

# طراحی آماری اقتصادی بهینه‌ی نمودارهای کنترلی وصفی سازوار کامل برای پایش

## عدم انطباق‌ها

مهدی کاتبی

کارشناس ارشد، دانشگاه علامه طباطبایی، گروه آمار، mehdi.katebi296@gmail.com

محمد بامنی مقدم

(نویسنده مسئول) استاد تمام، دانشگاه علامه طباطبایی، گروه آمار\*

**چکیده:** نمودار کنترلی C به طور گسترده برای پایش فرایندهایی که در آن‌ها کیفیت هر قلم تولیدی توسط تعداد عدم انطباق‌های موجود در آن مشخص می‌شود به کار می‌رود. تحقیق‌های اخیر مزایای به کارگیری طرح‌های سازوار به جای طرح‌های ایستا در هنگام پایش چنین فرایندهایی را تایید کرده است. در این مقاله، ما یک طرح سازوار کامل برای نمودارهای کنترلی C ارائه می‌دهیم که در آن همه‌ی پارامترهای طراحی (اندازه نمونه، بازه نمونه‌گیری، حد کنترلی) بر مبنای جدیدترین اطلاعات حاصل از فرایند بین دو مقدار تغییر می‌کنند. طرح پیشنهادی با استفاده از رویکرد آماری اقتصادی مدل‌بندی می‌گردد. مدل هزینه با به کارگیری رویکرد زنجیر مارکوف پایه‌ریزی می‌شود. ما با استفاده از مثال‌های عددی عملکرد مدل‌های پیشنهادی را مورد بررسی قرار داده و کارایی آن‌ها را با طرح‌های دیگر مقایسه می‌کنیم. همچنین با استفاده از روش‌های طراحی آزمایش‌ها و تحلیل رگرسیونی یک تحلیل حساسیت نیز به منظور بررسی اثرات پارامترهای مدل بر روی جواب‌های بهینه‌ی طراحی آماری اقتصادی انجام می‌شود.

**کلمات کلیدی:** نمودارهای کنترلی سازوار، نمودار کنترلی FA c، زنجیر مارکوف، طراحی آماری اقتصادی

### ۱- مقدمه

طرح نمونه‌گیری با نرخ ثابت (FRS) در هنگام نمونه‌گیری از فرایند تحت عنوان نمودارهای کنترلی ایستا شناخته می‌شوند. طرح FRS نمونه‌هایی با اندازه ثابت ( $n_0$ ) را در بازه‌های زمانی ثابت ( $h_0$ ) از فرایند می‌گیرد. نمودارهای کنترلی ایستا تغییرات بزرگ در فرایند را به خوبی آشکار می‌کنند اما نسبت به کشف تغییرات کوچک تا متوسط کارایی مطلوبی ندارند. یک راه حل مؤثر برای برطرف کردن این ضعف استفاده از نمودارهای کنترلی سازوار است که در آن پارامترهای طراحی مجاز هستند تا بین دو مقدار یا بیشتر تغییر کنند. یک نمودار کنترلی سازوار نامیده می‌شود اگر حد اقل یکی از پارامترهای طراحی آن یعنی اندازه‌ی نمونه در هر بار نمونه‌گیری، فاصله زمانی بین نمونه‌ها و ضریب حدود کنترلی در طول زمان متغیر باشد. در نمودارهای سازوار حدود هشدار بر روی نمودار کنترلی رسم شده و آن را به چندین ناحیه تقسیم می‌کند. در این نمودارها تعیین پارامترهای مورد نظر در نمونه بعدی، به موقعیت آماره محاسبه شده بر مبنای

امروزه این امکان در اختیار مصرف‌کنندگان قرار گرفته است تا بتوانند محصولات مورد نیاز خود را از میان برندهای متنوعی که توسط شرکت‌های مختلف در سراسر جهان ارائه می‌شوند انتخاب نمایند. این امر موجب شکل‌گیری رقابتی شدید بین این شرکت‌ها شده است. بنابراین، یک شرکت به منظور جذب مشتریان بیشتر و در نتیجه‌ی آن رشد و توسعه باید رضایت مشتری را به عنوان یکی از اهداف اصلی خود مد نظر قرار داده و محصولات با کیفیت عالی را تولید نماید. دستیابی به محصولات با کیفیت عالی نیازمند این است که فرایند تولیدی به طور دقیق پایش شده تا در صورت بروز هر گونه انحراف بتوان آن را به سرعت شناسایی و اصلاح نمود. نمودارهای کنترلی که یکی از رایج‌ترین ابزارهای مورد استفاده در کنترل آماری فرایند (SPC) هستند برای این منظور طراحی شده‌اند. نمودارهای کنترلی سنتی به دلیل استفاده

\* (Corresponding author) bamenimoghadam@atu.ac.ir

دانکن [۲۱] طراحی اقتصادی (ED) نمودارهای کنترلی را معرفی نمود. رویه معمول برای طراحی اقتصادی نمودارهای کنترلی، تعیین مدلی برای فرایند تولید و پارامترهای هزینه مربوط و سپس برآورد پارامترهای طراحی به گونه‌ای است که متوسط هزینه در واحد زمان مینیمم شود. پس از آن، تلاش‌های قابل توجهی برای طراحی اقتصادی نمودارهای کنترلی صورت گرفت. گوئل و همکاران [۲۲]، ناپنبرگر و گراندیچ [۲۳] و گیبرا [۲۴] مدل اقتصادی دانکن را برای نمودارهای کنترلی  $\bar{X}$  توسعه دادند. مونتگومری [۲۵] یک بررسی جامع از ادبیات مربوط به طراحی اقتصادی نمودارهای کنترلی مختلف ارائه می‌دهد. لورنزن و ونس [۲۶] رویکردی یکپارچه برای طراحی اقتصادی نمودارهای کنترلی ارائه داده و مدلی کلی را توسعه دادند که می‌توان آن را برای اکثر نمودارهای کنترلی اعمال نمود. کاستا و رحیم [۲۷] مدلی اقتصادی را بر مبنای رویکرد زنجیر مارکوف ارائه دادند که برای طراحی اقتصادی نمودارهای کنترلی سازوار مناسب بوده و اعمال آن ساده است. در مدل آن‌ها، فرایند تولید به هنگام جستجوی انحراف با دلیل و تعمیر فرایند متوقف می‌شود. طرح اقتصادی اگرچه هزینه اجرای نمودار کنترلی را مینیمم می‌کند اما از خواص آماری آن غافل می‌ماند. سانیکا [۲۸] محدودیت‌هایی آماری که بر روی خطاهای نوع اول و نوع دوم تعریف شده بودند را به مدل اقتصادی دانکن [۲۱] اضافه کرد تا خواص آماری آن را بهبود بخشد. کار او پایه و اساس رویکردی جدید در طراحی نمودارهای کنترلی تحت عنوان طراحی آماری اقتصادی را تشکیل داد. پس از سانیکا [۲۸] کارهای زیادی در زمینه طراحی آماری و اقتصادی نمودارهای کنترلی انجام گرفته‌اند که از آن جمله می‌توان به مک‌ویلیامز [۲۹]، مونتگومری و همکاران [۳۰]، مولنایو و همکاران [۳۱]، حیدری و همکاران [۳۲]، رفیعی و همکاران [۳۳] و کاتبی و همکاران [۳۴] اشاره کرد.

وضعیت‌های بسیار زیادی وجود دارند که در آن‌ها مشخصه‌های کیفیتی را نمی‌توان به سادگی اندازه‌گیری و در قالب عدد گزارش کرد. یک راهکار مناسب برای پایش فرایندها در چنین وضعیت‌هایی استفاده از نمودارهای کنترلی وصفی می‌باشد. نمودار کنترلی برای تعداد اقلام نامنطبق ( $np$ ) و نمودار کنترلی برای تعداد عدم انطباق‌ها ( $c$ ) مهم‌ترین نمودارهای کنترلی وصفی می‌باشند. نمودار کنترلی  $np$  بر مبنای تعداد اقلام نامنطبق شمارش شده از نمونه‌های گرفته شده در طی زمان از فرایند طراحی می‌گردد. این نوع نمودار تعداد اقلام نامنطبقی که در مدت عملکرد فرایند تولید می‌شوند را کنترل می‌کند. در بعضی مواقع، به جای استفاده از نمودارهای کنترلی برای تعداد اقلام نامنطبق ترجیح داده می‌شود که از نمودارهای کنترلی برای تعداد

