

قابلیت اعتماد F سیستم فرسایشی k از n تسهیم بار

مصطفی رزمخواه*

(نویسنده مسئول) دانشیار، گروه آمار، دانشگاه فردوسی، مشهد، خراسان رضوی، ایران. razmkhah_m@um.ac.ir

بهاره خطیب آستانه

استادیار، گروه ریاضی و آمار دانشگاه نیشابور، خراسان رضوی، ایران. khatibastaneh@gmail.com

چکیده قابلیت اعتماد یک F سیستم k از n که کل بار سیستم بر روی مؤلفه‌های در حال کار تسهیم می‌شود، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. عملکرد سیستم بر اساس میزان فرسایش مؤلفه‌ها اندازه‌گیری و بر همین اساس طول عمر سیستم تعیین می‌گردد. فرض می‌شود که فرسایش مؤلفه‌های در حال کار پس از هر شکست از یک فرآیند گاما پیروی می‌کند طوری که پارامتر شکل یک تابع وابسته به زمان و پارامتر مقیاس یک مقدار ثابت است. همچنین، تأثیر تسهیم بار بر اساس یک تابع توانی بر روی پارامتر شکل فرآیند گاما مدل‌بندی می‌شود. تابع قابلیت اعتماد سیستم بر اساس یک رابطه بازگشتی محاسبه و حساسیت آن نسبت به پارامترهای مدل بررسی می‌شود. مسئله برآورد پارامتر تسهیم بار نیز بر اساس فرسایش‌های اندازه‌گیری شده در زمان‌های بازرسی از پیش تعیین شده مورد بررسی قرار می‌گیرد. با توجه به پیچیدگی فرمول‌های بدست آمده، از روش‌های عددی و شبیه‌سازی برای محاسبه قابلیت اعتماد و بررسی دقت برآوردگر پیشنهادی استفاده می‌شود.

کلمات کلیدی: تسهیم بار، سیستم منسجم، فرآیند گاما، فرسایش، مدل قانون توان

۱- مقدمه

روی آنها تقسیم می‌شود. پردازنده‌ها در یک سیستم رایانه‌ای چند پردازنده‌ای، کابل‌ها در یک پل معلق و دریچه‌ها یا پمپ‌ها در سیستم هیدرولیک نمونه‌های دیگری از سیستم‌های تسهیم بار هستند. برای جزییات بیشتر [۱] را ببینید. به دلیل اهمیت موضوع، مقالات زیادی در مورد مدل‌سازی سیستم‌های تسهیم بار وجود دارد. یه و همکاران [۲] قابلیت اعتماد یک سیستم تسهیم بار را بر اساس فرسایش اجزای آن در زمان‌های برنامه‌ریزی شده مطالعه کردند.

مدل‌سازی و تحلیل قابلیت اعتماد سیستم‌های تسهیم بار بر اساس فرسایش‌هایی که به صورت مداوم و پیوسته اندازه‌گیری می‌شوند، توسط ژاو و همکاران [۳] بررسی شد. همچنین مطالعات جالب توجهی در زمینه تحلیل قابلیت اعتماد سیستم‌های k از n تسهیم بار انجام شده است. عماری و همکاران [۴] سیستم‌های تسهیم بار را بر اساس تأثیر در تابع

سیستم‌های منسجم متشکل از n مؤلفه فعال در سیستم‌های تکنولوژی مدرن از اهمیت بالایی برخوردار هستند. یک F سیستم k از n ، حالت خاصی از سیستم‌های منسجم است که در صورت شکست حداقل k مؤلفه از n مؤلفه از فعالیت باز می‌ماند. از طرفی، در مهندسی قابلیت اعتماد منطقی است که اثر بار ناشی از شکست قطعات را در نظر بگیریم. ساز و کار اصلی تسهیم بار به این صورت است که در صورت شکست یک مؤلفه، باید کل بار وارد شده به سیستم بر روی مؤلفه‌های در حال کار توزیع شود، که این امر باعث افزایش بار تحمیل شده به هر یک از مؤلفه‌ها و در نتیجه تسریع در شکست آنها می‌شود. نمونه‌ای از سیستم‌های تسهیم بار، ژنراتورهای الکتریکی هستند که بار الکتریکی یک نیروگاه یا منبع تغذیه

* (Corresponding author) razmkhah_m@um.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۶/۱۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۸/۲۴

دوره ۱۱/ شماره ۲

صفحات ۱۷۷-۱۹۰

قابلیت اعتماد استفاده شده است که از آن جمله می‌توان به کاربرد آن در نگهداری سیستم‌ها [۱۳] و مدل‌های فرسایشی شتابیافته [۱۴] اشاره نمود. عبدلحامد [۱۵] فرآیند گاما را به‌عنوان یک مدل برای رخداد فرسایش تصادفی در طول زمان معرفی نمود. همچنین این فرآیند مورد توجه نویسندگان دیگری از جمله باگدونویشیس و نیکولین [۱۶] و لاولس و کراودر [۱۷] قرار گرفته است.

در این مقاله، یک F سیستم فرسایشی k از n تسهیم بار مورد توجه قرار می‌گیرد، به طوری که فرسایش مؤلفه‌های باقیمانده بعد از هر شکست از یک فرآیند گاما پیروی می‌کند. در این مدل، تأثیر تسهیم بار بر اساس یک مدل قانون توان بر روی پارامتر شکل فرآیند گاما در نظر گرفته می‌شود به گونه‌ای که کل بار وارد شده به سیستم به صورت مساوی بین مؤلفه‌های فعال سیستم تسهیم می‌شود.

ادامه مقاله به شرح زیر است. در بخش ۲، مدل مورد بررسی توصیف می‌شود. بخش ۳ به تعیین فرمول‌های مربوط به تابع قابلیت اعتماد سیستم متمرکز است. با توجه به پیچیدگی فرمول‌های بدست آمده رفتار تابع قابلیت اعتماد برای یک سیستم خاص به صورت عددی بررسی و تحلیل می‌شود. در بخش ۴، مسئله برآورد پارامتر تسهیم بار مدل مطرح و با استفاده از اطلاعات مربوط به فرسایش‌های اندازه‌گیری شده در زمان‌های بازرسی متوالی، برآوردگر درست‌نمایی ماکزیمم پیشنهاد می‌شود. در بخش ۵، نتایج عددی مربوط به مدل مطرح شده ارائه می‌شوند. ابتدا با یک مثال توضیحی به تشریح مدل و قابل برآورد بودن پارامتر تسهیم بار می‌پردازیم. سپس، دقت برآوردگر پیشنهادی با استفاده از یک الگوریتم شبیه‌سازی بررسی می‌شود. برخی از نتایج کلی مدل و زمینه‌های گسترش آن در بخش ۶ بیان شده است.

۲- توصیف مدل

یک F سیستم فرسایشی k از n را در نظر بگیرید، این سیستم تنها وقتی از کار می‌افتد که حداقل k مؤلفه آن از کار بیفتد. در چنین سیستمی هر مؤلفه با گذشت زمان به طور پیوسته فرسوده می‌شود و چنانچه میزان فرسایش یک مؤلفه به سطح مشخصی مثل w برسد یا از آن بیشتر شود، آن مؤلفه از کار افتاده یا خراب تلقی می‌شود.

نرخ شکست مطالعه و فرمول‌هایی با فرم بسته برای تابع قابلیت اعتماد سیستم‌های k از n تسهیم بار با مؤلفه‌های هم‌توزیع یا غیر هم‌توزیع ارائه داده‌اند. هوانگ و زو [۵] یک عبارت کلی برای قابلیت اعتماد سیستم‌های k از n تسهیم بار ترکیبی با مؤلفه‌های آماده به کار معرفی کردند. جاین و گوپتا [۶] یک سیستم m از n تسهیم بار با مؤلفه‌های غیر هم‌توزیع را بررسی کردند که اجزای سیستم در معرض شکست‌هایی با علت مشترک قرار دارند. تانگ و ژنگ [۷] مدل جدیدی را برای یک سیستم k از n تسهیم بار براساس مدل جریان ظرفیت، متشکل از مؤلفه‌های مختلف توسعه دادند. تقی‌پور و کسای [۸] یک سیستم k از n تسهیم بار را در نظر گرفتند که در آن افزایش بار، باعث افزایش نرخ خطر مؤلفه‌های باقیمانده می‌شود. سپس آنها مدلی برای یافتن فاصله بازرسی بهینه برای چنین سیستمی تعمیم دادند که کل هزینه مورد انتظار در طول چرخه عمر سیستم را به حداقل می‌رساند.

