

بهینه‌سازی یکپارچه قیمت، سیاست‌های وارانتهی پایه و تمدید وارانتهی با در نظر گرفتن محصولات از وارانتهی خارج شده

محسن افصحی

دانشجوی دکتری مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع و سیستم‌ها، دانشگاه تربیت مدرس (M.afsahi@modares.ac.ir)

علی حسین‌زاده کاشان*

استادیار، دانشکده مهندسی صنایع و سیستم‌ها، دانشگاه تربیت مدرس

بختیار استادی

استادیار، دانشکده مهندسی صنایع و سیستم‌ها، دانشگاه تربیت مدرس (Bostadi@modares.ac.ir)

سید حسام‌الدین ذگردی

استاد، دانشکده مهندسی صنایع و سیستم‌ها، دانشگاه تربیت مدرس (Zegordi@modares.ac.ir)

چکیده امروزه تولیدکنندگان از وارانتهی به‌عنوان یک ابزار تبلیغاتی مهم جهت افزایش سهم بازار استفاده می‌کنند. ارائه محصول به بازار با وارانتهی طولانی‌تر گرچه باعث جذب بیشتر مشتریان می‌شود، ولی هزینه‌های تولیدکننده را افزایش می‌دهد. در دنیای واقعی، تولیدکنندگان پس از اتمام وارانتهی پایه، امکانی برای خریداران فراهم می‌کنند که با پرداخت مبلغی مشخص، بتوانند وارانتهی خود را برای مدت‌زمانی معین تمدید نمایند. بدین ترتیب محصولاتی که وارانتهی خود را تمدید نمی‌کنند به‌عنوان محصولات از وارانتهی خارج شده، منبع اصلی سودآوری تولیدکننده از فروش قطعات یدکی محسوب می‌شوند. در این تحقیق مدلی جدید ارائه شده است که به تولیدکننده کمک می‌نماید در جهت افزایش سود و با در نظر گرفتن سطح رضایت مشتری و اثر فروش قطعات یدکی به محصولات از وارانتهی خارج شده، مواردی نظیر قیمت‌گذاری محصول اصلی، طول دوره وارانتهی پایه، طول دوره تمدید وارانتهی، قیمت تمدید وارانتهی را مورد بهینه‌سازی قرار دهد. برای حل مدل از الگوریتم ازدحام ذرات توسعه‌یافته و الگوریتم لیگ ورزشی استفاده شده است. با توجه به اینکه شرکت گلدیران در ایران به‌عنوان نماینده خدمات پس از فروش شرکت LG برای محصولات تحت این برند امکان تمدید وارانتهی پایه را فراهم نموده است، مدل ارائه شده با داده‌های مربوط به محصول LED مورد حل قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که شرکت گلدیران با تغییر مقادیر طول دوره وارانتهی پایه و تمدید وارانتهی با توجه به چرخه عمر محصول و مدت‌زمان برنامه‌ریزی می‌تواند به افزایش حاشیه سود تولیدکننده کمک نماید در صورتی که هم‌اکنون این شرکت برای تمامی محصولات خود طول دوره وارانتهی و تمدید وارانتهی را ثابت در نظر می‌گیرد.

کلمات کلیدی وارانتهی پایه، وارانتهی تمدید شده، قیمت‌گذاری پویا، بهینه‌سازی ترکیبی.

۱- مقدمه

پیشرفت تکنولوژی در جوامع صنعتی باعث شده است که محصولات از نظر عملکرد بسیار به یکدیگر نزدیک شوند. از این رو تولیدکنندگان برای ایجاد تمایز و افزایش سهم بازار سعی به ارائه وارانتهی‌های طولانی‌تر برای محصولات خود دارند [۱]. وارانتهی قراردادی است که طی آن تولیدکننده متعهد به احیای عیوب یا خرابی‌های محصولات در دوره‌ای مشخص و با حدودی تعیین شده در قرارداد می‌شود. این عیوب معمولاً مرتبط با طراحی، تولید و یا تضمین کیفیت است [۲].

وارانتهی با دوره‌ی طولانی‌تر معمولاً مشتریان بیشتری را جذب می‌کند (چراکه طول دوره وارانتهی شاخصی از عملکرد محصول در منظر مشتریان است)، اما به همان نسبت هزینه‌های سرویس بالاتری دارد و بدیهی است که هزینه سرویس‌دهی به تولیدکننده وارد می‌شود. هزینه سرویس وارانتهی هزینه احیای خرابی محصول در طول دوره وارانتهی است و این هزینه به محصول بستگی دارد و می‌تواند بین ۲ تا ۱۰ درصد قیمت فروش محصول باشد [۳]. قرارداد وارانتهی هم برای تولیدکننده و هم برای خریدار نقش حمایتی دارد. از تولیدکننده در برابر شکایات نامرتب که بر اثر استفاده نادرست از محصول رخ می‌دهد، حمایت می‌کند

* (Corresponding author) A.kashan@modares.ac.ir

مختلف زمانی، تعیین طول دوره وارانتهی پایه، طول دوره تمدید وارانتهی و قیمت تمدید وارانتهی است.

در ادامه در بخش ۲ مروری بر ادبیات موضوع انجام شده است. در بخش ۳ به تعریف مسئله و ارائه فرضیات و نحوه اندیس گذاری پرداخته می‌شود. در بخش ۴ مدل پیشنهادی معرفی شده و در بخش ۵ روش حل مدل ارائه خواهد شد. در بخش ۶ مطالعه موردی در رابطه با محصول "LED 55" شرکت LG که با خدمات پس از فروش شرکت گلدبران در ایران به فروش می‌رسد، مورد بحث قرار می‌گیرد و در نهایت در بخش ۷ جمع‌بندی در رابطه با مسئله تحقیق ارائه می‌شود.

۲- مرور ادبیات

بلیشک و مورتی^۳ (۱۹۹۲) اولین مقاله مروری را در پیشینه تحقیق در رابطه با وارانتهی محصولات نو و تحلیل آن مطرح منتشر کردند. آن‌ها مروری جامع بر مدل‌های ریاضی صورت دادند و برای اولین بار دسته‌بندی کاملی از سیاست‌های مختلف وارانتهی ارائه کردند [۹]. مورتی و همکاران (۲۰۰۴) به بررسی اهمیت و ابعاد مختلف تصمیمات لجستیکی در مدیریت وارانتهی پرداختند [۱۰].

در پیشینه موضوع قیمت‌گذاری و سیاست‌های وارانتهی به‌عنوان دو عامل مهم در افزایش رضایت مشتریان و سهم بازار یاد شده است. بدیهی است پیشنهاد وارانتهی با مدت طولانی‌تر گرچه باعث افزایش رضایت و فروش محصولات می‌شود ولی هزینه‌های تولیدکننده را نیز افزایش می‌دهد. از طرف دیگر فروش محصول باقیمت کمتر موجب فروش بیشتر تولیدکننده می‌شود ولی بدیهی است که حاشیه سود تولیدکننده پایین می‌آید. در این تحقیق مدلی ارائه شده است که به‌صورت یکپارچه تصمیمات تولیدکننده را در رابطه با تعیین قیمت محصول، طول دوره وارانتهی، طول دوره تمدید وارانتهی و قیمت تمدید وارانتهی در راستای افزایش سود وی، بهینه می‌کند. بنابراین، در اینجا دو حوزه اصلی از ادبیات وارانتهی مورد بررسی قرار خواهد گرفت: قیمت‌گذاری به همراه بهینه‌سازی طول وارانتهی پایه و وارانتهی تمدید شده.

کلیکمن و برگر^۴ تقاضای محصول را تابعی نمایی از دو متغیر تصمیم قیمت و طول دوره وارانتهی در نظر گرفتند و باهدف بهینه‌سازی سود تولیدکننده، مقادیر متغیرهای تصمیم را محاسبه نمودند. آن‌ها فرض بر این داشتند که سیاست وارانتهی سیاست تجدید ناپذیر و تعویض رایگان^۵ بوده و قیمت‌گذاری محصول به‌صورت ایستا در نظر گرفته شده است [۱۱]. منزس و کوریم^۶ مقدار بهینه طول دوره وارانتهی پایه را به‌واسطه حل یک

برای مثال تولیدکنندگان آمریکایی سالانه چیزی حدود ۲۵ بلیون دلار برابر با ۲ درصد سود سالانه خود را برای سرویس وارانتهی هزینه می‌کنند و از خریدار در برابر خرابی‌های ناشی از عدم کارکرد مناسب محصول حمایت می‌نماید [۲].

به‌طور کلی تولیدکنندگان دو نوع وارانتهی برای محصولات ارائه می‌دهند. وارانتهی پایه^۱ و وارانتهی تمدید شده^۲ [۴]. زمانی که مشتریان یک محصول را خریداری می‌کنند، آن محصول شامل وارانتهی می‌شود و مدت وارانتهی آن به همراه محصول معلوم است. در پیشینه تحقیق به این نوع وارانتهی، وارانتهی پایه گفته می‌شود. بعد از اتمام وارانتهی پایه، تولیدکننده در قبال دریافت مبلغی مشخص پیشنهاد تمدید وارانتهی برای مدتی معین را به مشتری می‌دهد که این نوع وارانتهی، وارانتهی تمدید شده نامیده می‌شود [۵]. بنابراین این چالش به وجود می‌آید که تولیدکننده قیمت و طول دوره تمدید وارانتهی را به چه صورت ارائه دهد. بدیهی است که هرچقدر تولیدکننده طول دوره تمدید وارانتهی را طولانی‌تر و قیمت آن را پایین‌تر ارائه دهد مشتریان بیشتری وارانتهی محصول خود را تمدید می‌کنند ولی حاشیه سود آن از فروش تمدید وارانتهی پایین‌تر می‌آید.

