استنباط بیزی پارامتر قابلیت اطمینان در توزیع رایلی دو پارامتری تحت نمونه‌های سانسور فزاینده پیوندی

اکرم کهن‌سال

(نویسنده مسئول) استادیار، دانشگاه بین‌المللی امام‌خمینی (ره)، گروه آمار*

شیرین شعاعی

استادیار، دانشگاه شهید بهشتی، گروه بیم‌سنجی، Sh_Shoaee@sbu.ac.ir

چکیده: در این مقاله براورد بیزی پارامتر قابلیت اطمینان، $R = P(X < Y)$، درتوزیع رایلی دو پارامتری، تحت نمونه‌های سانسور فزاینده پیوندی بررسی می‌گردد. این مسئله در سه حالت مختلف مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در حالت اول، با فرض این‌که متغیرهای تنش، X، و مقاومت، Y، هر دو دارای پارامتر مکان مشترک و پارامترهای مقیاس غیرمشترک هستند و تمام این پارامترها نامعلوم‌اند، براورد بیزی R بررسی می‌شود. از آن‌جا که در این حالت براورد بیز دارای فرم بسته نیست، لذا با دو روش لیندلی و MCMC تقریب زده می‌شود. در حالت دوم، با فرض این‌که متغیرهای تنش و مقاومت دارای پارامتر مکان مشترک معلوم و پارامترهای مقیاس غیرمشترک و نامعلوم هستند، براورد بیزی دقیق برای R محاسبه می‌گردد. در حالت سوم، با فرض این‌که همه پارامترها متفاوت و نامعلوم هستند، براورد بیزی R به‌روش تقریبی MCMC محاسبه می‌شود. در تمامی روش‌ها فواصل باور بیزی نیز به‌دست آورده می‌شوند. در نهایت، با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو، عملکرد براوردگرهای مختلف با هم مقایسه می‌گردند.

کلمات کلیدی: پارامتر قابلیت اطمینان، براورد بیز، تقریب لیندلی، توزیع رایلی دو پارامتری، سانسور فزاینده پیوندی

۱- مقدمه

اصطلاح تنش از نیمه دوم قرن بیستم به‌طور گسترده‌ای مطرح گردید. به‌طور کلی همه اشخاص و محصول‌ها به‌طور مداوم تحت نوعی تنش قرار دارند و واضح است که همیشه قدرت و توانایی غلبه بر این تنش امکان‌پذیر نیست. اخیراً رابطه بین تنش و میزان مقاومت اشخاص و یا محصول و سیستم در بسیاری از شاخه‌های علوم از جمله صنعت، پزشکی، روان‌پزشکی و داروسازی مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. یکی از جالب‌ترین مسائل در نظریه قابلیت اطمینان، مسئله میزان پایایی و اعتمادپذیری سیستم و یا محصول است. به‌عبارت دیگر، مسئله مورد علاقه استنباط درباره پارامتر تنش-مقاومت، $R = P(X < Y)$، است. متغیرهای X و Y به‌ترتیب به‌عنوان تنش و مقاومت شناخته می‌شوند. بنا بر این پارامتر R میزان پایایی و اعتمادپذیری سیستم و یا محصول را اندازه‌گیری می‌کند. در یک سیستم اگر میزان تنش وارد شده از مقاومت بیش‌تر باشد، سیستم از کار می‌افتد. در علم آمار براورد R، بر اساس دو دیدگاه فراوانی‌گرا و بیزی انجام می‌شود.

علی‌رغم این‌که مقاله‌ها بسیاری مدل‌های تنش-مقاومت را در داده‌های کامل مطالعه کرده‌اند، اما در نمونه‌های سانسور شده، توجه زیادی به براورد این پارامتر نشده است. در بسیاری از مطالعه‌های مربوط به طول عمر، آزمایش‌های کلینیکی مربوط به تاثیر دوز سم‌ها، تحقیق‌های زیست‌شناسی، تحلیل بقا و دیگر زمینه‌های کاربردی علم آمار حالت‌هایی وجود دارند که قسمت‌هایی از مقادیر ممکن متغیر تصادفی مورد مطالعه، محدود و همه مشاهدات ثبت نشده‌اند یا همه واحدهای نمونه به نتیجه نرسیده‌اند. این محدودیت‌ها گاهی اوقات به‌صورت اختیاری توسط آزمایش‌گر و به‌منظور نگه‌داشتن مواد آزمایش جهت استفاده در دیگر آزمایش‌ها، حفظ زمان و هزینه در نظر گرفته می‌شود و در مواردی نیز ماهیت آزمایش طوری است که خود به خود باعث از دست دادن واحدهای آزمایشی می‌شود. به‌عنوان مثال، ممکن است یک واحد آزمایشی به‌طور تصادفی خراب شود یا شخص تحت آزمایش به‌دلایل پیش‌بینی نشده‌ای از ادامه همکاری کناره‌گیری کند. به داده‌هایی که قبل از مشاهده زمان شکست آن‌ها از آزمایش حذف می‌شوند، داده‌های سانسور شده می‌گویند. در بسیاری از موقعیت‌های کاربردی،

*(Corresponding author) kohansal@sci.ikiu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۶/۱۰ / تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۱/۱۷

دوره ۹ / شماره ۴

صفحات: ۲۸۴-۲۹۴

به‌دلایل مختلف مانند طرح‌های مالی یا محدودیت زمانی، محققان با داده‌های سانسور شده مواجه هستند.

در میان طرح‌های سانسور مختلف، طرح‌های نوع I و نوع II از اساسی‌ترین طرح‌های سانسور هستند که می‌توانند به‌صورت زیر توصیف شوند. در طرح سانسور نوع I، آزمایش طول عمر تا رسیدن به یک زمان از پیش تعیین شده T ادامه می‌یابد و نیز در طرح سانسور نوع II، آزمایش طول عمر تا رسیدن به یک تعداد از پیش تعیین شده شکست‌ها ادامه یافته و بعد از آن آزمایش متوقف می‌شود. از ترکیب این دو نوع طرح، طرح سانسور پیوندی به‌دست می‌آید. در این طرح سانسور، آزمایش طول عمر در زمان $T^*=\min\{X_{n:N},T\}$ به‌پایان می‌رسد که در آن، $X_{n:N}$، n امین زمان شکست در بین N واحد تحت آزمایش است و نیز T یک زمان از پیش تعیین شده است.

اگر آزمایش‌گر تصمیم داشته باشد که واحدهای آزمایشی سالم را در نقاطی غیر از نقاط پایانی آزمایش از ادامه بررسی کنار بگذارد، نمی‌تواند از هیچ‌یک از طرح‌های سانسور فوق استفاده کند. هیچ‌کدام از این طرح‌ها اجازه حذف یا خروج واحدهای آزمایشی را در نقاطی غیر از نقاط انتهایی آزمایش نمی‌دهند. لازم به ذکر است این اجازه زمانی مطلوب است که در مطالعه فرایند طول عمر، جمع‌آوری اقلام در طی مراحل مختلف آزمایش مدنظر باشد. همچنین وقتی‌که کاهش زمان آزمایش و مشاهده حد اقل تعدادی طول عمر بزرگ به‌طور همزمان خواسته شود و نیز به‌منظور حفظ برخی واحدهای آزمایشی (به‌ویژه زمانی‌که دستیابی به اقلام آزمایشی خیلی مشکل یا اقلام خیلی گران قیمت هستند)، در نظر گرفتن حذف‌های میانی پسندیده است. همان‌طور که قبلاً ذکر شد حالت‌هایی همچون شکست تصادفی واحدهای آزمایشی یا از دست دادن ارتباط با اشخاص تحت مطالعه از جمله مواردی است که از دست دادن اقلام در نقاطی غیر از نقاط پایانی را اجتناب‌ناپذیر می‌نماید. این دلایل نظریه‌پردازان و کسانی که در این زمینه کار می‌کنند را به سمت سانسور فزاینده متمایل نمود.

