

## پایش فرآیندهای پواسن صفر آماسیده به کمک نمودار کنترل جمع تجمعی مبتنی بر مدل

الهام کیوانی

دانشجوی دکتری، گروه مهندسی صنایع، واحد تهران شمال، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران. keyvani@yahoo.com

شروین اسدزاده\*

(نویسنده مسئول) دانشیار، گروه مهندسی صنایع، واحد تهران شمال، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران. sh\_asadzadeh@iau-tnb.ac.ir

یاسر صمیمی

استادیار، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران. y\_samimi@kntu.ac.ir

**چکیده:** در این مقاله سه رویکرد به منظور پایش فرآیندهای مبتنی بر توزیع پواسن صفر آماسیده ارائه شده است. رویکرد اول بر مبنای توزیع پواسن صفر آماسیده کلاسیک موجود در ادبیات، رویکرد دوم بر مبنای مدل رگرسیونی مخاطره متناسب با هدف تأثیر حضور متغیرهای قابل اندازه گیری و رویکرد سوم به منظور لحاظ کردن همزمان تأثیر متغیرهای قابل اندازه گیری و متغیرهای غیر قابل اندازه گیری با تلفیق مدل رگرسیونی مخاطره متناسب و مدل شکنندگی، است. رویکرد های دوم و سوم مبتنی بر مدل مخاطره متناسب و مدل تلفیقی از مهم ترین نوآوری های مقاله حاضر می باشد که تاکنون به آن پرداخته نشده است. عملکرد نمودارهای کنترل با اعمال شیفت به طور جداگانه و همزمان در دو پارامتر توزیع پواسن صفر آماسیده بررسی شده است. مطالعات شبیه سازی، دلالت بر برتری نمودار کنترل جمع تجمعی با لحاظ کردن همزمان تأثیر متغیرهای قابل اندازه گیری و غیر قابل اندازه گیری دارد. همچنین، عملکرد نمودارهای کنترل پیشنهادی در یک مطالعه موردی در کارخانه چاپ لیبیل بررسی شده است.

**واژگان کلیدی:** توزیع پواسن صفر آماسیده، مدل رگرسیونی شکنندگی، مدل رگرسیونی مخاطره متناسب، نمودار کنترل جمع تجمعی، متغیرهای تأثیرگذار.

### ۱- مقدمه

فرآیندها شده است [۲]. برای حل این مشکل از روش های متفاوتی برای پایش فرآیندهای با کیفیت بالا استفاده می شود. یکی از روش های پایش برای فرآیندهای با نرخ نقص بسیار پایین، استفاده از توزیع های صفر آماسیده<sup>۱</sup> می باشد. به دلیل این که مجموعه داده این دست از فرآیندهای با کیفیت بالا از تعداد زیادی صفر تشکیل شده است، به این مجموعه داده ها صفر مازاد یا نقصان نزدیک به صفر گویند که این فرآیندها به خوبی از طریق مدل هایی نظیر توزیع پواسن صفر آماسیده، مدل سازی می شوند [۱]. به دلیل پایین بودن نرخ نقص در فرآیندهای با کیفیت بالا روش های پایش با دشواری زیادی روبه رو هستند یکی از راه حل ها برای این موضوع لحاظ کردن تأثیر متغیرهایی است که تأثیر به سزایی بر نرخ نقص دارند [۳]، در حقیقت متغیرهای کیفیت/ عملکرد<sup>۲</sup>، در عمل تحت تأثیر بسیاری از متغیرهای دیگر قرار می گیرند. برای در نظر گرفتن تأثیر متغیرهای مشاهده شده در فرآیندهای با

با پیشرفت تکنولوژی به منظور افزایش کیفیت و رضایتمندی مشتری، کیفیت تولید و خدمات در سال های اخیر به طور فزاینده ای پیشرفت کرده است و پایش و کنترل محصولات نسبت به گذشته بسیار دشوارتر بوده به طوری که گاهی با فرآیندهایی روبه رو هستیم که نرخ نقص در هر نمونه بازرسی کم و حتی نزدیک به صفر است [۱]. در پایش این دست از فرآیندها که با عنوان فرآیندهای با کیفیت بالا شناخته می شوند به دلیل پایین بودن نرخ نقص و با استفاده از تعداد نقص ها در بازرسی هر نمونه، اطلاعات کمی در اختیار قرار می گیرد و این موضوع باعث دشواری پایش در این دست از