در دنیای واقعی سودآوری تولیدکنندگان محصولات تحت وارانتهی از سه منبع اصلی تأمین می‌شود: (۱) سود حاصل از فروش محصول اصلی، (۲) سود حاصل از فروش قطعات یدکی به محصولات از وارانتهی خارج شده و (۳) سود حاصل از فروش تمدید وارانتهی. این در حالی است که معمولاً در تحقیقات حوزه بهینه‌سازی وارانتهی نقش فروش قطعات یدکی به محصولات از وارانتهی خارج شده در سود تولیدکننده دیده نمی‌شود و بیشتر به مسئله کمینه‌سازی هزینه پرداخته می‌شود برای نمونه می‌توان به مقالات [۳]، [۶]–[۸] اشاره کرد.

در اینجا چالشی که وجود دارد محاسبه تعداد خرابی مربوط به محصولات تحت وارانتهی و از وارانتهی خارج شده در هر بازه زمانی از چرخه عمر محصول است. که در این تحقیق مدلی ارائه شده است که قابلیت محاسبه تعداد خرابی محصولات تحت وارانتهی پایه، وارانتهی تمدید شده و از وارانتهی خارج شده در هر بازه زمانی از چرخه عمر محصول را دارد تا تولیدکنندگان توانایی تخمین هزینه‌های وارانتهی محصولات و همچنین تخمین سود حاصل از فروش قطعات یدکی به محصولات از وارانتهی خارج شده را داشته باشند.

بدین ترتیب در این تحقیق هدف بهینه‌سازی سود تولیدکننده در بازه زمانی برنامه‌ریزی به‌واسطه قیمت‌گذاری پویای محصول در دوره‌های

⁴ Glickman and Berger

⁵ Non-renewing free replacement warranty

⁶ Menezes and Currim

¹ Base Warranty

² Extended Warranty

³ Blischke and Murthy

بر اساس نرخ خرابی آن‌ها مورد محاسبه قرار می‌گیرد.

۳- شرح مسئله

در این مسئله هدف بهینه‌سازی سود تولیدکننده با در نظر گرفتن سطح رضایت مشتریان در تأمین قطعات یدکی است. مؤلفه‌های درآمدی تولیدکننده عبارت‌اند از درآمد حاصل از فروش محصول اصلی، درآمد حاصل از فروش تمدید واریتی، درآمد حاصل از فروش قطعه یدکی به محصولات از واریتی خارج شده و هزینه‌های تولیدکننده عبارت است از هزینه تولید قطعه یدکی و هزینه انهدام قطعات یدکی خراب. قیمت محصول اصلی، طول دوره واریتی پایه، طول دوره تمدید واریتی و قیمت تمدید واریتی به‌عنوان متغیرهای تصمیم در مدل ارائه شده در نظر گرفته شده است. تقاضای محصول اصلی تابعی از زمان، طول دوره واریتی پایه و قیمت محصول است که با طول دوره واریتی پایه رابطه مستقیم و باقیمت محصول رابطه عکس دارد. احتمال خرید تمدید واریتی از سوی مشتری تابعی است که با طول دوره تمدید واریتی رابطه مستقیم و باقیمت آن رابطه عکس دارد. بدین ترتیب هر چه تولیدکننده مدت زمان بیشتری برای تمدید واریتی ارائه دهد مشتری با احتمال بالاتری تصمیم به خرید تمدید واریتی می‌نماید. همچنین با رویکردی نوین تعداد خرابی محصولات تحت واریتی و از واریتی خارج شده در هر دوره زمانی برنامه‌ریزی تولید قطعات یدکی مورد محاسبه قرار می‌گیرد.

۳-۱- فرضیات و نمادگذاری

فرضیات در نظر گرفته شده در این تحقیق به‌صورت زیر است:

۱. با توجه به ماهیت محصول، تابع توزیع پایایی محصولات از توزیع نمایی پیروی می‌کند.
۲. تمام شکایات در طول دوره واریتی پایه و واریتی تمدید شده معتبر است.
۳. سیاست واریتی پایه و واریتی تمدید شده، تجدید ناپذیر و با هزینه تعویض رایگان (FRW¹³) در نظر گرفته شده است.

همچنین نمادهای مورداستفاده شده در این تحقیق در جدول زیر نشان داده شده است:

پارامترها	توضیحات
T	طول چرخه عمر بر اساس دوره‌های برنامه‌ریزی تولید قطعات یدکی
g	تعداد دوره‌هایی که تولیدکننده تضمین می‌کند قطعات یدکی در بازار موجود است
W_{\min}^B	حداقل مقدار طول دوره واریتی پایه

مسئله بهینه‌سازی تک دوره‌ای واریتی برای دو نوع سیاست واریتی تعمیر رایگان و تعمیر با دریافت بخشی از هزینه محاسبه نمودند [۱۲].

لین و شاو^۷ از تئوری کنترل برای تعیین طول دوره واریتی پایه و فروش جمعی استفاده کردند [۱۳]. وو و همکاران مدلی جهت بهینه‌سازی قیمت و طول دوره واریتی با فرض سیاست واریتی تجدید پذیر و توزیع عمر نرمال، ارائه نمودند [۱۴]. کیم و پارک^۸ مدلی دومرحله‌ای با فرض سیاست تعویض رایگان ارائه دادند که به‌صورت یکپارچه تصمیمات قیمت، طول دوره واریتی پایه و کنترل موجودی قطعات یدکی را مورد بهینه‌سازی قرار می‌دهد [۱۵]. لین و همکاران با رویکرد تئوری کنترل مقادیر قیمت، طول دوره واریتی پایه و نرخ تولید را مورد بهینه‌سازی قراردادند [۱۶]. چن و همکاران نشان دادند که چگونه استراتژی‌های مختلف قیمت‌گذاری و طول دوره واریتی پایه می‌تواند بر زنجیره تأمین تأثیرگذار باشد [۱۷]. دارقت و همکاران با ارائه یک مدل ریاضی به بهینه‌سازی قیمت و طول دوره واریتی پایه با در نظر گرفتن سرویس‌های نگهداری و تعمیرات پرداختند [۱۸]. افصحی و همکاران با در نظر گرفتن تأثیر فروش قطعات یدکی به محصولات از واریتی خارج شده، با رویکرد مدل‌سازی ریاضی به بهینه‌سازی قیمت محصول، طول دوره واریتی پایه و کنترل موجودی قطعات یدکی پرداختند [۱۸].

به‌طور کلی می‌توان گفت تحقیقات نسبتاً کمتری در حوزه واریتی تمدید شده به نسبت واریتی پایه در پیشینه تحقیقات حوزه واریتی وجود دارد. پادمانابها^۹ مدلی جهت بهینه‌سازی طول دوره واریتی پایه و طول دوره واریتی تمدید شده با فرض بازار انحصاری ارائه دادند [۱۹]. لام و لام^{۱۰} با استفاده از تئوری بازی‌ها به یافتن سیاست بهینه واریتی تمدید شده پرداختند [۴]. هارتمن و لاکسانا^{۱۱} با رویکرد برنامه‌ریزی پویا به بهینه‌سازی استراتژی مشتریان در خرید تمدید واریتی بعد از به پایان رسیدن واریتی پایه پرداختند [۲۰]. سو و شن^{۱۲} سیاست‌های مختلف تمدید واریتی (تک بعدی و دو بعدی) را با در نظر گرفتن انواع مختلف تعمیر مورد تحلیل قرار دادند [۶].

علی‌رغم تحقیقات بسیاری که در حوزه بهینه‌سازی سیاست‌های واریتی صورت گرفته، هیچ تحقیقی مشاهده نمی‌شود که به‌صورت یکپارچه به بهینه‌سازی قیمت محصول، طول دوره واریتی پایه، طول دوره تمدید واریتی و قیمت تمدید واریتی بپردازد. در حالی که تصمیمات قیمت و واریتی پایه کاملاً با تصمیمات تمدید واریتی در ارتباط است و بر یکدیگر تأثیرگذارند.

در این مقاله هدف ارائه مدلی ریاضی که قیمت محصول و طول دوره واریتی را در بازه‌های مختلف زمانی چرخه عمر محصول به‌منظور بهینه‌سازی سود تولیدکننده تعیین کند. تقاضای محصول تابعی از قیمت، طول دوره واریتی و زمان در نظر گرفته شده و تعداد خرابی محصولات تحت واریتی و از واریتی خارج شده در بازه‌های مختلف زمانی

¹¹ Hartman and Laksana

¹² Su and Shen

¹³ Free Replacement Warranty

⁷ Lin and Shue

⁸ kim and park

⁹ Padmanabhan

¹⁰ Lam and Lam

تمام وارانتهی پایه بسته به شرایط وارانتهی تمدیدشده (قیمت و طول تمدید وارانتهی)، تصمیم به تمدید یا عدم تمدید وارانتهی می‌گیرند. در صورتی که مشتری وارانتهی پایه را برای محصول خود تمدید ننماید یا وارانتهی تمدیدشده آن به پایان برسد، محصول از وارانتهی خارج شده به حساب می‌آید. بدین ترتیب تولیدکننده می‌تواند از فروش قطعات یدکی به محصولات از وارانتهی خارج شده در صورت خرابی آن‌ها کسب درآمد کند. در اینجا تولیدکننده باید تخمین مناسبی از تعداد قطعه یدکی موردنیاز برای محصولات تحت وارانتهی پایه و تمدیدشده و از وارانتهی خارج شده داشته باشد.