برای تشریح این طرح، فرض می‌کنیم که N واحد تحت آزمایش طول عمر قرار گرفته‌اند. بلافاصله بعد از اولین شکست، R_1 واحد تحت بررسی از آزمایش خارج می‌شوند، بعد از دومین شکست، R_2 واحد تحت بررسی از آزمایش خارج می‌شوند و به‌همین ترتیب، در زمان شکست nام، همه $R_n=N-R_1-\cdots-R_{n-1}-n$ واحد تحت بررسی، به‌طور تصادفی از آزمایش خارج می‌شوند. در این حالت طرح سانسور را با $(R_1,\dots,R_n)$ و مقادیر مرتب شده حاصل از این طرح را با $\{X_{1:n:N},\dots,X_{n:n:N}\}$ نشان می‌دهیم. که برای جزئیات بیش‌تر این سانسور به بالاکریشنان و آگاروارا [۱] می‌توان مراجعه نمود.

از ترکیب طرح سانسور پیوندی و سانسور فزاینده، طرح سانسور فزاینده پیوندی (HPC) حاصل می‌گردد که این طرح توسط کاندو و جوآردر [۲] معرفی شده است.

برای بررسی بیش‌تر این ساختار، فرض کنید تعداد کل واحدهای تحت آزمایش برابر N، طرح سانسور مورد نظر به‌صورت $(R_1,\dots,R_n)$ و $T^*=\min\{X_{n:n:N},T\}$ است، به‌طوری‌که $X_{1:n:N}<\cdots<X_{n:n:N}$ یک نمونه از طرح سانسور فزاینده و $T>0$ یک مقدار ثابت از پیش تعیین شده است. واضح است که اگر $X_{n:n:N}<T$ باشد آزمایش در زمان $X_{n:n:N}$ به اتمام می‌رسد و نمونه در دسترس به‌صورت $\{X_{1:n:N},\dots,X_{n:n:N}\}$ است. در غیر اینصورت، اگر $X_{J:n:N}<T<X_{J+1:n:N}$ باشد آزمایش در زمان T تمام می‌شود و نمونه در دسترس به‌صورت $\{X_{1:n:N},\dots,X_{J:n:N}\}$ خواهد بود. در ادامه، به‌طور نمادین و برای سهولت، نمونه سانسور فزاینده پیوندی را با $\{X_1,\dots,X_J\}$ تحت طرح سانسور $\{N,n,T,J,R_1,\dots,R_J\}$ نشان می‌دهیم. از مرجع [۲]، تابع درستنمایی نمونه‌های HPC به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$L(\theta)\propto\prod_{i=1}^{J}f(x_i)[1-F(x_i)]^{R_i}[1-F(T)]^{R_J^*},$$

که در آن $R_J^*=N-J-\sum_{i=1}^{J}R_i$ است.

همان‌طور که اشاره شد در براورد پارامتر قابلیت اطمینان برای داده‌های سانسور شده، کارهای بسیار محدودی صورت گرفته است که در این میان می‌توان به مراجع [۳]، [۴]، [۵] و [۶] اشاره نمود.

همان‌طور که می‌دانیم یکی از توزیع‌های مورد توجه محققان در حوزه قابلیت اطمینان توزیع رایلی می‌باشد. متغیر تصادفی X دارای توزیع رایلی دو پارامتری با پارامترهای مکان و مقیاس به‌ترتیب، μ و λ، است هرگاه، دارای تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی به‌ترتیب به‌صورت زیر باشد:

$$f(x)=2\lambda(x-\mu)e^{-\lambda(x-\mu)^2},x>\mu,$$

$$F(x)=1-e^{-\lambda(x-\mu)^2},x>\mu.$$

در ادامه این مطالعه متغیر تصادفی با توزیع رایلی دو پارامتری که دارای پارامترهای μ و λ است را با نماد $X \sim tR(\mu,\lambda)$ نشان می‌دهیم.

در این مقاله، هدف اصلی استنباط بیزی پارامتر قابلیت اطمینان R بر مبنای طرح سانسور فزاینده پیوندی (HPC)، زمانی‌که متغیرهای تنش و مقاومت، X و Y، دارای توزیع رایلی دو پارامتری هستند، است. در این راستا، مسئله در سه حالت مختلف بررسی می‌گردد. در هر سه حالت فرض می‌شود که هر دو متغیر تصادفی تنش و مقاومت دارای پارامترهای مقیاس متفاوت و نامعلوم هستند. علاوه بر این، در حالت اول با فرض مشترک و نامعلوم بودن پارامتر مکان مسئله بررسی می‌شود. همچنین در حالت دوم با فرض مشترک و معلوم بودن پارامتر مکان و در حالت سوم با فرض متفاوت و نامعلوم بودن پارامتر مکان هر دو متغیر تصادفی، مسئله مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

به‌دلیل عدم دسترسی براورد دقیق بیزی در حالت‌های اول و سوم، از تقریب لیندلی و MCMC استفاده می‌شود. با به‌کار بردن روش شبیه‌سازی مونت کارلو، براوردهای مختلف بیزی با معیارهای MSE، طول فاصله باور و درصد همگرایی مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. به‌عبارت دقیق‌تر در این مقاله به موارد زیر به‌طور مشخص و کامل پرداخته می‌شود:

أ. استنباط مدل‌های تنش- مقاومت بر اساس طرح سانسور جدید (HPC) :

در این مطالعه، سانسور فزاینده پیوندی در مدل‌های تنش-مقاومت بررسی می‌شود. از ویژگی‌های این نوع سانسور این است که این نوع طرح شامل بسیاری از طرح‌های سانسور می‌شود. به‌عنوان نمونه، اگر T خیلی بزرگ باشد سانسور فزاینده، اگر T خیلی بزرگ و $R_1 = R_2 = \cdots = R_{n-1} = 0$ و $R_n = N - n$ سانسور نوع دوم و همچنین اگر T خیلی بزرگ، $R_1 = R_2 = \cdots = R_n = 0$ و $N = n$ باشد داده‌های کامل حاصل می‌شود.

ب. روش براوردیابی:

اغلب مقاله‌ها برمبنای روش‌های براوردیابی کلاسیک به بررسی مدل‌های تنش-مقاومت پرداخته‌اند. در این مقاله از روش بیزی برای براورد این پارامتر استفاده شده است. همچنین بنا به شرایط مختلف روش‌ها و تقریب‌های متعددی مانند تقریب لیندلی و روش MCMC و روش بیز دقیق محاسبه شده است.

ت. بررسی حالت‌های مختلف پارامترها:

اغلب مقاله‌ها براورد پارامتر R را تحت حالت‌های محدود (پارامتر مکان مشترک) مورد بررسی قرار داده‌اند. در این مطالعه سعی شده است که تمام حالت‌ها برای پارامترها در نظر گرفته شود. این حالت‌ها عبارت‌اند از: پارامتر مکان مشترک و نامعلوم، پارامتر مکان مشترک و معلوم و تمام پارامترها غیر مشترک و نامعلوم. لازم به ذکر است که معمولاً حالت سوم بیش‌تر مورد توجه محققان نظریه قابلیت اطمینان است.

ادامه مقاله دارای روند زیر است: در بخش ۲ براورد بیز با فرض پارامتر مکان مشترک و نامعلوم محاسبه می‌شود. همچنین براورد بیز با فرض پارامتر مکان مشترک و معلوم در بخش ۳ به‌دست می‌آید. در بخش ۴ براورد بیز برای پارامتر R تحت متفاوت و نامعلوم بودن کلیه پارامترها محاسبه می‌شود. یک مطالعه شبیه‌سازی در بخش ۵ برای بررسی اهداف‌مان انجام شده است. سرانجام در بخش ۶، یک جمع‌بندی از این مطالعه ارائه می‌شود.

