

روش بلوک دیاگرام توسعه یافته برای ارزیابی قابلیت اطمینان سیستم‌های چندوضعیتی با در نظر گرفتن مؤلفه‌های وابسته

مریم قره گوزلو

دانشجوی دکتری مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه کردستان، Maryam.gharegozlu@eng.uok.ac.ir

زهرا سبحانی

دانشجوی دکتری مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه کردستان، Zahra.sobhani7@gmail.com

هیوا فاروقی*

عضو هیئت علمی گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه کردستان

چکیده ارزیابی قابلیت اطمینان سیستم‌های چندوضعیتی اغلب با فرض استقلال اجزا بررسی شده است در حالی که در نظر گرفتن اثرهای متقابل این مؤلفه‌ها در این سیستم‌ها بسیار مفید و منطبق با شرایط واقعی است. روش سنتی بلوک دیاگرام، قابلیت اطمینان سیستم‌های چند وضعیت‌ی تعمیرپذیر را مورد ارزیابی قرار نمی‌دهد. استفاده از شیوه‌های ساده فرایند تصادفی به علت پیچیدگی محاسباتی مسئله برای کاربردهای مهندسی در چنین مواردی بسیار دشوار است. تاکنون در ادبیات موضوع روش تابع مولد سراسری برای سیستم‌های مبتنی بر لحاظ نمودن مؤلفه‌های وابسته مورد استفاده قرار نگرفته است. در این مقاله با استفاده از مفهوم فرایندهای تصادفی و تکنیک تابع مولد سراسری، به تجزیه و تحلیل سیستم‌های چندوضعیتی در شرایط وابستگی توزیع عملکردی برخی از مؤلفه‌ها به مؤلفه‌های دیگر پرداخته می‌شود. نتایج نشان‌دهنده برتری چشمگیر روش پیشنهادی این مقاله برای محاسبه قابلیت اطمینان سیستم‌های چندوضعیتی دارای وابستگی مؤلفه‌ها است.

کلمات کلیدی: سیستم‌های چند وضعیت، قابلیت اطمینان، روش تابع مولد سراسری، وابستگی مؤلفه‌ها، بلوک دیاگرام، فرایند تصادفی.

۱- مقدمه

نتیجه زوال (خستگی، شکست‌های جزئی) آن‌ها دچار تغییر شود، با سیستم‌های چند وضعیت سروکار داریم [۲]. روش‌های مختلفی برای ارزیابی قابلیت اطمینان سیستم‌های چند وضعیت وجود دارد. از جمله می‌توان به روش‌های مارکوف، فرایندهای تصادفی و تکنیک تابع مولد سراسری (UGF)^۴ اشاره کرد. روش فرایندهای تصادفی^۵ برای ارزیابی قابلیت اطمینان MSS تعمیرپذیر توسعه یافته است. با توجه به این روش، باید یک نمودار فضا-حالت^۶ برای سیستم‌های چند وضعیت ساخته شود و تمامی انتقال وضعیت‌ها تعریف گردند [۳] و [۴]. مطالعه‌های اخیر نشان می‌دهد که می‌توان از تبدیل L_z و تبدیل معکوس L_z (تکنیک تابع مولد سراسری تعمیم‌یافته) برای ارزیابی پویای قابلیت اطمینان سیستم‌های چند وضعیت بهره گرفت. بر اساس تبدیل L_z ، می‌توان از عملگر مولد سراسری یوشاکف^۷ برای تجزیه و تحلیل قابلیت اطمینان سیستم‌های چند وضعیت در حالت‌های گذرا و فرسوده^۸ استفاده نمود [۵] و [۶].

مدل‌های سنتی قابلیت اطمینان دو وضعیت (باینری)، تنها دو حالت عملکردی برای سیستم و مؤلفه‌های آن قائل هستند: عملکرد کامل^۱ و شکست کامل^۲. حال آن‌که، تجزیه و تحلیل قابلیت اطمینان سیستم‌های چند وضعیت (MSS)^۳ مربوط به سیستم‌هایی است که نمی‌توان برای آن‌ها یک نوع معیار شکست "همه یا هیچ‌چیز" فرموله کرد [۱]. بسیاری از سیستم‌های دنیای واقعی از مؤلفه‌های چند وضعیت تشکیل شده‌اند که دارای سطوح عملکردی مختلف و چندین وضعیت شکست می‌باشند. هر کدام از این وضعیت‌ها اثرهای متفاوتی بر عملکرد کل سیستم دارند. شرایط مختلفی وجود دارد که در آن، یک سیستم باید به صورت MSS در نظر گرفته شود. هر گاه نرخ عملکرد مؤلفه‌های سیستم-هایی که از واحدهای مختلفی تشکیل شده‌اند، اثر تجمعی بر عملکرد کل سیستم داشته باشند یا نرخ عملکرد این مؤلفه‌ها در

* (Corresponding author) h.farughi@uok.ac.ir

بین تابع مولد گشتاور و UGF این است که تابع مولد سراسری امکان ارزیابی توزیع‌های احتمالی عملکرد را برای طیف وسیعی از سیستم‌ها با توپولوژی‌های مختلف، ماهیت متفاوت تعامل بین مؤلفه‌ها و ماهیت فیزیکی معیارهای عملکرد آن‌ها فراهم می‌کند. این کار را می‌توان با معرفی عملگرهای مختلف ترکیب بر روی UGF انجام داد. اخیراً فاروقی و سلگی [۱۱] یک مدل دودسته برای مسئله تخصیص افزونگی و قابلیت اطمینان سیستم‌های چندوضعیته سری-موازی ارائه کرده‌اند. آن‌ها به منظور تخمین دسترسی پذیری سیستم چندوضعیته، از روش تابع مولد سراسری استفاده کرده‌اند. همچنین برای مسائل با ابعاد کوچک از روش اسیلون-محدودیت و برای مسائل در ابعاد بزرگتر از نسخه دوم الگوریتم فراابتکاری ژنتیک با مرتب‌سازی نامغلوب بهره گرفته‌اند. در این راستا به مرجع [۱۲] نیز می‌توان اشاره کرد. به طور کلی تکنیک UGF کاربردهای متعددی در صنایع مختلف دارد. برخی از کاربردهای این روش در مراجع [۱۳]، [۱۴] و [۱۵] مورد ارزیابی قرار گرفته شده است. یکی از مفروضات اصلی که در تکنیک UGF مورد استفاده قرار می‌گیرد، این است که مؤلفه‌های سیستم متقابلاً از نظر آماری مستقل هستند. این فرض در بسیاری از سیستم‌های فنی دنیای واقعی صادق نیست. به عنوان مثال، در برخی مطالعه‌ها، از مدل‌های چند ارزشی تصادفی برای ارزیابی قابلیت اطمینان یک سیستم چندوضعیته با اجزای وابسته استفاده شده است که نرخ‌های عملکرد و احتمال‌های متناظر با آن‌ها به‌طور همزمان در توالی‌های غیربرنولی چندارزشی کدگذاری شده است [۱۶]. پژوهش حاضر به دنبال گسترش رویکردهای UGF به مواردی است که در آن‌ها توزیع عملکرد برخی مؤلفه‌های سیستم تحت تأثیر وضعیت سایر مؤلفه‌ها یا زیرسیستم‌ها قرار می‌گیرد. رویکرد پیشنهادی تنها در مورد وابستگی یک طرفه بین مؤلفه‌ها معتبر است. فرض بر این است که کارکرد هر مؤلفه از سیستم، توسط عملکرد گسسته تصادفی G_j مشخص می‌شود. عملکرد کل سیستم تابع یکپارچه از عملکرد مؤلفه‌های تکی است. سیستم زمانی دچار شکست می‌شود که نتواند تقاضای W را برآورده کند.