این دوره برنامه‌ریزی به دوره‌های کوچک‌تری بانام دوره برنامه‌ریزی تولید قطعات یدکی تقسیم می‌شود. هر دوره برنامه‌ریزی تولید قطعات یدکی نیز به دوره‌های کوچک‌تری با عنوان دوره‌های قیمت‌گذاری تقسیم شده است. در هر دوره برنامه‌ریزی تولید ابتدا باید محاسبه کرد که چه تعداد از محصولات تولیدشده، تحت وارانتهی هستند و چه تعداد از وارانتهی خارج شده، چراکه در هر دوره زمانی همواره تعدادی محصول به محصولات تحت وارانتهی اضافه شده و تعدادی هم از وارانتهی خارج می‌شوند.

دوره برنامه‌ریزی از $T+g$ دوره برنامه‌ریزی تولید قطعات یدکی تشکیل شده است. تولید محصولات تا دوره T انجام می‌شود بعد از اتمام دوره T ، تولیدکننده تضمین می‌کند که در g دوره بعدی قطعه یدکی محصول در بازار موجود باشد. ولی تا دوره $T + W_B + W_E$ همچنان محصول تحت وارانتهی در بازار وجود خواهد داشت همچنین از دوره $T + W_B + W_E$ تا دوره $T+g$ تولیدکننده تعهد دارد که قطعات یدکی را در بازار فراهم نماید. به منظور پاسخ به نیاز قطعات یدکی بازار در هر دوره برنامه‌ریزی تولید قطعات یدکی باید تخمین مناسبی از تعداد قطعات یدکی مربوط به محصولات تحت وارانتهی و از وارانتهی خارج شده داشته باشد. مدل‌سازی مسئله

در این بخش مدل ریاضی مسئله بر اساس فرضیات و نمادگذاری معرفی شده در بخش ۳ مورد بحث قرار می‌گیرد.

۳-۲- تابع هدف

تابع هدف در این تحقیق بیشینه‌سازی سود تولیدکننده در نظر گرفته شده بطوریکه از اجزای درآمدی و هزینه‌ای مختلفی تشکیل شده است.

$$\max z = \sum_{t=1}^T (p_t - C_t) \cdot D(p_t, w_B) + \sum_{t=W_B+1}^{T+g} V_t \cdot D_t \quad (1)$$

$$+ \Lambda(w_E, p_{\Gamma_E}) \cdot \sum_{t=1}^T D(p_t, w_B) \cdot p_{\Gamma_E} - \sum_{t=1}^{T+g} C_{S_t} \cdot X_t$$

در رابطه ۱ اولین عبارت سود حاصل از فروش محصول اصلی را نشان می‌دهد که از حاصل ضرب سود هر محصول در مقدار تولید محصول در بازه‌های مختلف زمانی تشکیل شده است. مقدار تولید محصول تابعی از قیمت فروش محصول در آن بازه زمانی و طول دوره وارانتهی پایه در نظر گرفته شده که باقیمت رابطه عکس و با طول وارانتهی پایه رابطه

W_{\max}^B	حداکثر مقدار طول دوره وارانتهی پایه
W_{\min}^E	حداقل مقدار طول دوره وارانتهی تمدیدشده
W_{\max}^E	حداکثر مقدار طول دوره وارانتهی تمدیدشده
$p_{\Gamma_E}^{\min}$	حداقل مقدار قیمت وارانتهی تمدیدشده
$p_{\Gamma_E}^{\max}$	حداکثر مقدار قیمت وارانتهی تمدیدشده
P_0^{\min}	حداقل مقدار قیمت پایه محصول اصلی
P_0^{\max}	حداکثر مقدار قیمت پایه محصول اصلی
C_t	هزینه تولید محصول در دوره t ام
V_t	قیمت فروش قطعه یدکی در دوره t ام
X_t	مقدار تقاضای قطعه یدکی در دوره t ام
D_t	مقدار تقاضای قطعه یدکی برای محصولات از وارانتهی خارج شده در دوره t ام
α	ضریب تابع احتمال خرید وارانتهی تمدیدشده
U	
ε	ضریب قیمت در تابع تقاضا
λ	نرخ خرابی محصولات
ρ_w	پارامتر سطح سرویس برای محصولات تحت وارانتهی
ρ_{pw}	پارامتر سطح سرویس برای محصولات از وارانتهی خارج شده
S	حداکثر تقاضای بازار
متغیرهای تصمیم	توضیحات
P_0	قیمت فروش در دوره t ام
w_B	طول دوره وارانتهی پایه
w_E	طول دوره وارانتهی تمدیدشده
p_{Γ_E}	قیمت وارانتهی تمدیدشده

در این تحقیق دوره برنامه‌ریزی از دو بخش چرخه عمر محصول و دوره تضمین وجود قطعات یدکی تشکیل شده است. هر محصول بعد از

مستقیم دارد. عبارت دوم درآمد حاصل از فروش قطعه یدکی به محصولات از وارانتهی خارج شده است. عبارت سوم درآمد حاصل از فروش تمدید وارانتهی به مشتریان را نشان می‌دهد که هر مشتری با احتمالی مشخص که تابعی از قیمت و طول تمدید وارانتهی است، وارانتهی خود را تمدید می‌نماید. در نهایت عبارت پنجم هزینه تولید قطعات یدکی را نشان می‌دهد.

$$S(t) = \begin{cases} \frac{U}{(1 + \varphi e^{-\varepsilon U t})}, & 0 \leq t \leq \eta \\ \frac{U}{(\varepsilon U (t - \eta) + \theta)}, & \eta \leq t \leq T \end{cases} \quad (2)$$

$$\varphi = \frac{U}{D_0} - 1$$

$$\theta = 1 + \varphi e^{-\varepsilon U \eta}$$

$$p_t = p_0 - qt \quad (3)$$

$$D(p_t, w) = S(t) - k_1(p_t - P_{\min}) + k_2 w_B \quad (4)$$

$$\forall k_1 > 0, k_2 > 0.$$

$$\Theta(w_E, pr_E) = e^{-\frac{\alpha pr_E}{w_E}} \quad (5)$$

$$\Omega'_B = D(p_t, w_B) \cdot (1 - \Lambda(w_E, pr_E)) \quad (6)$$

$$\Omega'_{BE} = S(p_t, w_B) \cdot \Lambda(w_E, pr_E) \quad (7)$$

رابطه ۲ تقاضای محصول را بر اساس چرخه عمر محصول محاسبه می‌کند، در این رابطه η زمانی است که تابع تقاضای محصول در دوره بلوغ به بیشترین مقدار خود می‌رسد. بنابراین تقاضا تا η صعودی و بعد از آن نزولی است. رابطه ۳ تغییرات قیمت محصول اصلی را نسبت به زمان نشان می‌دهد که $q > 0$ نرخ کاهش قیمت در طول زمان است. رابطه ۴ تقاضای محصول اصلی را در بازه‌های زمانی مختلف نشان می‌دهد. در این رابطه تقاضا باقیمت محصول اصلی رابطه عکس و با طول دوره وارانتهی پایه رابطه مستقیم دارد. در این رابطه k_1 ضریب قیمت و k_2 ضریب وارانتهی پایه در تابع تقاضا است.

رابطه ۵ تابع احتمال خرید تمدید وارانتهی را توسط مشتریان نشان می‌دهد. این تابع با طول دوره وارانتهی تمدید شده رابطه مستقیم و باقیمت آن رابطه عکس دارد. رابطه ۶ تعداد مشتریانی را نشان می‌دهد که وارانتهی محصول خود را تمدید می‌نمایند و رابطه ۷ تعداد مشتریانی را محاسبه می‌کند که تمایلی به خرید تمدید وارانتهی برای محصول خود ندارند.

۳-۳- وضعیت محصولات

برای محاسبه تعداد خرابی محصولات در هر بازه زمانی، ابتدا نیاز است بدانیم چه تعداد محصول تحت وارانتهی و چه تعداد محصول از وارانتهی خارج شده در هر بازه زمانی وجود دارد. از آنجایی که تعداد محصولات تحت وارانتهی و از وارانتهی خارج شده در بازه‌های مختلف زمانی دائماً در حال تغییر است، نیاز است که وضعیت هر محصول در هر بازه زمانی مشخص شود. در هر بازه زمانی، بر اساس اینکه این دوره در چه زمانی تولید شده است، می‌تواند وضعیت تحت وارانتهی (پایه یا تمدید شده)

یا از وارانتهی خارج شده را داشته باشد. با توجه به اینکه تابع پایایی محصول نمایی در نظر گرفته شده، می‌توان احتمال خرابی هر محصول را در هر بازه زمانی از رابطه زیر محاسبه نمود.

$$\delta = P(f \leq t | f \geq t - 1) = 1 - e^{-\lambda} \quad (8)$$

حال تعداد خرابی محصولات تحت وارانتهی و از وارانتهی خارج شده در هر بازه زمانی از توزیع دوجمله‌ای پیروی می‌کند که در ادامه به تفصیل به آن پرداخته می‌شود.

