

برآورد پارامتر قابلیت اعتماد برای توزیع نمایی وارون تعمیم یافته براساس نمونه‌های سانسور فزاینده نوع ۲

اکرم کهن سال

(نویسنده مسئول) استادیار، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، گروه آمار*

رامین کاظمی

دانشیار، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، گروه آمار، r.kazemi@sci.ikiu.ac.ir

ندا فرجی

استادیار، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، گروه مهندسی برق، nfaraji@eng.ikiu.ac.ir

چکیده هدف این مقاله، بررسی پارامتر قابلیت اعتماد $R = P(X < Y)$ براساس نمونه‌هایی با سانسور فزاینده نوع ۲ است که در آن X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نمایی وارون تعمیم یافته با پارامترهای شکل متفاوت و پارامتر مقیاس یکسان هستند. برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی (MLE) و برآوردگر ناریب با واریانس به‌طور یکنواخت مینیمم (UMVUE) پارامتر R به‌دست می‌آیند و بازه‌های اطمینان مختلفی ارائه می‌شوند. همچنین، برآوردگر بیز R و بازه اطمینان HPD با استفاده از روش نمونه‌گیری گیبز پیشنهاد می‌شوند. شبیه‌سازی‌های مونت کارلو برای مقایسه عملکرد روش‌های مختلف انجام شده است.

کلمات کلیدی توزیع نمایی وارون تعمیم یافته، برآوردگر بیز، برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی، شبیه‌سازی مونت کارلو، سانسور فزاینده نوع ۲

۱- مقدمه

[۵]، کریشنامورتی و همکاران [۶]، رغاب و همکاران [۷]، کاندو و رغاب [۸]، لیو و تسای [۹] ارجاع داده می‌شوند.

طرح‌های سانسور نوع ۱ و نوع ۲ کاربردهای عملی فراوانی دارند. در سانسور نوع ۱، آزمایش در زمان از قبل تعیین شده‌ای به پایان می‌رسد. در سانسور نوع ۲، آزمایش با مشاهده تعداد مشخصی از شکست‌ها به پایان می‌رسد. متأسفانه در هیچ یک از این طرح‌های سانسور، حذف واحدهای فعال در طی آزمایش امکان‌پذیر نیست. بنابراین، طرح سانسور فزاینده مطرح شد. این طرح به آزمایشگر اجازه می‌دهد که واحدهای فعال را در طی آزمایش حذف کند. سانسور فزاینده نوع ۲ با ترکیب طرح‌های سانسور نوع ۱ و سانسور فزاینده به‌دست می‌آید. در بین طرح‌های سانسور مختلف، طرح سانسور فزاینده نوع ۲، در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری از نویسندگان قرار گرفته است، که از آن جمله می‌توان به کهن سال [۱۰] و کهن سال و رضاخواه [۱۱] و مراجع معرفی شده در آن‌ها اشاره کرد.

یکی از مهمترین مسائل در نظریه تحلیل قابلیت اعتماد، استدلال درباره پارامتر قابلیت اعتماد یا پارامتر تنش-مقاومت $R = P(X < Y)$ است که در آن X بیانگر تنش و Y بیانگر مقاومت است. یک سیستم دچار شکست می‌شود، هرگاه تنش ایجاد شده در هر زمان بیشتر از مقاومت آن باشد. برآورد پارامتر تنش-مقاومت توجه محققان بسیاری را در حوزه آمار به خود جلب کرده است که با تحقیق بنیادی بیربائوم [۱] شروع می‌شود. بیربائوم ارتباطی بین مدل تنش-مقاومت و آماره من-ویتی کلاسیک ایجاد کرد. از آن زمان به بعد، تحقیقاتی برای برآورد پارامتر تنش-مقاومت در توزیع‌های مختلفی از دیدگاه بیزی و فراوانی‌گرا صورت گرفت. تحقیق کوتز و همکاران [۲]، مروری کامل از توسعه این مدل را تا آن زمان فراهم کرد. خوانندگان محترم برای برخی پژوهش‌های جدید درباره مدل تنش-مقاومت به مقالات کاندو و گوپتا [۳ و ۴]، رغاب و کاندو

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۲/۲۰ / تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۵/۱۴

دوره ۱۰ / شماره ۱

صفحات: ۶۰-۷۴

* (Corresponding author) kohansal@sci.ikiu.ac.ir

کومار [۱۴] برآورد تابع بقا در توزیع نمایی وارون تعمیم‌یافته را با نمونه سانسور فزاینده نوع ۲ مطالعه کردند. این مطالعه نشان داد که در بیشتر موقعیت‌های عملی، توزیع نمایی وارون تعمیم‌یافته مدل طول عمر بهتری نسبت به توزیع‌های نمایی، نمایی وارون، گاما و وایبول است. دی و پرادهان [۱۵]، توزیع نمایی وارون تعمیم‌یافته را در سانسور تصادفی پیوندی بررسی کردند.

فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی نمایی وارون تعمیم‌یافته مستقل با پارامتر مقیاس مشترک λ و پارامترهای شکل α و β باشند. دو طرح سانسور فزاینده برای X و Y وجود دارد که به ترتیب به صورت $\{N, n, R_1, R_2, \dots, R_n\}$ و $\{M, m, S_1, S_2, \dots, S_m\}$ هستند. تحت سانسور فزاینده، از X و Y نمونه‌های $\{X_{1:n:N}, \dots, X_{n:n:N}\}$ و $\{Y_{1:m:M}, \dots, Y_{m:m:M}\}$ به ترتیب مشاهده می‌شود و هدف این مقاله برآورد مقدار پارامتر $R = P(X < Y) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$ است.

مقاله حاضر به صورت زیر سازماندهی می‌شود. در بخش ۲، MLE پارامتر R را بررسی می‌کنیم. مشاهده می‌شود که MLE را می‌توان با حل کردن یک معادله غیرخطی و با استفاده از روش تکرار به دست آورد. برآوردگر UMVUE پارامتر R در بخش ۳ مطالعه می‌شود. بازه‌های اطمینان دقیق، مجانبی و بوت استرپ R در بخش ۴ ارائه می‌شوند. برآورد بیز و بازه اطمینان متناظر در بخش ۵ بررسی می‌شوند. نتایج شبیه‌سازی در بخش ۶ ارائه و در نهایت، نتیجه‌گیری در بخش ۷ صورت می‌گیرد.

۲- MLE پارامتر R

فرض کنید $X \sim GIE(\alpha, \lambda)$ و $Y \sim GIE(\beta, \lambda)$ دو متغیر تصادفی مستقل باشند. واضح است که پارامتر قابلیت اعتماد برابر با $R = P(X < Y) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$ است. در این بخش، علاقه‌مند به برآورد R تحت داده‌های سانسور فزاینده نوع ۲ برای دو متغیر X و Y هستیم.

برای محاسبه MLE پارامتر R ، ابتدا پارامترهای α ، β و λ را به دست می‌آوریم. فرض کنید $\{X_{1:n:N}, \dots, X_{n:n:N}\}$ نمونه‌ای با سانسور فزاینده از $GIE(\alpha, \lambda)$ و طرح سانسور $\{N, n, R_1, R_2, \dots, R_n\}$ باشد. به طور مشابه، فرض کنید $\{Y_{1:m:M}, \dots, Y_{m:m:M}\}$ نمونه‌ای با سانسور فزاینده از

این طرح سانسور را می‌توان به صورت زیر توصیف کرد: فرض کنید N واحد در معرض آزمایش طول عمر قرار می‌گیرند و آزمایشگر می‌خواهد n واحد را تا پایان آزمایش نگه دارد. بنابراین، در زمان شکست اول، R_1 واحد از $N - 1$ واحد باقیمانده به صورت تصادفی از آزمایش حذف می‌شوند. در زمان شکست دوم، R_2 واحد از $N - R_1 - 1$ واحد باقیمانده به صورت تصادفی از آزمایش حذف می‌شوند و این کار به همین ترتیب ادامه می‌یابد. در نهایت، در زمان شکست n -ام، همه واحدهای باقیمانده، $R_n = N - n - R_1 - \dots - R_{n-1}$ از آزمایش حذف می‌شوند. بنابراین، طرح سانسور فزاینده نوع ۲ از n و (R_1, \dots, R_n) تشکیل می‌شود، به طوری که در آن رابطه زیر برقرار است: $R_1 + \dots + R_n = N - n$. همانطور که ملاحظه می‌شود، واضح است که این طرح شامل طرح سانسور نوع ۲ عادی ($R_n = N - n$ و $R_1 = \dots = R_{n-1} = 0$) است و نیز در حالتی خاص، طرح نمونه‌گیری با داده‌های کامل ($N = n$ و $R_1 = \dots = R_n = 0$) می‌باشد. برای جزئیات بیشتر درباره طرح سانسور فزاینده و مراجع مرتبط، می‌توانید به کتاب بالاکریشنن و آگراوالا [۱۲] مراجعه کنید. هدف این مقاله، بررسی و استنباط در مورد قابلیت اعتماد تنش-مقاومت $R = P(X < Y)$ بر اساس نمونه‌های با طرح سانسور فزاینده نوع ۲، است که در آن X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع نمایی وارون تعمیم‌یافته با پارامترهای شکل متفاوت و پارامتر مقیاس یکسان هستند. تابع چگالی احتمال، تابع توزیع تجمعی و تابع نرخ شکست توزیع نمایی وارون تعمیم‌یافته (GIED) با پارامترهای مثبت شکل α و مقیاس λ ، به ترتیب به صورت

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\alpha\lambda}{x^2} e^{-\frac{\lambda}{x}} (1 - e^{-\frac{\lambda}{x}})^{\alpha-1}, & x > 0, \\ F(x) &= 1 - (1 - e^{-\frac{\lambda}{x}})^{\alpha}, & x > 0, \\ h(x) &= \frac{\alpha\lambda}{x^2 \left(e^{\frac{\lambda}{x}} - 1 \right)}, & x > 0, \end{aligned} \quad (1)$$

هستند. در ادامه، توزیع نمایی وارون تعمیم‌یافته با تابع چگالی احتمال (۱) را با نماد $GIE(\alpha, \lambda)$ نشان می‌دهیم. با کمی دقت، ملاحظه می‌شود که تابع نرخ شکست، یک تابع تک‌مُدی و غیریکنواخت است. در بیشتر موقعیت‌های کاربردی، داده‌ها از توزیعی به دست می‌آیند که تابع نرخ شکست غیریکنواخت دارند. بنابراین، اگر مطالعه تجربی نشان دهد که تابع نرخ شکست توزیع اصلی غیریکنواخت و تک‌مُدی است، آنگاه توزیع نمایی وارون تعمیم‌یافته برای تحلیل این مجموعه داده‌ها توزیع مناسبی خواهد بود. توزیع نمایی وارون تعمیم‌یافته توسط ابومو و الشینگیتی [۱۳] با اضافه کردن پارامتر شکل در توزیع نمایی وارون معرفی شد. آن‌ها ویژگی‌های توزیع و پارامتر قابلیت اعتماد توزیع را در نمونه‌های کامل بررسی کردند. کریشنا و

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = \frac{n+m}{\lambda} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + \sum_{j=1}^m \frac{1}{y_j} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{(\alpha(R_i+1)-1)e^{-\frac{\lambda}{x_i}}}{x_i(1-e^{-\frac{\lambda}{x_i}})} + \sum_{j=1}^m \frac{(\beta(S_j+1)-1)e^{-\frac{\lambda}{y_j}}}{y_j(1-e^{-\frac{\lambda}{y_j}})} = 0 \quad (۴)$$