نمونه کنونی بر روی نمودار کنترلی وابسته است. نمودارهای سازوار مختلف را می‌توان با تغییر دادن هر کدام از پارامترهای طراحی به دست آورد که نمودار با اندازه نمونه متغیر (VSS)، نمودار با فواصل نمونه‌گیری متغیر (VSI) و نمودار با اندازه نمونه و فواصل نمونه‌گیری متغیر (VSSI) از جمله مهم‌ترین آن‌ها به شمار می‌روند. در طرح‌های VSI و VSS برای دست‌یابی به عملکرد بهتر نمودارهای کنترلی به ترتیب اندازه نمونه و فاصله نمونه‌گیری تغییر می‌کنند. رینولدز و همکاران [۱]، رینولدز [۲] و [۳]، رینولدز و آرنولد [۴]، رانگر و مونتگومری [۵]، دائودین [۶]، پرابهو و همکاران [۷]، کاستا [۸] و زیمر و همکاران [۹] نمودارهای کنترلی VSI و VSS را مطالعه کرده‌اند. طرح VSSI هر دوی اندازه نمونه و فاصله نمونه‌گیری را تغییر می‌دهد تا عملکرد بهتری را در مقایسه با هر یک از طرح‌های VSI و VSS حاصل نماید. طراحی نمودارهای کنترلی با استفاده از طرح VSSI توسط پرابهو و همکاران [۱۰]، کاستا [۱۱]، رینولدز و آرنولد [۱۲]، وو و همکاران [۱۳] و ماهادیک [۱۴] و [۱۵] مورد مطالعه قرار گرفته است. کاستا [۱۶] طرح سازوار جدیدی تحت عنوان طرح سازوار کامل (FA) را معرفی نمود و نشان داد که در مقایسه با طرح‌های سازوار اشاره شده در بالا از لحاظ کشف تغییرات در میانگین فرایند عملکرد بهتری دارد. یک رویکرد سازوار کامل همه پارامترهای طراحی را همزمان تغییر می‌دهد تا بهترین کارایی را برای کشف تغییرات در فرایند حاصل نماید. نمودارهای کنترلی که با استفاده از این رویکرد طراحی می‌شوند را نمودارهای کنترلی سازوار کامل (FA) می‌نامند. دی ماگالهایس و همکاران [۱۷]، چن [۱۸]، لین [۱۹] و فراز و همکاران [۲۰] نمودارهای کنترلی FA را مطالعه کرده‌اند.

هنگام طراحی و استفاده از نمودارهای کنترلی باید درباره مقادیر پارامترهای طراحی تصمیم‌گیری نمود. تعیین این پارامترها برای طراحی یک نمودار کنترلی از اهمیت بسیار ویژه‌ای برخوردار است. این کار از طریق سه نوع رویکرد تحت عناوین طراحی آماری (SD) طراحی اقتصادی (ED) و طراحی آماری-اقتصادی (ESD) انجام می‌پذیرد. در رویکرد آماری، نمودارهای کنترلی صرفاً برای دست‌یابی به خواص آماری مطلوب و بر اساس معیارهای آماری طراحی می‌شوند. بر مبنای این روش، پارامترهای طراحی به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که توان آزمون برای کشف تغییری خاص در مشخصه‌ی کیفیت و احتمال خطای نوع اول، برابر با مقادیر معین باشند. طراحی‌های آماری هر چند که نمودارهایی با توان بالا و خطای نوع اول پایین برای کشف تغییر خاص در فرایند، تولید می‌کنند، اما به دلیل آن‌ها که هزینه اجرای آن‌ها بالا است از دیدگاه اقتصادی قابل توجیه نیستند.

نمونه‌های تصادفی با اندازه ثابت از فرایند گرفته شده و تعداد عدم انطباق‌های موجود در هر نمونه شمارش می‌گردد. معمولاً فرض می‌شود که عدم انطباق‌ها بر اساس یک توزیع پواسن با میانگین  $c$  رخ می‌دهند. فرض کنید که  $x$  نشان دهنده‌ی تعداد عدم انطباق‌های مشاهده شده در نمونه‌ای با اندازه  $n$  باشد. در این صورت،  $x$  از توزیع پواسن با میانگین  $nc$  پیروی می‌کند. تابع‌های احتمال و تجمعی این توزیع به صورت زیر قابل محاسبه هستند:

$$PF(i, n, c) = \frac{e^{-nc}(nc)^i}{i!} \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$CF(L, n, c) = \sum_{j=0}^{[L]} \frac{e^{-nc}(nc)^j}{j!}$$

که  $[L]$  جزء صحیح  $L$  را نشان می‌دهد. فرض کنید هنگامی که فرایند در حالت تحت کنترل عمل می‌کند، میانگین تعداد عدم انطباق‌ها در یک نمونه برابر  $c_0$  باشد. بنابراین، حدود کنترلی بالا و پایین برای نمودار کنترلی  $c$  FRS به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$UCL = c_0 + k\sqrt{c_0},$$

$$LCL = c_0 - k\sqrt{c_0}$$

که  $k$  نشان دهنده ضریب حدود کنترلی است. اگر حد کنترلی پایین منفی شود، آنگاه آن به طور خودکار صفر لحاظ شده و هیچ نقطه‌ای نمی‌تواند در زیر آن قرار گیرد. یک نقطه بالای حد کنترلی بالا نشان دهنده‌ی یک تنزل در کیفیت فرایند می‌باشد. از آنجا که هدف اصلی شناسایی انحراف‌هایی است که می‌توانند میانگین تعداد آیتم‌های نامنطبق تولید شده در طی عملکرد فرایند را افزایش دهند، از این رو ما در این مقاله نمودارهای کنترلی  $c$  فقط با حد کنترلی بالا را مدنظر قرار می‌دهیم. وقتی که انحرافی با دلیل رخ می‌دهد، باعث تغییر میانگین عدم انطباق‌ها از سطح  $c_0$  به سطح بالاتر  $c_1$  ( $c_1 > c_0$ ) می‌شود. نمودار کنترلی  $c$  FRS تغییر را هنگامی کشف می‌کند که داشته باشیم  $x > UCL$

نمودارهای کنترلی سنتی پارامترهای طراحی ثابت  $(n_0, h_0, k_0)$  را برای پایش فرایند به کار می‌برند. نمودار کنترلی  $FA$  به عنوان یک اصلاح از نمودارهای سنتی پارامترهای طراحی را تغییر می‌دهد تا عملکرد نمودار کنترلی را بهبود بخشد. برای یک نمودار کنترلی  $FA$   $c$ ، دو مجموعه از پارامترها را به کار می‌بریم:

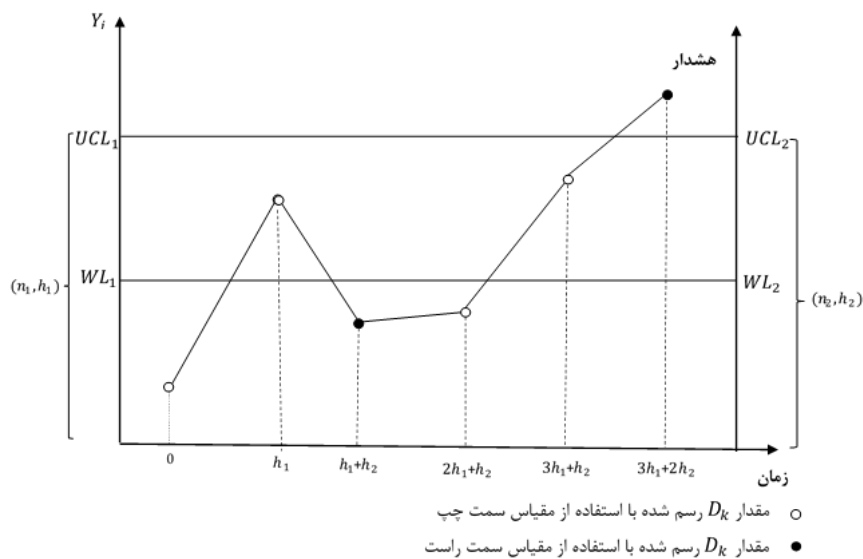
$$S_i = \{n_i, h_i, WL_i, UCL_i\} \quad i = 1, 2,$$

عدم انطباق‌ها استفاده شود. برای استفاده از نمودار کنترلی  $c$ ، پس از گرفتن نمونه‌هایی با اندازه‌ی معین از فرایند در طی زمان، تعداد عدم انطباق‌های محصولات هر نمونه مشخص شده و سپس نمودار کنترلی بر مبنای آن‌ها طراحی می‌شود. نمودار کنترلی  $c$  از طریق پایش و کنترل عدم انطباق‌های محصولات کیفیت خروجی فرایندهای تولیدی را بهبود می‌بخشد. در حالی که مقاله‌های زیادی وجود دارند که نمودارهای کنترلی سازوار را برای مشخصه‌های متغیر توسعه می‌دهند، توسعه نمودارهای کنترلی سازوار برای مشخصه‌های وصفی را به ندرت می‌توان در ادبیات مربوط یافت. از جمله کارهایی که طراحی نمودارهای کنترلی سازوار برای مشخصه‌های وصفی را مورد توجه قرار داده‌اند می‌توان به رندتل [۳۵]، کالابریس [۳۶]، ووگان [۳۷]، پرتنوس و آنجلوس [۳۸]، اپرچت و کاستا [۳۹]، لو و وو [۴۰]، وو و لو [۴۱]، اپرچت و همکاران [۴۲] و [۴۳] اشاره کرد. همچنین برخی کارها طراحی اقتصادی و آماری اقتصادی نمودارهای کنترلی برای مشخصه‌های وصفی را مطالعه کرده‌اند، برای مثال می‌توان از چیو [۴۴]، دانکن [۴۵]، سانیکا و همکاران [۴۶]، کولی و لیمام [۴۷] و کاتبی و همکاران [۴۸] نام برد.