در این مقاله ابتدا روش بلوک دیاگرام کلاسیک و سپس توابع u ارائه شده برای ارزیابی قابلیت اطمینان با در نظر گرفتن مؤلفه‌های وابسته بیان می‌شود. سپس یک مثال عددی ارائه و حل شده و در نهایت تحلیل نتایج و جمع‌بندی آن آورده شده است.

۲- فرایند تصادفی عملکرد برای یک مؤلفه چند

وضعیته

به طور کلی، هر مؤلفه از سیستم چند وضعیت، k_j وضعیت عملکرد مختلف دارد که با مجموعه $\{g_{j1}, \dots, g_{jk_j}\}$ نشان

یک سیستم تکاملی با فرایند تصادفی وضعیت-گسسته زمان-پیوسته نمایش داده می‌شود. اساسی‌ترین مشکل استفاده از مدل‌های فرایندهای تصادفی برای ارزیابی قابلیت اطمینان MSS، بعد بالای این نوع مسائل است. اولاً، ساختار دیاگرام فضا-حالت یا ایجاد مدل برای MSS کار ساده‌ای نیست و مسئله‌ی شناسایی درست تمام وضعیت‌ها و انتقال فی‌مابین آن‌ها بسیار دشوار است. ثانیاً، حل مدل‌هایی با صدها وضعیت، می‌تواند منابع کامپیوتری موجود را به چالش بکشد. برای یک سیستم چندوضعیته متشکل از n مؤلفه تعمیرپذیر مختلف که هر مؤلفه‌ی j از سیستم، k_j سطح عملکردی مختلف دارد، کل وضعیت‌های سیستم برابر با $K = \prod_{j=1}^n k_j$ است. این تعداد وضعیت‌ها حتی برای یک MSS نسبتاً کوچک، بسیار زیاد خواهد بود.

اگر فرایند تصادفی به عنوان یک فرایند مارکوف شناخته شود، در این حالت برای یافتن احتمال وضعیت‌های مختلف سیستم، K معادله‌ی متفاوت باید حل گردد. چنانچه زمان‌های ماندن در برخی وضعیت‌ها دارای توزیع غیرنمایی باشد، به کارگیری فرایند نیمه-مارکوفی اغلب فرصت خوبی برای به دست آوردن جواب فراهم می‌کند [۷].

تعداد معادله‌های انتگرالی که باید با استفاده از رویکرد نیمه-مارکوفی حل گردد، برابر با مربع تعداد کل وضعیت‌های سیستم چند وضعیت است. بنا بر این، تعداد کل معادله‌های انتگرالی که باید برای یافتن احتمال وضعیت‌های MSS حل شود، برابر با k^2 خواهد بود. در حالت کلی، ممکن است برای ارزیابی قابلیت اطمینان سیستم چند وضعیت از تکنیک شبیه‌سازی استفاده شود. این روش نسبت به تعداد وضعیت‌های مدل، بسیار حساس است. در طی مرحله‌ی ساخت مدل، دشواری‌های مشابهی وجود دارد و همچنین در مرحله حل، اغلب نیاز به مراحل محاسباتی متعدد می‌باشد.

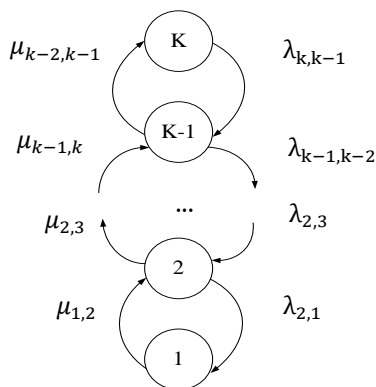
بنا بر این، توسعه روش تابع مولد سراسری که بر اساس رویه‌های ساده‌سازی بوده و توانایی کاهش بعد مسئله را دارد، ممکن است برای مهندسان قابلیت اطمینان بسیار مفید باشد. این مقاله چنین روشی را ارائه می‌دهد و از یک رویکرد ریاضی خاص به نام روش UGF بهره می‌گیرد که UGF ترکیبی و روش فرایند تصادفی نامیده می‌شود.

تکنیک UGF در مرجع [۸] معرفی شده است و ثابت می‌شود که این روش برای ارزیابی قابلیت اطمینان انواع مختلف سیستم‌های چند وضعیت بسیار کارا است [۹] و [۱۰]. تابع u در واقع تابع مولد گشتاور معمولی را توسعه می‌دهد. تفاوت اساسی

تعمیرهای جزئی در نظر گرفته می‌شود (همانطور که در مرجع [۱۰] تعریف شده است). به ازای هر وضعیت i ، یک عملکرد مرتبط با مؤلفه j (g_{ji}) وجود دارد. مؤلفه‌ها به گونه‌ای مرتب می‌شوند که به ازای هر i ، $g_{ji+1} \geq g_{ji}$. این شکست‌ها و تعمیرهای جزئی تنها باعث انتقال وضعیت مؤلفه‌ها از وضعیت i ، که $1 \leq i \leq k_j$ ، به وضعیت‌های مجاور یعنی به ترتیب $i - 1$ و $i + 1$ می‌شوند. اگر در وضعیت i شکست رخ بدهد، گذار از وضعیت i به $i - 1$ خواهد بود و در صورتی که تعمیر کامل انجام شود، گذار از وضعیت i به وضعیت $i + 1$ خواهد بود. در وضعیت k_j تنها ممکن است شکست رخ دهد و انتقال به وضعیت $k_j - 1$ صورت گیرد و همچنین در وضعیت ۱ فقط امکان تعمیر و انتقال به وضعیت ۲ وجود دارد.

۳- مدل مارکوفی برای مؤلفه چند وضعیت

اگر همه زمان‌های خرابی و تعمیر دارای توزیع نمایی باشند، آن‌گاه فرایند تصادفی عملکرد یک ویژگی مارکوفی خواهد داشت و می‌تواند توسط یک مدل مارکوف نمایش داده شود [۴] در اینجا به منظور سادگی اندیس j را حذف نموده و همانطور که در شکل ۱ نشان داده شده است، فرض می‌کنیم مؤلفه k وضعیت مختلف دارد.



شکل ۱- نمودار فضا-حالت برای مدل مارکوفی مؤلفه چند-وضعیت تعمیرپذیر

برای یک فرایند مارکوف، هر گذار از وضعیت S به هر وضعیت m ($s, m = 1, \dots, k$) شدت گذار (انتقال) مربوط به خود را

داده می‌شود. g_{ji} نرخ عملکرد مؤلفه j در وضعیت i می‌باشد ($i \in \{1, 2, \dots, k_j\}$).

مدل عمومی MSS متشکل از فرایندهای تصادفی عملکرد $G_j(t) \in g_j$ ، $j = 1, 2, \dots, n$ ، برای هر مؤلفه j ، و تابع ساختار سیستم است که فرایند تصادفی متناظر با عملکرد خروجی کل MSS را طبق رابطه ۱ تولید می‌کند [۱]:

$$G(t) = \phi(G_1(t), \dots, G_n(t)) \quad (1)$$

در تفسیر قابلیت اطمینان دو وضعیت سنتی، بلوک دیاگرام قابلیت اطمینان وابستگی متقابل بین تمام مؤلفه‌ها را نشان می‌دهد [۱۷]. هدف این است که با تصویر خلاصه شده‌ای از سیستم، ترکیب‌های مختلف بلوک (مسیرها) که منجر به موفقیت سیستم می‌شوند، نشان داده شود. هر بلوک از دیاگرام قابلیت اطمینان، نشان دهنده یک مؤلفه از سیستم است. تمام بلوک‌ها به صورت سری، موازی، آماده به کار^۱ یا ترکیبی از این حالت‌ها تنظیم می‌شوند. بلوک دیاگرام‌ها یک ترتیب منطقی را دنبال می‌کنند، ترتیبی که دنباله‌ای از رویدادها را در طول عملیات مقرر شده سیستم به یکدیگر مرتبط می‌سازد. مدل قابلیت اطمینان شامل یک بلوک دیاگرام (نمودار بلوکی) قابلیت اطمینان و یک مدل شبیه سازی یا ریاضی است.