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۳/۰۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۵/۳۰

دوره ۱۲/ شماره ۴

صفحات ۴۶۰-۴۳۹

\*Corresponding author: sh\_asadzadeh@iau-tnb.ac.ir

<sup>2</sup> Quality/Performance

<sup>1</sup> Zero Inflated

در صفر، در توزیع پواسن صفر آماسیده، در نظر گرفته شده است. شای و همکاران [۱۱] مساله پایش فرایندهایی را که تعداد عدم انطباق در نمونه‌گیری‌های متعدد بسیار کم و نزدیک به صفر است مطرح کرده و برای شناسایی تغییرات غیرتصادفی فرآیند، نمودار کنترلی بر مبنای توزیع ZIP و سپس بر همان اساس یک نمودار کنترل شوهارت به عنوان رویه‌ای برای کنترل این فرایندها طراحی می‌کنند. هو و لیو [۱۲] نمودار کنترل EWMA یک طرفه بالایی با استفاده از آماره آزمون وزنی پیشنهاد داده‌اند که قادر به شناسایی شیفتهای افزایشی در قسمت پواسن مدل پواسن صفر آماسیده می‌باشد که با لحاظ کردن اثر تصادفی، امکان بهبود ظرفیت تشخیص ناهمگونی غیرطبیعی را فراهم می‌کند.

مدل رگرسیونی بین متغیرهای پاسخ و متغیرهای تأثیرگذار برای تنظیم داده‌های شمارشی مشاهده شده استفاده می‌شود، که اصطلاحاً به آن تعدیل ریسک شده می‌گویند. بسیاری از محققان نمودارهای کنترل تعدیل ریسک شده را برای پایش مدل‌های پیشنهادی خود ارائه داده‌اند [۱۳]، [۱۴] و [۱۵].

مگاهد و همکاران [۱۶] با بررسی ویژگی‌های متوسط طول دنباله‌ای<sup>۷</sup> (ARL) دو نوع نمودار CUSUM دو طرفه، روشی را ارائه داده‌اند که با استفاده از آن نمودار کنترل برنولی دو طرفه را می‌توان به طور دقیق تعیین کرد. این روش هم برای صنایع مختلف و هم در مهندسی سلامت در مدل‌های تعدیل ریسک شده، مورد استفاده قرار می‌گیرد. اشتینر و مککی [۳] نمودار کنترل CCC و CQC را برای پایش فرایندهای با کیفیت بالا با کمک روش‌های رگرسیونی توسعه داده‌اند و روشی را بر مبنای متغیرهای تأثیرگذار که علت نقص‌ها هستند با استفاده از رگرسیون لجستیک ارائه داده‌اند. محمود [۱۷] مدلی برای پایش تعداد نقص‌ها در فرایندهای با کیفیت بالا با در نظر گرفتن تأثیر یک متغیر تأثیرگذار ارائه داده‌است. مدل ایشان بر مبنای مدل‌های رگرسیونی خطی تعمیم یافته بر مبنای توزیع ZIP و توزیع دوجمله‌ای منفی صفر آماسیده<sup>۸</sup> (ZINB) با لحاظ کردن تأثیر یک متغیر تأثیرگذار بر تعداد نقص‌های فرآیند می‌باشد. محمود و شای [۱] مطالعه‌ای جامع از روش‌های گذشته و کنونی پایش فرایندهای با کیفیت بالا با استفاده از مدل‌های صفر آماسیده

کیفیت بالا از مدل‌های متفاوت رگرسیونی مانند مدل‌های مخاطره متناسب<sup>۳</sup> می‌توان استفاده کرد علاوه بر این، در فرایندهای با کیفیت بالا مشاهده تمام متغیرهای تأثیرگذار به دلیل هزینه بالا و پیچیدگی امکان پذیر نیست و یا اطلاعات دقیقی از این دست از متغیرها در دسترس نمی‌باشد، اما به دلیل تأثیری که این متغیرهای غیرقابل مشاهده بر نرخ نقص می‌گذارند باعث ایجاد ناهمگونی در فرآیند می‌شوند و بنابراین نمی‌توان از تأثیر آن‌ها چشم‌پوشی کرد، لذا از مدل‌های رگرسیونی نظیر مدل‌های شکنندگی<sup>۴</sup> برای در نظر گرفتن تأثیر متغیرهای غیرقابل مشاهده می‌توان استفاده کرد که در این مدل‌ها تأثیر ناهمگونی به صورت یک ضریب، که متغیری نامنفی می‌باشد به مدل اضافه می‌شود [۴].