این مقاله طراحی آماری اقتصادی بهینه برای نمودارهای کنترلی  $FA$   $c$  را ارائه می‌دهد. هدف اصلی فراهم کردن روش‌هایی برای طراحی بهینه نمودارهای کنترلی  $FA$   $c$  به گونه‌ای است که متصدیان کیفیت بتوانند آن‌ها را به راحتی و با توجه به اهداف آماری و اقتصادی خود مورد استفاده قرار دهند. مقاله به صورت زیر سازماندهی می‌گردد. بخش ۲ به تشریح نمودار کنترلی  $FA$   $c$  می‌پردازد. در بخش ۳، ما مدل هزینه کاستا و رحیم [۲۷] را به منظور ساخت مدل برای فرایندهای کنترل شده توسط نمودارهای  $FA$   $c$  تعمیم داده و سپس آن را برای دستیابی به رویه بهینه سازی برای طراحی آماری اقتصادی به کار می‌بریم. در بخش ۴، ما با استفاده از مثال‌های عددی عملکرد مدل پیشنهادی را ارزیابی نموده و همچنین عملکرد آن را با نمودارهای FRS، VSS، VSI و VSSI مقایسه می‌کنیم. یک تحلیل حساسیت بر اساس روش‌های طراحی آزمایش‌ها و تحلیل رگرسیونی نیز در بخش ۵ انجام می‌شود. در نهایت، در بخش ۶ نتیجه‌گیری‌ها ارائه می‌شوند.

## ۲- تشریح نمودارهای کنترلی $FA$ $c$

یک فرایند تولیدی را در نظر بگیرید که در آن کیفیت محصولات خروجی توسط نمودارهای کنترلی وصفی پایش می‌شوند.



شکل ۱. یک طرح FA

شکل ۱ عملکرد یک نمودار کنترلی FA c را به تصویر می‌کشد.

که

$$WL_i = n_i c_0 + w_i \sqrt{n_i c_0},$$

$$UCL_i = n_i c_0 + k_i \sqrt{n_i c_0}$$

### ۳- طراحی آماری اقتصادی نمودارهای کنترلی FA c

طراحی اقتصادی نمودارهای کنترلی تعیین بهینه‌ی پارامترهای طراحی از طریق کمیینه‌سازی یک تابع هزینه مناسب را در بر می‌گیرد. به منظور بهبود خواص آماری نمودارهای کنترلی، قیدهای آماری به طرح اقتصادی اضافه شده و آن را به یک طرح آماری اقتصادی مبدل می‌کنند. در این مقاله، ما مدل هزینه ارائه شده توسط کاستا و رحیم [۲۷] را به کار می‌بریم تا مدل آماری اقتصادی برای نمودار کنترلی FA c را پایه ریزی نماییم. به منظور ساده‌سازی تجزیه و تحلیل‌های ریاضی بر روی هزینه، سه فرض مهم زیر درباره رفتار فرایند را در نظر می‌گیریم:

۱. فرایند با حالت تحت کنترل ( $c = c_0$ ) آغاز می‌گردد، اما پس از مدت زمان تصادفی، یک انحراف بادلیل حالت فرایند را از تحت کنترل به خارج از کنترل ( $c = c_1$ ) تغییر می‌دهد.

۲. فرض می‌شود که انحراف بادلیل بر اساس یک فرایند پواسن با میانگین وقوع  $\lambda$  در هر ساعت رخ می‌دهد. بنابراین، مدت زمان بین وقوع انحراف بادلیل دارای توزیع نمایی با میانگین  $1/\lambda$  می‌باشد.

۳. در مدت جست و جو برای انحراف بادلیل فرایند متوقف می‌گردد.

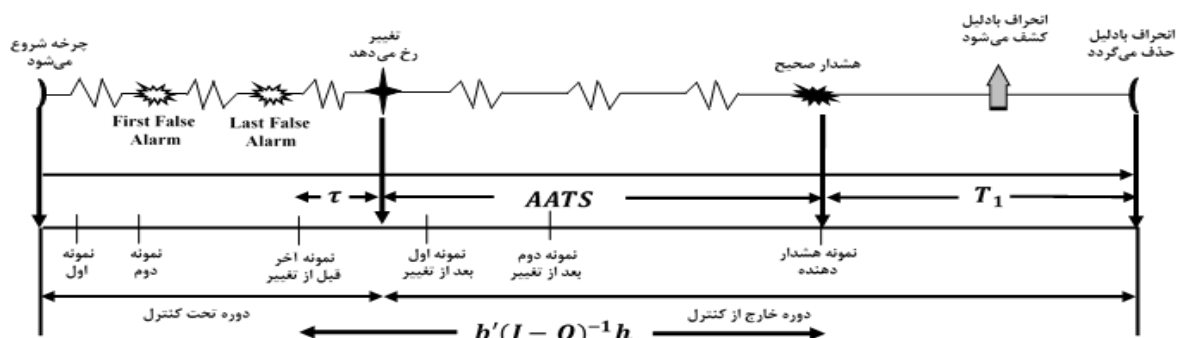
### ۳-۱ معیارهای آماری

$n_1$  و  $n_2$  اندازه‌های نمونه،  $h_1$  و  $h_2$  فاصله‌های نمونه‌گیری،  $WL_1$  و  $WL_2$  حدود هشدار و  $UCL_1$  و  $UCL_2$  حدود کنترلی را نشان می‌دهند. بر مبنای تعریف، فرض می‌کنیم که  $n_1 \leq n_2$ ،  $h_1 \geq h_2$ ،  $w_1 \geq w_2$  و  $k_1 \geq k_2$ . تصمیم‌گیری به منظور انتخاب هر کدام از دو مجموعه پارامتر برای نمونه آتی به موقعیت آماره کنونی رسم شده بر روی نمودار کنترلی وابسته می‌باشد. فرض کنید  $x_k$  نشان دهنده تعداد عدم انطباق‌ها در نمونه  $k$ ام باشد. نمودار کنترلی FA c بر اساس قواعد عملیاتی زیر عمل می‌کند:

۱. اگر  $x_k$  در زیر  $WL_i$  واقع گردد آنگاه مجموعه  $S_1$  استفاده می‌شود. یعنی نمونه‌ی  $(k+1)$ ام آهسته‌تر و با اندازه کوچک‌تر اخذ می‌گردد و  $x_{k+1}$  با حدود هشدار و کنترلی عریض‌تر از معمول مقایسه می‌گردد.

۲. اگر  $x_k$  بین حدود هشدار و حدود کنترلی قرار گیرد آنگاه آنگاه مجموعه  $S_2$  استفاده می‌شود. یعنی نمونه‌ی  $(k+1)$ ام سریع‌تر و با اندازه بزرگ‌تر اخذ می‌گردد و  $x_{k+1}$  با حدود هشدار و کنترلی باریک‌تر از معمول مقایسه می‌گردد.

۳. اگر  $x_k$  در بالای  $UCL_i$  واقع شود آنگاه یک هشدار توسط نمودار کنترلی صادر می‌گردد.