چن و همکاران [۹] یک مدل تجمعی بر مبنای شکست ارائه دادند و با در نظر گرفتن سابقه تسهیم بار در یک سیستم k از n ، به ارزیابی قابلیت اعتماد سیستم پرداختند. ژنگ و همکاران [۱۰] یک مدل قابلیت اعتماد برای سیستم k از n تسهیم بار را در معرض بار خارجی گسسته مطالعه نمودند. به تازگی، نزاکی و رزمخواه [۱۱] قابلیت اطمینان یک F سیستم فرسایشی k از n تسهیم بار را در حضور شکست‌های رقابتی وابسته بررسی کرده‌اند.

دو رهیافت کلی برای مدل بندی میزان فرسایش یک سیستم با مجموعه برآمدهای ممکن پیوسته وجود دارد. رهیافت اول بر این فرض استوار است که فرسایش یک فرآیند مشخص و یکنوا است اما بین مؤلفه‌های سیستم یک تغییرپذیری تصادفی وجود دارد. این مدل معمولاً مدل مسیر فرسایش نامیده می‌شود. رهیافت دوم بر مبنای استفاده از فرایندهای لوی و تعمیم‌های آن پایه‌گذاری شده است که از جمله مهم‌ترین و پر استفاده‌ترین آن‌ها می‌توان به فرایندهای وینر و گاما اشاره نمود. فرآیند گاما برای مدل بندی فرسایش‌های غیر نزولی در طول زمان مناسب است، اما فرآیند وینر وقتی استفاده می‌شود که فرسایش یک فرآیند پیوسته با تغییرات تصادفی اما روند کلی تصادفی است. برای جزئیات بیشتر در خصوص فرایندهای مورد استفاده در مدل بندی داده‌های فرسایشی در قابلیت اعتماد به کاهله و همکاران [۱۲] مراجعه شود. فرآیند گاما به‌عنوان یک فرآیند تصادفی وابسته به زمان، شامل نمونه‌های حقیقی مقدار مستقل و غیرمنفی با توزیع گاما است. از این فرآیند در زمینه‌های مختلف

که در آن ماکزیمم فرسایش تمام مؤلفه‌ها به آستانه از پیش تعیین شده ω می‌رسد یا از آن بیشتر می‌شود، یعنی

$$T_1 = \inf\{t > 0; \max\{X_{1,1}(t), \dots, X_{n,1}(t)\} \geq \omega\}. \quad (۱)$$

هنگامی که اولین شکست رخ می‌دهد، سیستم بار وارد شده به آن را روی مؤلفه‌های در حال کار با فاکتور تسهیم بار $\alpha_2(t)$ توزیع می‌کند، به طوری که در آن $\alpha_2(t) > \alpha_1(t)$ است. مقدار فرسایش $(n-1)$ مؤلفه در حال کار بین اولین و دومین شکست (به عبارتی مرحله دوم تسهیم بار) را با

$$X_{1,2}(t), \dots, X_{n-1,2}(t)$$

نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم فرسایش مؤلفه‌ها در مرحله دوم تسهیم بار از فرایند گاما با پارامتر شکل $\alpha_2(t)$ و پارامتر مقیاس β پیروی می‌کند به طوری که

$$X_{s,2}(t - T_1) | T_1 = t_1 \sim \Gamma(\alpha_2(t - t_1), \beta); \quad (۲)$$

$$t > t_1; s = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

توجه داشته باشید میزان فرسایش مؤلفه‌ها در مرحله دوم تسهیم بار در یک زمان مشخص مثل t ، با فرسایش تجمعی تا زمان t یکسان است، به این مفهوم که بخشی از فرسایش مؤلفه‌ها قبل از شکست اول و بخشی دیگر بین شکست اول و دوم رخ می‌دهد. بنابراین زمان دومین شکست یا به طور معادل زمان شکست F سیستم ۲ از n ، به عنوان اولین لحظه‌ای تعریف می‌شود که در آن ماکزیمم فرسایش تمام مؤلفه‌های باقیمانده در مرحله دوم تسهیم بار به آستانه از پیش تعیین شده ω می‌رسد یا از آن بیشتر می‌شود، یعنی

$$T_2 = \inf\{t > T_1; \max\{X_{1,2}(t), \dots, X_{n-1,2}(t)\} \geq \omega\}$$

$$= T_1 + \inf\{t > 0; \max\{X_{1,1}(T_1) + X_{1,2}(t), \dots, X_{n,1}(T_1) + X_{n-1,2}(t)\} \geq \omega\}, \quad (۳)$$

که در آن $X_{s,1}(T_1)$ نشان دهنده بخشی از فرسایش مؤلفه‌های فعال در مرحله دوم تسهیم بار است که تا قبل از زمان T_1 رخ داده است. به طور مشابه، میزان فرسایش مؤلفه‌های فعال بین $(i-1)$ امین و i امین شکست (یعنی مرحله i ام تسهیم بار) را با

$$X_{1,s}(t), \dots, X_{n-i+1,i}(t)$$

نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم برای $i = 1, \dots, k$ با معلوم بودن زمان خرابی $(i-1)$ ام، توزیع شرطی فرسایش مؤلفه‌ها در مرحله i ام از فرایند گاما پیروی می‌کند، به گونه‌ای که

$$X_{s,i}(t - T_{i-1}) | T_{i-1} = t_{i-1} \sim \Gamma(\alpha_i(t - t_{i-1}), \beta), t > t_{i-1},$$

$$s = 1, \dots, n - i + 1.$$

فرض کنید $Z(t)$ نشان دهنده میزان فرسایش یک قطعه الکترونیکی در زمان $t > 0$ باشد که برای $z > 0$ دارای فرایند گاما با تابع چگالی احتمال

$$f(z; a(t), b) = \frac{1}{\Gamma(a(t))b^{a(t)}} z^{a(t)-1} e^{-\frac{z}{b}}$$

است، که در آن

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty z^{\alpha-1} e^{-z} dz$$

تابع گامای کامل است. امیدریاضی و واریانس $Z(t)$ به ترتیب عبارت‌اند از:

$$E(Z(t)) = a(t)b$$

و

$$Var(Z(t)) = a(t)b^2,$$

که در آن $a(t)$ پارامتر شکل در زمان t و b پارامتر مقیاس است و به زمان بستگی ندارد. چنین فرایندی را با نماد $\Gamma(a(t), b)$ نشان می‌دهیم. مطالعات تجربی در زمینه فرسایش نشان می‌دهند که پارامتر شکل فرایند گاما در زمان t می‌تواند توسط مدل قانون توان به صورت زیر در نظر گرفته شود:

$$a(t) = t^\theta,$$

که در آن θ یک مقدار ثابت حقیقی مثبت است.