به دست آورد. از معادلات (۲) و (۳) داریم:

$$\hat{\alpha}(\lambda) = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n (R_i+1) \log\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_i}}\right)},$$

$$\hat{\beta}(\lambda) = -\frac{m}{\sum_{j=1}^m (S_j+1) \log\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{y_j}}\right)}.$$

همچنین، $\hat{\lambda}$ جواب معادله غیرخطی $k(\lambda) = \lambda$ است. به طوری که

$$k(\lambda) = (n+m) \times \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \left(1 - \frac{(\alpha(R_i+1)-1)e^{-\frac{\lambda}{x_i}}}{1 - e^{-\frac{\lambda}{x_i}}} \right) + \sum_{j=1}^m \frac{1}{y_j} \left(1 - \frac{(\beta(S_j+1)-1)e^{-\frac{\lambda}{y_j}}}{1 - e^{-\frac{\lambda}{y_j}}} \right) \right\}^{-1}.$$

چون $\hat{\lambda}$ جواب معادله نقطه ثابت غیرخطی بالا است، با استفاده از طرح تکرار به صورت $k(\lambda_{(j)}) = \lambda_{(j+1)}$ به دست می‌آید که $\lambda_{(j)}$ که j -امین تکرار $\hat{\lambda}$ است. روند تکرار باید زمانی متوقف شود که $|\lambda_{(j)} - \lambda_{(j+1)}|$ به اندازه کافی کوچک شود. وقتی $\hat{\lambda}$ به دست آمد، $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ نیز به دست خواهند آمد. بنابراین، MLE پارامتر R برابر است با

$$\hat{R} = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\alpha} + \hat{\beta}} \quad (۵)$$

۳- UMVUE پارامتر R

در این بخش، UMVUE پارامتر R محاسبه می‌شود. فرض کنید $\{X_{1:n:N}, \dots, X_{n:n:N}\}$ نمونه‌ای با سانسور فزاینده از $GIE(\alpha, \lambda)$ و طرح سانسور $\{N, n, R_1, \dots, R_n\}$ باشد. به طور مشابه، فرض کنید $\{Y_{1:m:M}, \dots, Y_{m:m:M}\}$ نمونه‌ای با سانسور فزاینده از $GIE(\beta, \lambda)$ و طرح سانسور $\{M, m, S_1, \dots, S_m\}$ باشد. تابع چگالی احتمال توأم $\{X_{1:n:N}, \dots, X_{n:n:N}\}$ برابر با

$GIE(\beta, \lambda)$ و طرح سانسور $\{M, m, S_1, S_2, \dots, S_m\}$ باشد. بنابراین، تابع درست‌نمایی α, β و λ به صورت

$$L(\alpha, \beta, \lambda) = \left\{ c_1 \prod_{i=1}^n f(x_i) [1 - F(x_i)]^{R_i} \right\} \times \left\{ c_2 \prod_{j=1}^m f(y_j) [1 - F(y_j)]^{S_j} \right\},$$

است که در آن

$$c_1 = N(N - R_1 - 1) \cdots (N - \sum_{i=1}^{n-1} R_i - n + 1),$$

$$c_2 = M(M - S_1 - 1) \cdots (M - \sum_{j=1}^{m-1} S_j - m + 1).$$

تابع درست‌نمایی بر مبنای مشاهدات به صورت

$$L(\text{data} | \alpha, \beta, \lambda) = c_1 c_2 (\alpha \lambda)^n (\beta \lambda)^m \times \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} \right) \left(\prod_{j=1}^m \frac{1}{y_j^2} \right) e^{-\lambda \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} - \sum_{j=1}^m \frac{1}{y_j} \right)} \times \left(\prod_{i=1}^n \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_i}} \right)^{\alpha(R_i+1)-1} \right) \times \left(\prod_{j=1}^m \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{y_j}} \right)^{\beta(S_j+1)-1} \right),$$

است. در نتیجه، تابع لگ-درست‌نمایی به صورت

$$\ell(\alpha, \beta, \lambda) \propto n \log(\alpha) + m \log(\beta) + (n+m) \log(\lambda) - \lambda \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + \sum_{j=1}^m \frac{1}{y_j} \right) - 2 \left(\sum_{i=1}^n \log(x_i) + \sum_{j=1}^m \log(y_j) \right) + \sum_{i=1}^n (\alpha(R_i+1)-1) \log(1 - e^{-\lambda/x_i}) + \sum_{j=1}^m (\beta(S_j+1)-1) \log\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{y_j}}\right),$$

به دست می‌آید. بنابراین، MLE پارامترهای α, β و λ ، یعنی $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ و $\hat{\lambda}$ را می‌توان با حل معادلات

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n (R_i+1) \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_i}}) = 0, \quad (۲)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta} = \frac{m}{\beta} + \sum_{j=1}^m (S_j+1) \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{y_j}}) = 0, \quad (۳)$$

$$f_{X_{1:n:N}^*|U=u}(x) = \frac{f_{X_{1:n:N}^*U}(x,u)}{f_U(u)},$$

که در آن $f_{X_{1:n:N}^*U}(x,u)$ تابع چگالی احتمال توام $X_{1:n:N}^*$ و U و $f_U(u)$ تابع چگالی احتمال U است. واضح است که وقتی پارامتر λ معلوم است، U یک آماره بسنده کامل برای α است. فرض کنید $W = \sum_{i=2}^n Z_i$ ، آنگاه W و Z_1 مستقل هستند. بنابراین، تابع چگالی احتمال توام $X_{1:n:N}^*$ و U را می‌توان از تابع چگالی احتمال توام W و Z_1 و با استفاده از تبدیل‌های $Z_1 = NX_{1:n:N}^*$ و $U = W + Z_1$ به‌دست آورد. حال، نتیجه با استفاده از معادله (۷) حاصل می‌شود. ■

قضیه ۲. برای هر $m, n \geq 2$ ، $UMVUE$ پارامتر R ، یعنی \bar{R} به‌صورت

$$\bar{R} = \begin{cases} 1 - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\frac{v}{u}\right)^k \frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{m+k-1}{k}}, & v < u, \\ \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \left(\frac{u}{v}\right)^k \frac{\binom{m-1}{k}}{\binom{n+k-1}{k}}, & v > u \end{cases}$$

است که در آن U و V آماره‌های بسنده کامل برای α و β هستند که از قبل معرفی شدند.

برهان. به‌راحتی می‌توان نشان داد که $X_{1:n:N}^*$ و $Y_{1:m:M}^*$ دارای توزیع نمایی با میانگین $(N\alpha)^{-1}$ و $(M\beta)^{-1}$ هستند، بنابراین:

$$\phi(X_1^*, Y_1^*) = \begin{cases} 1, & MY_{1:m:M}^* > NX_{1:n:N}^*, \\ 0, & MY_{1:m:M}^* < NX_{1:n:N}^*, \end{cases}$$

برآوردگر ناریب پارامتر R است. در نتیجه،

$$\begin{aligned} \bar{R} &= E[\phi(X_1^*, Y_1^*)|U = u, V = v] \\ &= \iint_A f_{X_1^*|U=u}(x) f_{Y_1^*|V=v}(y) dx dy \\ &\text{که } A = \{(x,y): 0 < x < \frac{u}{N}, 0 < y < \frac{v}{M}, Nx < My\} \text{ و} \\ &\text{در } \bar{R} \text{ با } f_{Y_1^*|V=v}(y) \text{ و } f_{X_1^*|U=u}(x) \text{ برابر با مقدار تعریف شده در } \bar{R} \\ &\text{است. برای } v < u \text{ است.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \frac{N(n-1)M(m-1)}{u^{n-1}v^{m-1}} \int_0^{\frac{v}{M}} \int_0^{\frac{My}{N}} \\ &\quad (u - Nx)^{n-2} (v - My)^{m-2} dx dy \\ &= 1 - \frac{M(m-1)}{u^{n-1}v^{m-1}} \int_0^{\frac{v}{M}} (v - My)^{m-2} \\ &\quad \times (u - My)^{n-1} dy \quad \{Put: \frac{My}{v} = t\} \\ &= 1 - (m-1) \int_0^1 (1-t)^{m-2} \left(1 - \frac{vt}{u}\right)^{n-1} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= c_1(\alpha\lambda)^n \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}\right) \\ &\times \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - e^{-\frac{\lambda}{x_i}}}\right) \exp\left\{-\lambda \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right\} \\ &\times \exp\left\{\sum_{i=1}^n \alpha(R_i + 1) \log(1 - e^{-\lambda/x_i})\right\} \end{aligned} \quad (۶)$$

است که در آن $0 < x_1 < \dots < x_n$. از معادله (۶) می‌توان به راحتی نتیجه گرفت که وقتی پارامتر λ معلوم است، مقدار آماره $U = -\sum_{i=1}^n (R_i + 1) \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_i}})$ یک آماره بسنده کامل برای α است. از سویی دیگر، می‌دانیم که

$$X_{i:n:N}^* = -\log\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{X_{i:n:N}^*}}\right), \quad i = 1, \dots, n,$$

نمونه‌ای با سانسور فزاینده از توزیع نمایی با میانگین α^{-1} است. فرض کنید:

$$\begin{aligned} Z_1 &= NX_{1:n:N}^*, \\ Z_2 &= (N - R_1 - 1)(X_{2:n:N}^* - X_{1:n:N}^*), \\ &\vdots \\ Z_n &= \left(N - \sum_{i=1}^{n-1} R_i - n + 1\right)(X_{n:n:N}^* - X_{n-1:n:N}^*). \end{aligned}$$

از مقاله کائو و چن [۱۶] می‌توان نتیجه گرفت که Z_1, \dots, Z_n متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با توزیع یکسان و با میانگین α^{-1} هستند و نیز $U = \sum_{i=1}^n Z_i = \sum_{i=1}^n (R_i + 1)X_{i:n:N}^*$ دارای توزیع گاما با پارامتر شکل n و پارامتر مقیاس α است (یعنی $U \sim \Gamma(n, \alpha)$).

$$f_U(u) = \frac{\alpha^n}{\Gamma(n)} u^{n-1} e^{-\alpha u}, \quad u > 0. \quad (۷)$$

لم ۱. اگر $Y_{j:m:M}^* = -\log(1 - e^{-\lambda/Y_{j:m:M}^*})$ و $X_{1:n:N}^*$ تابع چگالی احتمال شرطی $\sum_{j=1}^m (S_j + 1)Y_{j:m:M}^*$ به‌شرط $U = u$ برای $0 < x < \frac{u}{n}$ برابر با

$$f_{X_{1:n:N}^*|U=u}(x) = \frac{N(n-1)(u - Nx)^{n-2}}{u^{n-1}},$$

و تابع چگالی احتمال شرطی $Y_{1:m:M}^*$ به‌شرط $V = v$ برای $0 < y < \frac{v}{m}$ برابر با

$$f_{Y_{1:m:M}^*|V=v}(y) = \frac{M(m-1)(v - My)^{m-2}}{v^{m-1}},$$

است.

برهان. تنها قسمت اول را ثابت می‌کنیم، اثبات قسمت دوم مشابه قسمت اول است. داریم

لم ۳. فرض کنید $T_X(\lambda) = \frac{U_X}{(n-1)V_X}$ و $T_Y(\lambda) = \frac{U_Y}{(m-1)V_Y}$ در این صورت،

$$T_X(\lambda) \sim F(2n-2, 2), \quad T_1 \sim \chi^2(2n),$$

$$T_Y(\lambda) \sim F(2m-2, 2), \quad T_2 \sim \chi^2(2m).$$

برهان. به جانسون و همکاران [۱۷] مراجعه شود. ■

لم ۴. $T_X(\lambda)$ یا $T_Y(\lambda)$ نسبت به λ اکیداً نزولی است.