شکل ۲. یک چرخه کیفیت

$$\begin{aligned}
 p_{11} &= \Pr(x_k \leq WL_i | x_{k-1} \leq WL_i) = \\
 &= \Pr(x_k \leq WL_i | n(k) = n_1) \\
 &= CF(WL_1, n_1, c_1)
 \end{aligned}$$

به طور مشابه،

$$p_{12} = CF(UCL_1, n_1, c_1) - CF(WL_1, n_1, c_1)$$

$$p_{13} = 1 - CF(UCL_1, n_1, c_1)$$

$$p_{21} = CF(WL_2, n_2, c_1)$$

$$p_{22} = CF(UCL_2, n_2, c_1) - CF(WL_2, n_2, c_1)$$

$$p_{23} = 1 - CF(UCL_2, n_2, c_1)$$

در نتیجه، AATS به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$AATS = b'(I - Q)^{-1}h - E(T) \quad (1)$$

که در آن  $I$  ماتریس یکانی رتبه ۲،  $Q$  یک زیرماتریس از  $P$  است که با حذف سطر و ستون متناظر با وضعیت جذب به دست می‌آید،  $h = (h_1, h_2)$  بردار فواصل نمونه‌گیری و  $b' = (b_1, b_2)$  بردار احتمال‌های شرطی تحت کنترل است که  $x_k$  در داخل  $I_j$  ( $j = 1, 2$ ) قرار گیرد به این شرط که آن در داخل ناحیه کنترل واقع شده باشد. عبارت  $E(T)$  در رابطه (۱) نشان دهنده متوسط زمان  $T$  بین وقوع تغییر و آخرین نمونه گرفته شده قبل از آن می‌باشد. با این فرض که انحراف با دلیل

مهم‌ترین ویژگی یک نمودار کنترلی که به منظور ارزیابی کارایی آن مورد استفاده قرار می‌گیرد سرعت آن نمودار در کشف و شناسایی تغییرات فرایندی می‌باشد. این سرعت را می‌توان با استفاده از معیار متوسط زمان تعدیل شده تا هشدار (AATS) اندازه‌گیری نمود. AATS متوسط زمان از وقوع تغییر پس از گذشت مدت زمانی تصادفی از شروع فرایند تا زمانی است که نمودار کنترلی یک هشدار صادر می‌نماید. AATS را می‌توان با استفاده از رویکرد زنجیر مارکوف محاسبه نمود. بروک و اوآنز [۴۹] برای اولین بار این روش را به منظور محاسبه متوسط طول اجرای یک نمودار کنترلی به کار بردند. ما سه حالت ۱، ۲ و ۳ از زنجیر مارکوف را به ترتیب متناظر با قرار گرفتن آماره رسم شده بر روی نمودار کنترلی یعنی  $x_k$  در بازه‌های  $I_1 = [0, WL_i]$ ،  $I_2 = (WL_i, UCL_i]$  و  $I_3 = (UCL_i, \infty)$  تعریف می‌کنیم. حالت ۳ حالت جاذب می‌باشد، زیرا هنگامی که آماره کنترلی در ناحیه  $I_3$  قرار می‌گیرد فرایند متوقف می‌شود. ماتریس احتمال انتقال به صورت زیر می‌باشد:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

که در آن  $p_{ij}$  احتمال انتقال از وضعیت قبلی  $i$  به وضعیت فعلی  $j$  می‌باشد هنگامی که حالت فرایند از  $c_0$  به  $c_0$  تغییر کرده است. بنابراین،  $p_{ij}$ ها را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود:

جدول ۱. پارامترهای مدل و هزینه			
$\lambda = 0.01$	$s = 5$	$C_0 = 500$	$C_1 = 500$
$V_0 = 500$	$V_1 = 50$	$T_0 = 5$	$T_1 = 1$
$n_{min} = 2$	$h_{min} = 0.1$	$ANF_0 = 0.5$	
$n_{max} = 100$	$h_{max} = 10.00$	$AATS_1 = 5.00$	

جدول ۲. طرح‌های آماری اقتصادی بهینه از نمودارهای کنترلی FRS, VSS, VSI, VSSI و FA c برای مقادیر مختلف $\delta$											
$\delta$	chart	$n$		$h$		$WL$	$UCL$		$ANF$	$AATS$	$E(L)$
1.5	FRS	61		5.64			41.03		0.48	4.90	95.24
	VSS	58	65	5.70		35.05	40.63		0.47	5.00	93.09
	VSI	21		10.00	0.10	9.91	18.09		0.29	4.40	64.38
	VSSI	23	30	9.20	0.10	13.41	24.98		0.09	4.88	60.19
	FA	17	21	10.00	0.10	9.98	8.83	19.74	18.12	0.14	4.90
2	FRS	26		6.79			21.71		0.20	4.99	54.76
	VSS	24	27	6.31		18.13	20.39		0.19	4.98	54.35
	VSI	13		9.83	0.10	6.52	14.48		0.06	3.60	40.30
	VSSI	8	12	10.00	0.10	4.80	13.34		0.05	3.20	37.90
	FA	10	12	10	0.10	5.91	4.23	14.54	13.27	0.05	2.96
2.5	FRS	14		5.08			14.51		0.11	4.17	43.89
	VSS	11	14	4.29		9.03	12.33		0.13	4.11	43.47
	VSI	9		8.79	0.10	4.82	11.62		0.05	2.74	32.98
	VSSI	5	8	5.23	0.10	3.76	10.83		0.03	2.54	31.18
	FA	5	8	5.22	0.10	3.86	3.69	10.69	10.51	0.03	2.53
3	FRS	11		4.86			12.44		0.09	3.37	37.73
	VSS	10	13	4.20		9.78	12.57		0.06	3.32	37.41
	VSI	7		7.60	0.10	3.71	10.44		0.02	2.28	29.20
	VSSI	4	7	3.57	0.10	3.67	10.92		0.01	2.16	28.02
	FA	2	4	3.25	0.10	1.86	1.38	7.82	7.30	0.02	2.11
4	FRS	7		3.56			10.56		0.03	2.54	31.20
	VSS	6	8	3.22		7.46	9.64		0.04	2.48	30.74
	VSI	5		6.26	0.10	2.96	9.11		0.01	1.84	25.47
	VSSI	2	4	3.92	0.10	1.05	7.99		0.02	1.61	23.31
	FA	2	3	3.06	0.10	1.57	1.07	6.43	6.04	0.01	1.59

### ۲-۳ مدل هزینه

همان‌طور که توسط کاستا و رحیم [۲۷] بیان شده است، یک چرخه کیفیت شامل چهار بازه زمانی می‌باشد: دوره تحت کنترل، دوره خارج از کنترل، دوره جست و جو برای هشدارهای اشتباه و دوره زمانی متناظر با شناسایی و تصحیح انحراف با دلیل (شکل ۲ را مشاهده نمایید). متوسط بازه زمانی که در آن فرایند در

بر مبنای فرایند پواسن رخ می‌دهد، می‌توان نشان داد  $E(T) = E_{in}[h(k)] / 2$  (ماه‌ادیک و شیرک [۵۰] را مشاهده نمایید) که در آن  $E_{in}[h(k)]$  متوسط فاصله نمونه‌گیری تحت کنترل را نشان می‌دهد. محاسبه  $E_{in}[h(k)]$  در پیوست (الف) ارائه شده است. بنابراین،

$$AATS = b'(I - Q)^{-1}h - \frac{E_{in}[h(k)]}{2} \quad (۲)$$

علاوه بر این، تعداد هشدارهای اشتباه که توسط یک نمودار کنترلی صادر می‌گردد نیز بسیار مهم می‌باشد. این معیار را می‌توان توسط متوسط تعداد هشدارهای اشتباه (ANF) تعیین نمود. محاسبه ANF در پیوست (ب) داده شده است.

در نهایت، متوسط زیان در هر ساعت  $E(L)$  توسط رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$E(L) = V_0 - \frac{E(C)}{E(T)} = V_0 - \frac{V_0/\lambda + V_1 AATS - C_0 ANF - C_1 - sANI}{ATC + T_0 ANF + T_1} \quad (5)$$

### ۳-۳ مدل آماری اقتصادی بهینه

هدف طرح آماری اقتصادی نمودار کنترلی FA-c تعیین بهینه‌ی هشت پارامتر نمودار (اندازه‌های نمونه  $n_1$  و  $n_2$ ، فواصل نمونه‌گیری  $h_1$  و  $h_2$ ، حدود هشدار  $WL_1$  و  $WL_2$  و حدود کنترلی  $UCL_1$  و  $UCL_2$ ) با معلوم بودن چهار پارامتر فرایند ( $\lambda$ ،  $\delta$ ،  $T_0$  و  $T_1$ ) و پنج پارامتر هزینه ( $V_0$ ،  $V_1$ ،  $C_0$ ،  $C_1$  و  $s$ ) است که تابع زیان داده شده در رابطه (۵) را تحت شرایط  $ANF \leq ANF_0$  و  $AATS \leq AATS_1$  مینیمم می‌کند. این قیدهای آماری حفاظت خوبی در مقابل هشدارهای اشتباه فراهم نموده و شناسایی تا حد امکان سریع تغییرات فرایندی را تضمین می‌کند. بنابراین، مسئله بهینه‌سازی مدل آماری اقتصادی را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} & \min E(L) \\ & \text{s.t.} \\ & n_1 < n_2 \leq n_{\max} \\ & n_1, n_2 \in Z^+ \\ & 0 < h_2 < h_1 \leq h_{\max} \quad (6) \\ & 0 < w_i < k_i \\ & 0 < k_2 < k_1 \\ & 0 < w_2 < w_1 \\ & ANF \leq ANF_0 \\ & AATS \leq AATS_1 \end{aligned}$$