۲- استنباط بیزی پارامتر R با پارامتر مشترک و نامعلوم μ

اگر فرض کنیم که $X \sim tR(\mu,\lambda)$ و $Y \sim tR(\mu,\alpha)$ است، به‌طوری‌که X دارای تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی به‌ترتیب $f_X(x)$ و $F_X(x)$ و نیز Y دارای تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی به‌ترتیب $f_Y(y)$ و $F_Y(y)$ هستند، آن‌گاه به‌وضوح پارامتر قابلیت اطمینان برابر است با:

$$
\begin{aligned}
R = P(X<Y) &= \int_\mu^\infty \left(\int_\mu^y f_X(x)dx\right) f_Y(y)dy \\
&= \int_\mu^\infty F_X(y) f_Y(y)dy \\
&= \int_\mu^\infty \left(1-e^{-\lambda(y-\mu)^2}\right) 2\alpha(y-\mu)e^{-\alpha(y-\mu)^2}dy \\
&= 1-\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\int_\mu^\infty 2(\alpha+\lambda)e^{-(\alpha+\lambda)(y-\mu)^2}\,dy \\
&= 1-\frac{\alpha}{\alpha+\lambda} = \frac{\lambda}{\alpha+\lambda}.
\end{aligned}
$$

در ادامه این بخش به بررسی براورد بیز و فاصله باور بیزی پارامتر R تحت تابع زیان مربعات خطا، زمانی‌که λ، α و μ دارای توابع چگالی پیشین به‌ترتیب:

$$\pi_1(\lambda) \propto \lambda^{a_1-1}e^{-b_1\lambda}, \quad \lambda, a_1, b_1 > 0,$$

$$\pi_2(\alpha) \propto \alpha^{a_2-1}e^{-b_2\alpha}, \quad \alpha, a_2, b_2 > 0,$$

$$\pi_3(\mu) \propto 1, \;\; 0 < \mu < t_1,$$

هستند، پرداخته می‌شود. لازم به ذکر است که از آن‌جاکه پارامترهای λ و α مقادیر مثبت را اختیار می‌کنند مناسب‌ترین توزیع برای توصیف چگالی پیشین آن‌ها توزیع گاما است. همچنین انتخاب این توزیع پیشین منجر به توابع چگالی پسین مزدوج می‌شود، که این امر باعث راحتی محاسبات می‌گردد. علاوه بر این چون μ یک پارامتر مکانی با مقادیر مثبت است، لذا مناسب‌ترین گزینه برای تابع چگالی پیشین آن توزیع $U(0,t_1)$ است. باید توجه نمود که با نامعلوم بودن هر سه پارامتر، توزیع‌های پیشین مزدوج وجود ندارند و در چنین مواقعی حتی برای نمونه‌های کامل همه درایه‌های ماتریس اطلاع فیشر مورد انتظار متناهی نیستند. بنا بر این حتی پیشین جفری برای این حالت وجود ندارد.

بر این مبنا، فرض می‌کنیم که $\{X_1,\dots,X_{J_1}\}$ و $\{Y_1,\dots,Y_{J_2}\}$ دو نمونه تصادفی HPC با طرح‌های سانسور به‌ترتیب $\{N,n,T_1,J_1,R_1,\dots,R_{J_1}\}$ و $\{M,m,T_2,J_2,S_1,\dots,S_{J_2}\}$ باشند. تابع درستنمایی پارامترهای λ، α و μ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$L(\lambda,\alpha,\mu) \propto \left(\prod_{i=1}^{J_1} f(x_i)[1-F(x_i)]^{R_i}[1 - F(T_1)]^{R^*_{J_1}}\right) \times \left(\prod_{j=1}^{J_2} f(y_j)[1-F(y_j)]^{S_j}[1 - F(T_2)]^{S^*_{J_2}}\right).$$

تابع درستنمایی بر مبنای داده‌های مشاهده شده برابر است با:

$$L(data|\lambda,\alpha,\mu) \propto \lambda^{J_1}\alpha^{J_2}\prod_{i=1}^{J_1}(x_i-\mu)\prod_{i=1}^{J_2}(y_j-\mu)$$

$$\times e^{-\lambda\left(\sum_{i=1}^{J_1}(R_i+1)(x_i-\mu)^2+R^*_{J_1}(T_1-\mu)^2\right)}$$

$$\times e^{-\alpha\left(\sum_{j=1}^{J_2}(S_j+1)(y_j-\mu)^2+S^*_{J_2}(T_2-\mu)^2\right)}.$$

حال بر مبنای نمونه سانسور مشاهده شده، تابع چگالی پسین توام به‌صورت زیر است:

$$\pi(\lambda,\alpha,\mu|data) \propto L(data|\lambda,\alpha,\mu)\pi_1(\lambda)\pi_2(\alpha)\pi_3(\mu). \quad (1)$$

با توجه به رابطه (۱) واضح است که در این حالت براورد بیز نمی‌تواند به‌فرم بسته نمایش داده شود. بنا بر این آن‌را به دو روش مختلف تقریبی که عبارت‌اند از تقریب لیندلی و روش MCMC، براورد می‌نماییم.

۲-۱ تقریب لیندلی

یکی از مهم‌ترین روش‌های تقریبی برای به‌دست آوردن براورد بیزی توسط لیندلی [۷] معرفی شده است. این روش می‌تواند به‌صورت زیر توصیف شود.

فرض کنیم $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\theta})$ تابعی از پارامتر $\boldsymbol{\theta}$ باشد. براورد بیز $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\theta})$، تحت تابع زیان مربعات خطا، برابر است با:

$$E(u(\theta)|data) = \frac{\int u(\theta)e^{\ell(\theta)+\rho(\theta)}d\theta}{\int e^{\ell(\theta)+\rho(\theta)}d\theta},$$

که در آن $\ell(\theta)$ لگاریتم تابع درستنمایی و $\rho(\theta)$ لگاریتم تابع چگالی پیشین θ است. بنا بر این تقریب لیندلی $E(u(\theta)|data)$ به‌صورت زیر است:

$$E(u(\theta)|data) = u + \frac{1}{2}\sum_i\sum_j\left(u_{ij}2 + u_i\rho_j\right)\sigma_{ij} + \frac{1}{2}\sum_i\sum_j\sum_k\sum_p \ell_{ijk}\sigma_{ij}\sigma_{kp}u_p|_{\theta=\hat{\theta}},$$

که در آن $\theta=(\theta_1,\dots,\theta_m)$، $i,j,k,p=1,\dots,m$، $\hat{\theta}$ براورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر θ، $u=u(\theta)$، $u_i=\frac{\partial u}{\partial\theta_i}$، $u_{ij}=\frac{\partial^2 u}{\partial\theta_i\partial\theta_j}$، $\ell_{ijk}=\frac{\partial^3\ell}{\partial\theta_i\partial\theta_j\partial\theta_k}$ و $\rho_j=\frac{\partial\rho}{\theta_j}$ است. همچنین، σ_{ij}، (i,j) امین درایه در ماتریس معکوس $[-\ell_{ij}]$ می‌باشد. در حالت سه پارامتری $\theta=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$، جمع‌ها در رابطه اخیر به‌صورت ساده‌تر زیر نتیجه می‌شوند:

$$E(u(\theta)|data) = u + u_1d_1 + u_2d_2 + u_3d_3$$

$$+d_4 + d_5 + \frac{1}{2}[A(u_1\sigma_{11}+u_2\sigma_{12}+u_3\sigma_{13})$$

$$+B(u_1\sigma_{21}+u_2\sigma_{22}+u_3\,\sigma_{23})$$

$$+C(u_1\sigma_{31}+u_2\sigma_{32}+u_3\sigma_{33})],$$

که این رابطه را باید به‌وسیله $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3)$، که براورد ماکسیمم درستنمایی $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ است به‌دست آورد. در رابطه فوق:

$$d_i = \rho_1\sigma_{i1} + \rho_2\sigma_{i2} + \rho_3\sigma_{i3}, \ \ i = 1,2,3,$$

$$d_4 = u_{12}\sigma_{12} + u_{13}\sigma_{13} + u_{23}\sigma_{23},$$

$$d_5 = \frac{1}{2}(u_{11}\sigma_{11} + u_{22}\sigma_{22} + u_{33}\sigma_{33}),$$

و همچنین داریم:

$$A = \ell_{111}\sigma_{11} + 2\ell_{121}\sigma_{12} + 2\ell_{131}\sigma_{13} + 2\ell_{231}\sigma_{23} + \ell_{221}\sigma_{22} + \ell_{331}\sigma_{33},$$

$$B = \ell_{112}\sigma_{11} + 2\ell_{122}\sigma_{12} + 2\ell_{132}\sigma_{13} + 2\ell_{232}\sigma_{23} + \ell_{222}\sigma_{22} + \ell_{332}\sigma_{33},$$

$$C = \ell_{113}\sigma_{11} + 2\ell_{123}\sigma_{12} + 2\ell_{133}\sigma_{13} + 2\ell_{233}\sigma_{23} + \ell_{223}\sigma_{22} + \ell_{333}\sigma_{33}.$$