پایش فرایندهای با کیفیت بالا توسط محققان بسیاری بررسی شده‌است. بسیاری از محققان نمودارهای کنترلی بر مبنای توزیع پواسن به منظور پایش فرایندهای با کیفیت بالا، ارائه داده‌اند. ون و همکاران [۵] یک نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی<sup>۵</sup> (EWMA) تعدیل شده با رگرسیون برای پایش مدل‌های پواسن پیشنهاد داده‌اند که قادر است به طور مداوم مقادیر انتظاری را با توجه به وضعیت واقعی تنظیم و به روز کند. برور و همکاران [۶] نیز یک نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی برای پایش داده‌های پواسن ارائه داده‌اند که با روش زنجیره مارکوف ارزیابی می‌شود. جیانگ و همکاران [۷] با پایش فرایندهای ناهمگن پواسن برای تشخیص کارآمد تغییرات در اندازه نمونه متفاوت، کلاسی از نمودار کنترل وزنی جمع تجمعی<sup>۱</sup> (CUSUM) پیشنهاد داده و عملکرد آن را با نمودار CUSUM سنتی مقایسه نموده‌اند. کتمی [۸] سه نمودار کنترل برای فرایندهای دارای عدم انطباق را با استفاده از توزیع پواسن صفر آماسیده معرفی می‌کند. فتاحی و همکاران [۹] یک نمودار EWMA با توزیع پواسن صفر آماسیده<sup>۶</sup> (ZIP) برای پایش رخداد‌های نادر در حوزه سلامت با یک مقدار اندازه‌گیری عملکرد از پیش تعیین شده پیشنهاد داده‌اند. لامبرت و همکاران [۱۰] ایده جدیدی را برای رگرسیون شمارشی و پایش فرایندهای شمارشی جایگزین توزیع پواسن، مطرح نموده‌اند، به طوری که پارامتر  $\lambda$  به عنوان پارامتر توزیع پواسن استاندارد و  $p$  احتمال تورم

<sup>7</sup> Zero Inflated Poisson

<sup>8</sup> Average Run Length

<sup>9</sup> Zero Inflated Negative Binomial

<sup>3</sup> Proportional Hazard

<sup>4</sup> Frailty Models

<sup>5</sup> Exponentially Weighted Moving Average

<sup>6</sup> Cumulative Sum Control Chart

مدل مخاطره‌ی متناسب به منظور لحاظ کردن تأثیر متغیرهای قابل اندازه‌گیری و نیز تلفیق مدل‌های مخاطره متناسب و مدل شکنندگی به منظور پایش هم‌زمان متغیرهای قابل اندازه‌گیری و متغیرهای غیرقابل اندازه‌گیری، تاکنون مورد بررسی و مطالعه قرار نگرفته‌است. بدین منظور در مقاله حاضر یک نمودار کنترل CUSUM مبتنی بر مدل رگرسیونی مخاطره متناسب برای پایش فرآیندهای با کیفیت بالا برای بررسی تغییرات حاصل از وجود عوامل تأثیرگذار قابل اندازه‌گیری (قابل مشاهده) و همچنین یک نمودار CUSUM مبتنی بر تلفیق مدل‌های رگرسیونی مخاطره متناسب و شکنندگی برای در نظر گرفتن تأثیر هم‌زمان عوامل تأثیرگذار قابل اندازه‌گیری و غیر قابل اندازه‌گیری در این فرآیندها، ارائه می‌شود و عملکرد هر دو نمودار پیشنهادی با نمودار CUSUM مبتنی بر مدل استاندارد توزیع پواسن صفرآماسیده (بدون حضور متغیرهای تأثیرگذار)، به منظور پایش هم‌زمان تغییرات در هر دو پارامتر مدل ZIP و نیز پایش جداگانه پارامترها مقایسه و بررسی می‌شود.