برهان. برای $i = 2, \dots, n$ و $0 < a_1 < a_i$ فرض کنید

$$\xi(\lambda) = \frac{\log(1 - e^{-\lambda/a_i})}{\log(1 - e^{-\lambda/a_1})}$$

زیرا

$$\frac{d\xi(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{\log^2(1 - e^{-\lambda/a_1})} \frac{e^{-\lambda/a_i}}{a_i(1 - e^{-\lambda/a_i})} - \frac{e^{-\lambda/a_1}}{a_1(1 - e^{-\lambda/a_1})}$$

$$\times [\log(1 - e^{-\lambda/a_1}) \frac{e^{-\lambda/a_i}}{a_i(1 - e^{-\lambda/a_i})} - \log(1 - e^{-\lambda/a_i}) \frac{e^{-\lambda/a_1}}{a_1(1 - e^{-\lambda/a_1})}]$$

$$= \frac{-1}{\log^2(1 - e^{-\lambda/a_1})} \times [\log(\frac{1}{1 - e^{-\lambda/a_1}}) \frac{e^{-\lambda/a_i}}{a_i(1 - e^{-\lambda/a_i})} - \log(\frac{1}{1 - e^{-\lambda/a_i}}) \frac{e^{-\lambda/a_1}}{a_1(1 - e^{-\lambda/a_1})}]$$

$$< \frac{-1}{\log^2(1 - e^{-\lambda/a_1})} \times [\log(\frac{1}{1 - e^{-\lambda/a_i}}) \frac{e^{-\lambda/a_i}}{a_1(1 - e^{-\lambda/a_i})} - \log(\frac{1}{1 - e^{-\lambda/a_1}}) \frac{e^{-\lambda/a_1}}{a_1(1 - e^{-\lambda/a_1})}]$$

$$= \frac{-1}{a_1 \log^2(1 - e^{-\lambda/a_1})} \log(\frac{1}{1 - e^{-\lambda/a_i}})$$

$$\times [\frac{e^{-\lambda/a_i}}{1 - e^{-\lambda/a_i}} - \frac{e^{-\lambda/a_1}}{1 - e^{-\lambda/a_1}}] < 0.$$

علاوه بر آن، بعد از ساده کردن $T_X(\lambda)$ این عبارت به

$$T_X(\lambda) = \frac{U_X}{(n-1)V_X} = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i^* - Z_1^*}{(n-1)Z_1^*}$$

$$= \frac{1}{N(n-1)} \sum_{i=1}^n (R_i + 1) \frac{\log(1 - e^{-\lambda/X_{i:n:N}})}{\log(1 - e^{-\lambda/X_{1:n:N}})}$$

$$- \frac{1}{n-1}$$

تبدیل می‌شود. در نتیجه، $T_X(\lambda)$ تابع اکیداً نزولی نسبت به λ است. ■

لم ۵. وقتی λ معلوم است، MLE پارامتر R به صورت

$$\hat{R}_{ML} = \frac{1}{1 + \frac{mT_1/\alpha}{nT_2/\beta}} \quad (۹)$$

$$= 1 - (m-1) \int_0^1 (1-t)^{m-2} \times \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \left(\frac{vt}{u}\right)^k dt$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\frac{v}{u}\right)^k \frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{m+k-1}{k}}.$$

به‌طور مشابه و برای $v > u$ داریم:

$$\tilde{R} = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \left(\frac{u}{v}\right)^k \frac{\binom{m-1}{k}}{\binom{n+k-1}{k}}. \quad \blacksquare$$

۴- بازه‌های اطمینان

۴-۱ بازه اطمینان دقیق

فرض کنید $\{X_{1:n:N}, \dots, X_{n:n:N}\}$ نمونه‌ای با سانسور فزاینده از $GIE(\alpha, \lambda)$ و طرح سانسور $\{N, n, R_1, \dots, R_n\}$ باشد. به‌طور مشابه، فرض کنید $\{Y_{1:m:M}, \dots, Y_{m:m:M}\}$ نمونه‌ای با سانسور فزاینده از $GIE(\beta, \lambda)$ و طرح سانسور $\{M, m, S_1, \dots, S_m\}$ باشد. حال فرض کنید که برای $i = 1, \dots, n$ قرار دهیم $X_{i:n:N}^{**} = -\alpha \log(1 - e^{-\lambda/X_{i:n:N}})$ (یا همچنین به‌طور مشابه فرض کنید که برای $j = 1, \dots, m$ بتوانیم قرار دهیم $Y_{j:m:M}^{**} = -\beta \log(1 - e^{-\lambda/Y_{j:m:M}})$ ، آنگاه $X_{i:n:N}^{**}$ برای $i = 1, \dots, n$ (یا $Y_{j:m:M}^{**}$ برای $j = 1, \dots, m$) نمونه‌ای با سانسور فزاینده از توزیع نمایی استاندارد است. حال، تبدیل‌های

$$Z_1^* = NX_{1:n:N}^{**},$$

$$Z_i^* = N - \sum_{k=1}^{i-1} (R_k + 1)(X_{i:n:N}^{**} - X_{i-1:n:N}^{**}),$$

برای $i = 2, \dots, n$ و نیز

$$D_1^* = MY_{1:m:M}^{**},$$

$$D_j^* = M - \sum_{k=1}^{j-1} (S_k + 1)(Y_{j:m:M}^{**} - Y_{j-1:m:M}^{**}),$$

برای $j = 2, \dots, m$ را در نظر می‌گیریم. از مقاله کائو و چن [۱۶] می‌توان نتیجه گرفت که Z_1^*, \dots, Z_n^* (یا D_1^*, \dots, D_m^*) متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با توزیع نمایی استاندارد هستند. فرض کنید $U_X = 2 \sum_{i=2}^n Z_i^*$ و $V_X = 2Z_1^*$ (یا $U_Y = 2 \sum_{j=2}^m D_j^*$ و $V_Y = 2D_1^*$) باشند. آنگاه U_X و V_X (یا U_Y و V_Y) متغیرهای تصادفی مستقل هستند و $V_X \sim \chi^2_{(2)}$ ، $U_X \sim \chi^2_{(2n-2)}$ (یا $V_Y \sim \chi^2_{(2)}$ ، $U_Y \sim \chi^2_{(2m-2)}$).

$$\begin{aligned} &\leq T_Y^{-1}(F_{(1-\sqrt{1-\eta})/2}(2m-2,2)) \\ &= P[\max\{T_X^{-1}(F_{(1+\sqrt{1-\eta})/2}(2n-2,2)), T_Y^{-1}(F_{(1+\sqrt{1-\eta})/2}(2m-2,2))\} \leq \lambda \\ &\leq \min\{T_X^{-1}(F_{(1-\sqrt{1-\eta})/2}(2n-2,2)), T_Y^{-1}(F_{(1-\sqrt{1-\eta})/2}(2m-2,2))\}]. \end{aligned}$$

ب) با استفاده از لم ۳، لم ۴ و لم ۵،

$$\begin{aligned} 1-\eta &= \sqrt[4]{1-\eta} \cdot \sqrt[4]{1-\eta} \cdot \sqrt[4]{1-\eta} \\ &= P[F_{(1-\sqrt[4]{1-\eta})/2}(2n-2,2) \leq T_X(\lambda)] \\ &\leq F_{(1+\sqrt[4]{1-\eta})/2}(2n-2,2) \\ &\times P[F_{(1-\sqrt[4]{1-\eta})/2}(2m-2,2) \leq T_Y(\lambda)] \\ &\leq F_{(1+\sqrt[4]{1-\eta})/2}(2m-2,2) \\ &\times P[F_{(1-\sqrt[4]{1-\eta})/2}(2n,2m) \leq F] \\ &\leq F_{(1+\sqrt{1-\eta})/2}(2n,2m) \\ &= P[F_{(1-\sqrt[4]{1-\eta})/2}(2n-2,2) \leq T_X(\lambda)] \\ &\leq F_{(1+\sqrt[4]{1-\eta})/2}(2n-2,2), \\ &F_{(1-\sqrt[4]{1-\eta})/2}(2m-2,2) \leq T_Y(\lambda) \\ &\leq F_{(1+\sqrt[4]{1-\eta})/2}(2m-2,2), \\ &F_{(1-\sqrt{1-\eta})/2}(2n,2m) \leq \frac{R}{1-R} \cdot \frac{1-\hat{R}_{ML}}{\hat{R}_{ML}} \\ &\leq F_{(1+\sqrt{1-\eta})/2}(2n,2m) \\ &= P[T_X^{-1}(F_{(1+\sqrt[4]{1-\eta})/2}(2n-2,2)) \leq \lambda \\ &\leq T_X^{-1}(F_{(1-\sqrt[4]{1-\eta})/2}(2n-2,2)), \\ &T_Y^{-1}(F_{(1+\sqrt[4]{1-\eta})/2}(2m-2,2)) \leq \lambda \\ &\leq T_Y^{-1}(F_{(1-\sqrt[4]{1-\eta})/2}(2m-2,2)), \\ &F_{1-(1+\sqrt{1-\eta})/2}(2m,2n) \leq \frac{1-R}{R} \cdot \frac{\hat{R}_{ML}}{1-\hat{R}_{ML}} \\ &\leq F_{1-(1-\sqrt{1-\eta})/2}(2m,2n) \\ &= P[\max\{T_X^{-1}(F_{(1+\sqrt[4]{1-\eta})/2}(2n-2,2)), \\ &T_Y^{-1}(F_{(1+\sqrt[4]{1-\eta})/2}(2m-2,2))\} \leq \lambda \\ &\leq \min\{T_X^{-1}(F_{(1-\sqrt[4]{1-\eta})/2}(2n-2,2)), \\ &T_Y^{-1}(F_{(1-\sqrt[4]{1-\eta})/2}(2m-2,2))\} \\ &\frac{1}{1+\frac{1-\hat{R}_{ML}}{\hat{R}_{ML}}F_{1-(1-\sqrt{1-\eta})/2}(2m,2n)} \leq R \\ &\leq \frac{1}{1+\frac{1-\hat{R}_{ML}}{\hat{R}_{ML}}F_{1-(1+\sqrt{1-\eta})/2}(2m,2n)}]. \blacksquare \end{aligned}$$

۴-۲ بازه اطمینان مجانبی

واریانس‌ها و کواریانس‌های مجانبی برآوردگرهای MLE پارامترهای α, β و λ از طریق درایه‌های ماتریس وارون اطلاع فیشر $J_{ij} = E\{-\partial^2 \ell(\theta) / \partial \theta_i \partial \theta_j\}$ به دست می‌آیند که در آن $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\alpha, \beta, \lambda)$ و $i, j = 1, 2, 3$ از طرفی،

است. واضح است که T_1 و T_2 مستقل هستند. همین‌طور $T_X(\lambda), T_Y(\lambda)$ و \hat{R}_{ML} مستقل هستند. علاوه بر این، با استفاده از لم ۳،

$$\hat{R}_{ML} = \frac{1}{1 + \frac{\beta}{\alpha} F}, \quad F = \frac{R}{1-R} \cdot \frac{1-\hat{R}}{\hat{R}},$$

که در آن F توزیع فیشر با درجه‌های آزادی $(2n, 2m)$ است و به صورت $F \sim F(2n, 2m)$ نمایش داده می‌شود.