در یک سیستم فرسایشی k از n تسهیم بار، زمانی که مؤلفه‌ها یکی یکی خراب می‌شوند، سنگینی یا فشار بار به سایر مؤلفه‌های فعال سیستم تحمیل می‌شود. فرض کنید

$$X_{1,1}(t), \dots, X_{n,1}(t)$$

فرسایش n مؤلفه مستقل در زمان t قبل از اولین شکست (یعنی مرحله اول تسهیم بار) باشد و تمام آنها دارای فرایند گامای یکسان با پارامتر شکل $\alpha_1(t)$ و پارامتر مقیاس β باشند، به عبارت دیگر

$$X_{s,1}(t) \sim \Gamma(\alpha_1(t), \beta), s = 1, \dots, n,$$

که در آن $\alpha_1(t)$ باید به گونه‌ای تعیین گردد که اثر تسهیم بار مشخص شود. بنا بر این $\alpha_1(t)$ را فاکتور تسهیم بار می‌نامیم. زمان اولین شکست یا به طور معادل زمان شکست F سیستم ۱ از n (یا سیستم سری) به عنوان اولین لحظه‌ای تعریف می‌شود

با توجه به فرض‌هایی که در این بخش بیان شد، نحوه محاسبه تابع قابلیت اعتماد سیستم و برآورد پارامتر تسهیم بار در بخش‌های بعد مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۳- قابلیت اعتماد سیستم

در این بخش به ارزیابی قابلیت اعتماد یک F سیستم فرسایشی k از n تسهیم بار با توجه به فرض‌های مدل معرفی شده در بخش قبل می‌پردازیم. توجه داشته باشید که فرسایش تمام مؤلفه‌های در حال کار در مرحله n ام تسهیم بار $1 \leq i \leq k$ هم توزیع می‌باشند. بنابراین با توجه به رابطه (۱)، تابع قابلیت اعتماد یک F سیستم فرسایشی ۱ از n به صورت زیر به دست می‌آید:

$$R_{1:n}(t) = P(T_1 > t) = P(\max\{X_{1,1}(t), \dots, X_{n,1}(t)\} < \omega) = \{P(X_{1,1}(t) < t)\}^n = \{G(\omega; \alpha_1(t), \beta)\}^n, \quad (8)$$

که در آن $G(\cdot; \alpha_1(t), \beta)$ تابع توزیع تجمعی توزیع $\Gamma(\alpha_1(t), \beta)$ را نشان می‌دهد. با مشتق‌گیری از رابطه (۸) نسبت به t و انجام محاسبات جبری، تابع چگالی احتمال T_1 به صورت زیر است:

$$f_1(t) = -n\{G(\omega; \alpha_1(t), \beta)\}^{n-1} \times \int_0^\omega g(y; \alpha_1(t), \beta) \times \alpha_1'(t) \left(\log\left(\frac{y}{\beta}\right) - \psi(\alpha_1(t)) \right) dt, \quad (9)$$

که در آن $g(y; \alpha_1(t), \beta)$ تابع چگالی احتمال توزیع $\Gamma(\alpha_1(t), \beta)$ تابع $\alpha_1'(t)$ مشتق $\alpha_1(t)$ و $\psi(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \log \Gamma(\alpha)$ تابع دیگاما است.

با استفاده از (۳) و با انجام برخی اعمال جبری، تابع قابلیت اعتماد یک F سیستم فرسایشی ۲ از n تسهیم بار به صورت زیر به دست می‌آید:

$$R_{2:n}(t) = P(T_2 > t) = P(T_2 - T_1 + T_1 > t) = \int_0^\infty P(T_2 - T_1 > t - y | T_1 = y) f_1(y) dy, \\ = \int_t^\infty f_1(y) dy + \int_0^t P(T_2 - T_1 > t - y | T_1 = y) f_1(y) dy \\ = R_{1:n}(t) + \int_0^t P(\max\{X_{1,1}(T_1) + X_{1,2}(t), \dots, X_{n,1}(T_1) + X_{n-1,2}(t)\} < \omega | T_1 = y) f_1(y) dy \\ = R_{1:n}(t) + \int_0^t \{G(\omega; \alpha_1(y) + \alpha_2(t-y), \beta)\}^{n-1} f_1(y) dy$$

در واقع در یک F سیستم فرسایشی k از n تسهیم بار، هنگامی که $(k-1)$ امین مؤلفه خراب می‌شود، $(n-k+1)$ مؤلفه باقیمانده در قالب یک سیستم سری تسهیم بار با فاکتور تسهیم بار $\alpha_k(t)$ کار می‌کنند، طوری که

$$\alpha_k(t) > \alpha_{k-1}(t) > \dots > \alpha_1(t). \quad (4)$$

اگر در این مرحله یکی از مؤلفه‌های در حال کار خراب شود، سیستم کاملاً از کار می‌افتد. به عبارت دیگر، زمان شکست یک F سیستم فرسایشی k از n تسهیم بار بر اساس فرسایش مؤلفه‌ها، به عنوان اولین لحظه‌ای تعریف می‌شود که در آن ماکزیمم فرسایش مؤلفه‌های در حال کار بعد از $(k-1)$ امین شکست به آستانه از پیش تعیین شده ω می‌رسد یا از آن بیشتر می‌شود، یعنی

$$T_k = T_{k-1} + \inf\{t > 0; \max\{X_{i,k-1}(T_{k-1}) + X_{1,k}(t), \dots, X_{i,k-1}(T_{k-1}) + X_{n-k+1,k}(t)\} \geq \omega\}. \quad (5)$$

فرض کنید L کل بار وارد شده به سیستم باشد. اگر در سیستم i شکست $(0 \leq i < k)$ وجود داشته باشد، آنگاه کل بار بین $(n-i)$ مؤلفه باقیمانده به صورت مساوی توزیع می‌شود. بنابراین بار تحمیل شده به هر مؤلفه بعد از i امین شکست برابر است با $L_i = \frac{L}{n-i}$. همچنین، فرض کنید λ_i نشان دهنده میزان شکست‌پذیر بودن هر یک از مؤلفه‌های در حال کار باشد، به طوری که i شکست در سیستم وجود دارد. براساس رابطه بار- عمر مقدار λ_i را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد

$$\lambda_i = \lambda_0 \left(\frac{L_i}{L_0}\right)^\theta = \lambda_0 \left(\frac{n}{n-i}\right)^\theta,$$

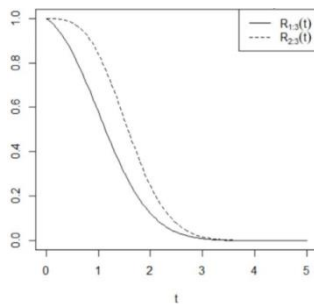
که در آن $\theta > 0$ پارامتری است که میزان تأثیر تسهیم بار را بر نرخ شکست مؤلفه‌ها نشان می‌دهد. به منظور سادگی، با فرض $\lambda_0 = 1$ ، فاکتور تسهیم بار را تحت مدل قانون توان می‌توان به صورت:

$$\alpha_i(t) = t^{\lambda_i} = t^{\left(\frac{n}{n-i}\right)^\theta} \quad (6)$$

در نظر گرفت. توجه شود که رابطه (۶) به ازای $i = n$ یعنی مرحله m تسهیم بار (در سیستم‌های موازی) تعریف نمی‌شود. از طرفی باید فاکتور تسهیم بار در شرط (۴) صدق کند. به این دو دلیل، فاکتور تسهیم بار تصحیح شده را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\alpha_i(t) = (t+1)^{\left(\frac{n}{n-i+0.5}\right)^\theta} - 1, t > 0 \quad (7)$$

این منظور فرض شده است که فرسایش مؤلفه‌ها در n امین مرحله تسهیم بار دارای فرایند گاما با پارامتر مقیاس $\beta = 1$ و پارامتر شکل $\alpha_i(t)$ است، طوری که پارامتر شکل از رابطه (۷) با فرض $\theta = 0.2$ پیروی می‌کند. با استفاده از رابطه (۱۰)، می‌توان تابع قابلیت اعتماد را برای پارامترهای مختلف مدل مانند آستانه از پیش تعیین شده ω ، تعداد مؤلفه‌های سیستم n و تعداد مؤلفه‌های از کار افتاده k ، به صورت عددی محاسبه نمود. تابع‌های قابلیت اعتماد F سیستم‌های ۱ از ۳ و ۲ از ۳ تسهیم بار در شکل ۱ رسم شده‌اند. از این شکل ملاحظه می‌شود که قابلیت اعتماد F سیستم ۲ از ۳، بیشتر از F سیستم ۱ از ۳ است. به عبارتی هر چه پارامتر k بیشتر باشد، قابلیت اعتماد F سیستم k از n هم بیشتر است. همچنین، میزان اختلاف قابلیت اعتماد این دو سیستم در زمان‌های مختلف از روی شکل مشخص است. مشاهده می‌شود که قابلیت اعتماد هر دو سیستم در زمان $t = 0$ به طور بدیهی برابر ۱ است. اما قابلیت اعتماد F سیستم ۱ از ۳ زودتر و سریع‌تر از F سیستم ۲ از ۳ روند نزولی شدن را در پیش می‌گیرد و با گذر زمان اختلاف بین قابلیت اعتماد این دو سیستم کمتر می‌شود تا جایی که برای زمان‌های بزرگتر از ۳، قابلیت اعتماد هر دو سیستم تقریباً برابر صفر است. برای سایر مقادیر پارامترهای θ ، ω و n نیز رفتار مشابهی بدست می‌آید با این تفاوت که اختلاف قابلیت اعتماد دو سیستم نسبت به تغییرات پارامترها متفاوت است.