در تفسیر یک سیستم چند وضعیت، هر بلوک، نمایانگر یک مؤلفه‌ی چند وضعیت از سیستم می‌باشد. ترتیب منطقی بلوک‌ها در دیاگرام با تابع ساختار سیستم $(G_1(t), \dots, G_n(t))$ و رفتار هر بلوک j از سیستم توسط فرایند تصادفی عملکرد متناظر یعنی $G_j(t)$ تعریف می‌شوند. با توجه به روش پیشنهادی، در مرحله اول باید یک مدل فرایند تصادفی برای هر یک از مؤلفه‌های چند وضعیت ساخته شود. بر اساس این مدل، احتمال‌های یک وضعیت برای هر مؤلفه‌ی j چند وضعیت ($j \in \{1, 2, \dots, n\}$) به صورت رابطه ۲ به دست می‌آید:

$$p_{ji}(t) = \Pr\{G_j(t) = g_{ji}\}, \quad i \in \{1, \dots, k_j\} \quad (2)$$

در مرحله دوم، توزیع عملکرد خروجی سیستم چند وضعیت در هر لحظه t باید بر اساس تابع ساختار سیستم و احتمال وضعیت‌های محاسبه شده برای همه مؤلفه‌ها تعریف شود. در این مرحله، تکنیک UGF یک روش ساده مبتنی بر عملیات جبری ارائه می‌دهد.

بدون از دست دادن کلیت مسئله، مؤلفه‌ای با شکست‌ها و

برای هر وضعیت $i, 1 \leq i \leq k_j$ مدت زمان تا تعمیر مطابق با یک تابع توزیع تجمعی $F_{i,i+1}^{(j)}(t)$ می‌باشد. همانند بخش قبل، در این بخش هم اندیس j در محاسبه‌های بعدی حذف شده است. نمودار فضا-حالت و انتقال‌های متناظر در شکل ۲ نشان داده شده‌اند.

به منظور تعریف فرایند نیمه مارکوفی که عملکرد مؤلفه‌ها را تعیین می‌کند، ماتریس هسته اصلی مربوطه یعنی $|Q_{lm}(t)|$ تعیین می‌کند. هر عنصر $Q_{lm}(t)$ از این ماتریس، احتمال انتقال از حالت l به حالت m را در طول بازه زمانی $[0, t]$ تعیین می‌کند. بر اساس [۴] مقادیر $Q_{lm}(t)$ طبق روابط ۶ تا ۱۰ محاسبه می‌گردد:

$$|Q_{lm}(t)| = \quad (۶)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & Q_{12}(t) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ Q_{21}(t) & 0 & Q_{23}(t) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & Q_{kk-1}(t) & 0 \end{vmatrix}$$

که در آن:

$$Q_{12}(t) = F_{1,2}(t). \quad (۷)$$

$$Q_{l+1,l}(t) = \int_0^t [1 - F_{l+1,l+2}(t)] dF_{l+1,l}(t) \quad (۸)$$

$$1 \leq l \leq k-2.$$

$$Q_{ll+1}(t) = \int_0^t [1 - F_{ll-1}(t)] dF_{ll+1}(t) \quad (۹)$$

for $2 \leq k-1.$

$$Q_{kk-1}(t) = F_{k,k-1}(t) \quad (۱۰)$$

ماتریس هسته ۶ و وضعیت اولیه k (با بهترین عملکرد)، یک فرایند نیمه مارکوفی را تعریف می‌کنند که رفتار تصادفی مؤلفه چندوضعیتیته را توصیف می‌کند. برای هر مؤلفه، $\theta_{lm}(t)$ احتمال این است که فرایند تصادفی نیمه مارکوفی که از وضعیت اولیه l در لحظه $t=0$ شروع می‌شود در لحظه t در وضعیت m باشد. احتمال‌های $\theta_{lm}(t)$ ، $l, m = 1, 2, \dots, k$ می‌توانند از جواب سیستم معادله‌های انتگرالی رابطه ۱۱ به دست آیند:

دارد که به صورت a_{sm} تعریف می‌شود. در این‌جا، هر انتقال یا گذاری ناشی از تعمیر یا شکست مؤلفه است. اگر $m < s$ ، آن‌گاه $a_{sm} = \lambda_{sm}$ که نرخ شکست برای خرابی‌هایی است که باعث انتقال مؤلفه از وضعیت s به وضعیت m می‌شوند. اگر $m > s$ ، آن‌گاه $a_{sm} = \mu_{sm}$ که نرخ تعمیر متناظر است. عملکرد متناظر g_s مربوط به هر وضعیت s است. $p_s(t)$ که در آن $s = 1, \dots, k$ است را احتمال‌های وضعیت فرایند عملکرد مؤلفه $G(t)$ در زمان t به صورت رابطه ۳ در نظر می‌گیریم:

$$p_s(t) = \Pr\{G(t) = g_s\}, \quad 1, \dots, k; \quad t \geq 0. \quad (۳)$$

برای یافتن احتمال وضعیت‌ها، $s = 1, \dots, k$ برای فرایند مارکوفی همگن، سیستمی از معادله‌های دیفرانسیل به صورت رابطه ۴ می‌توان نوشت:

$$\frac{dp_s(t)}{dt} = \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^k p_i(t) a_{is} \right] - p_s(t) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^k a_{si}. \quad (۴)$$

در این مقاله تمامی انتقال وضعیت‌ها (ناشی از شکست‌ها و تعمیرها) متناظر با شدت گذار a_{is} مؤلفه بوده و با نرخ‌های شکست و تعمیر مؤلفه بیان می‌شود. بنا بر این، سیستم متناظر با معادله‌های دیفرانسیلی به صورت رابطه ۵ خواهد بود:

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\mu_{12}p_1(t) + \lambda_{21}p_2(t).$$

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = \mu_{12}p_1(t) - (\lambda_{21} + \mu_{23})p_2(t) + \lambda_{32}p_3(t). \quad (۵)$$

... = ...

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \mu_{k-1,k}p_{k-1}(t) - \lambda_{k,k-1}p_k(t)$$

با فرض اینکه وضعیت اولیه سیستم یعنی وضعیت k ، نمایانگر بهترین سطح عملکردی سیستم است، با حل سیستم معادله‌های دیفرانسیل مندرج در رابطه ۵ تحت شرایط اولیه

$$p_k(0) = 1, p_{k-1}(0) = \dots = p_2(0) = p_1(0) = 0$$

احتمال وضعیت‌های $(s = 1, \dots, k)$ یعنی $p_s(t)$ را می‌توان به دست آورد.