قضیه ۶. فرض کنید $\{X_{1:n:N}, \dots, X_{n:n:N}\}$ نمونه‌ای با سانسور فزاینده از $GIE(\alpha, \lambda)$ و $\{Y_{1:m:M}, \dots, Y_{m:m:M}\}$ نمونه‌ای با سانسور فزاینده از $GIE(\beta, \lambda)$ باشد. آنگاه

الف) برای $0 < \eta < 1$

$$\begin{aligned} &(\max\{T_X^{-1}\left(F_{\frac{1+\sqrt{1-\eta}}{2}}(2n-2,2)\right), \\ &T_Y^{-1}\left(F_{\frac{1+\sqrt{1-\eta}}{2}}(2m-2,2)\right)\}, \\ &\min\{T_X^{-1}\left(F_{\frac{1-\sqrt{1-\eta}}{2}}(2n-2,2)\right), \\ &T_Y^{-1}\left(F_{\frac{1-\sqrt{1-\eta}}{2}}(2m-2,2)\right)\}) \end{aligned}$$

بازه اطمینان $100(1-\eta)\%$ برای λ است که در آن $F(p, q)$ ، $F_{\eta}(p, q)$ - 100% امین چندک توزیع $F(p, q)$ است.

ب) برای $0 < \eta < 1$ ، نامعادلات زیر ناحیه اطمینان مشترک $100(1-\eta)\%$ برای (λ, R) را تعیین می‌کند:

$$\begin{cases} \max\{T_X^{-1}(F_{(1+\sqrt{1-\eta})/2}(2n-2,2)), T_Y^{-1}(F_{(1+\sqrt{1-\eta})/2}(2m-2,2))\} \leq \lambda \\ \leq \min\{T_X^{-1}(F_{(1-\sqrt{1-\eta})/2}(2n-2,2)), T_Y^{-1}(F_{(1-\sqrt{1-\eta})/2}(2m-2,2))\}, \\ \frac{1}{1 + \frac{1-\hat{R}_{ML}}{\hat{R}_{ML}}F_{1-(1-\sqrt{1-\eta})/2}(2m,2n)} \leq R \leq \frac{1}{1 + \frac{1-\hat{R}_{ML}}{\hat{R}_{ML}}F_{1-(1+\sqrt{1-\eta})/2}(2m,2n)} \end{cases}$$

برهان. الف) با استفاده از لم ۳ و لم ۴،

$$\begin{aligned} 1-\eta &= \sqrt{1-\eta} \cdot \sqrt{1-\eta} \\ &= P[F_{(1-\sqrt{1-\eta})/2}(2n-2,2) \leq T_X(\lambda)] \\ &\leq F_{(1+\sqrt{1-\eta})/2}(2n-2,2) \\ &\times P[F_{(1-\sqrt{1-\eta})/2}(2m-2,2) \leq T_Y(\lambda)] \\ &\leq F_{(1+\sqrt{1-\eta})/2}(2m-2,2) \\ &= P[F_{(1-\sqrt{1-\eta})/2}(2n-2,2) \leq T_X(\lambda)] \\ &\leq F_{(1+\sqrt{1-\eta})/2}(2n-2,2), \\ &F_{1-\frac{1-\sqrt{1-\eta}}{2}}(2m-2,2) \leq T_Y(\lambda) \\ &\leq F_{(1+\sqrt{1-\eta})/2}(2m-2,2) \\ &= P[T_X^{-1}(F_{(1+\sqrt{1-\eta})/2}(2n-2,2)) \leq \lambda \\ &T_Y^{-1}(F_{(1+\sqrt{1-\eta})/2}(2m-2,2)) \leq \lambda \end{aligned}$$

برهان. با استفاده از ویژگی‌های مجانبی برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی و قضیه حد مرکزی چندمتغیره داریم:

$$[(\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\lambda} - \lambda)]^T \xrightarrow{D} N_3(0, \mathbf{I}^{-1}(\alpha, \beta, \lambda)),$$

که در آن $\mathbf{I}^{-1}(\alpha, \beta, \lambda)$ و $\mathbf{I}(\alpha, \beta, \lambda)$ ماتریس‌هایی متقارن هستند و

$$\mathbf{I}(\alpha, \beta, \lambda) = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & I_{13} \\ & I_{22} & I_{23} \\ & & I_{33} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{I}^{-1}(\alpha, \beta, \lambda) = \frac{1}{|\mathbf{I}(\alpha, \beta, \lambda)|} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ & b_{22} & b_{23} \\ & & b_{33} \end{pmatrix}.$$

همچنین، $|\mathbf{I}(\alpha, \beta, \lambda)| = n^2 m |\mathbf{A}(\alpha, \beta, \lambda)|$. حال، فرض کنید

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \sqrt{n} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{n} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{m} \end{pmatrix}.$$

در این صورت،

$$\mathbf{C}[(\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\lambda} - \lambda)]^T \xrightarrow{D} N_3(0, \mathbf{C}\mathbf{I}^{-1}(\alpha, \beta, \lambda)\mathbf{C}^T),$$

که در آن

$$\mathbf{C}[(\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\lambda} - \lambda)]^T = [\sqrt{n}(\hat{\alpha} - \alpha)\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)\sqrt{m}(\hat{\lambda} - \lambda)]^T$$

و

$$\mathbf{C}\mathbf{I}^{-1}(\alpha, \beta, \lambda)\mathbf{C}^T = \frac{1}{|\mathbf{A}(\alpha, \beta, \lambda)|} \begin{pmatrix} \frac{b_{11}}{nm} & \frac{b_{12}}{nm} & \frac{b_{13}}{n\sqrt{nm}} \\ & \frac{b_{22}}{nm} & \frac{b_{23}}{n\sqrt{nm}} \\ & & \frac{b_{33}}{n^2} \end{pmatrix}.$$

بنابراین، برهان کامل می‌شود. ■

قضیه ۸. اگر $m, n \rightarrow \infty$ و $n/m \rightarrow p$ آنگاه

$$\sqrt{n}(\hat{R} - R) \xrightarrow{D} N(0, B),$$

که در آن

$$B = \frac{1}{(nm)|\mathbf{A}(\alpha, \beta, \lambda)|(\alpha + \beta)^4} \times [\alpha^2 b_{22} + \beta^2 b_{11} - 2\alpha\beta b_{12}].$$

برهان. با استفاده از قضیه ۷ و کاربرد روش دلتا، می‌توان توزیع مجانبی $\hat{R} = g(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda})$ را تعیین کرد که در آن $g(\alpha, \beta, \lambda) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$ چون

$$\sqrt{n}(\hat{R} - R) \xrightarrow{D} N(0, B),$$

نمی‌توان شکل بسته‌ای برای امیدهای ریاضی بالا ارائه کرد. بنابراین، از مقادیر ماتریس اطلاع فیشر مشاهده شده $I_{ij} = \{-\partial^2 \ell(\theta) / \partial \theta_i \partial \theta_j\}_{\theta = \hat{\theta}}$ ، که با حذف عملگر امید ریاضی به دست می‌آید، استفاده می‌شود. درایه‌های ماتریس اطلاع فیشر مشاهده شده، مشتق‌های جزئی مرتبه دوم تابع لگ-درست-نمایی هستند که به صورت

$$I_{11} = \frac{n}{\alpha^2}, \quad I_{22} = \frac{m}{\beta^2}, \quad I_{12} = 0 = I_{21},$$

$$I_{13} = -\sum_{i=1}^n \frac{(R_i + 1)e^{-\frac{\lambda}{x_i}}}{x_i(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_i}})} = I_{31},$$

$$I_{23} = -\sum_{j=1}^m \frac{(S_j + 1)e^{-\frac{\lambda}{y_j}}}{y_j(1 - e^{-\frac{\lambda}{y_j}})} = I_{32},$$

$$I_{33} = \frac{n+m}{\lambda^2} + \sum_{i=1}^n \frac{(\alpha(R_i + 1) - 1)e^{-\frac{\lambda}{x_i}}}{x_i^2(1 - e^{-\frac{\lambda}{x_i}})^2} + \sum_{j=1}^m \frac{(\beta(S_j + 1) - 1)e^{-\frac{\lambda}{y_j}}}{y_j^2(1 - e^{-\frac{\lambda}{y_j}})^2}$$

خواهند بود.

قضیه ۷. اگر $m, n \rightarrow \infty$ و $n/m \rightarrow p$ آنگاه

$$[\sqrt{n}(\hat{\alpha} - \alpha)\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)\sqrt{m}(\hat{\lambda} - \lambda)]^T \xrightarrow{D} N_3(0, \mathbf{A}^{-1}(\alpha, \beta, \lambda)),$$

که در آن $\mathbf{A}^{-1}(\alpha, \beta, \lambda)$ و $\mathbf{A}(\alpha, \beta, \lambda)$ ماتریس‌هایی متقارن هستند،

$$\mathbf{A}(\alpha, \beta, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{I_{11}}{n} & 0 & \frac{I_{13}}{\sqrt{nm}} \\ & \frac{I_{22}}{n} & \frac{I_{23}}{\sqrt{nm}} \\ & & \frac{I_{33}}{m} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{-1}(\alpha, \beta, \lambda) = \frac{1}{|\mathbf{A}(\alpha, \beta, \lambda)|} \begin{pmatrix} \frac{b_{11}}{nm} & \frac{b_{12}}{nm} & \frac{b_{13}}{n\sqrt{nm}} \\ & \frac{b_{22}}{nm} & \frac{b_{23}}{n\sqrt{nm}} \\ & & \frac{b_{33}}{n^2} \end{pmatrix}$$

و

$$|\mathbf{A}(\alpha, \beta, \lambda)| = \frac{1}{n^2 m} (I_{11}I_{22}I_{33} - I_{11}I_{23}^2 - I_{13}^2I_{22}),$$

$$b_{11} = I_{22}I_{33} - I_{23}^2, b_{12} = I_{13}I_{23}, b_{13} = -I_{13}I_{22},$$

$$b_{22} = I_{11}I_{33} - I_{13}^2, b_{23} = -I_{11}I_{23}, b_{33} = I_{11}I_{22}.$$

تعریف کنید. بازه اطمینان تقریبی $100(1 - \eta)\%$ پارامتر R به صورت

$$\left(\hat{R}_{BP} \left(\frac{\eta}{2} \right), \hat{R}_{BP} \left(1 - \frac{\eta}{2} \right) \right)$$

به دست می‌آید.

۲ روش Boot - t

۱- از نمونه‌های $\{x_1, \dots, x_n\}$ و $\{y_1, \dots, y_m\}$ با \hat{R} محاسبه کنید.

۲- مانند روش Boot - p، ابتدا نمونه بوت استرپ $\{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ و $\{y_1^*, \dots, y_m^*\}$ را تولید کرده و سپس \hat{R}^* برآورد بوت استرپ R ، را تعیین کنید. در ادامه، آماره

$$T^* = \frac{\sqrt{n}(\hat{R}^* - \hat{R})}{\sqrt{V(\hat{R}^*)}}$$

را به دست آورید که در آن مقدار $V(\hat{R}^*)$ از قضیه ۸ قابل محاسبه است.

۳- گام‌های ۱ و ۲ را NBOOT بار تکرار کنید.

۴- فرض کنید $H(x) = P(T^* \leq x)$ تابع توزیع تجمعی T^* باشد. برای x مشخص، تعریف کنید:

$$\hat{R}_{Bt}(x) = \hat{R} + n^{-\frac{1}{2}} H^{-1}(x) \sqrt{V(\hat{R})}.$$

بازه اطمینان تقریبی $100(1 - \eta)\%$ پارامتر R به صورت

$$\left(\hat{R}_{Bt} \left(\frac{\eta}{2} \right), \hat{R}_{Bt} \left(1 - \frac{\eta}{2} \right) \right)$$

به دست می‌آید.