شکل ۱: تابع قابلیت اعتماد F سیستم‌های ۱ از ۳ و ۲ از ۳ تسهیم بار به ازای $\omega = 2$ و $\theta = 0.2$

برای بررسی رفتار تابع قابلیت اعتماد نسبت به تغییرات آستانه از پیش تعیین شده ω ، توابع قابلیت اعتماد F سیستم‌های ۱ از ۳ و ۲ از ۳ تسهیم بار به ترتیب در شکل‌های ۲ و ۳، به ازای $\theta = 0.2$ و مقادیر $\omega = 0.5, 1, 2$ رسم شده‌اند. از این شکل‌ها ملاحظه می‌شود که قابلیت اعتماد با افزایش آستانه از پیش تعیین شده ω ، در هر دو سیستم مورد نظر افزایش می‌یابد.

که در آن $f_1(y)$ تابع چگالی احتمال T_1 می‌باشد و در رابطه (۹) تعریف شده است.

به طور مشابه با توجه به رابطه (۵)، می‌توان نشان داد تابع قابلیت اعتماد یک سیستم فرسایشی k از n تسهیم بار به ازای $2 \leq k \leq n$ برابر است با

$$R_{k:n}(t) = R_{k-1:n}(t) + \int_0^t (G(\omega; \alpha_{k-1}(y) + \alpha_k(t-y), \beta))^{n-k+1} f_{k-1}(y) dy, \quad (10)$$

که در آن $f_{k-1}(y)$ تابع چگالی احتمال T_{k-1} است. برای بدست آوردن فرم کلی این تابع چگالی، با مشتق گرفتن از رابطه (۱۰) نسبت به t برای $2 \leq k \leq n$ داریم

$$f_k(t) = f_{k-1}(t) \times (1 - (G(\omega; \alpha_{k-1}(t) + \alpha_k(0), \beta))^{n-k+1}) - (n-k+1) \int_0^t \theta_k(t, y) (G(\omega; \alpha_{k-1}(y) + \alpha_k(t-y), \beta))^{n-k+1} f_{k-1}(y) dy,$$

به طور مشابه با توجه به رابطه (۵)، می‌توان نشان داد تابع قابلیت اعتماد یک سیستم فرسایشی k از n به ازای $2 \leq k \leq n$ برابر است با:

$$R_{k:n}(t) = R_{k-1:n}(t) + \int_0^t (G(\omega; \alpha_{k-1}(y) + \alpha_k(t-y), \beta))^{n-k+1} f_{k-1}(y) dy, \quad (11)$$

که در آن $f_{k-1}(y)$ تابع چگالی احتمال T_{k-1} است. برای بدست آوردن فرم کلی این تابع چگالی، با مشتق گرفتن از رابطه (۱۱) نسبت به t برای $2 \leq k \leq n$ داریم

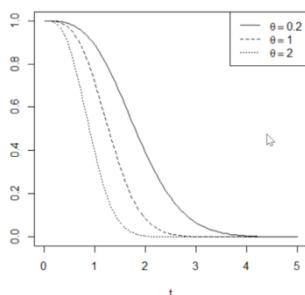
$$f_k(t) = f_{k-1}(t) \times (1 - (G(\omega; \alpha_{k-1}(t) + \alpha_k(0), \beta))^{n-k+1}) - (n-k+1) \int_0^t \theta_k(t, y) (G(\omega; \alpha_{k-1}(y) + \alpha_k(t-y), \beta))^{n-k+1} f_{k-1}(y) dy,$$

که در آن

$$\begin{aligned} \theta_k(t, y) &= \frac{\partial}{\partial t} (G(\omega; \alpha_{k-1}(y) + \alpha_k(t-y), \beta)) \\ &= \alpha'_k(t-y) \int_0^w g(x; \alpha_{k-1}(y) + \alpha_k(t-y), \beta) \times \\ & \left(\log\left(\frac{x}{\beta}\right) \omega(\alpha_{k-1}(y) + \alpha_k(t-y)) \right) dx, \end{aligned}$$

که $\alpha'_k(\cdot)$ مشتق تابع $\alpha_k(\cdot)$ است.

با استفاده از رابطه بازگشتی (۱۱)، تابع قابلیت اعتماد یک سیستم فرسایشی k از n تسهیم بار به ازای $2 \leq k \leq n$ به دست خواهد آمد. با توجه به پیچیدگی محاسباتی این فرمول، در ادامه محاسبه عددی تابع قابلیت اعتماد یک سیستم فرسایشی k از n تسهیم بار مورد توجه قرار گرفته است. برای

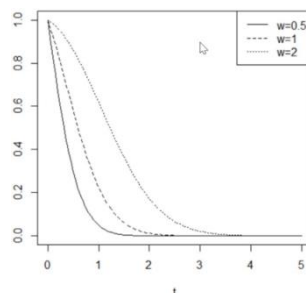


شکل ۵. تابع قابلیت اعتماد F سیستم ۲ از ۳ تسهیم بار به ازای $\omega = 2$ و مقادیر مختلف θ

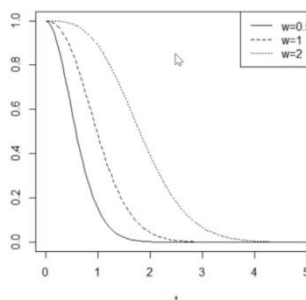
۴- برآوردیابی

در مواردی که پارامترهای مدل مجهول باشند می‌توان آن‌ها را به روش‌های مختلف برآورد نمود. در این بخش، از روش درست‌نمایی ماکزیم بدین منظور استفاده شده است. همچنین سعی شده است تا مزیت استفاده از داده‌های فرسایشی در برآورد پارامترها ملاک عمل قرار گیرد. توجه شود که داده‌های فرسایشی را می‌توان به طور پیوسته در طول زمان یا در زمان‌های بازرسی از پیش تعیین شده اندازه‌گیری نمود و با این کار می‌توان بر اساس اطلاعات به‌دست آمده از یک سیستم پارامترهای مدل را برآورد نمود و نیازی به داشتن چند نمونه از یک سیستم نیست. البته اگر نمونه‌های بیشتری در اختیار باشد برآوردهای دقیق‌تری بدست خواهند آمد که این امر مستلزم صرف هزینه بیشتری است. فرض کنید میزان فرسایش همه مؤلفه‌های یک F سیستم k از n تسهیم بار در زمان‌های τ_1, τ_2, \dots اندازه‌گیری می‌شود، تا جایی که kامین خرابی رخ دهد. همچنین، زمانی که خرابی نام مشخص می‌شود را با τ_{ji} نشان دهید، یعنی $T_i = \tau_{ji}$. با توجه به اینکه در یک سیستم تسهیم بار، توزیع فرسایش مؤلفه‌ها بعد از هر خرابی تغییر می‌کند، میزان فرسایش مؤلفه sام در زمان‌های بازرسی واقع در مرحله نام تسهیم بار را با $X_{s,i}(\tau_{j_{i-1}+1}), \dots, X_{s,i}(\tau_{j_i})$ نشان می‌دهیم به طوری که $i = 1, \dots, k$ نشان‌دهنده مرحله تسهیم بار، $s = 1, \dots, n - i + 1$ معرف شماره مؤلفه‌های باقیمانده در مرحله نام تسهیم بار و $j_0 = 0$ است. به عبارتی، اطلاعات به‌دست آمده از میزان فرسایش مؤلفه‌های یک F سیستم k از n تسهیم بار شامل k ماتریس بین زمان‌های خرابی متوالی است، که بعد ماتریس نام برابر

$$(n - i + 1) \times (\tau_{j_i} - \tau_{j_{i-1}})$$

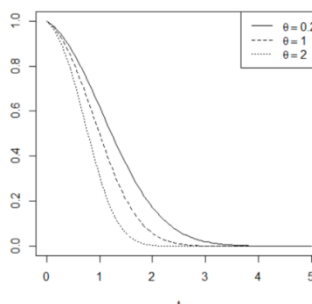


شکل ۲. تابع قابلیت اعتماد F سیستم ۱ از ۳ به ازای $\theta = 0.2$ و مقادیر مختلف ω



شکل ۳. تابع قابلیت اعتماد F سیستم ۲ از ۳ تسهیم بار به ازای $\theta = 0.2$ و مقادیر مختلف ω