۴- مدل نیمه مارکوفی برای مؤلفه چندوضعیتیته

فرض می‌شود برای هر مؤلفه $j, 1 \leq j \leq n$ مدت زمان قبل از خرابی مطابق با یک تابع توزیع تجمعی دلخواه $F_{i,i-1}^{(j)}(t)$ برای هر وضعیت $i, 1 \leq i \leq k_j$ باشد. به طور مشابه فرض شده

۵- توابع u مؤلفه‌های وابسته

یک زیرسیستم را در نظر بگیرید که شامل دو مؤلفه چند وضعیت i و j می‌باشد. توزیع عملکرد مؤلفه j وابسته به مؤلفه i است. از آنجا که وضعیت هر یک از مؤلفه‌ها با نرخ‌های عملکرد متناظرشان مشخص می‌شود، می‌توان فرض کرد توزیع عملکرد مؤلفه j توسط نرخ عملکرد مؤلفه i تعیین می‌شود. فرض کنید g_i مجموعه‌ی همه‌ی نرخ‌های عملکرد مؤلفه i ، g_j نرخ عملکرد تصادفی مؤلفه j سیستم چند وضعیت و C_j تعداد وضعیت‌های مختلف مؤلفه j باشد. مجموعه g_i می‌تواند به M زیرمجموعه که اشتراک دو به دوی آن‌ها تهی است (g_i^m ($1 \leq m \leq M$)) طبق رابطه ۱۳ افزایش شود.

$$\bigcup_{m=1}^M g_i^m = g_i, \quad (13)$$

$$g_i^m \cap g_i^l = 0 \quad \text{اگر } m \neq l$$

به طوریکه وقتی مؤلفه i نرخ عملکرد $g_{ik} \in g_i^m$ را دارد توزیع عملکرد مؤلفه j توسط مجموعه‌های

$$g_{j|m} = \{g_{j|c|m}, 1 \leq c \leq C_{j|m}\}$$

$$p_{j|m} = \{p_{j|c|m}, 1 \leq c \leq C_{j|m}\}$$

تعریف می‌شود که:

$$q_{j|c|m} = \Pr\{G_j = g_{j|c|m} | G_i = g_{ik} \in g_i^m\} \quad (14)$$

اگر هر نرخ عملکرد مؤلفه i متناظر با توزیع عملکرد متفاوتی از مؤلفه j باشد، آن‌گاه $M = K_i$ و $g_i^m = \{g_{im}\}$ می‌توان مجموعه همه‌ی مقادیر ممکن نرخ عملکرد مؤلفه j را به صورت رابطه ۱۵ تعریف کرد:

$$g_j = \bigcup_{m=1}^M g_{j|m} \quad (15)$$

همچنین توزیع عملکرد شرطی آن را وقتی مؤلفه i دارای نرخ عملکرد $g_{ik} \in g_i^m$ است با استفاده از دو مجموعه ترتیبی به شرح روابط ۱۶ تا ۱۸ می‌توان تعریف کرد:

$$\theta_{lm}(t) = \delta_{lm} \left[1 - \sum_{m=1}^k Q_{lm}(t) \right] + \sum_{s=1}^k \int_0^t q_{ls}(\tau) \theta_{sm}(t - \tau) d\tau \quad (11)$$

$$l, m = 1, \dots, k$$

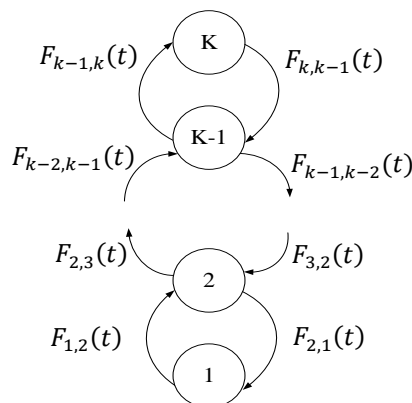
$$\delta_{lm} = \begin{cases} 1 & l = m \\ 0 & l \neq m \end{cases}$$

$$q_{is}(\tau) = \frac{dQ_{is}(\tau)}{d\tau}$$

فرض می‌کنیم فرایند همیشه از وضعیت k (بهترین وضعیت) شروع می‌شود. بنا بر این احتمال‌های وضعیت‌های مؤلفه چندوضعیته که باید بر اساس جواب سیستم معادله‌های رابطه ۱۱ تعیین شود به صورت رابطه ۱۲ است:

$$p_k(t) = \theta_{kk}(t), p_{k-1}(t) = \theta_{kk-1}(t), \dots, p_1(t) = \theta_{k1}(t) \quad (12)$$

در مرحله اول برای هر مؤلفه از MSS کل مدل‌های مارکوفی یا نیمه مارکوفی باید ساخته شوند. اگر فرایند تصادفی عملکرد برای مؤلفه چندوضعیته فرایند مارکوف باشد مدل مارکوف این مؤلفه شامل k معادله دیفرانسیلی است و اگر فرایند تصادفی عملکرد فرایند نیمه مارکوفی باشد مدل تصادفی نیمه مارکوفی برای این مؤلفه شامل k^2 معادله انتگرالی خواهد بود. با حل این معادله‌ها، توزیع احتمالی عملکرد $p_i(t) = \Pr\{G(t) = g_i\}$ برای هر مؤلفه چندوضعیته در هر لحظه t به دست می‌آید.



شکل ۲- نمودار فضا-حالت برای مدل نیمه مارکوفی مؤلفه چند وضعیت تعمیرپذیر

$$u_j(z) = p_{j1}(t)z^{g_{j1}} + p_{j2}(t)z^{g_{j2}} + \dots + p_{jk_j}(t)z^{g_{jk_j}} \quad (22)$$

۲. عملگرهای ترکیبی Ω_{Φ_S} (برای مؤلفه‌هایی که به صورت سری متصل شده‌اند)، Ω_{Φ_P} (برای مؤلفه‌هایی که به صورت موازی متصل شده‌اند) و Ω_{Φ_B} (برای مؤلفه‌هایی که به صورت پل متصل شده‌اند) باید روی UGF مؤلفه‌های انفرادی و ترکیب‌های آن‌ها به کار گرفته شوند. این عملگرها و رویه‌های بازگشتی متناظر برای محاسبه آن‌ها در [۹] تعریف شده‌اند. بر اساس این رویه‌ها UGF مربوط به MSS کلی از رابطه ۲۳ به دست می‌آید:

$$U(z, t) = \sum_{i=1}^K p_i(t)z^{g_i} \quad (23)$$

K تعداد حالت‌های سیستم کل و g_i عملکرد کل سیستم در حالت i است.

۳. با استفاده از عملگرهای δ_A ، δ_E و δ_D که در [۹] معرفی شده‌اند روی UGF مربوط به MSS کلی، شاخص‌های قابلیت اطمینان بر اساس روابط ۲۴ تا ۲۶ می‌توانند به دست آیند:

$A(t, w)$ دسترسی‌پذیری MSS در لحظه t برای سطح تقاضای ثابت و دلخواه w

$$A(t, w) = \delta_A(U(z, t), w) = \delta_A\left(\sum_{i=1}^K p_i(t)z^{g_i}, w\right) = \sum_{i=1}^K p_i(t)1(g_i - w \geq 0) \quad (24)$$

عملکرد خروجی مورد انتظار MSS در لحظه

$$E(t) = \delta_E(U(z, t)) = \delta_E\left(\sum_{i=1}^K p_i(t)z^{g_i}\right) = \sum_{i=1}^K p_i(t)g_i \quad (25)$$

$$g_j = \{g_{jc}, \quad 1 \leq c \leq C_j\} \quad (16)$$

$$P_{j|m} = \{p_{jc|m}, \quad 1 \leq c \leq C_j\} \quad (17)$$

$$P_{jc|m} = \begin{cases} 0 & g_{jc} \notin g_{j|m} \\ q_{jc|m} & g_{jc} \in g_{j|m} \end{cases} \quad (18)$$