در حالت توزیع رایلی دو پارامتری لگاریتم تابع درستنمایی به‌شرح زیر بدست می‌آید:

$$\ell(\lambda, \alpha, \mu) \propto J_1 \log(\lambda) + J_2 \log(\alpha) + \sum_{i=1}^{J_1} \log(x_i - \mu) + \sum_{j=1}^{J_2} \log(y_j - \mu) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{J_1}(R_i + 1)(x_i - \mu)^2 + R_{J_1}^*(T_1 - \mu)^2\right) - \alpha\left(\sum_{j=1}^{J_2}(S_j + 1)(y_j - \mu)^2 + S_{J_2}^*(T_2 - \mu)^2\right),$$

بنا بر این براوردهای ماکسیمم درستنمایی λ و α به‌ترتیب به فرم زیر محاسبه می‌شوند:

$$\hat{\lambda}(\mu) = J_1\left\{\sum_{i=1}^{J_1}(R_i + 1)(x_i - \mu)^2 + R_{J_1}^*(T_1 - \mu)^2\right\}^{-1},$$

$$\hat{\alpha}(\mu) = J_2\left\{\sum_{j=1}^{J_2}(S_j + 1)(y_j - \mu)^2 + S_{J_2}^*(T_2 - \mu)^2\right\}^{-1},$$

و همچنین $\hat{\mu}$ از حل معادله غیر خطی زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial\ell}{\partial\mu} = -\sum_{i=1}^{J_1}\frac{1}{x_i - \mu} - \sum_{j=1}^{J_2}\frac{1}{y_j - \mu} + 2\lambda\left\{\sum_{i=1}^{J_1}(R_i + 1)(x_i - \mu)^2 + R_{J_1}^*(T_1 - \mu)^2\right\} + 2\alpha\left\{\sum_{j=1}^{J_2}(S_j + 1)(y_j - \mu)^2 + S_{J_2}^*(T_2 - \mu)^2\right\}.$$

با قرار دادن $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\lambda, \alpha, \mu)$ و $u = R = \frac{\lambda}{\alpha + \lambda}$، داریم:

$$\rho_1 = \frac{a_1 - 1}{\lambda}, \rho_2 = \frac{a_2 - 1}{\alpha}, \rho_3 = 0,$$

$$\ell_{11} = -\frac{J_1}{\lambda^2}, \ell_{22} = -\frac{J_2}{\alpha^2}, \ell_{12} = \ell_{21} = 0,$$

$$\ell_{13} = 2\sum_{i=1}^{J_1}(R_i + 1)(x_i - \mu) + 2R_{J_1}^*(T_1 - \mu),$$

$$\ell_{23} = 2\sum_{j=1}^{J_2}(S_j + 1)(y_j - \mu) + 2S_{J_2}^*(T_2 - \mu),$$

$$\ell_{33} = -2\lambda\left(\sum_{i=1}^{J_1}(R_i + 1)x_i + R_{J_1}^* T_1\right) - 2\alpha\left(\sum_{j=1}^{J_2}(S_j + 1)y_j + S_{J_2}^* T_2\right) + \sum_{i=1}^{J_1}\frac{1}{(x_i - \mu)^2} + \sum_{j=1}^{J_2}\frac{1}{(y_j - \mu)^2},$$

که در آن σ_{ij} بوسیله ℓ_{ij} به‌دست می‌آید. همچنین:

$$\ell_{111} = \frac{2J_1}{\lambda^3}, \ell_{222} = \frac{2J_2}{\alpha^3},$$

$$\ell_{133} = -2\sum_{i=1}^{J_1}(R_i + 1)x_i - 2R_{J_1}^* T_1,$$

$$\ell_{233} = -2\sum_{j=1}^{J_2}(S_j + 1)y_j - 2S_{J_2}^* T_2$$

$$\ell_{333} = -2\sum_{i=1}^{J_1}\frac{1}{(x_i - \mu)^3} - 2\sum_{j=1}^{J_2}\frac{1}{(y_j - \mu)^3},$$

و نیز سایر$0 = \ell_{ijk}$ می‌باشند، بنا بر این:

$$d_i = \rho_1\sigma_{i1} + \rho_2\sigma_{i2}, \ \ i = 1,2,3,$$

$$d_4 = u_{12}\sigma_{12}, \qquad d_5 = \frac{1}{2}(u_{11}\sigma_{11} + u_{22}\sigma_{22}),$$

$$A = \ell_{111}\sigma_{11} + \ell_{331}\sigma_{33},$$

$$B = \ell_{222}\sigma_{22} + \ell_{332}\sigma_{33},$$

$$C = 2\ell_{133}\sigma_{13} + 2\ell_{233}\sigma_{23} + \ell_{333}\sigma_{33}.$$

همچنین $\mathrm{u}_3 = 0$ و $u_{i3} = 0$ برای $i = 1, 2, 3$ و

$$u_{11} = \frac{2\alpha}{(\alpha+\lambda)^3}, u_{22} = \frac{-2\lambda}{(\alpha+\lambda)^3}, u_{12} = \frac{\alpha-\lambda}{(\alpha+\lambda)^3},$$

می‌باشند. در نتیجه، تحت تابع زیان مربعات خطا، براورد بیز R برابر است با:

$$\hat{R}^{LB} = u + u_1 d_1 + u_2 d_2 + d_4 + d_5$$
$$+\frac{1}{2}[A(u_1\sigma_{11} + u_2\sigma_{12}) + B(u_1\sigma_{21} + u_2\sigma_{22}) \quad (۲)$$
$$+C(u_1\sigma_{31} + u_2\sigma_{32})].$$

باید توجه کرد که همه پارامترها در مقادیر $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha}, \hat{\mu})$، براورد ماکسیمم درستنمایی (λ, α, μ)، محاسبه شده‌اند.

۲-۲ روش MCMC

در این روش با استفاده از رابطه (۱)، توابع چگالی احتمال پسین λ، α و μ بعد از ساده کردن، می‌توانند به‌صورت زیر به‌دست آورده شوند:

$$\lambda|\alpha, \mu, data \sim \Gamma\left(J_1 + a_1, b_1 + V(\mu)\right),$$

$$\alpha|\lambda, \mu, data \sim \Gamma\left(J_2 + a_2, b_2 + U(\mu)\right),$$

$$\pi(\mu|\lambda, \alpha, data) \propto \prod_{i=1}^{J_1}(x_i - \mu)\prod_{j=1}^{J_2}\left(y_j - \mu\right) e^{-\lambda V(\mu) - \alpha U(\mu)},$$

که در آن:

$$V(\mu) = \sum_{i=1}^{J_1}(R_i + 1)(x_i - \mu)^2 + R_{J_1}^*(T_1 - \mu)^2,$$
$$U(\mu) = \sum_{j=1}^{J_2}\left(S_j + 1\right)\left(y_j - \mu\right)^2 + S_{J_2}^*(T_2 - \mu)^2. \quad (۳)$$

ملاحظه می‌شود که تابع چگالی پسین μ، $\pi(\mu|\lambda, \alpha, data)$، یک توزیع شناخته شده نیست، بنا بر این تولید نمونه تصادفی از آن باید به روش متروپولیس-هستینگز با توزیع پیشنهادی نرمال انجام شود. بنا بر این الگوریتم گیبز پیشنهادی به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

۱- با مقادیر اولیه $(\lambda_{(0)}, \alpha_{(0)}, \mu_{(0)})$ شروع کنید.

۲- قراردهید $t = 1$.

۳- با استفاده از روش متروپولیس-هستینگز $\mu_{(t)}$ را از $\pi(\mu|\lambda_{(t-1)}, \alpha_{(t-1)}, data)$ با توزیع پیشنهادی $N(\mu_{(t-1)}, 1)$ به‌صورت زیر تولید کنید:

الف: w_t را از $W(.|\mu_{(t-1)}, 1) = N(\mu_{(t-1)}, 1)$ و نیز u را از $U(0,1)$ تولید کنید.