همچنین، رفتار تابع قابلیت اعتماد F سیستم‌های ۱ از ۳ و ۲ از ۳ تسهیم بار نسبت به تغییرات پارامتر θ به ازای $\omega = 2$ ، به ترتیب در شکل‌های ۴ و ۵، به ازای مقادیر $\theta = 0.2, 1, 2$ رسم شده‌اند. از این شکل‌ها ملاحظه می‌شود که قابلیت اعتماد هر دو سیستم مورد نظر با افزایش پارامتر تسهیم بار کاهش می‌یابد. محاسبات نشان می‌دهد که این رفتار برای سایر مقادیر ω نیز برقرار است. توجه شود که بنا به مدل (۷)، افزایش θ باعث افزایش پارامتر شکل فرآیند گاما و در نتیجه افزایش متوسط میزان فرسایش مؤلفه‌ها می‌شود. در نتیجه، قابلیت اعتماد کاهش می‌یابد.



شکل ۴. تابع قابلیت اعتماد F سیستم ۱ از ۳ به ازای $\omega = 2$ و مقادیر مختلف θ

سیستم‌های تسهیم بار و برآورد پارامترهای مدل، نمی‌توان آن‌ها را به صورت تحلیلی بررسی نمود. بنابراین، باید از روش‌های محاسبات عددی برای این منظور بهره برد. در این بخش ابتدا با یک مثال توضیحی، یک سیستم تسهیم بار و برآورد پارامتر مدل تشریح می‌شود، سپس دقت برآوردگرهای پیشنهادی با استفاده از یک الگوریتم شبیه‌سازی بررسی می‌گردد.

۵-۱- مثال توضیحی

در این بخش، برای تشریح نحوه اندازه‌گیری میزان فرسایش مؤلفه‌های یک سیستم تسهیم بار، یک سیستم ۴ مؤلفه‌ای در نظر گرفته می‌شود و فرض بر این است که بازرسی در زمان‌های ۰/۰۱، ۰/۰۲، ... صورت می‌پذیرد. در اولین زمان بازرسی که فرسایش یکی از مؤلفه‌ها از سطح از پیش تعیین شده ω بیشتر باشد، آن زمان به‌عنوان زمان اولین خرابی ثبت و آن مؤلفه به‌عنوان مؤلفه خراب قلمداد و از سیستم کنار گذاشته می‌شود. با در نظر گرفتن فاکتور تسهیم بار در رابطه (۷)، فرسایش مؤلفه‌ها در مرحله i ام تسهیم بار از فرآیند $\Gamma(a_i(t), 1)$ تولید شده‌اند. بخشی از داده‌های تولید شده با فرض $\omega = 3$ و $\theta = 0.7$ ، تا چهار رقم اعشار در جدول ۱ گزارش شده است. با توجه به داده‌های جدول ۱، ملاحظه می‌شود که فرسایش مؤلفه دوم در زمان ۱/۰۵ قبل از سایر مؤلفه‌ها برای اولین بار از $\omega = 3$ بیشتر می‌شود. بنابراین زمان اولین خرابی ۱/۰۵ است و بعد از این زمان مؤلفه دوم از سیستم کنار گذاشته می‌شود. از بین مؤلفه‌های باقیمانده در مرحله دوم تسهیم بار، مؤلفه اول پیش از سایرین در زمان ۲/۱۹ خراب می‌شود. به همین منوال، زمان‌های سومین و چهارمین خرابی به ترتیب ۲/۴۷ و ۲/۶۳ هستند. با توجه به این داده‌ها، زمان خرابی یک سیستم سری ۱/۰۵ می‌باشد، در حالی که زمان خرابی سیستم ۲ از ۴ تسهیم بار ۲/۱۹، زمان خرابی سیستم ۳ از ۴ تسهیم بار ۲/۴۷ و زمان خرابی سیستم موازی تسهیم بار ۲/۶۳ است.

است. از آنجایی که نمو‌های فرسایش در زمان‌های بازرسی متوالی مستقل هستند، تابع درستی‌نمایی پارامترهای مدل را بر اساس این آماره‌ها تشکیل می‌دهیم. فرض کنید

$$D_{s,i}(\tau_j) = X_{s,i}(\tau_j) - X_{s,i}(\tau_{j-1}),$$

$$i = 1, \dots, k,$$

$$s = 1, \dots, n - i + 1, \quad j = j_{i-1} + 1, \dots, j_i,$$

نشان دهنده نمو‌های فرسایش s امین مؤلفه باقیمانده در مرحله i ام تسهیم بار در زمان‌های بازرسی متوالی τ_{j-1} و τ_j باشند. در نتیجه، تابع درستی‌نمایی پارامتر θ عبارت است از

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^k \prod_{s=1}^{n-i+1} \prod_{j=j_{i-1}+1}^{j_i} e^{d_{i,s,j}} \times \frac{(d_{i,s,j})^{\alpha_i(\tau_j - t_{i-1}) - \alpha_i(\tau_{j-1} - t_{i-1})}}{\Gamma(\alpha_i(\tau_j - t_{i-1}) - \alpha_i(\tau_{j-1} - t_{i-1}))},$$

که $d_{i,s,j}$ مقدار مشاهده شده $D_{s,i}(\tau_j)$ است. بنابراین، برآورد درستی‌نمایی ماکزیمم θ از حل معادله زیر بدست می‌آید

$$\sum_{i=1}^k \sum_{s=1}^{n-i+1} \sum_{j=j_{i-1}+1}^{j_i} \left(\frac{n}{n-i+0.5} \right)^\theta \log \left(\frac{n}{n-i+0.5} \right) \left((\tau_j - t_{i-1} + 1)^{\left(\frac{n}{n-i+0.5} \right)^\theta} \log(\tau_j - t_{i-1} + 1) - (\tau_{j-1} - t_{i-1} + 1)^{\left(\frac{n}{n-i+0.5} \right)^\theta} \log(\tau_{j-1} - t_{i-1} + 1) \right) \left\{ \log(d_{i,s,j}) - \psi \left((\tau_j - t_{i-1} + 1)^{\left(\frac{n}{n-i+0.5} \right)^\theta} - (\tau_{j-1} - t_{i-1} + 1)^{\left(\frac{n}{n-i+0.5} \right)^\theta} \right) \right\} = 0. \quad (12)$$

هرچند معادله (۱۲)، یک معادله پیچیده است، اما با استفاده از روش‌های عددی می‌توان آن را حل نمود که در بخش بعد مورد توجه قرار خواهد گرفت.

۵- نتایج عددی

همانطور که در بخش‌های پیشین اشاره شد، با توجه به پیچیدگی‌های فرمول‌های بدست آمده برای تابع قابلیت اعتماد سیستم‌های تسهیم بار و برآورد پارامترهای مدل، نمی‌توان آن‌ها را به صورت تحلیلی بررسی نمود. بنابراین، باید از روش‌های محاسبات عددی برای این منظور بهره برد. در این بخش ابتدا با یک مثال توضیحی، یک سیستم تسهیم بار و برآورد پارامتر مدل تشریح می‌شود، سپس دقت برآوردگرهای پیشنهادی با استفاده از یک الگوریتم شبیه‌سازی بررسی می‌گردد.