طبق این تعریف

$$P_{jc|m} = \Pr\{G_j = g_{jc} | G_i = g_{ik} \in g_j^m\} \quad (19)$$

از آنجا که مجموعه‌های $g_i^m (1 \leq m \leq M)$ دو به دو مستقل هستند، احتمال غیرشرطی اینکه $G_j = g_{jc}$ باشد، می‌تواند به صورت روابط ۲۰ و ۲۱ به دست آید:

$$p_{jc} = \sum_{m=1}^M \Pr\{G_j = g_{jc} | G_i \in g_i^m\} \Pr\{G_i \in g_i^m\} = \sum_{m=1}^M P_{jc|m} \sum_k^{k_i} P_{ik} 1(P_{ik} \in g_i^m). \quad (20)$$

در حالتی که $g_i^m = \{g_{im}\}$

$$P_{jc} = \sum_{m=1}^M P_{im} P_{jc|m} \quad (21)$$

۶- ارزیابی قابلیت اطمینان سیستم چندوضعیتیته

در مرحله بعد، UGFهای انفرادی برای هر مؤلفه بر اساس احتمال‌های وضعیت معین باید تعریف شود. سپس با استفاده از عملگرهای ترکیبی روی UGF مؤلفه‌های انفرادی و ترکیب‌های آن‌ها در ساختار MSS کلی، UGF حاصل برای MSS کلی با استفاده از عملیات جبری ساده می‌تواند محاسبه شود. این UGF توزیع عملکرد خروجی را برای MSS کلی در هر لحظه زمانی t تعریف می‌کند. معیارهای قابلیت اطمینان MSS می‌توانند به سادگی از این توزیع عملکرد خروجی مشتق شوند.

گام‌های زیر باید در طی این مرحله انجام شوند:

۱. با داشتن سطوح عملکرد g_{jz} و احتمال‌های متناظر

$$p_{jz}(t) \text{ برای هر مؤلفه } z, z = 1, \dots, n,$$

UGF آن مؤلفه به صورت رابطه ۲۲

می‌تواند به دست آید:

نقص عملکرد مورد انتظار MSS در لحظه t برای سطح تقاضای ثابت و دلخواه w

$$D(t, w) = \delta_D(U(z), w) = \delta_D\left(\sum_{i=1}^K p_i(t)z^{g_i}, w\right) = \sum_{i=1}^K p_i(t) \max(w - g_i, 0) \quad (26)$$

احتمال‌های ۰,۲، ۰,۰، ۰,۲ و ۰,۶ است.

نرخ عملکرد خروجی سیستم به صورت حد اکثر جریانی که می‌تواند انتقال داده شود در نظر گرفته می‌شود. بنا بر این تابع ساختار MSS به صورت زیر است:

$$G_s(t) = \emptyset(G_1(t), G_2(t), G_3(t)) = \min\{G_1(t) + G_2(t), G_3(t)\}$$

سطح تقاضا ثابت و برابر $w = 5 \frac{t}{\min}$ است.

با استفاده از سطوح عملکرد مؤلفه‌ها و احتمال‌های مرتبط با آن‌ها، توابع u این مؤلفه‌های انفرادی طبق روابطی که قبلاً اشاره شد به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$\begin{aligned} u_1(z) &= p_{11}(t)z^{g_{11}} + p_{12}(t)z^{g_{12}} + p_{13}(t)z^{g_{13}} + p_{14}(t)z^{g_{14}} = \\ &= p_{11}(t)z^0 + p_{12}(t)z^1 + p_{13}(t)z^2 + p_{14}(t)z^3 \\ u_2(z) &= p_{21}(t)z^{g_{21}} + p_{22}(t)z^{g_{22}} + p_{23}(t)z^{g_{23}} \\ &= p_{21}(t)z^0 + p_{22}(t)z^5 + p_{23}(t)z^{10} \\ u_3(z) &= p_{31}(t)z^{g_{31}} + p_{32}(t)z^{g_{32}} + p_{33}(t)z^{g_{33}} \\ &= p_{31}(t)z^0 + p_{32}(t)z^4 + p_{33}(t)z^8 \end{aligned}$$

برای به دست آوردن این توابع لازم است احتمال‌های غیرشرطی مؤلفه ۲ را به صورت زیر به دست آوریم.

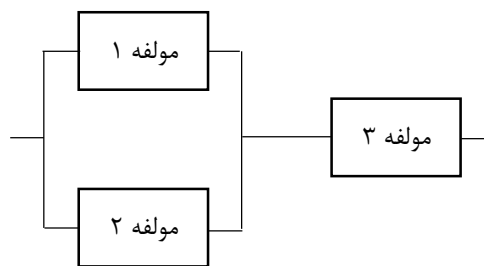
$$\begin{aligned} p_{21} &= \Pr\{G_2 = 0\} = \Pr\{G_2 = 0 | G_1 \in g_1^1\} \Pr\{G_1 \in g_1^1\} \\ &+ \Pr\{G_2 = 0 | G_1 \in g_1^2\} \Pr\{G_1 \in g_1^2\} \\ &= p_{21|1}(p_{11} + p_{12} + p_{13}) + p_{21|2}(p_{14}) \\ &= 0.3(0.1 + 0.2 + 0.4) + 0.1(0.3) = 0.24. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{22} &= \Pr\{G_2 = 5\} = \Pr\{G_2 = 5 | G_1 \in g_1^1\} \Pr\{G_1 \in g_1^1\} \\ &+ \Pr\{G_2 = 5 | G_1 \in g_1^2\} \Pr\{G_1 \in g_1^2\} \\ &= p_{22|1}(p_{11} + p_{12} + p_{13}) + p_{22|2}(p_{14}) \\ &= 0(0.1 + 0.2 + 0.4) + 0.9(0.3) = 0.27. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{23} &= \Pr\{G_2 = 10\} = \Pr\{G_2 = 10 | G_1 \in g_1^1\} \Pr\{G_1 \in g_1^1\} \\ &+ \Pr\{G_2 = 10 | G_1 \in g_1^2\} \Pr\{G_1 \in g_1^2\} \\ &= p_{23|1}(p_{11} + p_{12} + p_{13}) + p_{23|2}(p_{14}) \\ &= 0.7(0.1 + 0.2 + 0.4) + 0(0.3) = 0.49. \end{aligned}$$

۷- مثال عددی

یک سیستم انتقال جریان را در نظر بگیرید که دارای سه مؤلفه (لوله) مطابق شکل ۳ جریان روغن از چپ به راست انتقال می‌یابد. عملکرد لوله‌ها توسط ظرفیت انتقال آن‌ها اندازه‌گیری می‌شود (تن در دقیقه). در این سیستم توزیع عملکرد مؤلفه ۲ وابسته به وضعیت مؤلفه ۱ است.



شکل ۳- ساختار سیستم چند وضعیت

مؤلفه ۱ دارای سطوح عملکرد ۰، ۱، ۲، و ۳ با احتمال‌های ۰,۱، ۰,۲، ۰,۴، ۰,۳ است و توزیع عملکرد مؤلفه ۲ به نرخ عملکرد مؤلفه ۱ وابسته است. به طوری که اگر

$$G_1 \leq 2 \quad (G_1 \in \{0,1,2\})$$

مؤلفه ۲ دارای سطوح عملکرد ۰ و ۱۰ با احتمال‌های ۰,۳ و ۰,۷ و وقتی

$$G_1 > 2 \quad (G_1 \in \{3\})$$

مؤلفه ۲ دارای سطوح عملکرد ۰ و ۵ با احتمال‌های ۰,۱ و ۰,۹ است. در واقع توزیع عملکرد شرطی مؤلفه ۲ می‌تواند توسط مجموعه‌های

