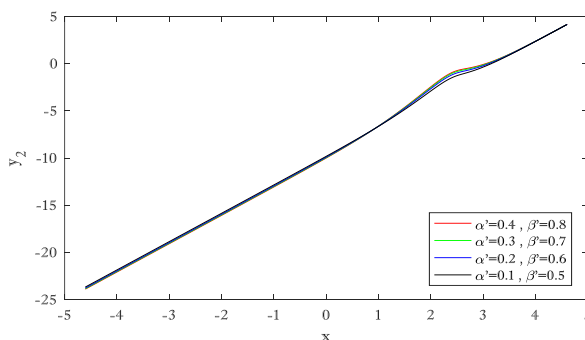
شکل ۱۷. نمودار $r_2(t)$ با افزایش α' و β' به ازای (الف) - $(\alpha', \beta' < 1)$ و (ب) - $(\alpha', \beta' > 1)$



شکل ۱۸. نمودار y_2 در حالت ثابت بودن β' و افزایش α' برای حالتی که $(\gamma_0 \neq \gamma_2)$

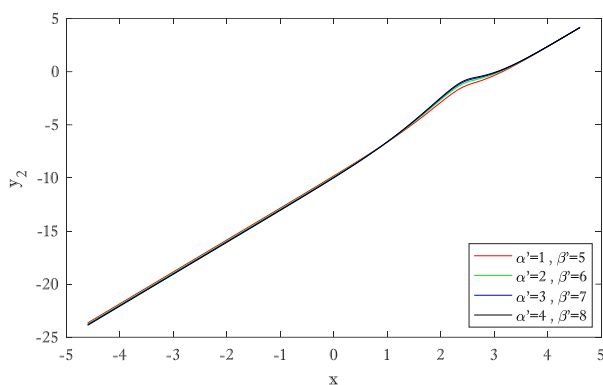


(ب)

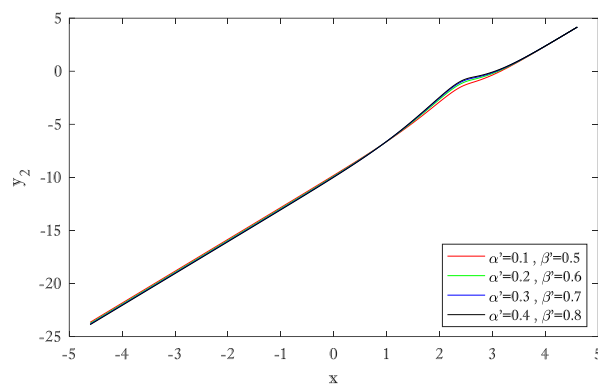


(الف)

شکل ۱۹. نمودار y_2 با کاهش α' و β' به ازای (الف) - $(\alpha', \beta' < 1)$ و (ب) - $(\alpha', \beta' > 1)$

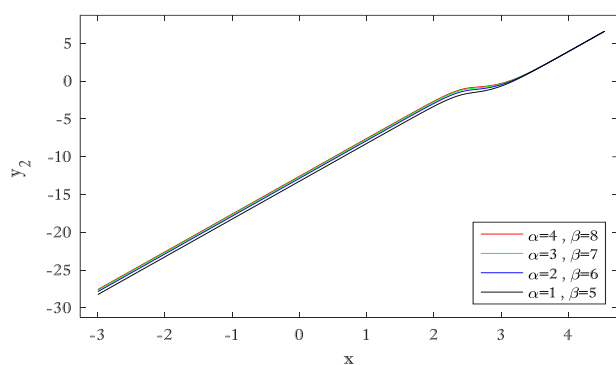


(ب)

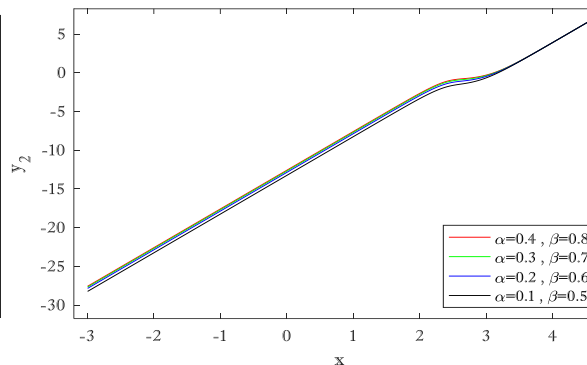


(الف)