همانطور که در بخش‌های پیشین اشاره شد، با توجه به پیچیدگی‌های فرمول‌های بدست آمده برای تابع قابلیت اعتماد

میزان فرسایش مؤلفه‌های یک سیستم ۴ مؤلفه‌ای تسهیم بار در زمان‌های بازرسی ۰/۰۱، ۰/۰۲، ... تولید و زمان‌های اولین تا چهارمین خرابی (که به ترتیب معادل زمان‌های از کارافتادگی F سیستم‌های ۱ از ۴، ۲ از ۴، ۳ از ۴ و ۴ از ۴ هستند) مشخص شده‌اند. سپس با استفاده از معادله (۱۲)، برآوردگر θ در هر تکرار بدست آمده است. دقت برآوردگر با استفاده از دو معیار میزان اریبی (*bias*) و میانگین مربعات خطا (*mse*) شبیه‌سازی شده بنا به فرمول‌های زیر محاسبه می‌شود:

$$bias = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \hat{\theta}_{(i)} - \theta,$$

$$mse = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B (\hat{\theta}_{(i)} - \theta)^2,$$

که در آن $\hat{\theta}_{(i)}$ برآوردگر درست‌نمایی ماکزیمم θ در تکرار *i*ام الگوریتم شبیه‌سازی است. نتایج برای یک سیستم *k* از ۴ تسهیم بار به ازای $\theta = 0.7$ و $\omega = 1, 2, 3$ تا چهار رقم اعشار در جدول ۲ گزارش شده است.

جدول ۲. مقادیر *bias* و *mse* شبیه‌سازی شده

ω		<i>k</i> = 1	<i>k</i> = 2	<i>k</i> = 3	<i>k</i> = 4
۱	<i>bias</i>	۰/۲۱۱۴	۰/۰۴۳۷	۰/۰۲۴۷	۰/۰۲۰۶
	<i>mse</i>	۰/۴۱۷۴	۰/۰۴۹۴	۰/۰۱۳۸	۰/۰۰۶۳
۲	<i>bias</i>	۰/۰۹۳۱	۰/۰۲۵۲	۰/۰۱۴۸	۰/۰۱۴۸
	<i>mse</i>	۰/۱۶۹۸	۰/۰۲۱۶	۰/۰۰۷۲	۰/۰۰۳۵
۳	<i>bias</i>	۰/۰۴۲۳	۰/۰۱۵۸	۰/۰۱۲۲	۰/۰۱۳۰
	<i>mse</i>	۰/۰۸۰۷	۰/۰۱۲۹	۰/۰۰۴۹	۰/۰۰۲۷

از جدول ۲ ملاحظه می‌شود که:

۱. مقادیر بدست آمده برای هر دو معیار اریبی و میانگین مربعات خطا نشان می‌دهند که قدرت اجرایی برآوردگر پیشنهادی قابل قبول است.

۲. به ازای ω ثابت، با افزایش *k* هر دو معیار اریبی و میانگین مربعات خطا کاهش می‌یابند. البته این موضوع منطقی است زیرا با افزایش *k* در حقیقت زمان کل آزمون افزایش می‌یابد و در نتیجه حجم داده‌های فرسایش اندازه‌گیری شده بیشتر می‌شود. بنابراین، انتظار می‌رود بر اساس اطلاعات بیشتر، دقت برآورد افزایش یابد.

جدول ۱. بخشی از فرسایش‌های تولید شده در یک سیستم ۴ مؤلفه‌ای

مؤلفه چهارم	مؤلفه سوم	مؤلفه دوم	مؤلفه اول	زمان‌های بازرسی
۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۱
۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	...
۰/۰۷۳۳	۰/۰۰۹۵	۱/۶۰۴۱	۰/۵۸۸۵	۱/۰۴
۰/۰۷۳۳	۰/۰۰۹۵	۳/۸۵۵۸	۰/۵۸۸۵	۱/۰۵
۰/۰۷۳۳	۰/۰۰۹۵	۰/۵۸۸۵	۰/۵۸۸۵	۱/۰۶
۰/۰۷۳۳	۰/۰۰۹۵	۰/۵۸۸۵	۰/۵۸۸۵	...
۰/۸۲۷۵	۲/۱۰۲۶	۲/۳۹۷۷	۲/۳۹۷۷	۲/۱۸
۰/۸۲۷۵	۲/۱۰۲۶	۳/۰۳۰۸	۳/۰۳۰۸	۲/۱۹
۰/۹۳۳۲	۲/۱۰۲۶	۲/۲۰	۲/۲۰	۲/۲۰
۰/۹۳۳۵	۲/۱۱۷۶	۲/۴۶	۲/۴۶	۲/۴۶
۰/۹۳۳۵	۳/۰۶۱۳	۲/۴۷	۲/۴۷	۲/۴۷
۰/۹۳۳۶	۲/۱۰۲۶	۲/۴۸	۲/۴۸	۲/۴۸
۰/۹۳۳۶	۲/۱۰۲۶	۲/۴۸	۲/۴۸	...
۲/۴۱۹۵	۲/۱۰۲۶	۲/۶۲	۲/۶۲	۲/۶۲
۳/۰۳۰۵	۳/۰۳۰۵	۲/۶۳	۲/۶۳	۲/۶۳

با حل معادله (۱۲) به ازای مقادیر مختلف *k* می‌توان برآورد درست‌نمایی ماکزیمم پارامتر θ را در یک سیستم *k* از ۴ به ازای $k = 1, \dots, 4$ بدست آورد. با حل عددی این معادله بر اساس داده‌های جدول ۱ نتیجه می‌شود که برآورد درست‌نمایی ماکزیمم پارامتر θ در یک سیستم سری، سیستم ۲ از ۴ تسهیم بار، سیستم ۳ از ۴ تسهیم بار و سیستم موازی تسهیم بار به ترتیب برابر ۰/۸۱۱۹، ۰/۷۰۱۹، ۰/۶۸۸۹ و ۰/۷۰۰۲ است. واضح است که با افزایش *k* در یک سیستم *k* از ۴ تعداد داده‌های فرسایشی موجود افزایش می‌یابد. از طرفی با توجه به اینکه مقدار واقعی پارامتر θ برابر ۰/۷ است، ملاحظه می‌شود که اختلاف مقدار برآورد و مقدار واقعی پارامتر در یک سیستم سری از همه بیشتر و در سیستم موازی تسهیم بار از همه کمتر است.

از آنجایی که با یک مثال نمی‌توان در مورد دقت برآوردگرهای پیشنهادی اظهار نظر نمود، لذا در زیربخش بعد، بر اساس نتایج شبیه‌سازی به این مهم می‌پردازیم.

۲-۵- شبیه‌سازی

به منظور بررسی دقت برآوردگر پیشنهاد شده برای پارامتر تسهیم بار θ ، در این بخش از یک الگوریتم شبیه‌سازی با $B = 10^4$ تکرار استفاده شده است. به عبارت دقیق‌تر، با استفاده از مفروضات زیربخش قبل، در هر تکرار الگوریتم، ابتدا

مورد بررسی قرار گرفت. بدیهی است به منظور ایجاد انعطاف‌پذیری بیشتر در مدل، می‌توان مدل قانون توان دوپارامتری با ضابطه $a(t) = \beta t^\theta$ را نیز در نظر گرفت. حتی می‌توان مدل قانون نمایی با ضابطه $a(t) = \beta \exp\{\theta t\}$ را مورد توجه قرار داد.

در این مقاله مسیر فرسایش مؤلفه‌ها صعودی در نظر گرفته و از فرآیند گاما برای مدل‌بندی استفاده شد. در مواردی که فرسایش مؤلفه‌ها صعودی نباشد، می‌توان آن‌ها را با فرآیندهای دیگری مانند فرآیند وینر مدل‌بندی نمود.

علاوه بر برآوردگر درست‌نمایی ماکزیمم، می‌توان از سایر روش‌های برآورد نیز بهره برد.

در این مقاله فرض شد کل بار تحمیل شده به سیستم به طور مساوی بین مؤلفه‌های فعال آن تسهیم می‌شود. می‌توان حالات دیگری را در نظر گرفت که در آن‌ها بار سیستم به صورت متناسب با وزن مؤلفه‌ها یا به صورت بهینه تسهیم شود.

موارد پیشنهادی فوق می‌توانند به‌عنوان موضوعات پژوهشی مستقلی در آینده مورد بررسی و تحقیق قرار بگیرند.