$g_2 = \{0,5,10\}$ و $p_{2|1} = \{0.3, 0, 0.7\}$ و $p_{2|2} = \{0.1, 0.9, 0\}$ نشان داده شود. مؤلفه ۳ نیز یک مؤلفه چند وضعیت با سطوح عملکرد $g_3 = \{0, 4, 8\}$

$$\begin{aligned}
U(z) &= \Omega_{\theta S} (u_3(z), \Omega_{\theta P}(u_1(z), u_2(z))) \\
&= \Omega_{\theta S} (p_{31}(t)z^0 + p_{32}(t)z^4 \\
&\quad + p_{33}(t)z^8, p_{11}(t)p_{21}(t)z^0 \\
&\quad + p_{12}(t)p_{21}(t)z^1 \\
&\quad + p_{13}(t)p_{21}(t)z^2 \\
&\quad + p_{14}(t)p_{21}(t)z^3 \\
&\quad + p_{11}(t)p_{22}(t)z^5 \\
&\quad + p_{12}(t)p_{22}(t)z^6 \\
&\quad + p_{13}(t)p_{22}(t)z^7 \\
&\quad + p_{14}(t)p_{22}(t)z^8 \\
&\quad + p_{11}(t)p_{23}(t)z^{10} \\
&\quad + p_{12}(t)p_{23}(t)z^{11} \\
&\quad + p_{13}(t)p_{23}(t)z^{12} \\
&\quad + p_{14}(t)p_{23}(t)z^{13}). \\
&= p_{31}(t)p_{11}(t)p_{21}(t)z^0 \\
&\quad + p_{31}(t)p_{12}(t)p_{21}(t)z^0 \\
&\quad + p_{31}(t)p_{13}(t)p_{21}(t)z^0 \\
&\quad + p_{31}(t)p_{14}(t)p_{21}(t)z^0 \\
&\quad + p_{31}(t)p_{11}(t)p_{22}(t)z^0 \\
&\quad + p_{31}(t)p_{12}(t)p_{22}(t)z^0 \\
&\quad + p_{31}(t)p_{13}(t)p_{22}(t)z^0 \\
&\quad + p_{31}(t)p_{14}(t)p_{22}(t)z^0 \\
&\quad + p_{31}(t)p_{11}(t)p_{23}(t)z^0 \\
&\quad + p_{31}(t)p_{12}(t)p_{23}(t)z^0 \\
&\quad + p_{31}(t)p_{13}(t)p_{23}(t)z^0 \\
&\quad + p_{31}(t)p_{14}(t)p_{23}(t)z^0 \\
&\quad + p_{32}(t)p_{11}(t)p_{21}(t)z^0 \\
&\quad + p_{32}(t)p_{12}(t)p_{21}(t)z^1 \\
&\quad + p_{32}(t)p_{13}(t)p_{21}(t)z^2 \\
&\quad + p_{32}(t)p_{14}(t)p_{21}(t)z^3 \\
&\quad + p_{32}(t)p_{11}(t)p_{22}(t)z^4 \\
&\quad + p_{32}(t)p_{12}(t)p_{22}(t)z^4 \\
&\quad + p_{32}(t)p_{13}(t)p_{22}(t)z^4 \\
&\quad + p_{32}(t)p_{14}(t)p_{22}(t)z^4 \\
&\quad + p_{32}(t)p_{11}(t)p_{23}(t)z^4 \\
&\quad + p_{32}(t)p_{12}(t)p_{23}(t)z^4 \\
&\quad + p_{32}(t)p_{13}(t)p_{23}(t)z^4 \\
&\quad + p_{32}(t)p_{14}(t)p_{23}(t)z^4 \\
&\quad + p_{33}(t)p_{11}(t)p_{21}(t)z^0 \\
&\quad + p_{33}(t)p_{12}(t)p_{21}(t)z^1 \\
&\quad + p_{33}(t)p_{13}(t)p_{21}(t)z^2 \\
&\quad + p_{33}(t)p_{14}(t)p_{21}(t)z^3 \\
&\quad + p_{33}(t)p_{11}(t)p_{22}(t)z^5 \\
&\quad + p_{33}(t)p_{12}(t)p_{22}(t)z^6 \\
&\quad + p_{33}(t)p_{13}(t)p_{22}(t)z^7 \\
&\quad + p_{33}(t)p_{14}(t)p_{22}(t)z^8 \\
&\quad + p_{33}(t)p_{11}(t)p_{23}(t)z^8 \\
&\quad + p_{33}(t)p_{12}(t)p_{23}(t)z^8 \\
&\quad + p_{33}(t)p_{13}(t)p_{23}(t)z^8 \\
&\quad + p_{33}(t)p_{14}(t)p_{23}(t)z^8.
\end{aligned}$$

حال با استفاده از عملگرهای ترکیبی $\Omega_{\theta P}$ و $\Omega_{\theta S}$ برای انتقال جریان، UGF سیستم کل به دست می‌آید.

$$U(z) = \Omega_{\theta S} (\Omega_{\theta P}(u_1(z), u_2(z)), u_3(z))$$

برای به دست آوردن UGF کلی برای مؤلفه‌های ۱ و ۲ که به صورت موازی متصل شده‌اند عملگر $\Omega_{\theta P}$ را روی توابع u انفرادی این مؤلفه‌ها به کار می‌بریم.

$$\begin{aligned}
\Omega_{\theta P}(u_1(z), u_2(z)) &= \Omega_{\theta P}(p_{11}(t)z^0 + p_{12}(t)z^1 \\
&\quad + p_{13}(t)z^2 + p_{14}(t)z^3, p_{21}(t)z^0 \\
&\quad + p_{22}(t)z^5 + p_{23}(t)z^{10}) \\
&= p_{11}(t)p_{21}(t)z^0 \\
&\quad + p_{12}(t)p_{21}(t)z^1 \\
&\quad + p_{13}(t)p_{21}(t)z^2 \\
&\quad + p_{14}(t)p_{21}(t)z^3 \\
&\quad + p_{11}(t)p_{22}(t)z^5 \\
&\quad + p_{12}(t)p_{22}(t)z^6 \\
&\quad + p_{13}(t)p_{22}(t)z^7 \\
&\quad + p_{14}(t)p_{22}(t)z^8 \\
&\quad + p_{11}(t)p_{23}(t)z^{10} \\
&\quad + p_{12}(t)p_{23}(t)z^{11} \\
&\quad + p_{13}(t)p_{23}(t)z^{12} \\
&\quad + p_{14}(t)p_{23}(t)z^{13} \\
&= 0.024z^0 + 0.048z^1 + 0.096z^2 \\
&\quad + 0.072z^3 + 0.027z^5 + 0.054z^6 \\
&\quad + 0.108z^7 + 0.081z^8 + 0.049z^{10} \\
&\quad + 0.098z^{11} + 0.196z^{12} \\
&\quad + 0.147z^{13}
\end{aligned}$$

همانطور که مشاهده می‌شود UGF به دست آمده ضرب ساده-ای از $u_1(z)$ و $u_2(z)$ است. برای به دست آوردن UGF کلی، عملگر $\Omega_{\theta S}$ باید به کار گرفته شود.