۳-۴- تعداد خرابی محصولات تحت وارانتهی پایه و

تمدید شده

در اینجا یک متغیر تصادفی تعریف می‌شود با نماد y_{kt}^1 که متغیر تصادفی تعداد خرابی محصولات تحت وارانتهی پایه که در دوره k تولید شده و در دوره t خرابی می‌شوند، است. اگر فاصله زمانی بین دوره k و دوره t که $k < t$ است، کمتر از w_B باشد؛ قطعاً تمامی محصولاتی که در دوره k تولید شده تحت وارانتهی پایه هستند. بنابراین محصولات با این شرایط را وضعیت ۱ می‌نامیم. حال تابع توزیع y_{kt}^1 تابع دوجمله‌ای به صورت زیر است:

$$y_{kt}^1 \sim b(D(p_t, w_B), \delta) \quad (9)$$

حال تعداد کل خرابی‌های مربوط به محصولات تحت وارانتهی پایه در دوره t به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$P(y_{kt}^1 \leq n_{kt}^1) \geq \rho_w \Rightarrow \quad (10)$$

$$P\left(z < \frac{n_{kt}^1 + 0.5 - D(P_j, w_B) \cdot \delta}{\sqrt{D(P_j, w_B) \cdot \delta \cdot (1 - \delta)}}\right) \geq \rho_w \Rightarrow$$

$$n_{kt}^1 = \varphi^{-1}(\rho_w) \cdot \sqrt{D(P_j, w_B) \cdot \delta \cdot (1 - \delta)} + D(P_j, w_B) \cdot \delta - 0.5$$

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, T\}$$

$$\forall t \in \{k + 1, 2, \dots, T + w_B\}$$

$$nwb_t = \sum_{k=1}^t n_{kt}^1 \quad \forall t \in \{1, \dots, w_B\}. \quad (11)$$

$$N_{w_B}(t) = \sum_{k=t-w_B}^t n_{kt}^1 \quad \forall t \in \{w_B + 1, \dots, T + w_B\}. \quad (12)$$

رابطه ۱۰ حداکثر تعداد خرابی را با سطح سرویس ρ_w برای محصولات تحت وارانتهی پایه که در دوره k تولید شده و در دوره t خرابی می‌شوند را با استفاده از مفهوم تسطیح پیوستگی محاسبه می‌نماید. رابطه ۱۱ و ۱۲ هم حداکثر تعداد کل خرابی‌های محصولات تحت وارانتهی پایه را در دوره t محاسبه می‌کند.

$w_B + 1$ اولین دوره‌ای است که تقاضای قطعه یدکی برای محصولات تحت وارانتهی تمدید شده به وجود می‌آید و تا دوره $T + w_B + w_E$ تقاضای قطعه یدکی برای محصولات تحت وارانتهی تمدید شده وجود دارد. متغیر y_{kt}^2 به عنوان متغیر تصادفی تعداد خرابی محصولات تحت وارانتهی تمدید شده که در دوره k تولید شده و در دوره t خرابی می‌شوند، است. رابطه ۱۳ توزیع این متغیر تصادفی را نشان می‌دهد.

$$P(y_{kt}^4 \leq n_{kt}^4) \geq \rho_o \Rightarrow \quad (19)$$

$$n_{kt}^4 = \varphi^{-1}(\rho_w) \cdot \sqrt{D(p_t, w_B) \cdot \delta \cdot (1-\delta) + D(p_t, w_B) \cdot \delta} - 0.5$$

$$\forall k \in \{w_B + w_E + 1, \dots, T\}$$

$$\forall t \in \{k + 1, 2, \dots, T + g\}$$

$$mo_t = \sum_{k=1}^{t-w_B+w_E} n_{kt}^4 \quad (20)$$

$$\forall t \in \{w_B + w_E + 1, \dots, T + w_B + w_E\}.$$

بدیهی است که بعد از دوره $T + w_B + w_E$ تمامی محصولات از وارانتهی خارج می‌شوند، پس از دوره $T + w_B + w_E$ تا دوره $T + g$ به تعداد کل محصولات تولیدشده یعنی $TP = \sum_{t=1}^T D(p_t, w_B)$ وارانتهی خارج شده وجود دارد. روابط زیر حداکثر تعداد خرابی را برای محصولات از وارانتهی خارج شده در بازه زمانی ذکر شده محاسبه می‌کند.

$$P(y_t^5 \leq n_t^5) \geq \rho_o \Rightarrow \quad (21)$$

$$n_t^5 = \varphi^{-1}(\rho_w) \cdot \sqrt{TP \cdot \delta \cdot (1-\delta) + TP \cdot \delta} - 0.5$$

$$\forall t \in \{T + w_B + w_E + 1, \dots, T + g\}$$

بعدازاینکه به واسطه روابط فوق تعداد خرابی محصولات تحت وارانتهی و از وارانتهی خارج شده در هر دوره محاسبه شد، تعداد کل خرابی‌ها (برای وضعیت‌های مختلف) برای محصولات تحت وارانتهی با رابطه ۲۲ محاسبه می‌شود. همچنین رابطه ۲۳ تعداد کل قطعات یدکی که به محصولات از وارانتهی خارج شده به فروش می‌رسد را مورد محاسبه قرار می‌دهد.

$$X_t = nwb_t + nwe_t + mo_t + n_t^5 \quad (22)$$

$$\forall t \in \{1, 2, \dots, T + g\}$$

$$D_t = mo_t + n_t^5 \quad (23)$$

$$\forall t \in \{w_B + 1, \dots, T + g\}$$

۳-۶- مدل ریاضی مسئله

در این بخش مدل ریاضی مسئله به همراه محدودیت‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد.

$$\max z = \sum_{t=1}^T (p_t - c_t) \cdot D(p_t, w_B) + \sum_{t=w_B+1}^{T+g} V_t \cdot D_t \quad (24)$$

$$+ \Lambda(\omega_E, p r_E) \cdot \sum_{t=1}^T D(p_t, w_B) \cdot pr_E - \sum_{t=1}^{T+g} Cs_t \cdot X_t$$

$$P_{\min} \leq p_0 \leq P_{\max} \quad (25)$$

$$W_{\min}^B \leq w_B \leq W_{\max}^B, \quad (26)$$

$$W_{\min}^E \leq w_E \leq W_{\max}^E, \quad (27)$$

$$Pr_{\min}^E \leq pr_E \leq Pr_{\max}^E, \quad (28)$$

رابطه ۲۱ تابع هدف بیشینه‌سازی سود تولیدکننده است. رابطه ۲۴ تا ۲۸ به ترتیب محدودیت حد بالا و حد پایین برای قیمت اولیه محصولات، وارانتهی پایه، وارانتهی تمدیدشده و قیمت وارانتهی تمدیدشده است.

$$y_{kt}^2 \sim b(\Omega_{BE}^t, \delta) \quad (13)$$

رابطه ۱۴ حداکثر تعداد خرابی محصولات تحت وارانتهی تمدیدشده را محاسبه می‌کند.

$$P(y_{kt}^2 \leq n_{kt}^2) \geq \rho_w \Rightarrow \quad (14)$$

$$n_{kt}^2 = \varphi^{-1}(\rho_w) \cdot \sqrt{\Omega_{BE}^t \cdot \delta \cdot (1-\delta) + \Omega_{BE}^t \cdot \delta} - 0.5$$

$$\forall k \in \{w_B + 1, \dots, T\}$$

$$\forall t \in \{k + 1, 2, \dots, T + w_B + w_E\}$$

$$N_{w_E}(t) = \sum_{k=t-w_B-w_E}^t n_{kt}^2 \quad (15)$$

$$\forall t \in \{w_B + 1, \dots, T + w_B + w_E\}.$$

رابطه ۱۵ حداکثر تعداد خرابی در دوره t در رابطه با محصولاتی که تحت وارانتهی تمدیدشده هستند را محاسبه می‌کند.

۳-۵- تعداد خرابی محصولات از وارانتهی خارج شده

اگر وارانتهی پایه محصولی که در دوره اول تولیدشده، تمدید نشود، دوره $w_B + 1$ اولین دوره‌ای است که خرابی مربوط به محصولات از وارانتهی خارج شده به وجود می‌آید. از دوره $T + w_B + w_E$ به بعد تمامی محصولاتی که در بازار وجود دارند از وارانتهی خارج می‌شوند و تا پایان دوره برنامه‌ریزی تولیدکننده می‌بایست تقاضای قطعات یدکی محصولات از وارانتهی خارج شده را برآورده نماید. متغیر y_{kt}^3 نیز به‌عنوان متغیر تصادفی حداکثر تعداد خرابی محصولات از وارانتهی خارج شده برای محصولاتی که وارانتهی خود را تمدید نکرده‌اند، تعریف می‌شود.

$$y_{kt}^3 \sim b(\Omega_B^t, \delta) \quad (16)$$

$$P(y_{kt}^3 \leq n_{kt}^3) \geq \rho_o \Rightarrow \quad (17)$$

$$n_{kt}^3 = \varphi^{-1}(\rho_w) \cdot \sqrt{\Omega_B^t \cdot \delta \cdot (1-\delta) + \Omega_B^t \cdot \delta} - 0.5$$

$$\forall k \in \{w_B + 1, \dots, T\}$$

$$\forall t \in \{k + 1, 2, \dots, T + w_B + w_E\}$$

$$nwe_t = \sum_{k=t-w_B}^t n_{kt}^3 \quad (18)$$

$$\forall t \in \{w_B + 1, \dots, T + w_B + w_E\}.$$

رابطه ۱۶ حداکثر تعداد خرابی برای محصولاتی که وارانتهی خود را تمدید نکرده‌اند محاسبه می‌کند. رابطه ۱۷ هم مجموع تعداد خرابی را برای محصولاتی که به واسطه عدم تمدید از وارانتهی خارج شده‌اند را محاسبه می‌نماید.