ب: اگر $u < \min(1, \delta)$ آنگاه $\mu_t = w(t)$ قرار دهید که:

$$\delta = \frac{\pi(w_t|data)}{\pi(\mu_{(t-1)}|data)}\frac{W(\mu_{(t-1)}|w_t, 1)}{W(w_t|\mu_{(t-1)}, 1)},$$

در غیر اینصورت به مرحله الف بازگردید.

۴- $\lambda_{(t)}$ را از $\Gamma(J_1 + a_1, b_1 + V\left(\mu_{(t-1)}\right))$ تولید کنید.

۵- $\alpha_{(t)}$ را از $\Gamma(J_2 + a_2, b_2 + U\left(\mu_{(t-1)}\right))$ تولید کنید.

۶- مقدار $R_t = \frac{\lambda_{(t)}}{\alpha_{(t)} + \lambda_{(t)}}$ را محاسبه کنید.

۷- قرار دهید $t = t + 1$.

۸- گام‌های ۷-۳ را به تعداد T مرتبه تکرار نمایید.

بنا بر این با به‌کار بردن این الگوریتم، براورد بیزی پارامتر R، تحت تابع زیان مربعات خطا، برابر است با:

$$\hat{R}^{MC} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_t \quad (۴)$$

همچنین با استفاده از این ساختار می‌توان یک فاصله باور HPD در سطح $100(1-\eta)\%$ با استفاده از روش چن و شائو [۷] ارائه نمود.

۳- استنباط بیزی پارامتر R با پارامتر مشترک و معلوم μ

در این بخش استنباط بیزی پارامتر R تحت تابع زیان مربعات خطا، زمانی‌که λ و α دارای توزیع‌های پیشین گامای مستقل هستند، بررسی می‌شود. در این‌صورت، بر مبنای نمونه سانسور مشاهده شده، تابع درستنمایی برابر است با:

$$L(data, \mu|\lambda, \alpha) \propto \lambda^{J_1}\alpha^{J_2}e^{-\lambda V(\mu) - \alpha U(\mu)}$$

بنا بر این تابع چگالی پسین توأم بصورت زیر است:

$$\pi(\lambda, \alpha|data, \mu) \propto L(data, \mu|\lambda, \alpha)\pi_1(\lambda)\pi_2(\alpha) \quad (۵)$$

$$\propto \lambda^{J_1}\alpha^{J_2}e^{-\lambda V(\mu)-\alpha U(\mu)}\lambda^{a_1-1}e^{-b_1\lambda}\alpha^{a_2-1}e^{-b_2\alpha}$$

$$\propto \lambda^{J_1+a_1-1}\alpha^{J_2+a_2-1}\,e^{-\lambda(b_1+V(\mu))-\alpha(b_2+U(\mu))}$$

$$=\frac{\left(\lambda\left(b_1+V(\mu)\right)\right)^{J_1+a_1}\left(\alpha\left(b_2+U(\mu)\right)\right)^{J_2+a_2}}{\alpha\lambda\Gamma(J_1+a_1)\Gamma(J_2+a_2)}$$
$$\times e^{-\lambda(b_1+V(\mu))-\alpha(b_2+U(\mu))},$$

که در $V(\mu)$ و $U(\mu)$ در رابطه (۳) بیان شده‌اند. حال براورد بیزی پارامتر R تحت تابع زیان مربعات خطا از حل انتگرال زیر به‌دست می‌آید:

$$\hat{R}^B=\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\lambda}{\alpha+\lambda}\pi(\lambda,\alpha|data,\mu)d\lambda d\alpha\,.$$

حال تبدیل‌های یک به یک $u_1=\frac{\lambda}{\alpha+\lambda}$ و $u_2=\alpha+\lambda$ را در نظر بگیرید. در این‌صورت $0<u_1<1$ و $u_2>0$ و $\lambda=u_1u_2$ است و ژاکوبین (u_1,u_2) برابر $J(u_1,u_2)=u_2$ می‌شود. بنا بر این رابطه $\hat{R}^B$ را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\hat{R}^B=\frac{\left(\lambda\left(b_1+V(\mu)\right)\right)^{J_1+a_1}\left(\alpha\left(b_2+U(\mu)\right)\right)^{J_2+a_2}}{\alpha\lambda\Gamma(J_1+a_1)\Gamma(J_2+a_2)}$$

$$\times\int_0^1\int_0^\infty u_1^{J_1+a_1}(1-u_1)^{J_2+a_2-1}u_2^{w-1}$$

$$\times e^{-u_2\{u_1(b_1+V(\mu))+(1-u_1)(b_2+U(\mu))\}}du_2du_1$$

$$=\frac{(1-z)^{J_1+a_1}}{\mathrm{B}(J_1+a_1,J_2+a_2)}$$

$$\times\int_0^1 u_1^{J_1+a_1}(1-u_1)^{J_2+a_2}\,(1-u_1z)^{-w}\,du_1,$$

که در آن $z=1-\frac{b_1+V(\mu)}{b_2+U(\mu)}$ و $w=J_1+a_1+J_2+a_2$ است. انتگرال نمایش داده شده همان سری هایپرجئومتریک است، که توسط بسیاری از نرم افزارها مانند متلب قابل محاسبه می‌باشد:

$${}_2F_{1(\alpha,\beta;\gamma,\lambda)}=$$
$$\frac{1}{\mathrm{B}(\beta,\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tz)^{-\alpha}dt.$$

بنا بر این با به‌کار بردن ایده کیزیلاسلان و نادار [۸]، براورد بیز دقیق را می‌توان به‌صورت زیر محاسبه نمود:

$$\hat{R}^B=\begin{cases}E\times{}_2F_1(w,J_1+a_1+1;w+1,z) & |z|<1\\ F\times{}_2F_1(w,J_2+a_2;w+1,\frac{z}{1-z}) & z<-1,\end{cases}\qquad(۶)$$

که در آن:

$$E=\frac{(1-z)^{J_1+a_1}(J_1+a_1)}{w},F=\frac{J_1+a_1}{w(1-z)^{J_2+a_2}},$$

است. لذا، یک فاصله باور بیزی در سطح $100(1-\eta)\%$ به‌صورت (L,U) ساخته می‌شود که در آن L و U بایستی به‌ترتیب در روابط زیر صدق نمایند:

$$\int_0^L f_R(R)dR=\frac{\eta}{2},\qquad\int_0^U f_R(R)dR=1-\frac{\eta}{2},\qquad(۷)$$

که در نهایت با استفاده از رابطه (۵) و به‌کارگیری روش تغییر متغیر می‌توان $f_R(R)$ را به‌صورت زیر محاسبه نمود:

$$f_R(R)=$$
$$\frac{(1-z)^{J_1+a_1}R^{J_1+a_1-1}(1-R)^{J_2+a_2-1}(1-Rz)^{-w}}{\mathrm{B}(J_1+a_1,J_2+a_2)}.$$

۴- استنباط بیزی پارامتر R در حالت کلی

در این بخش، فرض کنید که $X\sim tR(\mu_1,\lambda)$ و $Y\sim tR(\mu_2,\alpha)$ باشند، در این‌صورت پارامتر قابلیت اطمینان R به‌صورت انتگرالی زیر محاسبه می‌شود:

$$R=1-\int_{\mu_2}^\infty 2\alpha(y-\mu_2)e^{-\lambda(y-\mu_1)^2-\alpha(y-\mu_2)^2}dy.$$

در این بخش به استنباط بیزی پارامتر R تحت تابع زیان مربعات خطا، زمانی‌که توابع چگالی پیشین λ، α دارای توزیع‌های گامای مستقل، و پارامترهای μ_1 و μ_2 دارای توابع چگالی پیشین ناآگاهی بخش هستند، پرداخته می‌شود. مشابه بخش ۲-۲، از آن‌جاکه براورد بیزی پارامتر R را نمی‌توان به‌صورت فرم بسته نمایش داد، با استفاده از روش MCMC تقریبی برای این براورد ارائه می‌دهیم. با توجه به تابع چگالی پسین توأم، توابع چگالی پسین λ، α، μ_1 و μ_2 به‌ترتیب برابر هستند با:

$$\lambda|\mu_1,data\sim\Gamma\left(J_1+a_1,b_1+V(\mu_1)\right),$$

$$\alpha|\mu_2, data \sim \Gamma\big(J_2+a_2, b_2+U(\mu_2)\big),$$

$$\pi(\mu_1|\lambda, data) \propto \prod_{i=1}^{J_1}(x_i-\mu_1)e^{-\lambda V(\mu_1)},$$

$$\pi(\mu_2|\alpha, data) \propto \prod_{j=1}^{J_2}\big(y_j-\mu_2\big)e^{-\alpha U(\mu_2)}.$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود برای تولید یک نمونه تصادفی از توابع چگالی احتمال پسین $\pi(\mu_1|\lambda, data)$ و $\pi(\mu_2|\alpha, data)$ باید از روش متروپولیس-هستینگز استفاده گردد. بنا بر این الگوریتم گیبز پیشنهادی به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

۱. با مقادیر اولیه $(\lambda_{(0)}, \alpha_{(0)}, \mu_{1(0)}, \mu_{2(0)})$ شروع کنید.