۵- برآورد بیز پارامتر R

در این بخش، برآورد بیز پارامتر R را با فرض اینکه پارامترهای α ، β و λ متغیرهای تصادفی هستند، محاسبه می‌کنیم. فرض می‌شود که پارامترهای α ، β و λ دارای توابع چگالی پیشین گامای مستقل به صورت

$$\begin{aligned} \pi_1(\alpha) &\propto \alpha^{a_1-1} e^{-b_1\alpha}, \alpha > 0, a_1 > 0, b_1 > 0, \\ \pi_2(\beta) &\propto \beta^{a_2-1} e^{-b_2\beta}, \beta > 0, a_2 > 0, b_2 > 0, \\ \pi_3(\lambda) &\propto \lambda^{a_3-1} e^{-b_3\lambda}, \lambda > 0, a_3 > 0, b_3 > 0 \end{aligned}$$

باشند. براساس نمونه مشاهده شده، تابع چگالی پسین مشترک α ، β و λ برابر با

$$\pi(\alpha, \beta, \lambda | \text{data}) \propto L(\text{data} | \alpha, \beta, \lambda) \pi_1(\alpha) \pi_2(\beta) \pi_3(\lambda) \quad (10)$$

است.

که در آن مقادیر زیر را داریم: $B = \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{-1}(\alpha, \beta, \lambda) \mathbf{b}$ و نیز $\mathbf{b} = \left[\frac{\partial g}{\partial \alpha} \frac{\partial g}{\partial \beta} \frac{\partial g}{\partial \lambda} \right]^T = \frac{1}{(\alpha + \beta)^2} [\beta - \alpha \ 0]^T$ و همچنین $\mathbf{A}^{-1}(\alpha, \beta, \lambda)$ در قضیه ۷ تعریف شد، داریم

$$\begin{aligned} B &= \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{-1}(\alpha, \beta, \lambda) \mathbf{b} \\ &= \frac{1}{(nm) |\mathbf{A}(\alpha, \beta, \lambda)| (\alpha + \beta)^4} \\ &\times [\alpha^2 b_{22} + \beta^2 b_{11} - 2\alpha\beta b_{12}]. \end{aligned}$$

در نتیجه، برهان کامل می‌شود. ■

با استفاده از قضیه ۸، بازه اطمینان مجانبی R را می‌سازیم. با استفاده از برآوردگرهای ML پارامترهای α ، β و λ می‌توان B را برآورد کرد. بنابراین، بازه اطمینان مجانبی $100(1 - \eta)\%$ برای R به صورت

$$\left(\hat{R} - z_{1-\frac{\eta}{2}} \frac{\sqrt{\hat{B}}}{\sqrt{n}}, \hat{R} + z_{1-\frac{\eta}{2}} \frac{\sqrt{\hat{B}}}{\sqrt{n}} \right),$$

ارائه می‌شود که در آن z_{η} -۱۰۰٪-امین چندک توزیع $N(0, 1)$ است.

۴-۳ بازه اطمینان مبتنی بر روش بوت استرپ

وقتی λ معلوم نیست، توزیع نمونه‌گیری \hat{R} در دسترس نیست. در نتیجه، روش بوت استرپ جایگزین مناسبی برای روش بیان شده در بخش قبلی برای ساختن بازه اطمینان تقریبی پارامتر R است. به علاوه، بازه اطمینان پایه‌ریزی شده روی نتایج مجانبی، برای اندازه نمونه کوچک عملکرد خوبی ندارد. بنابراین، در این قسمت دو بازه اطمینان مبتنی بر روش بوت استرپ ناپارامتری را ارائه می‌کنیم.

۱) روش بوت استرپ درصدی (آن را Boot - p می‌نامیم) که براساس ایده اصلی افرون [۱۸] است و

۲) روش بوت استرپ t (آن را Boot - t می‌نامیم) که براساس ایده هال [۱۹] است.

۱) روش Boot - p

۱- نمونه بوت استرپ با اندازه n را از $\{x_1, \dots, x_n\}$ و نمونه بوت استرپ با اندازه m را از $\{y_1, \dots, y_m\}$ تولید کنید. بر اساس $\{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ و $\{y_1^*, \dots, y_m^*\}$ ، برآورد بوت استرپ R یعنی \hat{R}^* را با استفاده از رابطه (۵) تعیین کنید.

۲- گام ۱ را NBOOT بار تکرار کنید.

۳- فرض کنید $G^*(x) = P(\hat{R}^* \leq x)$ تابع توزیع تجمعی \hat{R}^* باشد. در این حالت، برای x مشخص، $\hat{R}_{BP}(x) = G^{*-1}(x)$ را

$$\hat{E}(R|\text{data}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{(t)},$$

$$\widehat{Var}(R|\text{data}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_{(t)} - \hat{E}(R|\text{data}))^2$$

می‌شوند. براساس مقادیر T با استفاده از روش پیشنهاد شده توسط چن و شائو [20]، بازه اطمینان HPD، $100(1 - \eta)\%$ به صورت $(R_{[\frac{\eta}{2}T]}, R_{[(1-\frac{\eta}{2})T]})$ ساخته می‌شود که در آن $R_{[\frac{\eta}{2}T]}$ و $R_{[(1-\frac{\eta}{2})T]}$ به ترتیب $[(1-\frac{\eta}{2})T]$ -امین و $[\frac{\eta}{2}T]$ -امین کوچکترین عدد صحیح در دنباله $\{R_t = 1, 2, \dots, T\}$ هستند.

در ادامه، برآورد بیزی R را با این فرض به دست می‌آوریم که پارامترهای α و β متغیرهای تصادفی هستند و پارامتر λ معلوم است. فرض می‌شود که α و β دارای توابع چگالی پیشین گامای مستقل با پارامترهای (a_1, b_1) و (a_2, b_2) هستند. توابع چگالی پسین α و β را می‌توان به ترتیب به صورت $\Gamma(n + a_1, b_1)$ و $\Gamma(m + a_2, b_2)$ نشان داد که در آن $A_1(x) = T_1/(2\alpha)$ و $A_2(y) = T_2/(2\beta)$ چون توابع پیشین α و β مستقل هستند، تابع چگالی پسین R برابر با

$$f_R(r) = Sr^{n+a_1-1}(1-r)^{m+a_2-1} \times k^{-k}, 0 < r < 1,$$

خواهد بود که در آن $k = n + m + a_1 + a_2$ و $k_1 = n + m + a_1 + a_2$ و $r(b_1 + A_1(x)) + (1-r)(b_2 + A_2(y))$

$$S = \frac{\Gamma(n + m + a_1 + a_2)}{\Gamma(n + a_1)\Gamma(m + a_2)} \times (b_1 + A_1(x))^{n+a_1}(b_2 + A_2(y))^{m+a_2}.$$

چون تحت تابع زبان توان دوم خطا، برآورد بیزی R را نمی‌توان به صورت تحلیلی به دست آورد، آن را با روش لیندلی [21] برآورد می‌کنیم. با استفاده از تقریب لیندلی و با پیروی از رویکرد احمد و همکاران [22]، برآورد بیزی تقریبی R ، یعنی \hat{R}_{BS} ، تحت تابع زبان توان دوم خطا برابر با

$$\hat{R}_{BS} = \tilde{\alpha} \tilde{R}^2$$

$$= \tilde{R} \left\{ 1 + \frac{\tilde{\alpha} \tilde{R}^2}{\tilde{\beta}^2(m + a_2 - 1)(n + b_1 - 1)} \right\} \times [\tilde{\alpha}(n + a_1 - 1) - \tilde{\beta}(m + a_2 - 2)] \quad (11)$$

است که در آن

$$\tilde{R} = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}}, \tilde{\alpha} = \frac{n + a_1 - 1}{b_1 + A_1(x)},$$

$$\tilde{\beta} = \frac{m + a_2 - 1}{b_2 + A_2(y)}.$$

از معادله (۱۰) مشخص است که برآورد بیزی، با روش تحلیلی به دست نمی‌آید. در نتیجه، روش‌های نمونه‌گیری گیبز و متروپولیس را برای محاسبه برآورد بیزی و بازه اطمینان پارامتر R به کار می‌گیریم. توابع چگالی پسین α و β برابر با

$$\alpha|\lambda, \text{data} \sim \Gamma(n + a_1, b_1 + \sum_{i=1}^n (R_i + 1) \log(\frac{1}{1 - e^{-\frac{\lambda}{x_i}}}))$$

$$\beta|\lambda, \text{data} \sim \Gamma(m + a_2, b_2 + \sum_{j=1}^m (S_j + 1) \log(\frac{1}{1 - e^{-\frac{\lambda}{y_j}}}))$$

۹

$$\pi(\lambda|\alpha, \beta, \text{data}) \propto \lambda^{n+m+a_3-1} \times \exp\left\{-\lambda\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + \sum_{j=1}^m \frac{1}{y_j} + b_3\right)\right\}$$

$$\times \left(\prod_{i=1}^n (1 - e^{-\lambda/x_i})^{-1}\right) \times \left(\prod_{j=1}^m (1 - e^{-\lambda/y_j})^{-1}\right),$$

هستند. چون تابع چگالی پسین λ یک تابع چگالی شناخته شده نیست، برای تولید عدد تصادفی از آن از روش متروپولیس-هستینگز استفاده می‌شود. لذا الگوریتم نمونه‌گیری گیبز را می‌توان به صورت زیر نوشت:

۱- مقدار اولیه α, β و λ را به صورت $\alpha_{(0)}, \beta_{(0)}$ و $\lambda_{(0)}$ بگیری.

۲- t را برابر با ۱ قرار دهید.

۳- $\lambda_{(t)}$ را از $\pi(\lambda|\alpha_{(t-1)}, \beta_{(t-1)}, \text{data})$ تولید کنید.

۴- $\alpha_{(t)}$ را از تابع چگالی پسین $\Gamma(n + a_1, b_1 + \sum_{i=1}^n (R_i + 1) \log(\frac{1}{1 - e^{-\frac{\lambda_{(t-1)}}{x_i}}}))$ تولید کنید.

۵- $\beta_{(t)}$ را از تابع چگالی پسین $\Gamma(m + a_2, b_2 + \sum_{j=1}^m (S_j + 1) \log(\frac{1}{1 - e^{-\frac{\lambda_{(t-1)}}{y_j}}}))$ تولید کنید.

۶- $R_{(t)} = \frac{\alpha_{(t)}}{\alpha_{(t)} + \beta_{(t)}}$ را محاسبه کنید.

۷- t را برابر با $t + 1$ قرار دهید.

۸- مراحل ۳-۷ را T بار تکرار کنید.

حال، میانگین پسین و واریانس پسین R برابر با

همچنین، بازه‌های اطمینان بیز و بازه‌های اطمینان مرتبط، مبتنی بر $T=1000$ تکرار به‌دست آمده‌اند.

از جدول ۱، مشاهده می‌شود که MLE در مقادیر نارایی و MSEها شبیه به برآوردگر بیز است. مقایسه دو برآوردگر بیز براساس دو پیشین آگاهی‌بخش نشان می‌دهد که برآوردگرهای بیز مبتنی بر پیشین ۳ عملکرد بهتری از برآوردگرهای بیز مبتنی بر پیشین ۲، در مقادیر نارایی و MSEها دارند. همچنین، برآوردگرهای بیز مبتنی بر دو پیشین آگاهی‌بخش، عملکرد بهتری نسبت به مورد به‌دست آمده با استفاده از پیشین ناآگاهی‌بخش دارند. با استفاده از نمودار شکل ۱ نیز نتایج حاصل شده به خوبی قابل استنباط است.