### ۴-۳ حل مسئله بهینه‌سازی

مسئله بهینه‌سازی (۶) یک مدل غیر خطی با هر دوی متغیرهای

پارامتر	سطح			
	پایین	پایین	بالا	بالا
$c_0$	0.5	1.00	2.00	3.00
$\delta$	1.50	2.00	3.00	4.00
$s$	5			10
$C_0$	250			500
$C_1$	50			500
$V_0$	250			500
$V_1$	0			100
$T_0$	2.5			5
$T_1$	1			10
$\lambda$	0.01			0.05

حالت تحت کنترل باقی می‌ماند برابر با  $1/\lambda$  می‌باشد. متوسط زمان مورد نیاز برای جست و جوی هشدارهای اشتباه را می‌توان توسط

رابطه  $T_0 ANF$  محاسبه نمود، که در آن  $T_0$  متوسط زمان صرف شده جهت جست و جوی یک هشدار اشتباه را نشان می‌دهد. متوسط طول دوره خارج از کنترل برابر با متوسط زمان از تغییر میانگین فرایند تا صدور یک هشدار خارج از کنترل توسط نمودار است که توسط معیار AATS اندازه‌گیری می‌شود. متوسط زمان لازم برای شناسایی و تصحیح انحراف بادلیل توسط  $T_1$  نمایش داده می‌شود. در نتیجه، متوسط زمان چرخه که مجموع چهار بازه زمانی اشاره شده در بالا است به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} + T_0 ANF + AATS + T_1 \quad (3)$$

فرض کنید که  $V_0$  و  $V_1$  به ترتیب مقدار سود در هر ساعت حاصل از تولید مادامی که فرایند تحت کنترل و خارج از کنترل است را نشان دهند. همچنین فرض کنید  $C_0$  متوسط هزینه برای بررسی یک هشدار اشتباه،  $C_1$  متوسط هزینه برای شناسایی و تصحیح انحراف بادلیل و  $s$  متوسط هزینه برای هر مورد بازرسی شده را نشان دهند. آنگاه متوسط سود خالص حاصل از یک چرخه تولید عبارت است از:

$$E(C) = \frac{V_0}{\lambda} + V_1 AATS - C_0 ANF - C_1 - sANI \quad (4)$$

که در آن  $ANI$  متوسط موارد بازرسی شده در هر چرخه کیفیت بوده و در پیوست (پ) داده شده است.

جدول ۴. اجراهای مورد استفاده در طرح عاملی کسری										
اجرا	$c_0$	$\delta$	s	$C_0$	$C_1$	$V_0$	$V_1$	$T_0$	$T_1$	$\lambda$
1	0.5	1.5	5	250	50	250	0	2.5	1	0.01
2	0.5	2.0	5	250	50	500	100	5.0	10	0.05
3	0.5	3.0	10	500	500	250	0	2.5	10	0.05
4	0.5	4.0	10	500	500	500	100	5.0	1	0.01
5	1.0	1.5	5	500	500	250	100	5.0	1	0.05
6	1.0	2.0	5	500	500	500	0	2.5	10	0.01
7	1.0	3.0	10	250	50	250	100	5.0	10	0.01
8	1.0	4.0	10	250	50	500	0	2.5	1	0.05
9	2.0	1.5	10	250	500	500	0	5.0	10	0.01
10	2.0	2.0	10	250	500	250	100	2.5	1	0.05
11	2.0	3.0	5	500	50	500	0	5.0	1	0.05
12	2.0	4.0	5	500	50	250	100	2.5	10	0.01
13	3.0	1.5	10	500	50	500	100	2.5	10	0.05
14	3.0	2.0	10	500	50	250	0	5.0	1	0.01
15	3.0	3.0	5	250	500	500	100	2.5	1	0.01
16	3.0	4.0	5	250	500	250	0	5.0	10	0.05

فرض کنید که یک تولید کننده قصد دارد تا فرایند تولید خود را توسط یک نمودار کنترلی  $c$  مناسب پایش نماید. همچنین فرض کنید هنگامی که فرایند در حالت تحت کنترل عمل می‌کند، متوسط تعداد عدم انطباق‌ها در هر واحد ( $c_0$ ) تقریباً برابر ۰.۵ بوده که با رفتن فرایند به حالت خارج از کنترل به سطح بالاتر  $c_1$  تغییر می‌کند.  $c_1$  به صورت  $c_1 = \delta c_0$ ،  $\delta > 1$ ، محاسبه می‌شود، که در آن  $\delta$  نمایانگر پارامتر تغییر می‌باشد. تصور نمایید که تولید کننده به منظور پایش مناسب فرایند یک نمودار کنترلی  $FA\ c$  را مورد استفاده قرار می‌دهد. جدول ۱ پارامترهای فرایند و هزینه مورد نیاز برای حل کردن مسئله بهینه‌سازی (۶) را ارائه می‌دهد. جدول ۲ پارامترهای بهینه‌ی مربوط به طرح‌های آماری اقتصادی از نمودارهای کنترلی  $FRS$ ،  $VSS$ ،  $VSI$ ،  $VSSI$  و  $FA-c$  برای مقادیر مختلف از اندازه تغییر  $(\delta = 1.50, 2.00, 2.50, 3.00, 4.00)$  را ارائه می‌کند. جدول ۲ نشان می‌دهد که طرح‌های سازوار ( $VSS$ ،  $VSI$ ،  $VSSI$  و  $FA$ ) از لحاظ هزینه در هر ساعت برتر از طرح  $FRS$  می‌باشند. مشاهده می‌شود که به کارگیری هر یک از طرح‌های  $VSSI$  یا  $FA$  به جای طرح‌های  $VSS$  یا  $VSI$  هزینه کمتری را در بر خواهد داشت. بر اساس جدول ۲، برای هر اندازه از تغییر فرایندی

تصمیم پیوسته و گسسته و فضای حل ناپیوسته و غیر محدب می‌باشد و به کارگیری روش‌های معمول بهینه‌سازی غیرخطی برای آن مناسب نیست. این مسئله را می‌توان به طرز مناسب توسط الگوریتم‌های جستجوی تصادفی فراابتکاری مانند الگوریتم ژنتیک حل نمود (نیایکی و همکاران [۵۰] و چن [۵۱]). در این مقاله، الگوریتم ژنتیک برای حل مسئله بهینه‌سازی اشاره شده در بالا استفاده می‌شود. برای این منظور، جعبه ابزار  $MATLAB\ GA$  به کار گرفته می‌شود.

#### ۴- مثال‌های عددی و تحلیل حساسیت

در این بخش، عملکرد مدل پیشنهادی برای نمودار کنترلی  $FA-c$  را با استفاده از مثالی عددی ارزیابی کرده و کارایی آن را از لحاظ هزینه و خواص آماری با نمودارهای کنترلی  $FRS$ ،  $VSS$ ،  $VSI$  و  $VSSI-c$  مقایسه می‌کنیم. همچنین اثرات پارامترهای فرایندی و هزینه بر روی این مدل را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

#### ۴-۱ یک مثال و مقایسه



جدول ۵. جواب‌های بهینه مربوط به طرح‌های آماری اقتصادی از نمودارهای کنترلی FA c											
No.	$n_1$	$n_2$	$h_1$	$h_2$	$WL_1$	$WL_2$	$UCL_1$	$UCL_2$	ANF	AATS	$E(L)$
1	26	30	10.00	0.10	14.56	14.16	23.97	22.09	0.25	4.80	40.91
2	10	11	6.38	0.10	5.47	4.21	12.07	11.26	0.04	2.17	201.19
3	4	5	5.60	0.10	2.97	2.32	6.45	6.05	0.04	2.24	121.54
4	2	3	4.55	0.10	1.28	1.16	6.55	6.45	0.01	2.27	26.77
5	11	13	8.28	0.10	12.93	12.30	20.29	19.27	0.07	4.53	75.02
6	5	6	10.00	0.10	4.98	4.48	14.05	13.59	0.07	2.30	68.57
7	2	3	6.29	0.10	3.98	3.95	8.35	8.26	0.02	3.89	31.92
8	4	5	1.94	0.10	8.64	8.60	12.92	12.24	0.003	1.01	68.78
9	9	11	10.00	0.10	20.73	20.27	37.75	33.77	0.07	4.08	84.47
10	2	3	4.04	0.10	5.60	5.31	11.94	11.74	0.05	2.34	58.52
11	2	3	1.12	0.10	6.41	6.17	14.89	14.41	0.004	0.61	51.49
12	2	3	4.09	0.10	9.00	8.51	14.82	14.53	0.00	2.24	28.03
13	5	7	10.00	0.10	16.67	16.30	31.61	31.10	0.07	2.22	204.61
14	2	3	5.15	0.10	8.85	8.28	17.96	17.38	0.03	2.88	16.57
15	2	3	2.24	0.10	11.78	11.36	19.82	19.44	0.001	1.29	19.51
16	2	3	1.68	0.11	13.79	10.14	17.39	17.17	0.00	0.86	108.31

آرایه متعامد انجام می‌شود. ما همچنین روش رگرسیون خطی چندگانه را به منظور تجزیه و تحلیل نتایج حاصل از طرح‌های بهینه برای نمودارهای FA c به کار می‌بریم.