۷- منابع

- [1] Kuo, W. and Zuo, M. J. (2003), Optimal reliability modeling, Wiley, New York.
- [2] Ye, Z., Revie, M. and Walls, L. (2014), A Load sharing system reliability model with managed component degradation, IEEE Trans. Reliab., 63 (3), 721-730.
- [3] Zhao, X., Liu, B. and Liu, Y. (2018), Reliability modeling and analysis of load-sharing systems with continuously degrading components, IEEE Trans. Reliab., 99, 1-15.
- [4] Amari, S. V., Krishna, M. B. and Pham, H. (2008), Tampered failure fate load-sharing systems: status and perspectives, Handbook of Performability Engineering, pp. 291-308.
- [5] Huang, L. and Xu, Q. (2010), Lifetime reliability for load-sharing redundant systems with arbitrary failure distributions, IEEE Trans. Reliab., 59 (2), 319-330.
- [6] Jain, M. and Gupta, R. (2012), Load sharing M-out of-N:G system with non-identical

۳. به ازای k ثابت، با افزایش ω هر دو معیار اریبی و میانگین مربعات خطا کاهش می‌یابند. توجه شود که وقتی ω افزایش می‌یابد، به این معنی است که میزان فرسایش بیشتری برای هر یک از مؤلفه‌ها قابل قبول است. در نتیجه، در این حالت هم حجم داده‌های فرسایش اندازه‌گیری شده بیشتر می‌شود، به عبارتی، با استفاده از اطلاعات بیشتری پارامتر مدل برآورد می‌شود.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، قابلیت اعتماد یک F سیستم فرسایشی k از n تسهیم بار مورد مطالعه قرار گرفت. برای این منظور، فرض شد فرسایش مؤلفه‌ها از فرآیند گاما پیروی می‌کنند. برای نشان دادن اثر تسهیم بار، از مدل قانون توان روی پارامتر شکل فرآیند گاما در مراحل متوالی تسهیم بار استفاده شد. سطح آستانه فرسایش ω برای مؤلفه‌های سیستم در نظر گرفته شد و بر این اساس طول عمر سیستم فرسایشی k از n تسهیم بار تعریف گردید. سپس، با انجام اعمال جبری دقیق، یک رابطه بازگشتی برای محاسبه تابع قابلیت اعتماد سیستم بدست آمد. با توجه به پیچیدگی فرمول، نمودار این تابع برای حالت خاص یک F سیستم ۳ مؤلفه‌ای با استفاده از محاسبات عددی رسم و ملاحظه شد که رفتار این تابع نسبت به تغییرات پارامترهای مدل حساس است. به عبارت دقیق‌تر، قابلیت اعتماد یک F سیستم k از ۳ نسبت به پارامترهای k و ω افزایشی و نسبت به پارامتر θ کاهش می‌یابد. این رفتار برای F سیستم‌های k از n با $n > 3$ نیز برقرار است. همچنین، برای حالتی که پارامتر مدل مجهول باشد، موضوع برآورد پارامتر به روش درست‌نمایی ماکزیمم مطالعه و دقت برآوردگر معرفی شده با استفاده از روش‌های شبیه‌سازی بررسی شد. نتایج نشان دادند که دقت برآوردگر پیشنهادشده قابل قبول و رفتار آن نسبت به تغییر پارامترهای مدل مناسب است. به عبارت دقیق‌تر، به ازای ω ثابت، با افزایش k دقت برآوردگر پیشنهادی بر اساس هر دو معیار اریبی و میانگین مربعات خطا افزایش یافت. همین رفتار به ازای k ثابت، با افزایش ω نیز نتیجه شد.

نتایج بدست آمده در این مقاله قابل تعمیم به مدل‌های مشابهی هستند که از آن جمله می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

• اثر تسهیم بار در این مقاله بر اساس مدل قانون توان یک پارامتری روی پارامتر شکل فرآیند گاما با ضابطه $a(t) = t^\theta$

- [12] Kahle, W., Mercier, S. and Paroissin, C. (2016), Degradation processes in reliability. Wiley, New York.
- [13] Noortwijk, J. M. V. (2009), A survey of the application of gamma processes in maintenance, Reliab. Eng. Syst. Safe., 94 (1), 2-21.
- [14] Park, C. and Padgett, W. J. (2005), Accelerated degradation models for failure based on geometric brownian motion and gamma processes, Lifetime Data Anal., 11, 511-527.
- [15] Abdel-Hameed, M. (1975), A Gamma wear process, IEEE Trans. Reliab., 24 (2), 152-153.
- [16] Bagdonavicius, V. and Nikulin, M. S. (2000), Estimation in degradation models with explanatory variables, Lifetime Data Anal., 7, 85-103.
- [17] Lawless, J. and Crowder, M. (2004), Covariates and random effects in a gamma process model with application to degradation and failure, Lifetime Data Anal., 10, 213-227.
- components subject to common cause failure, Int. J. Math. Oper. Res., 4 (5), 586-605.
- [7] Tang, Y. and Zhang, J. (2008), New model for load-sharing k-out-of-n:G system with different components, J. Syst. Eng. Electron., 19, 748-751.
- [8] Taghipour, S. and Kassaei, M. L. (2015), Periodic inspection optimization of a k-out-of-n load-sharing system, IEEE Trans. Reliab., 64, 1116-1127.
- [9] Chen, Y., Yu, X. and Li, Y. (2019), A failure mechanism cumulative model for reliability evaluation of a k-out-of-n system with load sharing effect, IEEE Access, 7, 2210-2222.
- [10] Zhang, J., Zhao, Y. and Ma, X. (2020), Reliability modeling methods for load-sharing k-out-of-n system subject to discrete external load, Reliab. Eng. Syst. Safe., 193, 106603.
- [11] Nezakati, E. and Razmkhah, M. (2020), Reliability analysis of a load sharing k-out-of-n:F degradation system with dependent competing failures, Reliab. Eng. Syst. Safe., 203, 107076.

Reliability of degrading load sharing k -out-of- $n:F$ system

Mostafa Razmkhah^{1,*} and Bahareh Khatib Astaneh²

¹Department of Statistics, Ferdowsi University of Mashhad, Khorasan Razavi, Iran.

²Department of Mathematics, University of Neyshabur, Khorasan Razavi, Iran.

Extended Abstract. Coherent systems containing n components are of great importance in the modern technology. An k -out-of- $n:F$ system is a special case of coherent systems which fails if and only if at least k of its components fail. On the other hand, in the reliability engineering, it is reasonable to consider the load sharing problem when some of the components fail. Actually, after failing some components, the total load on the system shares among the functioning components, and their failure times are accelerated as a result. Some examples of load sharing systems include electric generators sharing an electrical load in a power plant, the CPUs in a multiprocessor computer system, cables in a suspension bridge and valves or pumps in a hydraulic system. There are many research works on the modeling of load sharing systems. In this article, the reliability of a load sharing k -out-of- $n:F$ system is studied subject to degrading components. In such a system, every component degrades by time continuously, and it is considered as a failed component when the amount of its degradation reaches or exceeds the threshold ω . Denote the degradation of a functioning component at time $t > 0$ by $Z(t)$, and assume it follows a Gamma process with shape parameter $a(t)$ and constant scale parameter b , denoted by $\Gamma(a(t), b)$, with the probability density function

$$f(z; a(t), b) = \frac{1}{\Gamma(a(t))b^{a(t)}} z^{a(t)-1} e^{-\frac{z}{b}},$$

where $\Gamma(\alpha)$ stands for the complete gamma function. The effect of load sharing is modeled by considering a power law process as the shape parameter of the Gamma process.