بازه‌های اطمینان ۹۵ درصدی برای R را براساس توزیع مجانبی MLE محاسبه کردیم. به‌علاوه، بازه‌های اطمینان Boot-p، Boot-t و HPD نیز محاسبه شده‌اند. میانگین طول بازه‌های اطمینان و درصد پوشش مرتبط با هر بازه اطمینانی در جدول ۲ گزارش شده است. همچنین نمودار شکل ۲ برای تحلیل نتایج این جدول ترسیم شده است. سطح معنی‌داری برای بازه‌های اطمینان محاسبه شده ۰/۹۵ می‌باشد. از جدول ۲، مشاهده می‌شود که بازه‌های اطمینان بوت استرپ و HPD به‌ترتیب بزرگترین و کوچکترین طول بازه‌های اطمینان را برای طرح‌های سانسور مختلف و برای مقادیر پارامتر مختلف فراهم می‌کنند و بازه‌های اطمینان مجانبی در جایگاه دوم قرار دارند. همچنین، مشاهده می‌شود که بازه‌های اطمینان Boot-p عملکرد بهتری از بازه‌های اطمینان Boot-t دارند. طبق جدول ۲ بازه‌های اطمینان Boot-t احتمال‌های با بیشترین پوشش را در بیشتر موارد فراهم می‌کنند. مقایسه دو بازه اطمینان HPD براساس دو پیشین آگاهی‌بخش نشان می‌دهد که بازه‌های اطمینان HPD مبتنی بر پیشین ۳، عملکرد بهتری از بازه‌های اطمینان HPD مبتنی بر پیشین ۲ دارند. با استفاده از نمودار شکل ۲ نیز نتایج حاصل شده به خوبی قابل استنباط است.

اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که پارامتر مقیاس مشترک λ معلوم است. در این مورد، MLE و UMVUE مربوط به R را با استفاده از معادلات (۹) و (۸) به‌دست می‌آوریم. چون اطلاع قبلی درباره R نداریم، از پیشین ناآگاهی‌بخش به‌صورت $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$ برای محاسبه برآوردگرهای بیز استفاده می‌کنیم که با استفاده از آن برآورد بیز تقریب لیندلی از رابطه (۱۱) و بازه بیزی مبتنی بر تقریب لیندلی از رابطه (۱۲) به‌دست می‌آید. مقادیر اریبی و MSE را براساس ۱۰۰۰ تکرار گزارش کرده‌ایم که نتایج در جدول ۳ آمده است.

همچنین، بازه اطمینان بیزی $100(1-\eta)\%$ برای R به‌صورت (L, U) است که در آن L و U ، کران‌های پایین و بالا هستند و در معادلات

$$\begin{aligned} P[R \leq L | \text{data}] &= \frac{\eta}{2}, \\ P[R \leq U | \text{data}] &= 1 - \frac{\eta}{2} \end{aligned} \quad (12)$$

صدق می‌کنند.

۶- مطالعات شبیه‌سازی

در این بخش، شبیه‌سازی مونت کارلو برای مقایسه عملکرد برآوردگر MLE، UMVUE و بیز در طرح‌های سانسور فزاینده مختلف انجام می‌شود. عملکرد برآوردگرهای مختلف را با میزان اریبی و میانگین توان دوم خطا (MSE) مقایسه می‌کنیم. همچنین، برای مقایسه بازه‌های اطمینان مختلف یعنی بازه‌های اطمینان مجانبی، بوت استرپ و HPD از میانگین طول بازه‌ها و درصد پوشش استفاده می‌کنیم. برای مقایسه برآوردگرهای MLE و بیزی، سه مجموعه پارامتر $\theta_i = (\alpha, \beta, \lambda)$ را به‌صورت $\theta_1 = (2, 2, 0/5)$ ، $\theta_2 = (2, 2, 1/5)$ و $\theta_3 = (2, 2, 2/5)$ را به‌کار برده‌ایم. همچنین، برای به‌دست آوردن برآوردگرهای بیز و بازه‌های اطمینان HPD، سه تابع چگالی پیشین ۱، ۲ و ۳ را به‌ترتیب به‌صورت

$$a_j = 0, b_j = 0, j = 1, 2, 3,$$

$$a_j = 1, b_j = 2, j = 1, 2, 3,$$

$$a_j = 2, b_j = 3, j = 1, 2, 3$$

در نظر می‌گیریم که در بین آن‌ها، پیشین ۱، ناآگاهی‌بخش و پیشین‌های ۲ و ۳، آگاهی‌بخش هستند. همچنین، از سه طرح سانسور به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$r_1: (n, N) = (10, 30), (0^{*9}, 20),$$

$$r_2: (n, N) = (10, 30), (20, 0^{*9}),$$

$$r_3: (n, N) = (10, 30), (2^{*10}).$$

برای مقادیر پارامترهای مختلف، طرح‌های سانسور متعدد و پیشین‌های مختلف، مقادیر اریبی و MSE مربوط به MLE و برآوردگرهای بیز R در ۱۰۰۰ تکرار را گزارش می‌کنیم که نتایج در جدول ۱ ارائه شده‌اند. همچنین نمودار شکل ۱ برای تحلیل نتایج این جدول ترسیم شده است. در آزمایش‌های شبیه‌سازی، برای بررسی روش بوت استرپ، بازه‌های اطمینان را براساس $NBOOT=250$ باز نمونه‌گیری محاسبه کردیم.

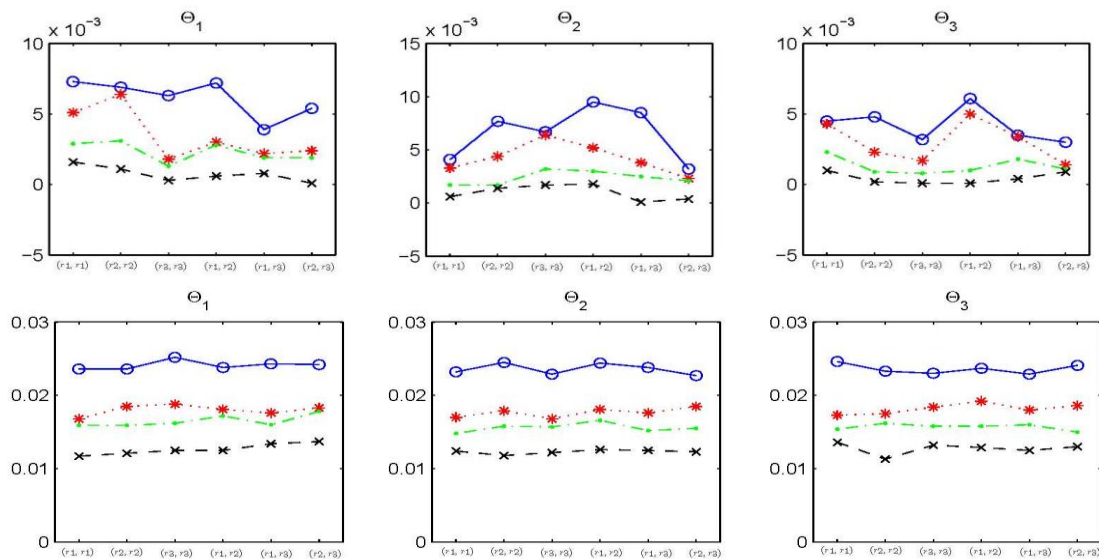
جدول ۱. مقادیر اریبی و MSE برآوردگرهای MLE و بیز پارامتر R									
پیشین ۳		پیشین ۲		پیشین ۱		MLE		C.S	θ_j
اریبی	MSE	اریبی	MSE	اریبی	MSE	اریبی	MSE		
۰/۰۰۱۶	۰/۰۱۱۷	۰/۰۰۲۹	۰/۰۱۵۹	۰/۰۰۵۱	۰/۰۱۶۸	۰/۰۰۷۳	۰/۰۲۳۶	(r_1, r_1)	θ_1
۰/۰۰۱۱	۰/۰۱۲۱	۰/۰۰۳۱	۰/۰۱۵۹	۰/۰۰۶۴	۰/۰۱۸۵	۰/۰۰۶۹	۰/۰۲۳۶	(r_2, r_2)	
۰/۰۰۰۳	۰/۰۱۲۵	۰/۰۰۱۳	۰/۰۱۶۲	۰/۰۰۱۸	۰/۰۱۸۸	۰/۰۰۶۳	۰/۰۲۵۲	(r_3, r_3)	
۰/۰۰۰۶	۰/۰۱۲۵	۰/۰۰۲۸	۰/۰۱۷۲	۰/۰۰۳۰	۰/۰۱۸۱	۰/۰۰۷۲	۰/۰۲۳۸	(r_1, r_2)	
۰/۰۰۰۸	۰/۰۱۳۴	۰/۰۰۱۹	۰/۰۱۶۰	۰/۰۰۲۲	۰/۰۱۷۶	۰/۰۰۳۹	۰/۰۲۴۳	(r_1, r_3)	
۰/۰۰۰۱	۰/۰۱۳۷	۰/۰۰۱۹	۰/۰۱۷۸	۰/۰۰۲۴	۰/۰۱۸۳	۰/۰۰۵۴	۰/۰۲۴۲	(r_2, r_3)	θ_2
۰/۰۰۰۶	۰/۰۱۲۴	۰/۰۰۱۷	۰/۰۱۴۸	۰/۰۰۳۳	۰/۰۱۷۰	۰/۰۰۴۱	۰/۰۲۳۲	(r_1, r_1)	
۰/۰۰۱۴	۰/۰۱۱۸	۰/۰۰۱۷	۰/۰۱۵۸	۰/۰۰۴۴	۰/۰۱۷۹	۰/۰۰۷۷	۰/۰۲۴۵	(r_2, r_2)	
۰/۰۰۱۷	۰/۰۱۲۲	۰/۰۰۳۲	۰/۰۱۵۷	۰/۰۰۶۴	۰/۰۱۶۸	۰/۰۰۶۷	۰/۰۲۲۹	(r_3, r_3)	
۰/۰۰۱۸	۰/۰۱۲۶	۰/۰۰۳۰	۰/۰۱۶۶	۰/۰۰۵۲	۰/۰۱۸۱	۰/۰۰۹۵	۰/۰۲۴۴	(r_1, r_2)	
۰/۰۰۰۱	۰/۰۱۲۵	۰/۰۰۲۵	۰/۰۱۵۲	۰/۰۰۳۸	۰/۰۱۷۶	۰/۰۰۸۵	۰/۰۲۳۸	(r_1, r_3)	θ_3
۰/۰۰۰۴	۰/۰۱۲۳	۰/۰۰۲۱	۰/۰۱۵۵	۰/۰۰۲۳	۰/۰۱۸۵	۰/۰۰۳۲	۰/۰۲۲۷	(r_2, r_3)	
۰/۰۰۱۰	۰/۰۱۳۶	۰/۰۰۲۳	۰/۰۱۵۴	۰/۰۰۴۳	۰/۰۱۷۳	۰/۰۰۴۵	۰/۰۲۴۶	(r_1, r_1)	
۰/۰۰۰۲	۰/۰۱۱۳	۰/۰۰۰۹	۰/۰۱۶۲	۰/۰۰۲۳	۰/۰۱۷۵	۰/۰۰۴۸	۰/۰۲۳۳	(r_2, r_2)	θ_3
۰/۰۰۰۱	۰/۰۱۳۲	۰/۰۰۰۸	۰/۰۱۵۸	۰/۰۰۱۷	۰/۰۱۸۴	۰/۰۰۳۲	۰/۰۲۳۰	(r_3, r_3)	
۰/۰۰۰۱	۰/۰۱۲۹	۰/۰۰۱۰	۰/۰۱۵۸	۰/۰۰۵۰	۰/۰۱۹۲	۰/۰۰۶۱	۰/۰۲۳۷	(r_1, r_2)	
۰/۰۰۰۴	۰/۰۱۲۵	۰/۰۰۱۸	۰/۰۱۶۰	۰/۰۰۳۴	۰/۰۱۸۰	۰/۰۰۳۵	۰/۰۲۲۹	(r_1, r_3)	
۰/۰۰۰۹	۰/۰۱۳۰	۰/۰۰۱۱	۰/۰۱۵۰	۰/۰۰۱۴	۰/۰۱۸۶	۰/۰۰۳۰	۰/۰۲۴۱	(r_2, r_3)	

همچنین نمودار شکل ۳ برای تحلیل نتایج این جدول ترسیم شده است. از جدول ۳، با مقایسه برآوردگر بیز، MLE و UMVUE، مشاهده می‌شود که MLE کمترین مقدار اریبی و MSE را دارد و UMVUEها، در جایگاه دوم قرار دارند. با استفاده از نمودار شکل ۳ نیز نتایج حاصل شده به خوبی قابل استنباط است.