۲. قرار دهید $t=1$.

۳. با استفاده از روش متروپولیس-هستینگز $\mu_{1(t)}$ را از $\pi\big(\mu_1|\lambda_{(t-1)}, data\big)$ با توزیع پیشنهادی $N(\mu_{1(t-1)},1)$ تولید کنید.

۴. با استفاده از روش متروپولیس-هستینگز $\mu_{2(t)}$ را از $\pi\big(\mu_2|\alpha_{(t-1)}, data\big)$ با توزیع پیشنهادی $N\big(\mu_{2(t-1)},1\big)$ تولید کند.

۵. $\lambda_{(t)}$ را از $\Gamma\left(J_1+a_1, b_1+V\big(\mu_{1(t-1)}\big)\right)$ تولید کنید.

۶. $\alpha_{(t)}$ را از $\Gamma\left(J_2+a_2, b_2+U\big(\mu_{2(t-1)}\big)\right)$ تولید کنید.

۷. مقدار R_t را به‌صورت زیر محاسبه کنید:

$$R_t = 1-\int_{\mu_{2(t)}}^{\infty} 2\alpha_{(t)}\big(y-\mu_{2(t)}\big) \times e^{-\lambda_{(t)}\left(y-\mu_{1(t)}\right)^2-\alpha_{(t)}\left(y-\mu_{2(t)}\right)^2}dy,$$

۸. قرار دهید $t=t+1$.

۹. گام‌های ۸-۳ را به تعداد T مرتبه تکرار نمایید.

لذا براورد بیزی پارامتر R، تحت تابع زیان مربعات خطا برابر است با:

$$\hat{R}^{MC} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_t. \qquad (۸)$$

همچنین می‌توان بر این اساس، یک فاصله باور HPD در سطح $100(1-\eta)\%$ با استفاده از روش چن و شائو [۹] ارائه نمود.

۵- مطالعات شبیه‌سازی

در این بخش، عملکرد براوردگرهای مختلف بیزی، تحت طرح‌های HPC، را با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو بررسی می‌نماییم. روش شبیه‌سازی مونت کارلو کاربردهای فراوانی در نظریه احتمال دارد. براوردهای نقطه‌ای حاصل برحسب میانگین مربعات خطا (MSE) و براوردهای فاصله‌ای برحسب میانگین طول فواصل و درصد همگرایی با هم مقایسه می‌شوند. تمامی نتایج با ۳۰۰۰ مرتبه تکرار حاصل شده‌اند. همچنین در این مطالعه، ۳ طرح سانسور مختلف مورد بررسی قرار داده می‌شود که این طرح‌ها عبارت‌اند از:

طرح ۱: $R_1=\cdots=R_{n-1}=0, R_n=N-n$

طرح ۲: $R_1=N-n, R_2=\cdots=R_n=0$

طرح ۳: $R_1=\cdots=R_n=\frac{N-n}{n}$

علاوه بر آن، استنباط بیزی با استفاده از دو توزیع پیشین متفاوت به‌صورت زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد:

پیشین ۱: $a_1=b_1=a_2=b_2=0$

پیشین ۲: $a_1=a_2=1,\ b_1=b_2=0.1$

در حالت اول، با فرض پارامتر μ مشترک و نامعلوم، مقادیر پارامتر $(\lambda,\alpha,\mu)=(2{,}2.5{,}1)$ برای به‌دست آوردن نتایج شبیه‌سازی به‌کار گرفته شده‌اند. تحت شرایط بالا، مقادیر MSE برای براوردگرهای بیزی با استفاده از تقریب لیندلی و روش MCMC از روابط (۲) و (۴) به‌ترتیب به‌دست آمده‌اند. همچنین فواصل باور HPD در سطح اطمینان ۹۵٪ محاسبه شده‌اند. نتایج حاصل شده، در جدول ۱ گزارش شده است. از جدول ۱، ملاحظه می‌شود که بهترین عملکرد، برحسب MSE، به توابع چگالی پیشین آگاهی‌بخش (توابع چگالی پیشین ۲) تعلق دارد. علاوه بر این، براورد بیزی به‌دست آمده به روش MCMC نسبت به روش لیندلی، در حالت کلی دارای عملکرد بهتری است. همچنین، ملاحظه می‌شود که فواصل باور HPD بر اساس توابع چگالی پیشین آگاهی‌بخش (توابع چگالی پیشین ۲) دارای طول فواصل کوتاه‌تر و درصد همگرایی بیش‌تری هستند و لذا بهترین عملکرد را نسبت به توابع چگالی پیشین ناآگاهی‌بخش (توابع چگالی پیشین ۱) دارند. همچنین به‌عنوان یک حقیقت، از جدول ۱، ملاحظه می‌شود که با افزایش n برای N و T ثابت، و با افزایش T برای N و n ثابت، مقادیر MSE و طول فواصل باور کاهش یافته و مقادیر درصد همگرایی به دلیل در دسترس بودن داده‌های بیش‌تر، در تمامی حالت‌ها افزایش می‌یابد.

جدول ۱. نتایج شبیه‌سازی با پارامتر مکان مشترک و نامعلوم.