## ۲- بیان مساله و مفروضات

مدل پواسن صفر آماسیده، یکی از مدل‌های توسعه یافته مدل پواسن استاندارد است که برای شمارش داده‌ها با صفر مازاد مورد استفاده قرار می‌گیرد. در واقع می‌توان گفت که در مدل‌های صفر آماسیده نسبت به مدل‌های شمارشی نظیر پواسن، هندسی، دو جمله‌ای، دو جمله‌ای منفی و ... داده‌ها از آنچه انتظار می‌رود دارای صفر بیشتری می‌باشد. نادیده گرفتن ویژگی آماسیده بودن در صفر باعث ایجاد نارایی در پارامترهای تخمین زده شده می‌شود و همین طور باعث پراکندگی بیش از حد داده‌های شمارشی می‌گردد [۱].

فرض کنید متغیر تصادفی گسسته  $y$  با احتمال  $p$  مقدار صفر آماسیده را اختیار می‌کند و با احتمال  $1-p$  مقدار آن از توزیع پواسن با پارامتر  $\lambda$  به دست می‌آید. بنابراین مقدار متغیر تصادفی  $y$  از دو منبع صفر آماسیده و توزیع پواسن به دست می‌آید و تابع جرم احتمال توزیع پواسن صفرآماسیده از رابطه‌ی ۱ حاصل می‌شود:

$$f_0(y) = P(Y=y) = \begin{cases} p + (1-p)\exp(-\lambda), & y=0 \\ \frac{(1-p)\exp(-\lambda)\lambda^y}{y!}, & y=1,2,3,\dots \end{cases} \quad (1)$$

ارائه داده‌اند و کاربرد این مدل‌ها را در چندین صنعت مختلف بررسی نموده‌اند. هی و همکاران [۱۸] نمودار کنترلی با استفاده از ترکیب دو نمودار جمع تجمعی برای پایش هم‌زمان دو پارامتر در فرآیندهای با توزیع پواسن صفر آماسیده و همچنین یک نمودار واحد CUSUM برای پایش هم‌زمان شیفت‌های افزایشی در دو پارامتر ارائه داده‌اند و عملکرد این دو رویکرد را مقایسه نموده‌اند. محمود و همکاران [۱۹] برای پایش تغییرات میانگین در مجموعه داده‌های صفرمازاد از مدل رگرسیونی خطی تعمیم یافته بر مبنای توزیع‌های ZIP و ZINB برای پایش فرآیندهای با کیفیت بالا با لحاظ کردن تأثیر یک متغیر تأثیرگذار استفاده کرده‌اند. ایشان نمودار کنترل حافظه‌دار مبتنی بر داده و مبتنی بر مدل خطی تعمیم یافته، برای نظارت بر افزایش میانگین تعداد نقص در یک فرآیند با کیفیت بالا ارائه داده‌اند.

علاوه بر این، برخی از محققان مدل‌های تعدیل ریسک شده را با مدل‌های ZIP ترکیب و تغییرات هر دو پارامتر توزیع ZIP را بررسی کرده‌اند. تن و همکاران [۲۰] نمودارهای کنترل جمع تجمعی پواسن صفر آماسیده تعدیل ریسک شده را به جهت پایش بیماری آنفلانزا پیشنهاد داده‌اند که تأثیر عوامل ریسک بر آنفلانزا توسط مدل رگرسیونی پواسن صفرآماسیده مطرح شده‌است و نمودارهای کنترلی را به منظور پایش هم‌زمان دو پارامتر مدل ZIP و هم برای پایش جداگانه آن پیشنهاد داده‌اند. لی و همکاران [۲۱] نمودار کنترل EWMA تعدیل ریسک شده را برای تشخیص تغییرات کوچک در داده‌های ZIP پیشنهاد داده‌اند، تغییرات هر دو پارامتر توزیع ZIP را به طور هم‌زمان پایش کرده‌اند و با مطالعات شبیه‌سازی با استفاده از روش مونت کارلو نشان دادند که نمودار پیشنهادی از سایر نمودارهای موجود در تشخیص تغییرات کوچک در فرآیندهای با صفر مازاد بهتر عمل می‌کند. لی و همکاران [۲۲] نمودار کنترل EWMA بر مبنای نسبت درست‌نمایی تعمیم یافته برای پایش فرآیندهای ZIP تعدیل ریسک شده ارائه داده‌اند که قادر به شناسایی تغییرات تصادفی در هر دو پارامتر مدل ZIP می‌باشد.