Let us denote the degradations of n independent components of a load sharing k -out-of- $n:F$ system at time t before the first failure time (i.e., at the first step of load sharing) by $X_{1,1}(t), \dots, X_{n,1}(t)$, such that

$$X_{s,1}(t) \sim \Gamma(\alpha_1(t), \beta), \quad s = 1, \dots, n,$$

where $\alpha_1(t)$ should be determined in a way that the effect of load sharing is specified. So, the $\alpha_1(t)$ is called the load sharing factor. The first failure time or equivalently the failure time of a 1-out-of- $n:F$ system is defined as the first instant in which the maximum degradation of all components reaches or exceeds the pre-specified threshold ω . That is,

$$T_1 = \inf\{t > 0; \max\{X_{1,1}(t), \dots, X_{n,1}(t)\} \geq \omega\}. \quad (1)$$

After the first failure time, the total load on the system is shared among the surviving components by load sharing factor $\alpha_2(t)$, such that $\alpha_2(t) > \alpha_1(t)$. Denote by $X_{1,2}(t), \dots, X_{n-1,2}(t)$ the degradations of $(n-1)$ surviving components between the first and the second failure times (i.e., the second step of load sharing). Assume the conditional distribution of degradation of the components in this step is as follows

$$X_{s,2}(t - T_1) | T_1 = t_1 \sim \Gamma(\alpha_2(t - t_1), \beta), \quad t > t_1, \quad s = 1, \dots, n-1.$$

¹ * (Corresponding author) razmkhah_m@um.ac.ir

Note that the amount of degradation of the components at time t in the second step of load sharing is accumulated until t . So, the second failure time is defined as

$$T_2 = \inf\{t > T_1; \max\{X_{1,2}(t), \dots, X_{n-1,2}(t)\} \geq \omega\}$$

$$= T_1 + \inf\{t > 0; \max\{X_{.,1}(T_1) + X_{1,2}(t), \dots, X_{.,1}(T_1) + X_{n-1,2}(t)\} \geq \omega\},$$

where $X_{.,1}(T_1)$ stands for the amount of degradation at the second step of load sharing which has occurred before the first failure time T_1 . Similarly, the degradations of the surviving components between the $(i - 1)$ th and the i th failures (i.e., the i th step of load sharing) are denoted by $X_{1,i}(t), \dots, X_{n-i+1,i}(t)$ and it is assumed that for $i = 1, \dots, k$, the conditional distribution of the degradation at this step, given $T_{i-1} = t_{i-1}$, is

$$X_{s,i}(t - T_{i-1})|T_{i-1} = t_{i-1} \sim \Gamma(\alpha_i(t - t_{i-1}), \beta), \quad t > t_{i-1}, \quad s = 1, \dots, n - i + 1.$$

Actually, in a degrading load sharing k -out-of- $n:F$ system after occurring the $(k - 1)$ th failure, the remaining $(n - k + 1)$ surviving components work as a series system with load sharing factor $\alpha_k(t)$ such that

$$\alpha_k(t) > \alpha_{k-1}(t) > \dots > \alpha_1(t).$$

The degrading load sharing k -out-of- $n:F$ system fails when the amount of degradation of one of the surviving components at the k th step of load sharing reaches or exceeds the threshold ω . Therefore, the failure time of such a system is defined as

$$T_k = T_{k-1} + \inf\{t > 0; \max\{X_{.,k-1}(T_{k-1}) + X_{1,k}(t), \dots, X_{.,k-1}(T_{k-1}) + X_{n-k+1,k}(t)\} \geq \omega\}.$$

Using (1), the reliability function of a 1-out-of- $n:F$ system is given by

$$R_{1:n}(t) = P(T_1 > t)$$

$$= P(\max\{X_{1,1}(t), \dots, X_{n,1}(t)\} < \omega)$$

$$= \{P(X_{1,1}(t) < t)\}^n$$

$$= \{G(\omega; \alpha_1(t), \beta)\}^n,$$

where $G(\cdot; \alpha_1(t), \beta)$ stands for the cumulative distribution function of $\Gamma(\alpha_1(t), \beta)$ distribution. Similarly, it can be shown that the reliability function of a load sharing k -out-of- $n:F$ system for $2 \leq k \leq n$ is

$$R_{k:n}(t) = R_{k-1:n}(t) + \int_0^t (G(\omega; \alpha_{k-1}(y) + \alpha_k(t - y), \beta))^{n-k+1} f_{k-1}(y) dy, \tag{2}$$

where $f_{k-1}(y)$ is the probability density function of T_{k-1} . By differentiating from (1), we get

$$f_k(t) = f_{k-1}(t) \left(1 - (G(\omega; \alpha_{k-1}(t) + \alpha_k(0), \beta))^{n-k+1}\right)$$

$$- (n - k + 1) \int_0^t \vartheta_k(t, y) (G(\omega; \alpha_{k-1}(y) + \alpha_k(t - y), \beta))^{n-k+1} f_{k-1}(y) dy,$$

where

$$\vartheta_k(t, y) = \frac{\partial}{\partial t} G(\omega; \alpha_{k-1}(y) + \alpha_k(t - y), \beta)$$

$$= \alpha'_k(t - y) \int_0^\omega g(x; \alpha_{k-1}(y) + \alpha_k(t - y), \beta) \left(\log\left(\frac{x}{\beta}\right) - \psi(\alpha_{k-1}(y) - \alpha_k(t - y)) \right) dx,$$

where $\alpha'_k(\cdot)$ denotes the differentiation of $\alpha_k(\cdot)$. Using the recursive formula in (2), the reliability function of a load sharing k -out-of- $n:F$ system may be calculated numerically. Toward this end, it is assumed that load sharing factor follows a power law process, such that, for $i = 1, \dots, k$,

$$\alpha_i(t) = (t + 1) \left(\frac{n}{n-i+0.5} \right)^\theta - 1, \quad t > 0,$$

where θ is a positive real constant. The sensitivity of the reliability function of the proposed system is discussed with respect to the model parameters. The estimation problem of the load sharing parameter is also investigated based on degradation data measured at some pre-specified inspection times. The results are explained using an illustrative example. Further, the performance of the proposed estimator is studied using a simulation algorithm.

Reference

- [1] Kuo, W. and Zuo, M. J. (2003), Optimal reliability modeling, Wiley, New York.
- [2] Ye, Z., Revie, M. and Walls, L. (2014), A Load sharing system reliability model with managed component degradation, IEEE Trans. Reliab., 63 (3), 721-730.
- [3] Zhao, X., Liu, B. and Liu, Y. (2018), Reliability modeling and analysis of load-Sharing systems with continuously degrading components, IEEE Trans. Reliab., 99, 1-15.
- [4] Amari, S. V., Krishna, M. B. and Pham, H. (2008), Tampered failure fate load-sharing systems: status and perspectives, Handbook of Performability Engineering, pp. 291-308.
- [5] Huang, L. and Xu, Q. (2010), Lifetime reliability for load-sharing redundant systems with arbitrary failure distributions, IEEE Trans. Reliab., 59 (2), 319-330.
- [6] Jain, M. and Gupta, R. (2012), Load sharing M-out of-N:G system with non-identical components subject to common cause failure, Int. J. Math. Oper. Res., 4 (5), 586-605.
- [7] Tang, Y. and Zhang, J. (2008), New model for load-sharing k-out-of-n:G system with different components, J. Syst. Eng. Electron., 19, 748-751.
- [8] Taghipour, S. and Kassaei, M. L. (2015), Periodic inspection optimization of a k-out-of-n load-sharing system, IEEE Trans. Reliab., 64, 1116-1127.
- [9] Chen, Y., Yu, X. and Li, Y. (2019), A failure mechanism cumulative model for reliability evaluation of a k-out-of-n system with load sharing effect, IEEE Access, 7, 2210-2222.
- [10] Zhang, J., Zhao, Y. and Ma, X. (2020), Reliability modeling methods for load-sharing k-out-of-n system subject to discrete external load, Reliab. Eng. Syst. Safe., 193, 106603.
- [11] Nezakati, E. and Razmkhah, M. (2020), Reliability analysis of a load sharing k-out-of-n:F degradation system with dependent competing failures, Reliab. Eng. Syst. Safe., 203, 107076.
- [12] Kahle, W., Mercier, S. and Paroissin, C. (2016), Degradation processes in reliability. Wiley, New York.

- [13] Noortwijk, J. M. V. (2009), A survey of the application of gamma processes in maintenance, *Reliab. Eng. Syst. Safe.*, 94 (1), 2-21.
- [14] Park, C. and Padgett, W. J. (2005), Accelerated degradation models for failure based on geometric brownian motion and gamma processes, *Lifetime Data Anal.*, 11, 511-527.
- [15] Abdel-Hameed, M. (1975), A Gamma wear process, *IEEE Trans. Reliab.*, 24 (2), 152-153.
- [16] Bagdonavicius, V. and Nikulin, M. S. (2000), Estimation in degradation models with explanatory variables, *Lifetime Data Anal.*, 7, 85-103.
- [17] Lawless, J. and Crowder, M. (2004), Covariates and random effects in a gamma process model with application to degradation and failure, *Lifetime Data Anal.*, 10, 213-227.