پارامترهای فرایند و هزینه متغیرهای مستقل ممکن در مدل رگرسیونی می‌باشند. به همین صورت، هر کدام از پارامترهای طراحی بهینه، ANF، AATS و متوسط هزینه در ساعت به عنوان متغیر وابسته در مدل رگرسیونی هستند.

ده متغیر مستقل مدنظر در تحلیل حساسیت و سطوح در نظر گرفته شده برای آن‌ها در جدول ۳ نمایش داده می‌شوند. در مجموع هشت متغیر مستقل هر کدام با دو سطح و دو متغیر مستقل دیگر هر کدام با چهار سطح در این طرح وجود دارند. بر این اساس، یک طرح آزمایش آمیخته ۲-۴ سطحی به کار می‌رود تا ده متغیر مستقل را به ستون‌های آرایه متعامد  $L_{16}$  تخصیص دهد. همان طور که در جدول ۴ نمایش داده شده است، در طرح آزمایش آرایه متعامد  $L_{16}$ ، ۱۶ آزمایش وجود دارند. مقادیر پارامترهای طراحی بهینه، ANF، AATS و متوسط هزینه در ساعت مربوط به ۱۶ آزمایش در جدول ۵ نمایش داده شده‌اند. این مقادیر به همراه ترکیب متغیرهای مستقل متناظر برای

فرایندی طرح FA یا کمترین هزینه را داشته یا به آن بسیار نزدیک می‌باشد. برای مثال، هنگامی که تغییر فرایندی کوچک است ( $\delta = 1.50$ )، متوسط هزینه در ساعت برای نمودارهای کنترلی FRS، VSS، VSI، VSSI و FA-c به ترتیب برابر با ۹۵،۲۴، ۹۳،۰۹، ۶۴،۳۸، ۶۰،۱۹ و ۵۸،۶۵ می‌باشد.

جدول ۲ همچنین نشان می‌دهد که به کار گیری طرح‌های سازوار برای نمودار کنترلی c کارایی آماری آن را نیز بهبود می‌بخشد. مشاهده می‌گردد که هر یک از طرح‌های VSSI یا FA در مقایسه با طرح‌های دیگر خواص آماری بهتری را حاصل می‌نمایند.

#### ۴-۲ تحلیل حساسیت

یک تحلیل حساسیت به منظور بررسی اثرات پارامترهای فرایند و هزینه بر روی جواب‌های بهینه مربوط به طرح‌های آماری اقتصادی از نمودارهای کنترلی FA c انجام می‌شود. برای شناسایی این اثرات، ما باید جواب‌های بهینه از طرح آماری اقتصادی را برای ترکیب‌های مختلفی از پارامترهای فرایند و هزینه بدست آوریم. این کار با استفاده از طراحی آزمایش‌های

جدول ۶. تحلیل رگرسیون خطی برای متوسط هزینه در ساعت					
ANOVA (الف) جدول					
منبع تغییر	مجموع مربعات	درجه آزادی	میانگین مربعات	F	P-مقدار
رگرسیون	134971.93	4	33742.98	57.88	0.000
باقیمانده	6995.32	12	582.94		
کل	141967.25	16			
(ب) جدول ضرایب رگرسیونی					
پارامتر	برآورد	خطای استاندارد	t	P-مقدار	
$\lambda$	1740.40	285.35	6.10	0.000	
$T_1$	6.64	1.29	5.14	0.000	
$\delta$	-20,05	5.06	-3,96	0.002	
$V_0$	0.107	0.04	2.907	0.013	

برای کشف و اصلاح انحراف بادلیل  $T_1$ ، اندازه تغییر  $\delta$  و متوسط سود در ساعت تحت کنترل  $V_0$  قرار دارد. برآورد ضرایب نشان می‌دهد که متوسط هزینه در ساعت افزایش می‌یابد هرگاه یکی از سه پارامتر  $\lambda$ ،  $T_1$  و  $V_0$  افزایش یابد یا پارامتر  $\delta$  کاهش یابد.

جدول‌های ۷ و ۸ به ترتیب نتایج تحلیل رگرسیونی برای AATS و ANF را نشان می‌دهند. تنها پارامتر معنادار  $\delta$  می‌باشد. بر مبنای برآورد ضرایب، مشاهده می‌شود که هر دوی AATS و ANF با افزایش  $\delta$  کاهش می‌یابند.

جدول‌های ۹ و ۱۰ به ترتیب نتایج تحلیل رگرسیونی برای اندازه‌های نمونه کوچک  $n_1$  و بزرگ  $n_2$  را نشان می‌دهند. بر اساس جدول ۹، دو پارامتر میانگین تعداد عدم انطباق‌های تحت

تجزیه و تحلیل رگرسیون خطی چندگانه لحاظ می‌شوند. جدول‌های ۶ تا ۱۳ نتایج حاصل از تجزیه و تحلیل رگرسیون خطی چندگانه با استفاده از روش گام به گام را به تصویر می‌کشند. تجزیه و تحلیل رگرسیون خطی چندگانه توسط نرم افزار

IBM SPSS Statistics 22 اجرا می‌شود. توجه داشته باشید که ضرایب مثبت در قسمت (b) از جدول‌های ۶ تا ۱۳ نشان دهنده این امر است که اگر مقدار پارامتر ورودی برآورد شده افزایش یابد آنگاه مقدار متغیر پاسخ متناظر نیز به طور معناداری افزایش می‌یابد. عکس این نتیجه برای ضرایب منفی برقرار است.

جدول ۶ نتیجه تحلیل رگرسیونی برای متوسط هزینه در ساعت را نشان می‌دهد. متوسط هزینه در ساعت به طور معناداری تحت تاثیر پارامترهای نرخ وقوع انحراف بادلیل  $\lambda$ ، متوسط زمان لازم

جدول ۷. تحلیل رگرسیون خطی برای AATS					
ANOVA (الف) جدول					
منبع تغییر	مجموع مربعات	درجه آزادی	میانگین مربعات	F	P-مقدار
رگرسیون	9.53	1	9.53	8.99	0.010
باقیمانده	14.83	14	1.06		
کل	24.36	15			
(ب) جدول ضرایب رگرسیونی					
پارامتر	برآورد	خطای استاندارد	T	P-مقدار	
ثابت	4.59	0.75	6.13	0.000	
$\delta$	-0,81	0.27	-3,00	0.010	

جدول ۸. تحليل رگرسيون خطي براي ANF					
الف) جدول ANOVA					
منبع تغيير	مجموع مربعات	درجه آزادي	ميانگين مربعات	F	مقدار-P
رگرسيون	0.03	1	0.03	10.41	0.006
باقيمانده	0.03	14	0.002		
کل	0.06	15			
ب) جدول ضرايب رگرسيوني					
پارامتر	برآورد	خطاي استاندارد	t	مقدار-P	
ثابت	0.15	0.04	4.34	0.001	
$\delta$	-0,04	0.01	-3,23	0.006	

جدول های ۱۲ و ۱۳ نتایج تحلیل رگرسیونی برای حدود کنترلی  $UCL_1$  و  $UCL_2$  را نمایش می‌دهند. هر دوی حدود کنترلی به طور معناداری توسط دو پارامتر اندازه تغییر  $\delta$  و میانگین تعداد عدم انطباق‌های تحت کنترل  $c_0$  تحت تاثیر قرار می‌گیرند. اندازه تغییر بزرگ‌تر موجب باریک‌تر شدن حدود کنترلی شده اما میانگین تعداد عدم انطباق‌های تحت کنترل بیشتر موجب عریض‌تر شدن این حدود می‌گردد.