همان طور که در ادبیات موضوع بیان شد به دلیل اهمیت پایش فرآیندهای با کیفیت بالا و نیز تشخیص زود هنگام حتی تغییرات کوچک، محققان بسیاری تأثیر عوامل تأثیرگذار بر فرآیندهای مبتنی بر مدل ZIP را بررسی نموده و تأثیر آن را در بهبود تشخیص تغییرات در نمودارهای کنترل بیان کرده‌اند، اما واضح است که پایش داده‌های مبتنی بر مدل ZIP با

نشریه مهندسی و مدیریت کیفیت

$$S(y|x) = S_0(y)^{q(x)} \quad (۶)$$

بنابراین می‌توان تابع بقا توزیع پواسن صفر آماسیده را نیز طبق مدل PH و مطابق رابطه‌ی ۷ بازنویسی کرد:

$$S(y|x) = \begin{cases} (1-p-(1-p)\exp(-\lambda))^{\exp(\beta x)}, & y=0 \\ (1-p-(1-p)\frac{\Gamma((y+1), \lambda)}{y!})^{\exp(\beta x)}, & y=1,2,3,\dots \end{cases} \quad (۷)$$

علاوه بر متغیرهای تأثیرگذار قابل مشاهده (اندازه‌گیری)، متغیرهای غیرقابل مشاهده (غیرقابل اندازه‌گیری) نیز در روند فرآیند تأثیرگذار هستند که ممکن است اطلاعات دقیقی از این متغیرها در دسترس نباشد. نادیده گرفتن تأثیر این دست از متغیرها باعث ایجاد ناهمگونی در مدل PH می‌شود. به همین دلیل از مدل شکنندگی به منظور لحاظ کردن تأثیر ناهمگونی ناشی از متغیرهای غیرقابل مشاهده استفاده می‌شود. شکنندگی (ناهمگونی) به صورت ضریبی مانند  $\phi$  که یک متغیر تصادفی غیرمنفی است، باعث تعدیل شدن تابع مخاطره می‌گردد [۲۴]. رابطه‌ی ۸ مدل شکنندگی را نشان می‌دهد:

$$h(y|x, \phi) = \phi h_0(y|x) \quad (۸)$$

تابع مخاطره توزیع پواسن صفر آماسیده، طبق رابطه‌ی ۹ بیان می‌شود:

$$h(y|x, \phi) = \begin{cases} \phi(p+(1-p)\exp(-\lambda))\exp(\beta x), & y=0 \\ \phi\left(\frac{\exp(-\lambda)\lambda^y}{y! - y\Gamma(y, \lambda)}\right)\exp(\beta x), & y=1,2,3,\dots \end{cases} \quad (۹)$$

به‌عنوان مثال خط تولید یک کارخانه چاپ لیبل را در نظر بگیرید. نقص‌ها یا خرابی‌ها در رول‌های لیبل‌های چاپ شده، در هر روز توسط واحد کنترل کیفیت بررسی می‌شود. تعداد خرابی‌ها در متوسط تعداد رول‌های لیبل‌های چاپ شده در هر روز که به عنوان مشخصه کیفی در فرآیند لحاظ می‌شود، به عوامل تأثیرگذار قابل مشاهده (اندازه‌گیری) متعددی نظیر دما یا رطوبت واحد تولید کارخانه و همین‌طور عوامل غیرقابل مشاهده و اندازه‌گیری مانند مهارت یا عملکرد اپراتورهای مختلف دستگاه چاپ وابسته است که در صورت نادیده گرفتن این عوامل غیرقابل مشاهده، ناهمگونی لحاظ نشده، منجر به نتیجه‌گیری نادرست در پایش فرآیندها با نمودارهای کنترل می‌گردد. برای در نظر گرفتن تأثیر این متغیرها، از یک توزیع گسسته برای مدل‌سازی اثر تصادفی (شکنندگی) استفاده می‌شود. با فرض حضور دو اپراتور در خط تولید، یک مدل