شکل ۱۹. نمودار y_2 با افزایش α' و β' به ازای (الف) - ($\alpha', \beta' < 1$) و (ب) - ($\alpha', \beta' > 1$)

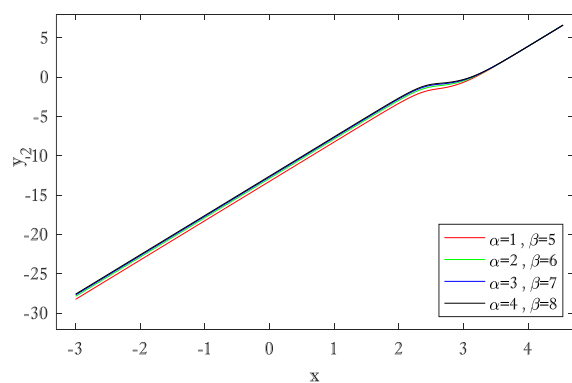


(ب)

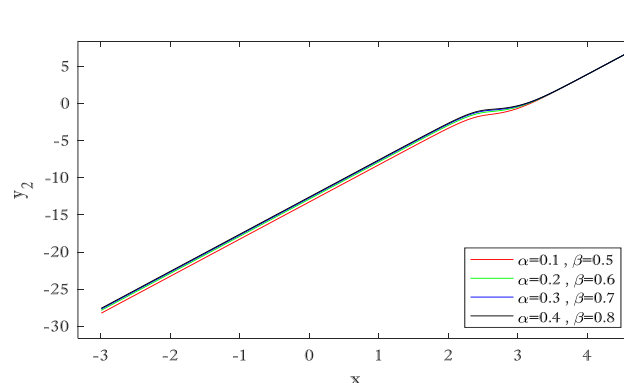


(الف)

شکل ۲۱. نمودار y_2 با کاهش α' و β' به ازای (الف) - ($\alpha', \beta' < 1$) و (ب) - ($\alpha', \beta' > 1$)

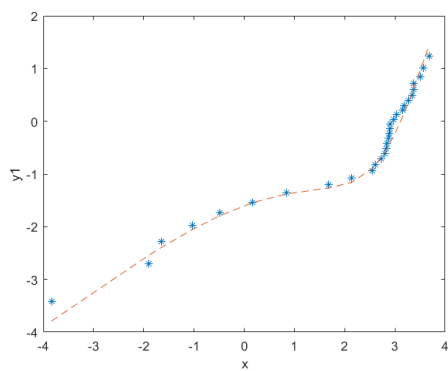


(ب)

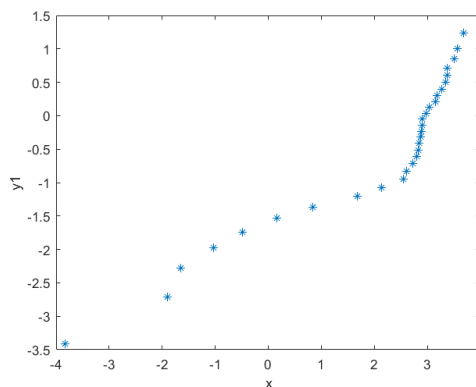


(الف)

شکل ۲۲. نمودار y_2 با افزایش α' و β' به ازای (الف) - ($\alpha', \beta' < 1$) و (ب) - ($\alpha', \beta' > 1$)

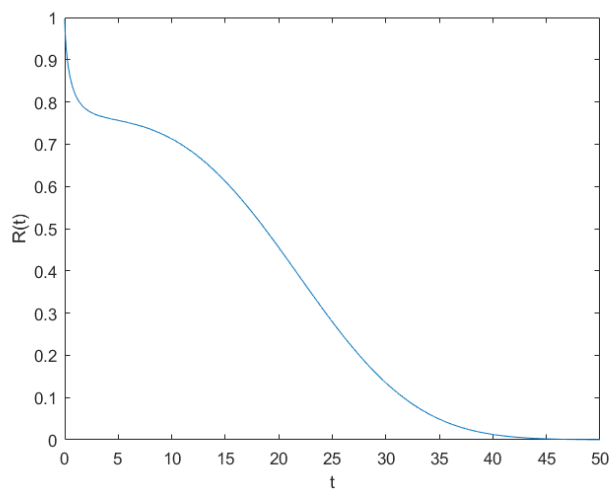


(ب)