همچنین دسترسی پذیری لحظه‌ای MSS برای سطح تقاضای ثابت $w = 5^t/min$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$A(t) = \delta_A(U(z), w) = \delta_A\left(\sum_{i=1}^9 p_i(t)z^{g_i}, 5\right)$$

$$= \sum_{i=1}^9 p_i(t)1(F(g_i - 5) \geq 0)$$

$$= p_6(t) + p_7(t) + p_8(t) + p_9(t).$$

به علاوه عملکرد خروجی مورد انتظار MSS در لحظه t عبارت است از:

$$E_t = \delta_E(U(z)) = \sum_{i=1}^9 p_i(t)g_i$$

$$= p_2(t) + 2p_3(t) + 3p_4(t) + 4p_5(t) + 5p_6(t) + 6p_7(t) + 7p_8(t) + 8p_9(t).$$

و در نهایت نقص عملکرد مورد انتظار MSS در لحظه t برای سطح تقاضای ثابت و دلخواه w عبارت است از:

$$D_t = \delta_D(U(z), w) = \sum_{i=1}^9 p_i(t) \max(5 - g_i, 0)$$

$$= p_1(t)(5 - 0) + p_2(t)(5 - 1) + p_3(t)(5 - 2) + p_4(t)(5 - 3) + p_5(t)(5 - 4)$$

$$= 5p_1(t) + 4p_2(t) + 3p_3(t) + 2p_4(t) + p_5(t)$$

۸- تجزیه و تحلیل نتایج

با توجه به شکل ۳ و وضعیت‌های مؤلفه‌ها (به گونه‌ای که مؤلفه ۱ دارای ۴ وضعیت و مؤلفه ۲ و ۳ دارای ۳ وضعیت هستند) تعداد وضعیت‌های سیستم کل برابر ۲۳ وضعیت به شرح جدول ۱ می‌باشد.

جدول ۱- تعداد وضعیت‌های سیستم کل برای مسئله نمونه

{0, 0, 4}	{1, 0, 0}	{1, 10, 8}	{2, 10, 4}	{3, 5, 0}
{0, 0, 8}	{1, 0, 4}	{2, 0, 0}	{2, 10, 8}	{3, 5, 4}
{0, 10, 0}	{1, 0, 8}	{2, 0, 4}	{3, 0, 0}	{3, 5, 8}
{0, 10, 4}	{1, 10, 0}	{2, 0, 8}	{3, 0, 4}	
{0, 10, 8}	{1, 10, 4}	{2, 10, 0}	{3, 0, 8}	

UGF حاصل به صورت ضرب چندجمله‌ای است و توان‌های z برابر با حد اقل توان‌های عبارت‌های متناظر می‌باشد. بنا بر این UGF ای که توزیع عملکرد خروجی MSS کل را مشخص می‌کند به صورت زیر خواهد بود.

$$U(z) = \sum_{i=1}^9 p_i(t)z^{g_i}$$

$$p_1(t) = p_{31}(t)p_{11}(t)p_{21}(t) + p_{31}(t)p_{12}(t)p_{21}(t) + p_{31}(t)p_{13}(t)p_{21}(t) + p_{31}(t)p_{14}(t)p_{21}(t) + p_{31}(t)p_{11}(t)p_{22}(t) + p_{31}(t)p_{12}(t)p_{22}(t) + p_{31}(t)p_{13}(t)p_{22}(t) + p_{31}(t)p_{14}(t)p_{22}(t) + p_{31}(t)p_{11}(t)p_{23}(t) + p_{31}(t)p_{12}(t)p_{23}(t) + p_{31}(t)p_{13}(t)p_{23}(t) + p_{31}(t)p_{14}(t)p_{23}(t) + p_{32}(t)p_{11}(t)p_{21}(t) + p_{33}(t)p_{11}(t)p_{21}(t).$$

$$g_2 = 1 \quad p_2(t) = p_{32}(t)p_{12}(t)p_{21}(t) + p_{33}(t)p_{12}(t)p_{21}(t)$$

$$g_3 = 2 \quad p_3(t) = p_{32}(t)p_{13}(t)p_{21}(t) + p_{33}(t)p_{13}(t)p_{21}(t)$$

$$g_4 = 3 \quad p_4(t) = p_{32}(t)p_{14}(t)p_{21}(t) + p_{33}(t)p_{14}(t)p_{21}(t)$$

$$g_5 = 4 \quad p_5(t) = p_{32}(t)p_{11}(t)p_{22}(t) + p_{32}(t)p_{12}(t)p_{22}(t) + p_{32}(t)p_{13}(t)p_{22}(t) + p_{32}(t)p_{14}(t)p_{22}(t) + p_{32}(t)p_{11}(t)p_{23}(t) + p_{32}(t)p_{12}(t)p_{23}(t) + p_{32}(t)p_{13}(t)p_{23}(t) + p_{32}(t)p_{14}(t)p_{23}(t).$$

$$g_6 = 5 \quad p_6(t) = p_{33}(t)p_{11}(t)p_{22}(t)$$

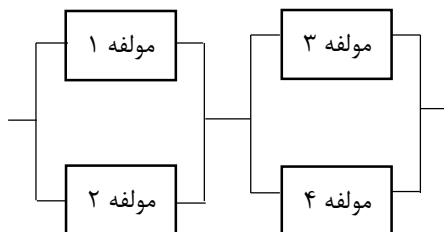
$$g_7 = 6 \quad p_7(t) = p_{33}(t)p_{12}(t)p_{22}(t)$$

$$g_8 = 7 \quad p_8(t) = p_{33}(t)p_{13}(t)p_{22}(t)$$

$$g_9 = 8 \quad p_9(t) = p_{33}(t)p_{14}(t)p_{22}(t) + p_{33}(t)p_{11}(t)p_{23}(t) + p_{33}(t)p_{12}(t)p_{23}(t) + p_{33}(t)p_{13}(t)p_{23}(t)p_{33}(t)p_{14}(t)p_{23}(t).$$

با استفاده از UGF مربوط به MSS کلی و روابط ۲۴، ۲۵ و ۲۶ شاخص‌های قابلیت اطمینان سیستم چندوضعیتیته به دست می‌آید.

بیشتر و با ساختار پیچیده‌تری هستند. در روش پیشنهادی این مقاله، محاسبه وضعیت سیستم کل با استفاده از عملگرهای جبری انجام می‌شود که دقت و حجم محاسبات را بهبود می‌دهد. همچنین با تقلیل‌گرایی سیستم کل به زیر سیستم‌های مختلف، پیچیدگی‌های مربوط به محاسبات سیستم‌های شبکه‌ای به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌دهد.



شکل ۴- سیستم چندوضعیتیته با چهار مؤلفه

۹- نتیجه گیری

در این مقاله یک روش جدید برای ارزیابی قابلیت اطمینان سیستم‌های چندوضعیتیته با در نظر گرفتن وابستگی مؤلفه‌ها ارائه شده است. روش پیشنهادی گسترشی از روش بلوک دیاگرام قابلیت اطمینان کلاسیک است که برای شرایط دنیای واقعی بسیار مناسب می‌باشد. این روش مبتنی بر روش تابع مولد سراسری است. نتایج حاصل از حل مسئله نمونه و تجزیه و تحلیل آن نشان می‌دهد که روش پیشنهادی در این مقاله، ساخت مدل سیستم چندوضعیتیته دارای وابستگی مؤلفه‌ها را ساده‌تر کرده است به گونه‌ای که به جای ساخت یک مدل پیچیده برای چنین سیستم‌هایی، تنها می‌بایست مدل نسبتاً ساده مجزا برای مؤلفه‌های آن طراحی شود. همچنین این روش موجب ساده‌سازی فرایند حل دستگاه معادله‌های مربوط به سیستم شده است. در واقع به جای حل یک دستگاه معادله‌های مرتبه بالای دیفرانسیلی (برای فرایند مارکوف) یا انتگرالی (برای فرایند نیمه مارکوفی)، کفایت Π دستگاه مرتبه پایین برای هر مؤلفه سیستم طراحی و حل شود. طبق مطالعه‌های صورت گرفته توسط محققان تاکنون روش بلوک دیاگرام کلاسیک برای ارزیابی قابلیت اطمینان سیستم‌های چندوضعیتیته با فرض وابستگی بین مؤلفه‌ها استفاده نشده است.