#### ۵- نتیجه‌گیری

این مقاله طرح سازوار کامل (FA) را برای نمودارهای کنترلی وصفی C توسعه داده است. طرح پیشنهادی با استفاده از رویکرد آماری و اقتصادی مورد تحقیق قرار می‌گیرد. هدف اصلی دستیابی به ابزاری موثر و کارآمد به منظور پایش فرایندهایی است که در آن‌ها کیفیت محصولات توسط تعداد عدم انطباق‌های موجود در آن‌ها مشخص می‌گردد. معیارهای مورد استفاده برای

کنترل  $c_0$  و  $\delta$  به طور معناداری مقدار اندازه نمونه کوچک  $n_1$  را تحت تاثیر قرار می‌دهند. میانگین تعداد عدم انطباق‌های تحت کنترل بالاتر و اندازه تغییر بزرگ‌تر منجر به کاهش اندازه نمونه کوچک می‌شوند. با بررسی جدول ۱۰ مشخص می‌گردد که اندازه نمونه بزرگ  $n_2$  فقط تحت تاثیر پارامتر اندازه تغییر  $\delta$  قرار دارد. وقتی که اندازه تغییر افزایش می‌یابد اندازه نمونه بزرگ کاهش می‌یابد.

جدول ۱۱ نتیجه تحلیل رگرسیونی برای بازه نمونه‌گیری  $h_1$  را نمایش می‌دهد. با توجه به جدول ۱۱ قسمت (b) مشاهده می‌گردد که متوسط زمان لازم برای کشف و اصلاح انحراف بادلیل  $T_1$  و اندازه تغییر  $\delta$  پارامترهای اثر گذار هستند. افزایش  $T_1$  بازه نمونه‌گیری  $h_1$  را طولانی‌تر می‌کند در حالی که افزایش  $\delta$  باعث کوتاه‌تر شدن آن می‌گردد.

جدول ۹. تحليل رگرسيون خطي براي $n_1$					
الف) جدول ANOVA					
منبع تغيير	مجموع مربعات	درجه آزادي	ميانگين مربعات	F	مقدار-P
رگرسيون	291.40	2	145.70	6.435	0.011
باقيمانده	294.35	13	22.64		
کل	585.75	15			
ب) جدول ضرايب رگرسيوني					
پارامتر	برآورد	خطاي استاندارد	t	مقدار-P	
ثابت	19.27	4.01	4.81	0.000	
$\delta$	-3,51	1.24	-2,83	0.014	
$c_0$	-2,73	1.24	-2,20	0.046	

جدول ۱۰. تحلیل رگرسیون خطی برای $n_2$					
ANOVA (الف) جدول					
منبع تغییر	مجموع مربعات	درجه آزادی	میانگین مربعات	F	P-مقدار
رگرسیون	232.02	1	232.02	6.48	0.023
باقیمانده	501.98	14	35.85		
کل	734.00	15			
ب) جدول ضرایب رگرسیونی					
پارامتر	برآورد	خطای استاندارد	t	P-مقدار	
ثابت	17.41	4.36	4.00	0.001	
$\delta$	-3,97	1.56	-2,54	0.023	

تحلیل حساسیت، پارامتر اندازه تغییر تمامی پارامترهای طراحی بهینه و معیارهای آماری و اقتصادی حاصل شده برای طرح‌های آماری اقتصادی نمودارهای کنترلی FA c را تحت تاثیر قرار می‌دهد. اندازه تغییر بزرگ‌تر منجر به کوتاه‌تر شدن فاصله نمونه‌گیری و کاهش اندازه نمونه شده و حدود کنترلی را باریک‌تر می‌کند. علاوه بر این، آن متوسط هزینه ساعتی کمتری را ایجاد می‌نماید.

ارزیابی عملکرد آماری و اقتصادی مدل پیشنهادی به ترتیب متوسط زمان تعدیل شده تا هشدار (AATS) و متوسط هزینه در ساعت می‌باشند. محاسبه AATS با استفاده از رویکرد زنجیر مارکوف انجام گرفته است. مدل هزینه بر اساس تابع هزینه داده شده در کاستا و رحیم [۲۷] پایه‌ریزی شده است. مثال‌های عددی تهیه شده اند تا عملکرد مدل پیشنهادی برای نمودار کنترلی FA c را ارزیابی کرده و کارایی آن را با طرح‌های FRS، VSS، VSI و VSSI مقایسه کنند. نتایج حاصل شده کارایی آماری و مزایای هزینه‌ای مربوط به اعمال نمودارهای کنترلی FA c در مقایسه با نمودارهای کنترلی C دیگر را تایید می‌کنند. یک تحلیل حساسیت نیز بر اساس روش‌های طراحی آزمایش‌ها و رگرسیون خطی چندگانه انجام شده است. بر مبنای نتایج

جدول ۱۱. تحلیل رگرسیون خطی برای $h_1$					
ANOVA (الف) جدول					
منبع تغییر	مجموع مربعات	درجه آزادی	میانگین مربعات	F	P-مقدار
رگرسیون	107.65	2	53.82	15.90	0.000
باقیمانده	44.01	3	3.38		
کل	151.65	15			
ب) جدول ضرایب رگرسیونی					
پارامتر	برآورد	خطای استاندارد	t	P-مقدار	
ثابت	10.92	1.45	7.52	0.000	
$\delta$	-2,47	0.48	-5,16	0.000	
$T_1$	0.23	0.10	2.27	0.041	

جدول ۱۲. تحلیل رگرسیون خطی برای $UCL_1$					
ANOVA (الف) جدول					
منبع تغییر	مجموع مربعات	درجه آزادی	میانگین مربعات	F	P-مقدار
رگرسیون	600.73	2	300.37	7.95	0.006
باقیمانده	491.42	13	37.80		
کل	1092.15	15			
(ب) جدول ضرایب رگرسیونی					
پارامتر	برآورد	خطای استاندارد	t	P-مقدار	
ثابت	23.44	5.18	4.53	0.001	
$\delta$	-4.96	1.60	-3.10	0.008	
$c_0$	4.01	1.60	2.51	0.026	

جدول ۱۳. تحلیل رگرسیون خطی برای $UCL_2$					
ANOVA (الف) جدول					
منبع تغییر	مجموع مربعات	درجه آزادی	میانگین مربعات	F	P-مقدار
رگرسیون	538.33	2	269.17	9.13	0.003
باقیمانده	383.23	13	29.48		
کل	921.56	15			
(ب) جدول ضرایب رگرسیونی					
پارامتر	برآورد	خطای استاندارد	t	P-مقدار	
ثابت	21.29	4.57	4.66	0.000	
$\delta$	-4.47	1.41	-3.16	0.008	
$c_0$	4.07	1.41	2.88	0.013	

- [5] Runger G. C. and Montgomery D. C. (1993). Adaptive sampling enhancements for Shewhart control charts, IIE Transactions, 25:41-51.
- [6] Daudin J. J. (1992). Double sampling  $\bar{X}$  charts, Journal of Quality Technology, 24:78-87.
- [7] Prabhu, S. S., Runger G. C. and Keats J. B. (1993).  $\bar{X}$  chart with adaptive sample sizes, International Journal of Production Research, 31:2895-2909.
- [8] Costa, A. F. B. (1994).  $\bar{X}$  charts with variable sampling size, Journal of Quality Technology, pp, 155-163.
- [9] Zimmer, L. S., Montgomery D. C. and Runger G. C. (1998). Evaluation of a three-state adaptive sample size  $\bar{X}$  control chart, International Journal of Production Research, 36:733-743.
- [10] Prabhu, S. S., Montgomery D. C. and Runger G. C. (1994). A combined adaptive sample size and

مراجع

- [1] Reynolds, MR J. r., Amin, R. W., Arnold J. C. and Nachlas J. A. (1988).  $\bar{X}$  Charts with variable sampling intervals, Technometrics, 30:181-192
- [2] Reynolds MR J. r. and Arnold J. C. (1989). Optimal Shewhart control charts with variable sampling intervals between samples, Sequential Analysis, 8:51-77.
- [3] Reynolds MR J. r. (1995). Evaluating properties of variable sampling interval control charts, Sequential Analysis, 14:59-97.
- [4] Reynolds MR J. r. (1989). Optimal variable sampling interval control charts, Sequential Analysis, 8:361-379