(الف)

شکل ۲۳. نمودار y_1 به ازای (الف)-احتمالات تجربی و (ب)- پارامترهای برازش شده



شکل ۲۴. نمودار قابلیت اطمینان با تأثیر خطای مونتاژ

جدول ۱. تحلیل نمودار $r_1(t)$ به ازای پارامترهای مختلف توزیع بتا

α	β	$\alpha, \beta < 1$	$\alpha, \beta > 1$	$r_1(t)$
ثابت	افزایش	*		افزایش
ثابت	کاهش	*		کاهش
افزایش	ثابت	*		افزایش
کاهش	ثابت	*		کاهش
ثابت	افزایش		*	افزایش
ثابت	کاهش		*	کاهش
افزایش	ثابت		*	افزایش
کاهش	ثابت		*	کاهش

جدول ۲. تحلیل نمودار wpp به ازای پارامترهای مختلف توزیع بتا

α	β	$\alpha, \beta < 1$	$\alpha, \beta > 1$	y_1
ثابت	افزایش	*		کاهش
ثابت	کاهش	*		افزایش
افزایش	ثابت	*		افزایش
کاهش	ثابت	*		کاهش
ثابت	افزایش		*	کاهش
ثابت	کاهش		*	افزایش
افزایش	ثابت		*	افزایش
کاهش	ثابت		*	کاهش

جدول ۳. تحلیل نمودار $r_2(t)$ به ازای پارامترهای مختلف توزیع بتا

α'	β'	$\alpha', \beta' < 1$	$\alpha', \beta' > 1$	$r_2(t)$
ثابت	افزایش	*		افزایش
ثابت	کاهش	*		کاهش
افزایش	ثابت	*		کاهش
کاهش	ثابت	*		افزایش
ثابت	افزایش		*	افزایش
ثابت	کاهش		*	افزایش
افزایش	ثابت		*	کاهش
کاهش	ثابت		*	افزایش

جدول ۴. تحلیل نمودار y_2 به ازای پارامترهای مختلف توزیع بتا برای حالتی که $(\gamma_0 \neq \gamma_2)$

α'	β'	$\alpha', \beta' < 1$	$\alpha', \beta' > 1$	y_2	
				$t = [-4.6 - 0.95]$	$t = [0.95 - 4.6]$
ثابت	افزایش	*		افزایش	کاهش
ثابت	کاهش	*		کاهش	افزایش
افزایش	ثابت	*		کاهش	افزایش
کاهش	ثابت	*		افزایش	کاهش
ثابت	افزایش		*	افزایش	کاهش
ثابت	کاهش		*	کاهش	افزایش
افزایش	ثابت		*	کاهش	افزایش
کاهش	ثابت		*	افزایش	کاهش

جدول ۵. زمان‌های شکست بدست آمده از آزمون قابلیت اطمینان

ردیف	زمان شکست	ردیف	زمان شکست	ردیف	زمان شکست
۱	۱۸,۱۷	۱۱	۱۷,۲۳	۲۱	۱۶,۴۲
۲	۲۹	۱۲	۲۰,۶۸	۲۲	۸,۴۶
۳	۰,۳۵	۱۳	۱۷,۷۳	۲۳	۱۹,۷۱
۴	۱,۱۸	۱۴	۲۴,۰۲	۲۴	۱۵,۳۷
۵	۵,۳۹	۱۵	۲۳,۲۷	۲۵	۳۵,۴۳
۶	۱۶,۹۸	۱۶	۱۳,۶۶	۲۶	۳۳,۲۳
۷	۲۹,۲۳	۱۷	۱۸,۱۵	۲۷	۰,۱۵
۸	۲۸,۲۶	۱۸	۰,۰۲۲	۲۸	۲۶,۲۴
۹	۰,۱۹	۱۹	۳۹,۵۴	۲۹	۱۲,۷
۱۰	۱۷,۲۳	۲۰	۲,۳	۳۰	۱۷,۹