برای تعداد خرابی محصولاتی که به‌طور حتم از وارانتهی خارج شده‌اند (بدین معنی که از زمان فروش آن‌ها حداقل $w_B + w_E$ دوره زمانی گذشته باشد)، متغیر تصادفی y_{kt}^4 تعریف شده است که هم توزیع متغیر تصادفی تعداد خرابی‌های محصولات تحت وارانتهی پایه است. بدین ترتیب حداکثر تعداد خرابی مربوط به محصولات از وارانتهی خارج شده به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

۴- روش حل

در این تحقیق از دو روش فرا ابتکاری الگوریتم قهرمانی در لیگ ورزشی^{۱۴} و الگوریتم ازدحام ذرات توسعه یافته برای حل مدل پیشنهادی استفاده شده است.

روش حل این مسئله بدین صورت است که با استفاده از الگوریتم فرا ابتکاری ازدحام ذرات مقادیر بهینه قیمت و طول دوره واریانتی به منظور بهینه کردن سود تولیدکننده به دست می‌آید. در ادامه ابتدا بررسی الگوریتم‌های فرا ابتکاری پرداخته می‌شود و سپس نحوه نمایش جواب بیان در این الگوریتم‌ها مورد بحث قرار می‌گیرد.

۴-۱- الگوریتم قهرمانی در لیگ ورزشی

الگوریتم قهرمانی در لیگ‌های ورزشی، یک الگوریتم جمعیت محور برای جستجوی سراسری در فضای پیوسته، با الهام از مسابقات ورزشی در جهان واقعیت، نخستین بار در سال ۲۰۰۹ توسط دکتر کاشان ارائه شد [۲۱]. در خلال این الگوریتم راه‌حل‌های متفاوتی که می‌توان به یک مسئله داد بر اساس میزان برازندگی‌شان (مقادیر تابع هدفشان)، مقایسه و هر کدام بهبود داده شده و نهایتاً راه‌حلی نزدیک به بهینه انتخاب می‌شود. تعدادی تیم (استعاره از جواب‌های در حال بررسی) در قالب یک لیگ (استعاره از جمعیت جواب‌های شدنی)، طی چند هفته (استعاره از تعداد مراحل ارزیابی در یک تکرار از الگوریتم) به رقابت با یکدیگر پرداخته و دوبه‌دو باهم مسابقه می‌دهند. بر مبنای قدرت بازی (استعاره از میزان برازندگی یا مقدار تابع هدف بردار حل) حاصل از آرایش تیمی (استعاره از کد آن جواب شدنی برای مسئله) گروه‌های برنده و بازنده مشخص می‌شوند (مساوی مجاز نیست) [۲۲]. در هر هفته هر تیم توسط مربی‌اش با فرآیند تحلیل مصنوعی بازی‌های هفته‌ی قبل و با کمک از بهترین آرایش یافت شده تا آن زمان، به آرایش تیمی جدیدی می‌رسد (استعاره از ایجاد جواب‌های شدنی جدید). بدین ترتیب رقابت برای قهرمانی به مدت چندین فصل (استعاره از تعداد تکرارهای الگوریتم) ادامه خواهد یافت. تعداد فصل‌ها (S) و تیم‌ها (L) پارامترهایی قابل تنظیم هستند که تغییر آن‌ها در پاسخ نهایی الگوریتم تأثیر مستقیم دارد.

فرضیاتی که در LCA مبنای قرار می‌گیرند عبارت‌اند از:

فرض ۱: تیم قوی‌تر احتمال برد بیشتری نسبت به تیم ضعیف‌تر دارد، اما تیم ضعیف‌تر، هم چنان، شانس بردن تیم قوی‌تر را دارد.

فرض ۲: احتمال برد یک تیم یا باخت تیم مقابل از نقطه نظر هر دو تیم یکسان است.

فرض ۳: نتیجه‌ی بازی‌ها تنها به صورت برد یا باخت بوده و امکان تساوی وجود ندارد.

فرض ۴: تمرکز تیم‌ها بر بازی هفته‌ی آتی خود بوده و تمامی تغییرات در آرایش تیمی بر مبنای وقایع رخ داده در هفته‌ی قبل است. آرایش اتخاذ شونده بر مبنای بهترین آرایش تیمی یافت شده تا آن لحظه صورت

می‌پذیرد.

در ادامه توضیحات مربوط به الگوریتم LCA در ۳ مرحله تکمیل می‌شود: (۱) ایجاد برنامه بازی‌های لیگ، (۲) نحوه تعیین تیم برنده در یک بازی و (۳) نحوه تغییر آرایش تیمی با استفاده از تحلیل SWOT.

۴-۱-۱- ایجاد برنامه‌ی بازی‌های لیگ

جهت تولید یک برنامه‌ی زمانی برای مسابقات لیگ، ابتدا فرض می‌شود هر دو تیم در طول فصل فقط یک بازی (تک رفتی) باهم انجام دهند. در پایان فصل هر یک از L تیم حاضر L-1 مسابقه انجام خواهد داد که این یعنی آن‌که در مجموع $\frac{L(L-1)}{2}$ بازی در طول هر فصل صورت می‌پذیرد.

۴-۱-۲- تعیین تیم برنده در یک بازی

برنده‌ی یک بازی بر اساس مقایسه‌ی یک عدد تصادفی تولید شده با مقدار تابعی به دست می‌آید که با میزان قدرت آن تیم رابطه‌ی مستقیم دارد. یعنی شانس برد تیم قوی‌تر بیشتر است ولی در عین حال، شانس برنده شدن در بازی با یک تیم قوی‌تر، هم چنان باقی است. آرایش تیمی و میزان قدرت تیم i در هفته‌ی t را به ترتیب با X_i^t و $f(X_i^t)$ نشان می‌دهند. فرض کنید، تیم‌های i و j در هفته‌ی t با یکدیگر مسابقه می‌دهند. در این صورت احتمال برد تیم i در هفته‌ی t که با p_i^t نشان داده می‌شود، از فرمول زیر به دست می‌آید.

$$p_i^t = \frac{f(x_i^t) - f}{f(x_i^t) + f(x_j^t) - 2f} \quad (29)$$

۴-۱-۳- تغییر در آرایش تیمی

چهار راهبرد مختلف جهت مقابله با تیم حریف، برای هر تیم قابل اتخاذ است، از ترکیب دوتایی از چهار نظرگاه SWOT پدید می‌آیند. این ترکیب‌ها عبارت‌اند از W/O، S/O، S/T و W/T که هر یک معادلات منحصر به خودشان را دارا هستند. در این معادلات i، j و k به ترتیب عبارت‌اند از اندیس‌های تیم خودی، تیم حریف در هفته جاری (t+1)، تیم حریف در هفته گذشته (t) و تیمی که در هفته گذشته (t) با حریف کنونی مسابقه داده است (i=1, ..., L). آرایش تیم i در هفته t با $X_i^t = (x_{i1}^t, \dots, x_{im}^t)$ و بهترین آرایش تیمی به دست آمده تا هفته‌ی t (حاکمی از بهترین مقدار به دست آمده تابع هدف) با $B_i^t = (b_{i1}^t, \dots, b_{im}^t)$ نشان داده می‌شوند. در زیر برای نشان دادن یک مؤلفه از هر بردار بالا از نماد d استفاده شده است (d=1, ..., n).

اگر هر دو تیم i و j در هفته t برنده بازی‌های خود با تیم‌های j و k باشند، آرایش تیمی i در هفته‌ی t+1 با استراتژی S/T به صورت زیر محاسبه می‌شود:

در مدل اولیه الگوریتم در هر مرحله بردار سرعت و موقعیت هر ذره i به ترتیب با روابط ۲۹ و ۳۰ به‌روزرسانی می‌شود:

$$v_i^{k+1} \leftarrow w \times v_i^k + c_1 \times r_1 \times (p_{best}^k - x_i^k) + c_2 \times r_2 \times (g_{best}^k - x_i^k) \quad (34)$$

$$\bar{x}_i \leftarrow \bar{x}_i + \bar{v}_i \quad (35)$$

در رابطه ۳۴، w پارامتر کنترل سرعت در نظر گرفته می‌شود و c_1 و c_2 مقادیر ثابت شتاب و \bar{r}_1 و \bar{r}_2 بردار اعداد تصادفی در بازه $[0,1]$ است. همچنین \bar{p}_i بردار بهترین موقعیت به‌دست‌آمده توسط ذره i و p_{best}^k بردار بهترین موقعیت به‌دست‌آمده توسط ذره i و g_{best}^k بردار بهترین موقعیت به‌دست‌آمده توسط تمام ذرات هستند.

در این تحقیق از الگوریتم ازدحام ذرات توسعه‌یافته است استفاده می‌شود که اولین بار در سال ۲۰۱۷ توسط شفیع الله خان و همکاران معرفی شد [۲۵]. در این رویکرد مقادیر پارامترهایی که به‌صورت ثابت در الگوریتم کلاسیک PSO در نظر گرفته می‌شد به‌صورت پویا تغییر می‌کند. بدین ترتیب پارامتر کنترل سرعت به‌صورت زیر تغییر می‌کند:

$$w_i = 1 - (I - e - \tan(\text{rand}() / 2)) / h \quad (36)$$

بدین ترتیب هر ذره توانایی جستجوی منحصر به فردی پیدا می‌کند.

در رابطه ۳۶، i اندیس n مین ذره و h نشان‌دهنده اندازه جمعیت است. همچنین پارامترهای c_1 و c_2 به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$c_1 = \text{rand} \times \exp(1) \quad (37)$$

$$c_2 = \exp(1) - \text{rand} \quad (38)$$

به‌واسطه رابطه ۳۲ و ۳۳ اگر عدد تصادفی تولید شده کوچک باشد، مقدار c_1 کوچک و c_2 بزرگ می‌شود بنابراین قدرت واگرایی هر ذره بیشتر می‌شود. همچنین اگر عدد تصادفی تولید شده بزرگ باشد، الگوریتم به سمت جواب محلی همگرا می‌شود.