- design of  $\bar{X}$  charts based on Duncan's model, *Journal of the American Statistical Association*, 63, pp, 304-320.
- [23] Knappengerger H. A. and Grandage A. H. (1969). Minimum cost quality control tests, *IIE Transactions* 1:24-32.
- [24] Gibra I. N. (1971). Economically optimal determination of the parameters of an  $\bar{X}$  control chart, *Management Science*, 17:635-646.
- [25] Montgomery D. C. (1980). The economic design of control charts: a review and literature survey, *Journal of Quality Technology*, 12:75-87.
- [26] Lorenzen T. J. and Vance L. C. 1986. "The economic design of control charts: A unified approach." *Technometrics* 28:3-11.
- [27] Costa A. F. B. and Rahim M. A. (2001). Economic design of X charts with variable parameters: The Markov chain approach, *Journal of Applied statistics*, 28:875-885.
- [28] Saniga E. M. (1989). Economic statistical control chart designs with an application to  $\bar{X}$  and R charts, *Technometrics*, 31:313-320.
- [29] McWilliams T. P. (1994). Economic, statistical, and economic-statistical  $\bar{X}$  chart designs, *Journal of Quality Technology*, 26:227-238.
- [30] Montgomery, D. C., Torng, J. C. C., Cochran J. K. and Lawrence F. P. (1995). Statistically Constrained Economic Design of the EWMA Control Chart, *Journal of Quality Technology*, 27:250-256.
- [31] Molnau, W., Montgomery D. C. and Runger G. (2001). statistically constrained economic design of the MEWMA control chart. *Quality and Reliability Engineering International*, 17:39-49.
- [32] Heydari A.A., Bamani Moghadam M. and Eskandari F., (2016), An Extension of Banerjee and Rahim Model in Economic and Economic-Statistical Designs for Multivariate Quality Characteristics under Burr XII Distribution. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, DOI:10.1080/03610926.2016.1140782
- [33] Rafiey S.R., Ghaderi M.M., and Bamani Moghadam M. (2016), A Generalized Version of Banerjee and Rahim Model In Economic and Economic Statistical Designs of Multivariate Control Charts under Generalized Exponential Shock Model, *Communications in Statistics - Theory and Methods*. DOI:10.1080/03610926.2016.1171354
- [34] Katebi, M., Seif A. and Faraz A. (2016). Economic and Economic-Statistical designs of the T2 control charts with SVSSI sampling interval  $\bar{X}$  control scheme, *Journal of Quality Technology*, 26:164-176.
- [11] Costa, A. F. B. (1997).  $\bar{X}$  charts with variable sample size and sampling intervals, *Journal of Quality Technology*, 29:197-204.
- [12] Reynolds MR J. r. and Arnold J. C. (2001). EWMA control charts with variable sample sizes and variable sampling intervals, *IIE Transactions*, 33:511-530.
- [13] Wu, Z., Zhang S. and Wang P. H. (2007). A CUSUM scheme with variable sample sizes and sampling intervals for monitoring the process mean and variance, *Quality and Reliability Engineering International*, 23:157-170.
- [14] Mahadik S. B. (2013). Variable sample size and sampling interval  $\bar{X}$  charts with runs rules for switching between sample sizes and sampling interval lengths, *Quality and Reliability Engineering International*, 29(1):63-76.
- [15] Mahadik S. B. (2013).  $\bar{X}$  Charts with Variable Sample Size, Sampling Interval, and Warning Limits, *Quality Reliability Engineering International*, 29(4):535-544.
- [16] Costa A. F. B. (1999).  $\bar{X}$  charts with variable parameters. *Journal of Quality Technology*, 31:408-416.
- [17] De Magalhaes, M. S., Epprecht E. K. and Costa A. F. B. (2001). Economic design of a VP  $\bar{X}$  control chart, *International Journal of Production Economics*, 74:191-200.
- [18] Chen Y. K. (2007). Adaptive sampling enhancement of Hotelling's  $T^2$  control charts. *European Journal of Operational Research* 178:841-857.
- [19] Lin Y. C. (2009). The Variable Parameters  $\bar{X}$  Control Charts for Monitoring Auto-correlated Processes, *Communications in Statistics - Simulation and Computation* 38:729-749.
- [20] Faraz, A., Heuchenne, C., Saniga E. and Costa A. F. B. (2014). Double-objective economic statistical design of the VP  $T^2$  control chart: Wald's identity approach, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 84(10):2123-2137.
- [21] Duncan A. J. (1956). The economic design of  $\bar{X}$  charts used to maintain current control of a process, *Journal of American Statistical Association*, 51:228-242.
- [22] Goel, A. L., Jain S. D. and Wu S. M. (1968). An algorithm for the determination of the economic

- [48] Brook, D., Evans D. A. (1972). An approach to the probability distribution of CUSUM run length, *Biometrika* 59:539-549.
- [49] Mahadik S. B. and Shirke D. T. (2009). A special variable sample size and sampling interval X chart, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 38:1284-1299.
- [50] Niaki, S. T. A., Ershadi M. J. and Malaki M. (2010). Economic and economic statistical designs of MEWMA control charts-a hybrid Taguchi loss, Markov chain and genetic algorithm approach, *International journal of advanced manufactured technology*, 48:283-296.
- [51] Chen Y. K. (2009). Economic design of T<sup>2</sup> control charts with the VSSI sampling scheme, *Quality and Quantity* 43:109-122.

#### پیوست الف: محاسبه $E_{in}[h(k)]$

عبارت  $E_{in}[h(k)]$  را می توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\text{فرض کنید } p_1 = Pr_{in}[h(k) = h_1] \text{ و } p_2 = Pr_{in}[h(k) = h_2] = 1 - p_1 \text{ داریم که}$$

$$p_1 = Pr_{in}[h(k) = h_1] = Pr_{in}[x_{k-1} \leq WL_i | x_{k-1} \leq UCL_i]$$

همچنین فرض کنید  $D'_{k-1}$  همان  $D_{k-1}$  باشد که از راست بر روی  $UCL_i$  بریده شده است. بنابراین

$$p_1 = Pr_{in}[x'_{k-1} \leq WL_i | x'_{k-2} \leq WL_i] \times Pr_{in}[x'_{k-2} \leq WL_i] + Pr_{in}[x'_{k-1} \leq WL_i | WL_i < x'_{k-2} \leq UCL_i] \times Pr_{in}[WL_i < x'_{k-2} \leq UCL_i] = Pr_{in}[x'_{k-1} \leq WL_1]p_1 + Pr_{in}[x'_{k-1} \leq WL_2]p_2 = \frac{CF(WL_1, n_1, c_0)}{CF(UCL_1, n_1, c_0)}p_1 + \frac{CF(WL_2, n_2, c_0)}{CF(UCL_2, n_2, c_0)}(1 - p_1)$$

## پیوست پ: محاسبه ANI

متوسط تعداد موارد بازرسی شده در طی چرخه کیفیت ANI را می‌توان با استفاده از رابطه زیر بدست آورد:

$$ANI = ANI_{in} + ANI_{out}$$

که در آن  $ANI_{in}$  و  $ANI_{out}$  به ترتیب متوسط تعداد موارد بازرسی شده در طول دوره‌های تحت کنترل و خارج از کنترل را نشان می‌دهند. داریم که

$$ANI_{in} = ANS_{in} \times E_{in}[n(k)]$$

که در آن متوسط اندازه نمونه تحت کنترل را نشان می‌دهد. توجه نمایید که

$$Pr_0[n(k) = n_1] = Pr_{in}[h(k) = h_1] = p_1$$

$$Pr_0[n(k) = n_2] = Pr_{in}[h(k) = h_2] = p_2$$

آنگاه،

$$E_{in}[n(k)] = p_1 n_1 + p_2 n_2$$

در نهایت،  $ANI_{out}$  به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$ANI_{out} = b'(I - Q)^{-1} \mathbf{n}$$

که در آن بردار اندازه‌های نمونه‌گیری می‌باشد.  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$

با حل رابطه فوق بر حسب  $p_1$ ، رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$p_1 = \{ CF(UCL_1, n_1, c_0)CF(WL_2, n_2, c) \} \\ \div \{ CF(UCL_2, n_2, c_0)CF(UCL_1, n_1, c_0) \\ + CF(UCL_1, n_1, c_0)CF(WL_2, n_2, c_0) \\ - CF(UCL_2, n_2, c_0)CF(WL_1, n_1, c_0) \}$$

در نتیجه

$$E_{in}[h(k)] = p_1 h_1 + p_2 h_2$$

## پیوست ب: محاسبه ANF

عبارت ANF برای نمودارهای کنترلی FA c را می‌توان با استفاده از رابطه زیر محاسبه نمود:

$$ANF = \alpha \times ANS_{in}$$

که در آن،  $\alpha$  احتمال رخ دادن هشدار اشتباه (خطای نوع I) و  $ANS_{in}$  متوسط تعداد نمونه‌های گرفته شده در دوره تحت کنترل می‌باشند. داریم

$$\alpha = p_1 \alpha_1 + (1 - p_1) \alpha_2 ,$$

$$\alpha_i = Pr(D_k > UCL_i | p = p_0)$$

با این فرض که انحراف بادلیل بر اساس فرایند پواسن با میانگین ساعت رخ می‌دهد، برای نمودارهای کنترلی FA c را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$ANS_{in} = \frac{q}{1 - q}$$

که در آن  $q = p_1 q_1 + (1 - p_1) q_2$  و  $i = 1, 2, q_i = \exp(-\lambda h_i)$