(N,n,T)	C.S	Prior 1				Prior 2			
		MCMC			Lindley	MCMC			Lindley
		MSE	Length	C.P	MSE	MSE	Length	C.P	MSE
(۰/۷و۱۰و۴۰)	(۱و۱)	۰/۰۱۰۳	۰/۴۰۶۱	۰/۹۰۰	۰/۰۱۷۲	۰/۰۰۹۹	۰/۳۹۲۲	۰/۹۰۲	۰/۰۱۶۵
	(۲و۲)	۰/۰۱۱۵	۰/۴۰۴۳	۰/۹۰۲	۰/۰۲۱۵	۰/۰۱۱۰	۰/۳۹۳۱	۰/۹۰۷	۰/۰۲۱۰
	(۳و۳)	۰/۰۱۰۰	۰/۴۱۱۷	۰/۹۰۳	۰/۰۱۶۱	۰/۰۰۹۶	۰/۳۹۵۶	۰/۹۰۸	۰/۰۱۴۰
	(۲و۱)	۰/۰۳۲۲	۰/۳۸۸۷	۰/۹۰۱	۰/۰۵۲۴	۰/۰۳۱۴	۰/۳۷۸۸	۰/۹۰۴	۰/۰۴۳۵
(۰/۹و۱۰و۴۰)	(۱و۱)	۰/۰۰۹۷	۰/۴۰۱۹	۰/۹۱۵	۰/۰۱۶۱	۰/۰۰۹۴	۰/۳۸۶۴	۰/۹۱۵	۰/۰۱۴۷
	(۲و۲)	۰/۰۰۸۷	۰/۴۰۲	۰/۹۱۵	۰/۰۱۶۸	۰/۰۰۸۴	۰/۳۹۰۲	۰/۹۱۶	۰/۰۱۳۸
	(۳و۳)	۰/۰۰۹۳	۰/۴۰۷۸	۰/۹۱۸	۰/۰۱۳۳	۰/۰۰۹۲	۰/۳۹۴۸	۰/۹۲۰	۰/۰۱۲۹
	(۲و۱)	۰/۰۲۷۶	۰/۳۷۶۹	۰/۹۱۵	۰/۰۴۵۴	۰/۰۲۷۰	۰/۳۷۰۸	۰/۹۲۰	۰/۰۳۷۴
(۰/۹و۱۰و۶۰)	(۱و۱)	۰/۰۰۹۸	۰/۴۰۴۲	۰/۹۲۹	۰/۰۱۹۵	۰/۰۰۹۵	۰/۳۸۹۵	۰/۹۳۰	۰/۰۱۶۳
	(۲و۲)	۰/۰۰۹۸	۰/۴۰۳۹	۰/۹۲۲	۰/۰۱۷۹	۰/۰۰۹۵	۰/۳۹۰۶	۰/۹۲۴	۰/۰۱۵۲
	(۳و۳)	۰/۰۰۸۳	۰/۴۰۵۵	۰/۹۲۱	۰/۰۱۳۹	۰/۰۰۸۲	۰/۰۳۹۲	۰/۹۲۲	۰/۰۱۱۷
	(۲و۱)	۰/۰۳۳۱	۰/۳۷۱۷	۰/۹۳۰	۰/۰۴۵۳	۰/۰۳۲۳	۰/۳۶۵۹	۰/۹۳۱	۰/۰۳۷۳
(۰/۹و۲۰و۶۰)	(۱و۱)	۰/۰۰۴۷	۰/۲۹۷۹	۰/۹۴۰	۰/۰۰۷۶	۰/۰۰۴۶	۰/۲۹۱۹	۰/۹۴۲	۰/۰۰۶۷
	(۲و۲)	۰/۰۰۵۴	۰/۲۹۷۷	۰/۹۳۹	۰/۰۰۷۹	۰/۰۰۵۳	۰/۲۸۷۳	۰/۹۴۰	۰/۰۰۷۱
	(۳و۳)	۰/۰۰۵۱	۰/۲۹۷۴	۰/۹۴۲	۰/۰۰۶۹	۰/۰۰۵۰	۰/۲۹۰۴	۰/۹۴۴	۰/۰۰۶۴
	(۲و۱)	۰/۰۲۵۱	۰/۲۵۹۸	۰/۹۳۹	۰/۰۴۲۲	۰/۰۲۴۳	۰/۲۵۶۲	۰/۹۴۰	۰/۰۳۵۳

در حالت دوم، با فرض پارامتر μ مشترک و معلوم، مقادیر پارامتر $(\lambda,\alpha,\mu)=(3,2.5,2)$ برای به‌دست آوردن نتایج شبیه‌سازی فرض شده‌اند. تحت شرایط بالا، مقادیر MSE برای براوردگر دقیق بیزی و فاصله باور بیزی با استفاده از روابط (۶) و (۷) به‌ترتیب به‌دست آمده‌اند. نتایج حاصل شده، در جدول ۲ ارائه شده است. از جدول ۲، ملاحظه می‌شود که بهترین عملکرد، برحسب MSE، به توابع چگالی پیشین آگاهی‌بخش (توابع چگالی پیشین ۲) تعلق دارد. علاوه بر این، براورد دقیق بیزی در این حالت محاسبه شده است، که ملاحظه می‌شود فواصل باور بیزی بر اساس توابع چگالی پیشین آگاهی‌بخش (توابع چگالی پیشین ۲) دارای طول فواصل کوتاه‌تر و درصد همگرایی بیش‌تری هستند و لذا بهترین عملکرد را نسبت به توابع چگالی پیشین ناآگاهی‌بخش (توابع چگالی پیشین ۱) دارند. علاوه بر این از جدول ۲، ملاحظه می‌شود که با افزایش n برای N و T ثابت، و با افزایش T برای N و n ثابت، مقادیر MSE و طول فواصل باور کاهش یافته و مقادیر درصد همگرایی به دلیل در دسترس بودن داده‌های بیش‌تر، در تمامی حالت‌ها افزایش می‌یابد.

در حالت سوم، با فرض μ_1 و μ_2 متفاوت و نامعلوم، مقادیر پارامتر $(\lambda,\alpha,\mu_1,\mu_2)=(3,2.5,2,1)$ برای به‌دست آوردن نتایج شبیه‌سازی لحاظ شده‌اند. این حالت برای محققان نظریه قابلیت اطمینان دارای اهمیت ویژه‌ای است، زیرا در بسیاری از شرایط کاربردی فرضیه مشترک بودن پارامترها بسیار ضعیف است و لذا این حالت مهم‌ترین حالت مورد بررسی است. تحت شرایط بالا، مقادیر MSE براوردگرهای بیزی با استفاده از رابطه (۸) به‌دست آمده است. همچنین فواصل باور HPD در سطح ۹۵٪ محاسبه شده‌اند. نتایج حاصل شده، در جدول ۳ گزارش شده است. از جدول ۳ مشابه جداول قبل مشاهده می‌شود که بهترین عملکرد، برحسب MSE، به توابع چگالی پیشین آگاهی‌بخش (توابع چگالی پیشین ۲) تعلق دارد. علاوه بر این، براورد MCMC بیزی در این حالت محاسبه شده است. همچنین، ملاحظه می‌شود که فواصل باور HPD بر اساس توابع چگالی پیشین آگاهی‌بخش (توابع چگالی پیشین ۲) دارای طول فواصل کوتاه‌تر و درصد همگرایی بیش‌تری هستند و لذا بهترین عملکرد را نسبت به توابع چگالی پیشین ناآگاهی‌بخش (توابع چگالی پیشین ۱) دارند.

جدول ۲. نتایج شبیه‌سازی با پارامتر مکان مشترک و معلوم.

(N,n,T)	C.S	Prior 1 (Exact)			Prior 2 (Exact)		
		MSE	Length	C.P	MSE	Length	C.P
(۰/۷و۱۰و۴۰)	(۱و۱)	۰/۰۱۰۹	۰/۴۰۶۷	۰/۹۲۳	۰/۰۰۶۷	۰/۳۹۴۶	۰/۹۲۴
	(۲و۲)	۰/۰۱۰۵	۰/۴۰۵۱	۰/۹۱۹	۰/۰۰۶۱	۰/۳۹۴۴	۰/۹۲۵
	(۳و۳)	۰/۰۱۱۷	۰/۴۰۷۲	۰/۹۰۲	۰/۰۰۶۸	۰/۳۹۶۴	۰/۹۰۵
	(۲و۱)	۰/۰۳۱۵	۰/۳۷۵۹	۰/۹۰۱	۰/۰۲۵۲	۰/۳۷۵۸	۰/۹۰۳
(۰/۹و۱۰و۴۰)	(۱و۱)	۰/۰۱۱۶	۰/۴۰۳۷	۰/۹۱۵	۰/۰۰۶۴	۰/۳۹۳۵	۰/۹۱۹
	(۲و۲)	۰/۰۰۹۵	۰/۴۰۴۴	۰/۹۲۴	۰/۰۰۵۵	۰/۳۹۳۵	۰/۹۲۵
	(۳و۳)	۰/۰۱۱۰	۰/۴۰۵۷	۰/۹۳۴	۰/۰۰۶۴	۰/۳۹۴۵	۰/۹۳۵
	(۲و۱)	۰/۰۲۹۹	۰/۳۷۳۶	۰/۹۲۵	۰/۰۱۹۸	۰/۳۷۳۳	۰/۹۲۹
(۰/۹و۱۰و۶۰)	(۱و۱)	۰/۰۱۰۵	۰/۴۰۶۰	۰/۹۲۴	۰/۰۰۶۱	۰/۳۹۵۱	۰/۹۲۶
	(۲و۲)	۰/۰۱۰۸	۰/۴۰۴۲	۰/۹۲۴	۰/۰۰۶۳	۰/۳۹۴۵	۰/۹۲۵
	(۳و۳)	۰/۰۱۰۶	۰/۴۰۵۳	۰/۹۲۳	۰/۰۰۶۲	۰/۳۹۴۲	۰/۹۲۴
	(۲و۱)	۰/۰۳۷۸	۰/۳۷۰۷	۰/۹۳۳	۰/۰۳۰۴	۰/۳۷۰۰	۰/۹۳۴
(۰/۹و۲۰و۶۰)	(۱و۱)	۰/۰۰۶۱	۰/۲۹۷۰	۰/۹۴۴	۰/۰۰۴۵	۰/۲۹۱۹	۰/۹۴۷
	(۲و۲)	۰/۰۰۵۵	۰/۲۹۷۰	۰/۹۴۴	۰/۰۰۴۱	۰/۲۹۲۱	۰/۹۴۸
	(۳و۳)	۰/۰۰۵۳	۰/۲۹۶۹	۰/۹۴۳	۰/۰۰۴۰	۰/۲۹۲۲	۰/۹۴۶
	(۲و۱)	۰/۰۳۲۱	۰/۲۶۱۲	۰/۹۴۶	۰/۰۲۰۹	۰/۲۶۰۶	۰/۹۴۶

علاوه بر این ملاحظه می‌شود که با افزایش n برای N و T ثابت، و با افزایش T برای N و n ثابت، مقادیر MSE و طول فواصل باور کاهش یافته و مقادیر درصد همگرایی به دلیل در دسترس بودن داده‌های بیش‌تر، در تمامی حالت‌ها افزایش می‌یابد.