۴-۳- روش نمایش جواب

همان‌طور که اشاره شد، متغیرهای تصمیم در این تحقیق عبارت‌اند از: قیمت اولیه محصول اصلی، طول دوره وارانتهی پایه، طول دوره وارانتهی تمدید شده و قیمت وارانتهی تمدید شده.

در اینجا مقادیر قیمت محصول اصلی و قیمت وارانتهی تمدید شده به‌عنوان متغیر تصادفی پیوسته و طول دوره وارانتهی و طول دوره وارانتهی تمدید شده به‌صورت گسسته در نظر گرفته می‌شود.

P_0	w_B	w_E	p_E^r
-------	-------	-------	---------

شکل (۱) نحوه نمایش جواب

۵- مطالعه موردی

به‌منظور مشاهده نحوه اثرگذاری متغیرهای مسئله بر سودآوری تولیدکننده، از داده‌های شرکت گل‌دیران برای بهینه‌سازی سود این شرکت در تولید محصول LED استفاده شده است.

$$x_{id}^{t+1} = b_{id}^t + y_{id}^t (c_1 r_1 (x_{id}^t - x_{kd}^t) + c_1 r_2 (x_{id}^t - x_{jd}^t))$$

$$\text{if } f(x_i^t) > f(x_j^t) \cap f(x_i^t) > f(x_k^t) \quad (30)$$

$$\forall d \in \{1, 2, \dots, n\},$$

اگر در هفته t تیم i از z برده باشد و تیم l به k باخته باشد، آرایش تیمی i در هفته $t+1$ با استراتژی S/O طراحی گردیده و به‌صورت زیر خواهد بود:

$$x_{id}^{t+1} = b_{id}^t + y_{id}^t (c_2 r_1 (x_{id}^t - x_{kd}^t) + c_1 r_2 (x_{id}^t - x_{jd}^t))$$

$$\text{if } f(x_i^t) > f(x_j^t) \cap f(x_k^t) > f(x_l^t) \quad (31)$$

$$\forall d \in \{1, 2, \dots, n\},$$

اگر در هفته t تیم i از z باخته و تیم l به k برده باشند، آرایش تیمی i در هفته $t+1$ با استراتژی W/O طراحی گردیده و به‌صورت زیر خواهد بود:

$$x_{id}^{t+1} = b_{id}^t + y_{id}^t (c_1 r_1 (x_{id}^t - x_{kd}^t) + c_2 r_2 (x_{id}^t - x_{jd}^t))$$

$$\text{if } f(x_j^t) > f(x_i^t) \cap f(x_l^t) > f(x_k^t) \quad (32)$$

$$\forall d \in \{1, 2, \dots, n\},$$

اگر هر دو تیم i و l در هفته t بازنده‌ی بازی‌های خود با تیم‌های z و k باشند، آرایش تیمی i در هفته $t+1$ با استراتژی W/O به‌صورت زیر است:

$$x_{id}^{t+1} = b_{id}^t + y_{id}^t (c_2 r_1 (x_{id}^t - x_{kd}^t) + c_2 r_2 (x_{id}^t - x_{jd}^t))$$

$$\text{if } f(x_j^t) > f(x_i^t) \cap f(x_k^t) > f(x_l^t) \quad (33)$$

$$\forall d \in \{1, 2, \dots, n\},$$

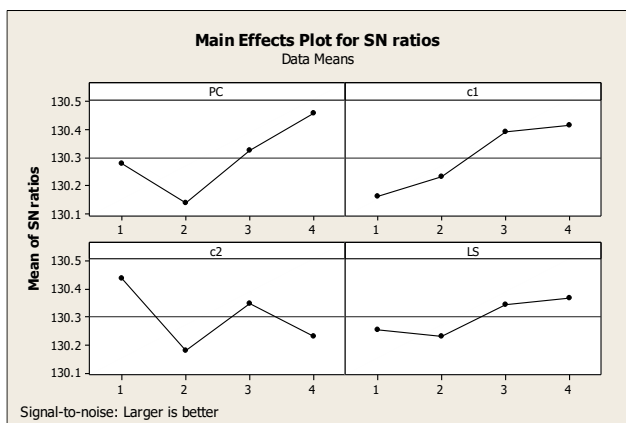
در معادلات بالا c_1 و c_2 ضرایب ثابت دورکننده و نزدیک کننده، به ترتیب در بازه‌های $[0,6]$ و $[0,9,1,1]$ و r_1 و r_2 اعداد تصادفی یکنواخت در بازه $[0,1]$ و y_{id}^t مؤلفه‌ی بردار باینری تصادفی است که مشخص می‌سازد l مین عنصر از بردار x_{id}^{t+1} تغییر می‌کند یا خیر. برای همه‌ی تیم‌ها به همین شکل معادله تعریف می‌شود. تعداد یک‌های این بردار باینری از یک توزیع تصادفی هندسی با پارامتر p_c تبعیت می‌کند.

۴-۲- الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات توسعه یافته

الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات (PSO) توسط کندی و ابراهیم طی دو مقاله [۲۳]، [۲۴] با الهام از هوش جمعی پرندگان برای مسائل بهینه‌سازی که ماهیت پیوسته بر جواب‌های آن‌ها حاکم است، ارائه شد. در این الگوریتم مانند الگوریتم‌های دیگر، جمعیت اولیه به‌صورت تصادفی ایجاد می‌شود. هر ذره بهترین خاطره مکانی خود را که p_{best} نام دارد و بهترین خاطره مکانی جمعیت فعلی را که g_{best} نام دارد به خاطر می‌سپارد.

در هر مرحله با تغییر هر یک از بردارهای سرعت v_i ، هر ذره i به سمت موقعیت‌های متناظر با مقادیر p_{best} و g_{best} حرکت می‌کند و اگر به موقعیت‌های بهتری رسید آن را به‌روزرسانی می‌نماید. بردار سرعت v_i در بازه $[-V_{max}, V_{max}]$ قرار دارد که در آن V_{max} به‌وسیله طراح الگوریتم تعیین می‌شود.

آزمایش با محاسبه شاخص سیگنال به نویز به دست می‌آید. شکل زیر تحلیل این شاخص را نشان می‌دهد.



شکل (۲) میانگین مقدار S/N برای سطوح هر فاکتور

بدین ترتیب بر اساس شکل ۱ سطوح منتخب برای الگوریتم LCA عبارت است از: $PC=0.9$, $C_1=1.5$, $C_2=0.2$ و $League-Size=50$. الگوریتم PSO توسعه یافته که در این تحقیق مورد استفاده قرار گرفته فقط به پارامتر جمعیت اولیه نیاز دارد، از این رو جمعیت اولیه ۴۰ در نظر گرفته شده است. همچنین هر دو الگوریتم به تعداد ۵۰۰۰ جواب را به عنوان شرط توقف مورد حل قرار می‌دهند. با استفاده از الگوریتم پیشنهادی هر مسئله 10 با حل شده و مقدار بهترین جواب و میانگین جواب‌ها به همراه مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم در جدول ۲ برای مقادیر مختلف T و g نوشته شده است.

۲-۵- محاسبه سود و طول دوره وارانتهی بهینه برای

مقادیر مختلف T و g

جدول ۳ مقدار بهینه طول دوره وارانتهی و سود شرکت LG را برای مقادیر مختلف چرخه عمر (T) و بازه‌های زمانی تضمین وجود قطعات یدکی (g) نشان می‌دهد. با توجه به داده‌های شرکت و مراکز تعمیر مجاز نرخ خرابی ۰,۰۷ در نظر گرفته شده است. با توجه به اینکه هم‌اکنون شرکت محصولات خود را با دو سال وارانتهی به فروش می‌رساند، این تحلیل می‌تواند مفید باشد که اگر چرخه عمر محصولی تغییر کند شرکت باید نسبت به استراتژی قیمت‌گذاری و تعیین طول دوره وارانتهی تجدیدنظر نماید.

این مسئله با استفاده از نرم‌افزار متلب و رایانه‌ای با مشخصات Pentium 4 with 8GB RAM and Corei7 3.61GHz CPU مورد حل قرار گرفت

گلدیران نماینده رسمی لوازم خانگی، صوتی و تصویری، موبایل، نمایشگرهای تجاری و صنعتی، دستگاه‌ها و محصولات تهویه خانگی و صنعتی، دستگاه‌ها و محصولات تولید برق خورشیدی و محصولات روشنایی LED شرکت ال جی در ایران بوده و علاوه بر ارائه محصول نهایی، راهکارهای تجاری را بنا به سلیقه و نیاز مشتریان ارائه می‌نماید. این شرکت از ابتدای فعالیت از ۲۰ سال پیش تاکنون همواره تلاش نموده در عرضه کالا و خدمات تکمیلی مورد نیاز، خشنودی مستمر مشتری را مدنظر قرار داده و کالاها را با قیمتی مناسب و غیرقابل رقابت در شبکه توزیع گسترده خود در سراسر کشور عرضه نماید. اطلاعات مربوط به مثال موردی در جدول ۱ نمایش داده شده است.