مشخصه کیفی گسسته  $y$  که نقش متغیر پاسخ را دارد از توزیع پواسن صفر آماسیده پیروی می‌کند، در عمل تحت تأثیر متغیرهای تأثیرگذار قابل اندازه‌گیری و مشاهده و همین‌طور متغیرهایی است که گاهی ممکن است مشاهده و اندازه‌گیری آن، دشوار باشد. همان‌طور که در ادبیات موضوع بیان شد، تأثیر متغیرهای غیرقابل مشاهده در مدل پواسن صفر آماسیده، در مطالعات گذشته نادیده گرفته شده است. برای در نظر گرفتن تأثیر متغیرهای تأثیرگذار قابل مشاهده (اندازه‌گیری) بر داده‌ها از مدل‌های رگرسیونی تحلیل بقا نظیر مدل رگرسیونی PH استفاده می‌شود [۲۳]. در این مقاله از مدل رگرسیونی PH برای به‌دست آوردن تابع بقا و همین‌طور تابع مخاطره برای متغیر کیفیت خروجی استفاده شده است. تابع بقا توزیع پواسن صفر آماسیده از رابطه‌ی ۲ حاصل می‌شود:

$$S_0(y) = \begin{cases} 1-p-(1-p)\exp(-\lambda), & y=0 \\ 1-p-(1-p)\frac{\Gamma((y+1), \lambda)}{y!}, & y=1,2,3,\dots \end{cases} \quad (۲)$$

و تابع مخاطره بر اساس رابطه‌ی ۳ به‌دست می‌آید:

$$h_0(y) = \frac{f_0(y)}{S_0(y-1)} = \begin{cases} p+(1-p)\exp(-\lambda), & y=0 \\ \frac{\exp(-\lambda)\lambda^y}{y! - y\Gamma(y, \lambda)}, & y=1,2,3,\dots \end{cases} \quad (۳)$$

بر اساس مدل رگرسیونی PH، تأثیر متغیرهای تأثیرگذار بر تابع مخاطره، به صورت رابطه‌ی ۴ تعریف می‌شود:

$$h(y|x) = h_0(y)q(X) \quad (۴)$$

که در آن  $h_0(y)$  تابع مخاطره پایه متغیر  $y$  است،  $q(X)$  تابعی غیر منفی و  $X$  برداری از متغیرهای تأثیرگذار می‌باشد. واضح است که در این مدل تأثیر متغیرهای تأثیرگذار بر تابع مخاطره پایه اعمال می‌شود که در این مطالعه تعداد متغیرهای تأثیرگذار برابر یک فرض شده است. تابع مخاطره برای توزیع پواسن صفر آماسیده با لحاظ کردن تأثیر متغیرهای تأثیرگذار، بر اساس مدل PH به صورت رابطه‌ی ۵ می‌باشد:

$$h(y|x) = \begin{cases} (p+(1-p)\exp(-\lambda))\exp(\beta x), & y=0 \\ \left(\frac{\exp(-\lambda)\lambda^y}{y! - y\Gamma(y, \lambda)}\right)\exp(\beta x), & y=1,2,3,\dots \end{cases} \quad (۵)$$

همان‌طور که در رابطه (۵) مشخص است، به‌طور کلی رابطه مرسوم برای تابع  $q(X)$  برابر  $\exp(\beta x)$  در نظر گرفته می‌شود که در آن  $X$ ، تنها متغیر تأثیرگذار و  $\beta$  ضریب رگرسیونی است. بر همین اساس تابع بقا بر اساس مدل PH مطابق رابطه‌ی ۶ است:

نشریه مهندسی و مدیریت کیفیت

$$S(y|x, \varphi) = \begin{cases} \varphi(1-p-(1-p)\exp(-\lambda))^{\exp(\beta x)}, & y=0 \\ \varphi(1-p-(1-p)\frac{\Gamma((y+1), \lambda)}{y!})^{\exp(\beta x)}, & y=1,2,3,\dots \end{cases}$$