جدول ۳. نتایج شبیه‌سازی در حالت کلی

(N,n,T)	C.S	Prior 1 (MCMC)			Prior 2 (MCMC)		
		MSE	Length	C.P	MSE	Length	C.P
(۰/۷و۱۰و۴۰)	(۱و۱)	۰/۰۱۱۱	۰/۴۰۸۳	۰/۹۰۰	۰/۰۰۸۰	۰/۳۹۳۳	۰/۹۰۱
	(۲و۲)	۰/۰۰۷۸	۰/۴۱۱۴	۰/۹۱۲	۰/۰۰۵۶	۰/۳۹۴۸	۰/۹۱۷
	(۳و۳)	۰/۰۱۱۵	۰/۴۰۵۳	۰/۹۰۰	۰/۰۰۸۰	۰/۳۹۴۴	۰/۹۰۶
	(۲و۱)	۰/۰۳۲۰	/۳۸۰۱	۰/۹۱۱	۰/۰۲۷۹	۰/۳۷۲۹	۰/۹۱۳
(۰/۹و۱۰و۴۰)	(۱و۱)	۰/۰۰۹۰	۰/۴۰۴۸	۰/۹۲۳	۰/۰۰۶۶	۰/۳۹۲۲	۰/۹۲۴
	(۲و۲)	۰/۰۰۷۶	۰/۴۰۷۶	۰/۹۱۵	۰/۰۰۴۸	۰/۳۹۴	۰/۹۱۹
	(۳و۳)	۰/۰۱۰۵	۰/۴۰۵۰	۰/۹۲۱	۰/۰۰۷۴	۰/۳۹۳۵	۰/۹۲۲
	(۲و۱)	۰/۰۲۸۱	۰/۳۷۱۹	۰/۹۳۳	۰/۰۲۱۲	۰/۳۵۳۲	۰/۹۳۵
(۰/۹و۱۰و۶۰)	(۱و۱)	۰/۰۰۸۹	۰/۴۰۶۲	۰/۹۳۱	۰/۰۰۶۴	۰/۳۹۴۶	۰/۹۳۷
	(۲و۲)	۰/۰۱۰۴	۰/۴۰۳۵	۰/۹۳۰	۰/۰۰۷۳	۰/۳۹۳	۰/۹۳۶
	(۳و۳)	۰/۰۰۷۱	۰/۴۰۳	۰/۹۲۱	۰/۰۰۵۸	۰/۳۸۱۱	۰/۹۲۶
	(۲و۱)	۰/۰۳۱۶	۰/۳۷۴	۰/۹۱۵	۰/۰۲۴۵	۰/۳۶۶۸	۰/۹۱۷
(۰/۹و۲۰و۶۰)	(۱و۱)	۰/۰۰۵۱	۰/۲۹۷۳	۰/۹۴۲	۰/۰۰۴۳	۰/۲۹۲۳	۰/۹۴۳
	(۲و۲)	۰/۰۰۵۰	۰/۲۹۵۶	۰/۹۴۰	۰/۰۰۴۳	۰/۲۸۹۲	۰/۹۴۵
	(۳و۳)	۰/۰۰۵۰	۰/۲۹۸۵	۰/۹۳۹	۰/۰۰۴۲	۰/۲۹۲۳	۰/۹۴۳
	(۲و۱)	۰/۰۲۷۱	۰/۲۵۹۸	۰/۹۴۰	۰/۰۲۰۳	۰/۲۵۷۷	۰/۹۴۴

۶-نتیجه‌گیری

در این مقاله، تحت سانسور فزاینده پیوندی، زمانی‌که متغیرهای تنش و مقاومت دارای توزیع رایلی دو پارامتری هستند، براورد بیزی پارامتر قابلیت اطمینان R به‌دست آمده است. در حقیقت ما مسئله را در سه حالت مختلف بررسی کرده‌ایم. حالت اول، براورد نقطه‌ای و فاصله‌ای بیزی R، وقتی‌که $X \sim tR(\mu,\lambda)$ و $Y \sim tR(\mu,\alpha)$ است، بدست آورده شده است. در این حالت چون براورد بیزی دارای فرم بسته نمی‌باشد، به دو روش تقریبی لیندلی و MCMC محاسبه شده است. همچنین با استفاده از روش MCMC یک فاصله باور HPD در سطح ۹۵٪ برای پارامتر R محاسبه شده است. در حالت دوم، وقتی‌که پارامتر مشترک μ معلوم است، براورد دقیق بیزی و همچنین فاصله باور بیزی در سطح ۹۵٪ برای پارامتر R بدست آورده شده است. در حالت سوم، وقتی‌که $X \sim tR(\mu_1,\lambda)$ و $Y \sim tR(\mu_2,\alpha)$ است، براورد تقریبی بیزی با استفاده از روش MCMC و فاصله باور HPD بیزی در سطح ۹۵٪ برای پارامتر قابلیت اطمینان محاسبه شده است.

با به‌کار بردن روش شبیه‌سازی مونت کارلو براوردهای مختلف بیزی با معیار MSE، طول فاصله باور و درصد همگرایی مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند. در ارزیابی مدل پیشنهادی، کم‌تر بودن مقدار MSE، کوتاه‌تر بودن طول فاصله باور و بیش‌تر بودن درصد همگرایی بیانگر مطلوب بودن روش براوردیابی است.

۷- مراجع

[1] Balakrishnan, N. and Aggarwala, R. (2000). Progressive censoring, methods and applications, Boston, Birkhäuser.

[۲] Kundu, D. and Joarder, A. (2006). Analysis of type-II progressively hybrid censored data, Computational Statistics and Data Analysis, 50(10): 2509-2528.

[۳] Shoaee, S. and Khorram, E. (2015). Stress-strength reliability of a two-parameter bathtub-shaped lifetime distribution based on progressively censored samples, Communications in Statistics-Theory and Methods, 44(24); 5306-5328.

[۴] Shoaee, S. and Khorram, E. (2016). Statistical inference of R=P(Y<X) for Weibull distribution under Type-II progressively hybrid censored data, Journal of Statistical Computation and Simulation, 86(18): 3815-3834.

[۵] Kohansal, A. (2019). On estimation of reliability in a multicomponent stress-strength model for a Kumaraswamy distribution based on progressively censored sample, Statistical Papers, 60(6): 2185-2224.

[۶] Kohansal, A. and Rezakhah, S. (2019). Inference of R = P(Y < X) for two-parameter Rayleigh distribution based on progressively censored samples, Statistics, 53(1): 81-100.

[۷] Lindley, D. V. (1980). Approximate Bayesian methods, Trabajos de Estadistica, 31(1): 281-288.

[۸] Kizilaslan, F. and Nadar, M. (2018). Estimation of reliability in a multicomponent stress-strength model based on a bivariate Kumaraswamy distribution, Statistical Papers, 59(1): 307-340.

[۹] Chen, M. H. and Shao, Q. M. (1999). Monte Carlo estimation of Bayesian Credible and HPD intervals, Journal of Computational and Graphical Statistics, 8(1): 69-92.