جدول (۱): پارامترهای مسئله

P_0^{\min}	P_0^{\max}	W_{\min}^B	W_{\max}^B
۶۰۰	۶۶۰	۱۶	۲۲
ρ_w	ρ_{pw}	pr_E^{\min}	pr_E^{\max}
۰,۹	۰,۸۵	۹۰	۱۱۰
W_{\min}^E	W_{\max}^E	V_0	C_0
۱۰	۱۵	۲۳۰	۵۰۰
α	q	λ	CS_0
۰,۰۲	۰,۰۱	۰,۰۰۴	۱۸۰

با توجه به اینکه در دنیای واقعی تورم بر قیمت قطعه یدکی، هزینه تولید محصول اصلی و قطعه یدکی تأثیرگذار است، روابط زیر تأثیر تورم را بر این پارامترها نشان می‌دهد.

$$C_t = C_0 \cdot (1 + v)^t \quad \forall j \in \{1, \dots, T, I\}. \quad (33)$$

$$CS_t = CS_0 \cdot (1 + \tau)^t \quad \forall t \in \{1, \dots, T + g\}. \quad (34)$$

$$V_t = V_0 \cdot (1 + \tau)^t \quad (35)$$

۵-۱-۱- تنظیم پارامترهای الگوریتم قهرمانی در لیگ

ورزشی (LCA) با استفاده از طرح تاگوچی

قبل از حل مدل، باید پارامترهای اصلی الگوریتم فر ابتکاری برای مسئله موردنظر مورد تنظیم قرار گیرد. از این رو در این تحقیق از روش طرح تاگوچی برای دستیابی به بهترین ترکیب پارامترهای الگوریتم مورد استفاده قرار گرفته شده است. جدول زیر پارامترها و سطوح هر یک را نشان می‌دهد.

جدول (۲) سطوح مختلف پارامترها برای الگوریتم LCA

سطح ۴	سطح ۳	سطح ۲	سطح ۱	پارامترهای الگوریتم
۰,۹	۰,۶	۰,۲۵	-۱	PC
۱,۵	۱	۰,۵	۰,۲	c1
۱,۵	۱	۰,۵	۰,۲	c2
۵۰	۳۰	۲۰	۱۰	League-Size

بر اساس جدول ۲، از طرح L16 استفاده شده است. شرایط بهینه

جدول (۳): مقادیر بهینه سود و طول دوره وارانتهی

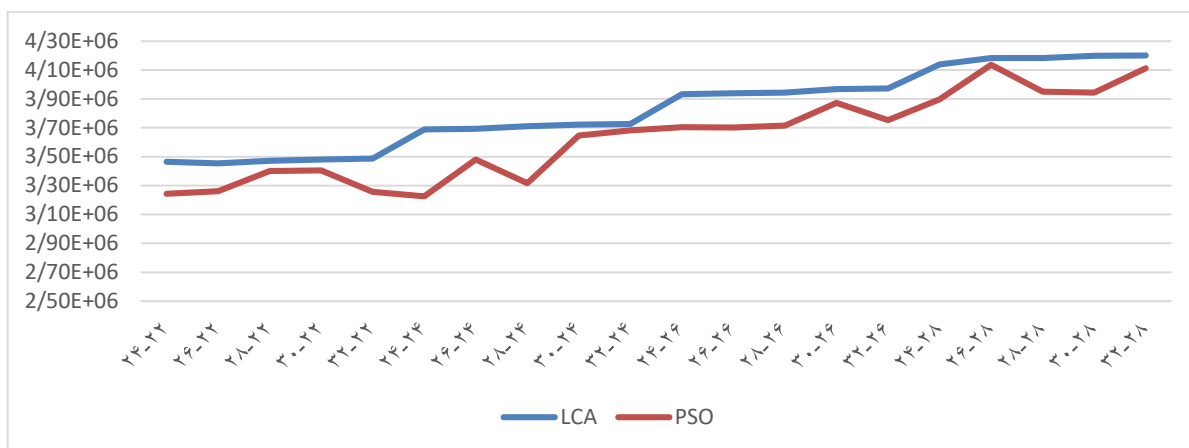
مقادیر بهینه با الگوریتم PSO						مقادیر بهینه با الگوریتم LCA							
<i>Best sol</i>	<i>mean</i>	<i>pre</i>	<i>WE</i>	<i>WB</i>	<i>p0</i>	<i>Best sol</i>	<i>mean</i>	<i>pre</i>	<i>WE</i>	<i>WB</i>	<i>p0</i>	<i>g</i>	<i>T</i>
۳۲۴۲۵۵۰	۳۱۴۵۲۷۳	۱۱۰	۱۵	۲۱	۶۵۹	۳۴۶۵۱۱۵	۳۳۲۶۵۱۰	۱۰۹	۱۴	۲۲	۶۵۹	۲۴	۲۲
۳۲۶۱۳۱۸	۳۱۶۳۴۷۹	۱۰۸	۱۳	۲۱	۶۵۹	۳۴۵۳۹۵۱	۳۳۱۵۷۹۳	۱۰۸	۱۲	۲۲	۶۵۸	۲۶	
۳۴۰۰۷۸۷	۳۲۹۸۷۶۴	۱۰۷	۱۳	۲۱	۶۵۸	۳۴۷۲۲۷۰	۳۳۳۳۳۷۹	۱۰۸	۱۳	۲۱	۶۵۷	۲۸	
۳۴۰۴۳۹۷	۱۷۰۲۱۹۸	۱۰۶	۱۳	۲۰	۶۵۷	۳۴۸۰۳۰۶	۳۳۴۱۰۹۳	۱۰۷	۱۳	۲۰	۶۵۶	۳۰	
۳۲۵۶۳۴۹	۱۶۲۸۱۷۴	۱۰۵	۱۲	۱۹	۶۵۷	۳۴۸۷۱۷۲	۳۳۸۲۵۵۶	۱۰۷	۱۳	۲۰	۶۵۶	۳۲	
۳۲۲۵۳۱۳	۱۶۱۲۶۵۶	۱۰۷	۱۴	۲۱	۶۵۸	۳۶۸۹۱۶۵	۳۵۷۸۴۹۰	۱۰۶	۱۲	۲۲	۶۵۷	۲۴	۲۴
۳۴۷۹۶۳۶	۱۷۳۹۸۱۸	۱۰۵	۱۲	۲۱	۶۵۷	۳۶۹۳۴۰۱	۳۵۸۲۵۹۹	۱۰۵	۱۰	۲۱	۶۵۷	۲۶	
۳۳۱۷۳۹۶	۱۶۵۸۶۹۷	۱۰۴	۱۱	۲۰	۶۵۷	۳۷۱۰۶۴۱	۳۵۶۲۲۱۵	۱۰۳	۹	۲۰	۶۵۶	۲۸	
۳۶۴۷۴۸۵	۲۵۳۸۰۶۱	۱۰۳	۱۱	۱۹	۶۵۷	۳۷۲۰۸۴۷	۳۴۹۷۵۹۶	۱۰۲	۱۰	۱۹	۶۵۶	۳۰	
۳۶۸۰۹۵۶	۳۴۶۰۰۹۸	۱۰۳	۱۱	۱۹	۶۵۵	۳۷۲۷۳۱۸	۳۵۰۳۶۷۸	۱۰۲	۱۰	۱۹	۶۵۵	۳۲	
۳۷۰۴۱۶۷	۳۵۵۵۹۹۹	۱۰۶	۱۳	۲۱	۶۵۷	۳۹۳۲۶۵۰	۳۶۹۶۶۹۱	۱۰۳	۱۰	۲۱	۶۵۷	۲۴	۲۶
۳۷۰۲۴۵۰	۳۵۵۴۳۵۲	۱۰۴	۱۲	۲۰	۶۵۶	۳۹۳۸۸۲۹	۳۷۰۲۴۹۹	۱۰۲	۱۰	۲۰	۶۵۶	۲۶	
۳۲۱۴۲۴۲	۳۰۸۵۶۷۳	۱۰۴	۱۱	۱۹	۶۵۵	۳۹۴۲۷۳۱	۳۷۰۶۱۶۶	۱۰۰	۱۰	۱۹	۶۵۴	۲۸	
۳۸۷۲۸۶۹	۳۶۴۰۴۹۶	۱۰۱	۱۰	۱۹	۶۵۴	۳۹۶۸۴۷۹	۳۸۰۹۷۴۰	۱۰۰	۹	۱۸	۶۵۴	۳۰	
۳۷۵۲۸۸۴	۳۵۲۷۷۱۱	۱۰۰	۱۰	۱۸	۶۵۳	۳۹۷۲۲۷۸	۳۶۹۴۲۱۹	۹۸	۹	۱۸	۶۵۲	۳۲	
۳۸۹۷۵۳۸	۳۶۲۴۷۱۰	۱۰۳	۱۲	۲۰	۶۵۶	۴۱۳۹۱۱۴	۳۸۴۹۳۷۶	۱۰۰	۱۰	۲۰	۶۵۵	۲۴	۲۸
۴۱۳۵۱۵۴	۳۸۴۵۶۹۳	۱۰۲	۱۱	۱۸	۶۵۵	۴۱۸۲۸۰۱	۳۸۹۰۰۰۵	۱۰۰	۹	۱۹	۶۵۴	۲۶	
۳۹۵۰۲۱۸	۳۶۷۳۷۰۲	۹۹	۱۱	۱۸	۶۵۲	۴۱۸۲۹۶۲	۴۰۱۵۶۴۳	۹۷	۹	۱۸	۶۵۲	۲۸	
۳۹۴۲۹۵۳	۳۶۶۶۹۴۷	۹۹	۱۰	۱۷	۶۵۰	۴۱۹۸۲۳۱	۳۸۶۲۳۷۳	۹۷	۹	۱۷	۶۵۰	۳۰	
۴۱۱۱۰۱۴	۳۵۵۸۲۴۳	۹۸	۱۰	۱۶	۶۵۱	۴۱۹۹۵۶۴	۴۰۲۴۹۷۷	۹۶	۹	۱۷	۶۵۰	۳۲	

از آنجایی که قیمت بالاتر موجب کاهش تعداد خریداران می‌شود، ارائه طول دوره وارانتهی پایه طولانی‌تر توصیه می‌شود. در ضمن پیشنهاد طول دوره وارانتهی پایه کوتاه‌تر در بازه زمانی تضمین تأمین قطعات یدکی (g) طولانی‌تر به بهبود سود تولیدکننده کمک می‌نماید.