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، برآورد پارامتر تنش-مقاومت برای توزیع نمایی وارون تعمیم یافته در طرح سانسور فزاینده نوع ۲ بررسی شد. وقتی پارامتر مقیاس نامعلوم است، روش‌های مختلفی برای برآورد $R = P(X < Y)$ استفاده شد. چون MLE مربوط به پارامتر R را نمی‌توان به شکل بسته به دست آورد، روند تکرار برای محاسبه آن به کار گرفته شد. همچنین، بازه اطمینان دقیق

R به دست آورده شد. علاوه بر آن، از ماتریس اطلاع فیشر مشاهده شده برای به دست آوردن بازه اطمینان مجانبی استفاده شد. چون با اندازه نمونه کوچک بازه‌های اطمینان مجانبی عملکرد خوبی ندارند، دو بازه اطمینان بوت استرپ نیز پیشنهاد شد که عملکرد آن‌ها رضایت بخش بود. برآورد بیزی R و بازه اطمینان مرتبط با آن با استفاده از روش نمونه‌گیری گیبز به دست آمد. مشاهده شد که مقادیر اریبی و MSE برآوردگر - MLE شبیه به برآوردگر بیز است. علاوه بر این، وقتی پارامتر مقیاس معلوم بود، برآوردگرهای بیز مختلف، MLE و UMVUE محاسبه شدند. نتایج نشان داد که MLE کمترین مقادیر اریبی و MSE را دارد و UMVUEها در جایگاه دوم هستند. در نهایت، شبیه‌سازی‌های مونت کارلو و تحلیل یک مجموعه داده واقعی برای بررسی عملکرد برآوردگرهای مختلف به کار گرفته شدند.

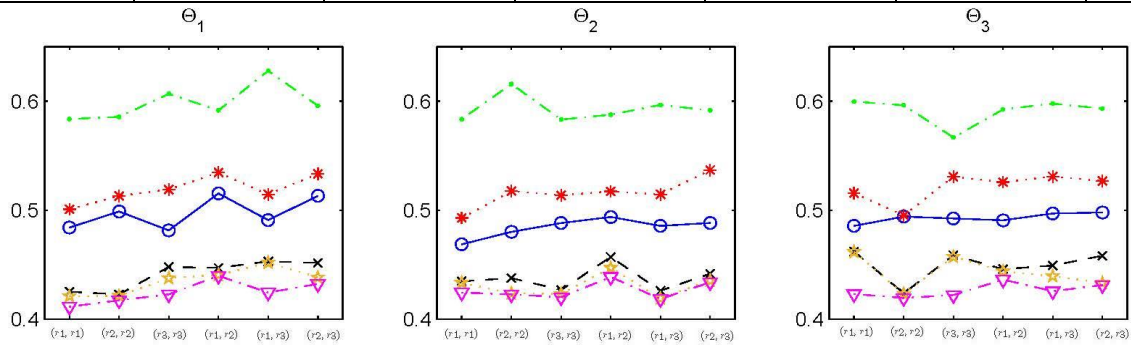


شکل ۱. نمودار مقادیر اربیبی (سه شکل بالا) و MSE (سه شکل پایین) برآوردگرهای MLE (آبی) و بیز (پیشین ۱: قرمز، پیشین ۲: سبز، پیشین ۳: سیاه) پارامتر R

جدول ۲. میانگین طول بازه و درصد پوشش در برآورد پارامتر R

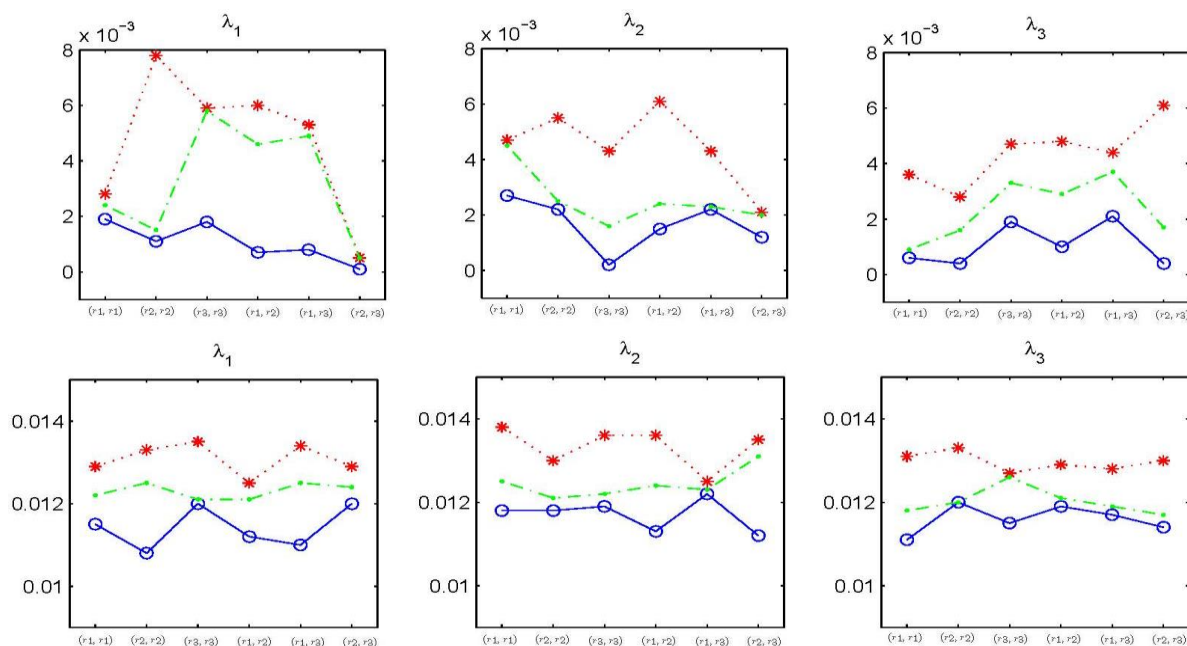
θ_1						
Bayes			Boot-t	Boot-p	MLE	C.S
پیشین ۳	پیشین ۲	پیشین ۱				
۰/۴۱۱۵(۰/۹۴۶)	۰/۴۲۱۱(۰/۹۵۱)	۰/۴۲۵۱(۰/۹۴۳)	۰/۵۸۳۶(۰/۹۵۷)	۰/۵۰۰۸(۰/۹۵۴)	۰/۴۸۴۰(۰/۹۴۸)	(r_1, r_1)
۰/۴۱۷۲(۰/۹۴۷)	۰/۴۲۱۳(۰/۹۴۹)	۰/۴۲۲۷(۰/۹۴۷)	۰/۵۸۵۶(۰/۹۵۱)	۰/۵۱۳۰(۰/۹۴۰)	۰/۴۹۸۷(۰/۹۴۲)	(r_2, r_2)
۰/۴۲۲۸(۰/۹۴۲)	۰/۴۳۷۷(۰/۹۴۴)	۰/۴۴۷۹(۰/۹۵۳)	۰/۶۰۸۶(۰/۹۵۸)	۰/۵۱۹۰(۰/۹۴۶)	۰/۴۸۱۵(۰/۹۴۳)	(r_3, r_3)
۰/۴۳۹۸(۰/۹۵۶)	۰/۴۴۰۶(۰/۹۵۷)	۰/۴۴۷۰(۰/۹۵۳)	۰/۵۹۱۶(۰/۹۵۷)	۰/۵۳۴۵(۰/۹۵۶)	۰/۵۱۵۴(۰/۹۴۲)	(r_1, r_2)
۰/۴۲۴۴(۰/۹۴۱)	۰/۴۵۱۸(۰/۹۴۱)	۰/۴۵۳۰(۰/۹۵۲)	۰/۶۲۷۹(۰/۹۵۴)	۰/۵۱۴۵(۰/۹۴۳)	۰/۴۹۰۸(۰/۹۴۷)	(r_1, r_3)
۰/۴۳۲۳(۰/۹۵۱)	۰/۴۳۸۲(۰/۹۴۹)	۰/۴۵۱۶(۰/۹۵۱)	۰/۵۹۵۸(۰/۹۵۵)	۰/۵۳۳۳(۰/۹۴۸)	۰/۵۱۳۱(۰/۹۴۵)	(r_2, r_3)
θ_2						
Bayes			Boot-t	Boot-p	MLE	C.S
پیشین ۳	پیشین ۲	پیشین ۱				
۰/۴۲۴۴(۰/۹۵۲)	۰/۴۳۳۴(۰/۹۵۳)	۰/۴۳۴۷(۰/۹۵۵)	۰/۵۸۳۴(۰/۹۵۶)	۰/۴۹۲۹(۰/۹۵۱)	۰/۴۶۸۷(۰/۹۵۱)	(r_1, r_1)
۰/۴۲۲۷(۰/۹۴۴)	۰/۴۲۳۷(۰/۹۵۰)	۰/۴۳۷۷(۰/۹۵۲)	۰/۶۱۵۷(۰/۹۵۶)	۰/۵۱۷۴(۰/۹۴۳)	۰/۴۸۰۱(۰/۹۴۷)	(r_2, r_2)
۰/۴۲۰۲(۰/۹۴۶)	۰/۴۲۳۲(۰/۹۵۵)	۰/۴۲۶۸(۰/۹۴۱)	۰/۵۸۳۲(۰/۹۵۹)	۰/۵۱۳۷(۰/۹۵۳)	۰/۴۸۸۱(۰/۹۵۷)	(r_3, r_3)
۰/۴۳۸۷(۰/۹۵۵)	۰/۴۴۷۰(۰/۹۵۴)	۰/۴۵۶۹(۰/۹۴۱)	۰/۵۸۷۶(۰/۹۵۶)	۰/۵۱۷۲(۰/۹۴۰)	۰/۴۹۳۷(۰/۹۴۲)	(r_1, r_2)
۰/۴۱۸۵(۰/۹۵۴)	۰/۴۱۹۱(۰/۹۵۰)	۰/۴۲۶۱(۰/۹۴۸)	۰/۵۹۶۵(۰/۹۵۸)	۰/۵۱۴۵(۰/۹۴۱)	۰/۴۸۵۵(۰/۹۴۴)	(r_1, r_3)
۰/۴۳۳۹(۰/۹۴۴)	۰/۴۳۵۳(۰/۹۴۷)	۰/۴۴۱۸(۰/۹۴۶)	۰/۵۹۱۶(۰/۹۵۹)	۰/۵۳۶۸(۰/۹۵۷)	۰/۴۸۸۳(۰/۹۴۴)	(r_2, r_3)
θ_3						
Bayes			Boot-t	Boot-p	MLE	C.S
پیشین ۳	پیشین ۲	پیشین ۱				
۰/۴۲۳۰(۰/۹۴۴)	۰/۴۶۱۶(۰/۹۴۴)	۰/۴۶۲۱(۰/۹۴۴)	۰/۵۹۹۶(۰/۹۵۹)	۰/۵۱۵۶(۰/۹۴۷)	۰/۴۸۵۵(۰/۹۵۱)	(r_1, r_1)
۰/۴۱۹۴(۰/۹۵۶)	۰/۴۲۳۲(۰/۹۵۹)	۰/۴۲۳۷(۰/۹۵۲)	۰/۵۹۶۳(۰/۹۵۹)	۰/۴۹۵۳(۰/۹۴۰)	۰/۴۹۴۱(۰/۹۵۰)	(r_2, r_2)
۰/۴۲۲۱(۰/۹۵۲)	۰/۴۵۷۳(۰/۹۴۴)	۰/۴۵۸۶(۰/۹۴۷)	۰/۵۶۶۷(۰/۹۵۷)	۰/۵۳۰۷(۰/۹۴۱)	۰/۴۹۲۴(۰/۹۴۲)	(r_3, r_3)