سیستم لازم است ۲۳ معادله تعادلی حل شود تا احتمال قرار گرفتن سیستم کل در هر وضعیت به دست آید. قابل ذکر است که سیستم مورد بررسی در این مقاله، یک سیستم ساده تنها شامل سه مؤلفه و به صورت سری-موازی می‌باشد. حال آن‌که سیستم-های دنیای واقعی عموماً هم شامل مؤلفه‌های بیشتری بوده و هم نحوه قرارگیری مؤلفه‌ها در مواردی نه سری بوده و نه موازی بلکه به صورت شبکه‌ای یا پیچیده می‌باشد. بنا بر این برای چنین سیستم‌هایی تعداد معادله‌های تعادلی به طرز قابل توجهی افزایش خواهد یافت. علاوه بر این، محاسبات مربوط به قابلیت اطمینان سیستم و سایر معیارهای مورد نظر نیز به حجم محاسبات می‌افزاید. از سوی دیگر استفاده از این روش مستلزم استفاده از توزیع‌های خاص بوده و روش مارکوف برای هر نوع تابع توزیع احتمالی قابل به کارگیری نیست. همچنین با توجه به وابستگی مؤلفه‌ها به یکدیگر، فرایند محاسبه تعداد وضعیت‌های مختلف سیستم کل نیز زمان‌بر خواهد بود. بنا بر این در این مقاله سعی شده است برای سیستم‌های دارای وابستگی مؤلفه‌ها از تکنیک تابع مولد سراسری بهره گرفته شود تا بار محاسباتی این گونه سیستم‌ها به ویژه آن‌هایی که دارای مؤلفه‌ها و وضعیت‌های بیشتری هستند به میزان قابل ملاحظه‌ای کاهش یابد.

به منظور تبیین موضوع، مسئله نمونه با افزودن یک مؤلفه به صورت موازی با مؤلفه ۳ مورد بررسی قرار گرفته است. شکل ۴ سیستم مورد نظر در این بخش را نشان می‌دهد. در این سیستم عملکرد مؤلفه ۲ وابسته به مؤلفه ۱ و عملکرد مؤلفه ۴ وابسته به مؤلفه ۳ می‌باشد. وضعیت عملکردی و احتمال‌های آن‌ها برای مؤلفه‌های ۱، ۲ و ۳ مطابق مسئله نمونه می‌باشد. وضعیت مؤلفه ۴ به این صورت است که وقتی $G_3 \leq 4$ ($G_3 \in \{0,4\}$) مؤلفه ۴ دارای سطوح عملکرد ۰ و ۶ با احتمال‌های ۰٫۴ و ۰٫۶ و وقتی $G_3 > 4$ ($G_3 \in \{8\}$) دارای سطوح عملکرد ۰ و ۳ با احتمال‌های ۰٫۱ و ۰٫۹ است. در واقع توزیع عملکرد شرطی مؤلفه ۴ می‌تواند توسط مجموعه $g_4 = \{0,3,6\}$ و $p_{4|3} = \{0.4, 0, 0.6\}$ و $p_{4|3} = \{0.1, 0.9, 0\}$ نشان داده شود. در این حالت محاسبه تعداد وضعیت‌های مختلف سیستم کل با توجه به وابستگی بین مؤلفه‌ها از پیچیدگی بیشتری برخوردار است. در واقع تعداد وضعیت‌های مختلف سیستم کل به ۶۹ وضعیت افزایش پیدا می‌کند. بنا بر این مشاهده می‌شود تعداد وضعیت‌های مختلف سیستم سه برابر شده است. در نتیجه تعداد معادله‌های تعادلی مورد نیاز برای حل با روش مارکوف نیز سه برابر می‌شود. این در حالی است که تنها یک مؤلفه سه وضعیتیته آن هم به صورت موازی به سیستم اضافه گردیده است. در واقع می‌توان گفت با افزایش هر مؤلفه حجم محاسبات چندین برابر می‌شود. در حالی که سیستم‌های دنیای واقعی عموماً به این سادگی نبوده و شامل تعداد مؤلفه‌های

and applications (Vol. 6). World Scientific Publishing Company.

مراجع

- [11] فاروقی، ه.، سلگی، ز. (۱۳۹۶). بهینه‌سازی مسئله چندهدفه تخصیص افزونگی و قابلیت اطمینان در سیستم‌های چندوضعیته سری-موازی، نشریه علمی پژوهشی مهندسی و مدیریت کیفیت، جلد (۷)، ۱۷۶-۱۸۵.
- [12] ذوالفقاری، ح.، احمدی، ا. (۱۳۹۵). ارائه مدلی کارا برای افزایش قابلیت دسترسی سیستم‌های دارای قطعات تعمیرپذیر و تعمیرناپذیر به صورت چند هدفه مسئله تخصیص اجزای مازاد. نشریه علمی پژوهشی مهندسی و مدیریت کیفیت. جلد (۷). ۲۰۳-۱۹۱.
- [13] Eryilmaz, S. (2017). Reliability analysis of multi-state system with three-state components and its application to wind energy. *Reliability Engineering and System Safety*, 172, 58–63.
- [14] Wen, K., Li, Y., Yang, Y. A. N. G., & Gong, J. (2018). Reliability Evaluation of Compressor Systems Based on Universal Generating Function Method., 23(2), 291–296.
- [15] Negi, S., Jaiswal, N., & Singh, S. B. (2018). Reliability Assessment of Non-Repairable k-Out-Of-n System using Belief Universal Generating Function. *International Journal of Performability Engineering*, 14(5).
- [16] Anatoly Lisnianski, Iliia Frenkel, Y. D. (2010). *Multi-state system reliability analysis and optimization for engineers and industrial managers*. Springer Science & Business Media.
- [17] Modarres, M., Kaminskiy, M. P., & Krivtsov, V. (2016). *Reliability engineering and risk analysis: a practical guide*. CRC press.
- [1] Natvig, B. (1984). *Multi-state coherent systems*. New York: Encyclopedia of statistical sciences.
- [2] Levitin, G. (2004). A universal generating function approach for the analysis of multi-state systems with dependent elements, 84, 285–292.
- [3] Aven, Terje, Jensen, U. (1999). *Stochastic Models in Reliability*. New York, Berlin: Springer.
- [4] Trivedi, K. (2008). *Probability & statistics with reliability, queuing and computer science applications*. John Wiley & Sons.
- [5] Lisnianski, A. (2016). Application of Extended Universal Generating Function Technique to Dynamic Reliability Analysis of a Multi-state System. In *2016 Second International Symposium on Stochastic Models in Reliability Engineering, Life Science and Operations Management (SMRLO)* (pp. 1–10).
- [6] Lisnianski, A., Frenkel, I., & Khvatskin, L. (2017). On sensitivity analysis of aging multi-state system by using LZ-transform On sensitivity analysis of aging multi-state system by using L Z -transform. *Reliability Engineering & System Safety*, 166(December 2016),99–108.
- [7] Limnios, Nikolaos, Oprisan, G. (2001). *Semi-Markov processes and reliability*. Boston/Berlin: Birkhauser.
- [8] Igor Ushakov. (2001). A universal generating function. *Soviet Journal of Computer and Systems Sciences*, 24, 37–49.
- [9] Boris Gnedenko, Igor A. Ushakov, I. U. (1995). *Probabilistic reliability engineering*. John Wiley & Sons.
- [10] Anatoly Lisnianski, G. L. (2003). *Multi-state system reliability: assessment, optimization*

* State-space diagram

† Ushakov's universal generating operator

^ Aging MSS

ˆ Standby

ˆ Up

ˆ Down

ˆ Multi-state systems (MSS)

ˆ Universal Generating Function (UGF)

ˆ Random Processes Methods