نمودار زیر کیفیت جواب‌های حاصله از الگوریتم LCA را با الگوریتم PSO توسعه‌یافته مقایسه نموده است.

مهم‌ترین نتیجه‌ای که از جدول بالا می‌توان گرفت این است که تولیدکننده می‌تواند طول دوره وارانتهی را نسبت به بازه برنامه‌ریزی تولید محصول و بازه تأمین قطعات یدکی تغییر دهد درحالی‌که گل‌دیران برای تمامی محصولات خود طول وارانتهی پایه را ۱۸ ماه و طول وارانتهی تمدیدشده را ۱۲ ماه ارائه می‌دهد.

همچنین می‌توان نتیجه گرفت در دوره‌های برنامه‌ریزی کوتاه‌تر مناسب است که تولیدکننده قیمت اولیه محصول را بالاتر ارائه دهد و



نمودار (۱) مقایسه عملکرد الگوریتم LCA با PSO توسعه یافته

همان‌طور که در نمودار ۱ نشان داده شده، الگوریتم LCA در این مسئله از کیفیت بالاتری نسبت به الگوریتم PSO توسعه یافته دارد.

در نظر گرفتن سطح تعمیر و تعمیر ناقص می‌تواند به عنوان مطالعات آتی در نظر گرفته شود به طوری که محصول بعد از خرابی به خوبی نو نشود. همچنین می‌توان چارچوب مسئله را برای محصولات با وارانتی دوبعدی (زمان-کارکرد) مانند خودرو تعریف نمود که این امر می‌تواند بسیار در دنیای واقعی مورد کاربرد واقع شود.

۶- نتیجه و جمع بندی

در این تحقیق مسئله یکپارچه سازی تصمیمات قیمت گذاری محصول به صورت پویا، تعیین طول دوره وارانتی پایه، طول دوره وارانتی تمدید شده و قیمت وارانتی تمدید شده با هدف بیشینه سازی سود تولیدکننده و در نظر گرفتن حداقل سطح رضایت مشتری از تأمین خدمات مورد مطالعه قرار گرفت. در مدل ریاضی ارائه شده، درآمد تولیدکننده از فروش محصول اصلی، وارانتی تمدید شده و قطعات یدکی به محصولات از وارانتی خارج شده تشکیل می‌شود و هزینه‌ها نیز عبارتند از: هزینه تولید محصول اصلی، هزینه تولید و انهدام قطعات یدکی است. تابع فروش محصولات، تابعی از زمان، قیمت و طول دوره وارانتی پایه در نظر گرفته شده است. در هر دوره زمانی از چرخه عمر، بر اساس نرخ خرابی محصول، حد بالای تعداد محصولات خراب شده تحت وارانتی پایه و تمدید شده و از وارانتی خارج شده بر اساس ضریب اطمینان کمبود موجودی محاسبه می‌شود. تعداد محصولات خراب شده در حقیقت تقاضای قطعات یدکی را تشکیل می‌دهند. همچنین برای حل مدل، از دو روش الگوریتم فرا ابتکاری LCA و PSO توسعه یافته استفاده شده است.

محصول LED شرکت LG با خدمات پس از فروش گلدیران به عنوان مطالعه موردی انتخاب شد. مسئله برای چرخه عمر ۲۲ تا ۲۸ ماه مورد حل قرار گرفت و برای هر چرخه عمر ۵ بازه زمانی مختلف برای تأمین قطعات یدکی نیز برای تحلیل حساسیت در نظر گرفته شد. نتایج این موضوع را نشان می‌دهد که اگر تولیدکننده طول دوره وارانتی پایه و وارانتی تمدید شده را با توجه به تغییر بازه زمانی تصمیم‌گیری (ترکیب چرخه عمر محصول (T) و دوره زمانی تضمین تأمین قطعات یدکی (g)) تغییر دهد، می‌تواند باعث افزایش حاشیه سود شود. این در حالی است که گلدیران با تمامی محصولات خود طول دوره وارانتی ۱۸ ماه و طول دوره وارانتی تمدید شده ۱۲ ماه را ارائه می‌دهد.

Prod. Econ., vol. 102, no. 1, pp. 95–107, Jul. 2006.

B. Kim and S. Park, "Optimal pricing, EOL (end of life) warranty, and spare parts manufacturing strategy amid product transition," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 188, no. 3, pp. 723–745, Aug. 2008.

P.-C. Lin, J. Wang, and S.-S. Chin, "Dynamic optimisation of price, warranty length and production rate," *Int. J. Syst. Sci.*, vol. 40, no. 4, pp. 411–420, Apr. 2009.

X. Chen, L. Li, and M. Zhou, "Manufacturer's pricing strategy for supply chain with warranty period-dependent demand," *Omega*, vol. 40, no. 6, pp. 807–816, Dec. 2012.

M. Afsahi, A. Husseinzadeh Kashan, and B. Ostadi, "Optimizing under and out of warranty products' decisions in the finite planning horizon," *Sharif Univ. Technol.*, vol. 0, no. 0, Aug. 2018.

V. Padmanabhan, "U sage H eterogeneity and E xtended W arranties," *J. Econ. Manag. Strateg.*, vol. 4, no. 1, pp. 33–53, Mar. 1995.

J. C. Hartman and K. Laksana, "Designing and pricing menus of extended warranty contracts," *Nav. Res. Logist.*, vol. 56, no. 3, pp. 199–214, Apr. 2009.

A. Husseinzadeh Kashan, "An efficient algorithm for constrained global optimization and application to mechanical engineering design: League championship algorithm (LCA)," *Comput. Des.*, vol. 43, no. 12, pp. 1769–1792, Dec. 2011.

A. H. Kashan and B. Karimi, "A new algorithm for constrained optimization inspired by the sport league championships," in *IEEE Congress on Evolutionary Computation*, 2010, pp. 1–8.

J. Kennedy and R. Eberhart, "Particle swarm optimization," in *Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks*, vol. 4, pp. 1942–1948.

R. Eberhart and J. Kennedy, "A new optimizer using particle swarm theory," in *MHS'95. Proceedings of the Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science*, pp. 39–43.

S. Khan, M. Kamran, O. U. Rehman, L. Liu, and S. Yang, "A modified PSO algorithm with dynamic parameters for solving complex engineering design problem" *Int. J. Comput. Math.*, vol. 95, no. 11, pp. 2308–2329, Nov. 2018.

۷- منابع

J. Chu and P. K. Chintagunta, "An Empirical Test of Warranty Theories in the U.S. Computer Server and Automobile Markets," *J. Mark.*, vol. 75, no. 2, pp. 75–92, Mar. 2011. [1]

D. N. . Murthy and I. Djameludin, "New product warranty: A literature review," *Int. J. Prod. Econ.*, vol. 79, no. 3, pp. 231–260, Oct. 2002. [2]

D. K. Manna, S. Pal, and S. Sinha, "A use-rate based failure model for two-dimensional warranty," *Comput. Ind. Eng.*, vol. 52, no. 2, pp. 229–240, Mar. 2007. [3]

Y. Lam and P. Kwok Wai Lam, "An extended warranty policy with options open to consumers," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 131, no. 3, pp. 514–529, Jun. 2001. [4]

T. I. Matis, R. Jayaraman, and A. Rangan, "Optimal price and pro rata decisions for combined warranty policies with different repair options," *IIE Trans. (Institute Ind. Eng.)*, 2008. [5]

C. Su and J. Shen, "Analysis of extended warranty policies with different repair options," *Eng. Fail. Anal.*, vol. 25, pp. 49–62, Oct. 2012. [6]

S. Marshall, R. Arnold, S. Chukova, and Y. Hayakawa, "Warranty cost analysis: Increasing warranty repair times," *Appl. Stoch. Model. Bus. Ind.*, vol. 34, no. 4, pp. 544–561, Jul. 2018. [7]

M. N. Darghouth, D. Ait-kadi, and A. Chelbi, "Joint optimization of design, warranty and price for products sold with maintenance service contracts," *Reliab. Eng. Syst. Saf.*, vol. 165, pp. 197–208, Sep. 2017. [8]

D. N. P. Murthy and W. R. Blischke, "Product warranty management — III: A review of mathematical models," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 63, no. 1, pp. 1–34, Nov. 1992. [9]

D. N. . Murthy, O. Solem, and T. Roren, "Product warranty logistics: Issues and challenges," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 156, no. 1, pp. 110–126, Jul. 2004. [10]

T. S. Glickman and P. D. Berger, "Optimal Price and Protection Period Decisions for a Product Under Warranty," *Manage. Sci.*, vol. 22, no. 12, pp. 1381–1390, Aug. 1976. [11]

M. A. J. Menezes and I. S. Currim, "An approach for determination of warranty length," *Int. J. Res. Mark.*, vol. 9, no. 2, pp. 177–195, May 1992. [12]

P.-C. Lin and L.-Y. Shue, "Application of optimal control theory to product pricing and warranty with free replacement under the influence of basic lifetime distributions," *Comput. Ind. Eng.*, vol. 48, no. 1, pp. 69–82, Jan. 2005. [13]

C.-C. Wu, P.-C. Lin, and C.-Y. Chou, "Determination of price and warranty length for a normal lifetime distributed product," *Int. J.* [14]