۰/۴۳۶۳(۰/۹۴۷)	۰/۴۴۳۸(۰/۹۴۳)	۰/۴۴۵۸(۰/۹۴۳)	۰/۵۹۲۴(۰/۹۵۷)	۰/۵۲۵۷(۰/۹۴۶)	۰/۴۹۰۷(۰/۹۴۹)	(r_1, r_2)
۰/۴۲۵۶(۰/۹۵۲)	۰/۴۳۹۵(۰/۹۴۳)	۰/۴۴۹۲(۰/۹۵۳)	۰/۵۹۷۷(۰/۹۵۶)	۰/۵۳۰۹(۰/۹۴۹)	۰/۴۹۷۰(۰/۹۴۹)	(r_1, r_3)
۰/۴۳۱۳(۰/۹۴۷)	۰/۴۳۳۲(۰/۹۴۰)	۰/۴۵۸۱(۰/۹۴۰)	۰/۵۹۳۲(۰/۹۵۴)	۰/۵۲۶۸(۰/۹۴۷)	۰/۴۹۷۹(۰/۹۴۵)	(r_2, r_3)



شکل ۲. میانگین طول بازه اطمینان (مجانبی: آبی، Boot-p: قرمز، Boot-t: سبز، پیشین ۱: سیاه، پیشین ۲: زرد، پیشین ۳: بنفش) در برآورد پارامتر R

جدول ۳. مقادیر اریبی و MSE برآوردگرهای UMVUE، Lindley و MLE و بیز پارامتر R و متوسط طول بازه‌ها و درصد پوشش با λ معلوم.							
$\lambda = 0/5$							
Lindley	UMVUE		Lindley		MLE		C.S
	اریبی	MSE	اریبی	MSE	اریبی	MSE	
۰/۴۳۸۴(۰/۹۴۶)	۰/۰۰۲۴	۰/۰۱۲۲	۰/۰۰۲۸	۰/۰۱۲۹	۰/۰۰۱۹	۰/۰۱۱۵	(r_1, r_1)
۰/۴۰۹۴(۰/۹۴۲)	۰/۰۰۱۵	۰/۰۱۲۵	۰/۰۰۷۸	۰/۰۱۳۳	۰/۰۰۱۱	۰/۰۱۰۸	(r_2, r_2)
۰/۴۱۵۸(۰/۹۴۴)	۰/۰۰۵۸	۰/۰۱۲۱	۰/۰۰۵۹	۰/۰۱۳۵	۰/۰۰۱۸	۰/۰۱۲۰	(r_3, r_3)
۰/۴۲۶۷(۰/۹۴۳)	۰/۰۰۴۶	۰/۰۱۲۱	۰/۰۰۶۰	۰/۰۱۲۵	۰/۰۰۰۷	۰/۰۱۱۲	(r_1, r_2)
۰/۴۱۱۰(۰/۹۴۹)	۰/۰۰۴۹	۰/۰۱۲۵	۰/۰۰۵۳	۰/۰۱۳۴	۰/۰۰۰۸	۰/۰۱۱۰	(r_1, r_3)
۰/۴۲۷۱(۰/۹۵۰)	۰/۰۰۰۵	۰/۰۱۲۴	۰/۰۰۰۵	۰/۰۱۲۹	۰/۰۰۰۱	۰/۰۱۲۰	(r_2, r_3)
$\lambda = ۱/5$							
Lindley	UMVUE		Lindley		MLE		C.S
	اریبی	MSE	اریبی	MSE	اریبی	MSE	
۰/۴۱۱۹(۰/۹۴۵)	۰/۰۰۴۵	۰/۰۱۲۵	۰/۰۰۴۷	۰/۰۱۳۸	۰/۰۰۲۷	۰/۰۱۱۸	(r_1, r_1)
۰/۴۱۴۱(۰/۹۴۷)	۰/۰۰۲۵	۰/۰۱۲۱	۰/۰۰۵۵	۰/۰۱۳۰	۰/۰۰۲۲	۰/۰۱۱۸	(r_2, r_2)
۰/۴۳۱۹(۰/۹۴۶)	۰/۰۰۱۶	۰/۰۱۲۲	۰/۰۰۴۳	۰/۰۱۳۶	۰/۰۰۰۲	۰/۰۱۱۹	(r_3, r_3)
۰/۴۲۸۳(۰/۹۴۳)	۰/۰۰۲۴	۰/۰۱۲۴	۰/۰۰۶۱	۰/۰۱۳۶	۰/۰۰۱۵	۰/۰۱۱۳	(r_1, r_2)
۰/۴۳۷۷(۰/۹۴۹)	۰/۰۰۲۳	۰/۰۱۲۳	۰/۰۰۴۳	۰/۰۱۲۵	۰/۰۰۲۲	۰/۰۱۲۲	(r_1, r_3)
۰/۴۴۳۶(۰/۹۵۵)	۰/۰۰۲۰	۰/۰۱۳۱	۰/۰۰۲۱	۰/۰۱۳۵	۰/۰۰۱۲	۰/۰۱۱۲	(r_2, r_3)
$\lambda = ۲/5$							
Lindley	UMVUE		Lindley		MLE		C.S
	اریبی	MSE	اریبی	MSE	اریبی	MSE	
۰/۴۱۰۶(۰/۹۵۰)	۰/۰۰۰۹	۰/۰۱۱۸	۰/۰۰۳۶	۰/۰۱۳۱	۰/۰۰۰۶	۰/۰۱۱۱	(r_1, r_1)
۰/۴۲۳۱(۰/۹۴۶)	۰/۰۰۱۶	۰/۰۱۲۰	۰/۰۰۲۸	۰/۰۱۳۳	۰/۰۰۰۴	۰/۰۱۲۰	(r_2, r_2)
۰/۴۱۴۲(۰/۹۴۱)	۰/۰۰۳۳	۰/۰۱۲۶	۰/۰۰۴۷	۰/۰۱۲۷	۰/۰۰۱۹	۰/۰۱۱۵	(r_3, r_3)
۰/۴۳۴۹(۰/۹۴۸)	۰/۰۰۲۹	۰/۰۱۲۱	۰/۰۰۴۸	۰/۰۱۲۹	۰/۰۰۱۰	۰/۰۱۱۹	(r_1, r_2)
۰/۴۲۴۹(۰/۹۵۱)	۰/۰۰۳۷	۰/۰۱۱۹	۰/۰۰۴۴	۰/۰۱۲۸	۰/۰۰۲۱	۰/۰۱۱۷	(r_1, r_3)
۰/۴۲۰۰(۰/۹۴۷)	۰/۰۰۱۷	۰/۰۱۱۷	۰/۰۰۶۱	۰/۰۱۳۰	۰/۰۰۰۴	۰/۰۱۱۴	(r_2, r_3)



شکل ۳. نمودار مقادیر اربیبی (سه شکل بالا) و MSE (سه شکل پایین) برآوردگرهای MLE (آبی)، UMVUE (سبز) و بیس (قرمز) پارامتر R

- [7] Raqab, M. Z., Madi, M. T. and Kundu, D. (2008). Estimation of $R=P(Y<X)$ for the 3-parameter generalized exponential distribution. *Communications in Statistics - Theory and Methods*. 37:2854-2864.
- [8] Kundu, D. and Raqab, M. Z. (2009). Estimation of $R=P(Y<X)$ for three parameter Weibull distribution. *Statistics and Probability Letters*. 79:1839-1846.
- [9] Lio, Y. L. and Tsai, T. R. (2012). Estimation of $\delta = P(X<Y)$ for Burr XII distribution based on the progressively first failure-censored samples. *Journal of Applied Statistics*. 39:309-322.
- [10] Kohansal, A. (2019). On estimation of reliability in a multicomponent stress-strength model for a Kumaraswamy distribution based on progressively censored sample. *Statistical Papers*. 60:2185-2224.
- [11] Kohansal, A. and Rezakhah, S. (2019). Inference of $R=P(Y<X)$ for two-parameter Rayleigh distribution based on progressively censored samples. *Statistics*. 53: 81-100.
- [12] Balakrishnan, N. and Aggarwala, R. (2000). *Progressive censoring: theory, methods and applications*. Birkhauser, Boston.

مراجع

- [۱] Birnbaum, Z. W. (۱۹۵۶). On a use of Mann-Whitney statistics. *Proceedings of the third Berkley Symposium in Mathematics, Statistics and Probability*. ۱:۱۲-۱۷.
- [۲] Kotz, S., Lumelskii, Y. and Pensky, M. (۲۰۰۳). *The stress-strength model and its generalization: theory and applications*. World Scientific, Singapore.
- [۳] Kundu, D. and Gupta, R.D. (۲۰۰۵). Estimation of $R=P(Y<X)$ for the generalized exponential distribution. *Metrika*. ۶۱:۲۹۱-۳۰۸.
- [۴] Kundu, D. and Gupta, R.D. (2006). Estimation of $R=P(Y<X)$ for Weibull distribution. *IEEE Transactions on Reliability*. 55, 270-280.
- [5] Raqab, M. Z. and Kundu, D. (2005). Comparison of different estimators of $R=P(Y<X)$ for a scaled Burr Type X distribution. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*. 34:465-483.
- [6] Krishnamoorthy, K., Mukherjee, S. and Guo, H. (2007). Inference on reliability in two-parameter exponential stress-strength model. *Metrika*. 65:261-273.

- [۱۸] Efron, B. (1982). The jackknife, the bootstrap and other re-sampling plans. Philadelphia, PA: SIAM, CBMSNSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. 34.
- [1۹] Hall, P. (1988). Theoretical comparison of bootstrap confidence intervals. *Annals of Statistics*. 16:927-953.
- [۲0] Chen, M. H. and Shao, Q. M. (1999). Monte Carlo estimation of Bayesian credible and HPD intervals. *Journal of Computational and Graphical Statistics*. 8:69-92.
- [21] Lindley, D. V. (1980). Approximate Bayesian methods. *Trabajos de Estadística*. 3:281-288.
- [22] Ahmad, K. E., Fakhry, M. E. and Jaheen, Z. F. (1997). Empirical Bayes estimation of $P(Y < X)$ and characterization of Burr-Type X model. *Journal of Statistical Planning and Inference*. 64:297-308.
- [13] Abouammoh, A. M. and Alshingiti, A. M. (2009). Reliability estimation of generalized inverted exponential distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. 79:1301-1315.
- [14] Krishna, H. and Kumar, K. (2013). Reliability estimation in generalized inverted exponential distribution with progressively type II censored sample. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. 83:1007-1019.
- [15] Dey, S. and Pradhan, B. (2014). Generalized inverted exponential distribution under hybrid censoring. *Statistical Methodology*. 18:101-114.
- [16] Cao, J.H. and Chen, K. (2006). An introduction to the reliability mathematics. Beijing: Higher Education Press.
- [17] Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1994). *Continuous Univariate Distributions*. 2nd ed., Wiley, New York.