بنابراین با توجه به رابطه‌ی ۱۳ تابع بقا غیر شرطی با تبدیل لاپلاس برابر است با:

$$S(y|x) = E(S(y|x, \varphi)) = E(e^{-\varphi H_0(y) \exp(\beta x)}) = (13)$$

که در آن  $H_0$  تابع پایه تجمعی مخاطره می‌باشد. تابع جرم احتمال و تابع مخاطره نیز با تبدیل لاپلاس و مشتقات آن با روابط ۱۴ و ۱۵ محاسبه می‌شود:

$$f(y|x) = -h_0(y) \exp(\beta x) L'(H_0(y) \exp(\beta x)) \quad (14)$$

$$h(y|x) = -h_0(y) \exp(\beta x) \frac{L'(H_0(y) \exp(\beta x))}{L(H_0(y) \exp(\beta x))} \quad (15)$$

بنابراین با توجه به تابع بقا، تابع جرم احتمال و تابع مخاطره مدل و تبدیل لاپلاس روابط ۱۶، ۱۷ و ۱۸ حاصل می‌شود و نیز با توجه به روابط پیشین و محاسبات تبدیل لاپلاس، توابع غیر شرطی برای متغیر خروجی  $y$  طبق توابع ۱۹، ۲۰ و ۲۱ به‌دست می‌آید

$$S(y|x) = \begin{cases} E(e^{-\varphi(-\ln(1-p-(1-p)\exp(-\lambda))\exp(\beta x))}) = \\ L((-\ln(1-p-(1-p)\exp(-\lambda))\exp(\beta x))), & y=0 \\ E(e^{-\varphi(-\ln(1-p-(1-p)\frac{\Gamma((y+1), \lambda)}{y!})\exp(\beta x))}) = \\ L(-\ln(1-p-(1-p)\frac{\Gamma((y+1), \lambda)}{y!})\exp(\beta x)), & y=1,2,3,\dots \end{cases} \quad (16)$$

$$f(y|x) = \begin{cases} -(p+(1-p)\exp(-\lambda))\exp(\beta x) * \\ L'(-\ln(1-p-(1-p)\exp(-\lambda))\exp(\beta x)), & y=0 \\ -\frac{\exp(-\lambda)\lambda^y}{y! - y\Gamma(y, \lambda)} \exp(\beta x) * \\ L'(-\ln(1-p-(1-p)\frac{\Gamma((y+1), \lambda)}{y!})\exp(\beta x)), & y=1,2,3,\dots \end{cases} \quad (17)$$

$$h(y|x) = \begin{cases} \frac{-(p+(1-p)\exp(-\lambda))\exp(\beta x) * \\ L'(-\ln(1-p-(1-p)\exp(-\lambda))\exp(\beta x))}{L(-\ln(1-p-(1-p)\exp(-\lambda))\exp(\beta x))}, & y=0 \\ -\frac{\exp(-\lambda)\lambda^y}{y! - y\Gamma(y, \lambda)} \exp(\beta x) * \\ \frac{L'((-\ln(1-p-(1-p)\frac{\Gamma((y+1), \lambda)}{y!}))\exp(\beta x))}{L((-\ln(1-p-(1-p)\frac{\Gamma((y+1), \lambda)}{y!}))\exp(\beta x))}, & y=1,2,3,\dots \end{cases} \quad (18)$$

$$S(y|x) = \begin{cases} (\omega e^{\varphi_1 \ln(1-p-(1-p)\exp(-\lambda))\exp(\beta x)} + \\ (1-\omega)e^{\varphi_2 \ln(1-p-(1-p)\exp(-\lambda))\exp(\beta x)}), & y=0 \\ \omega e^{\varphi_1 \ln(1-p-(1-p)\frac{\Gamma((y+1), \lambda)}{y!})\exp(\beta x)} + \\ (1-\omega)e^{\varphi_2 \ln(1-p-(1-p)\frac{\Gamma((y+1), \lambda)}{y!})\exp(\beta x)}, & y=1,2,3,\dots \end{cases} \quad (19)$$

شکندگی دو سطحی در نظر گرفته می‌شود. نسبت تعداد رول‌های چاپ شده توسط اپراتور اول که با مقدار شکندگی  $\varphi_1$  تولید می‌شود برابر با  $\omega$  و نسبت تعداد رول‌های چاپ شده توسط اپراتور دوم  $1-\omega$  است و به دلیل برقراری شرط استانداردسازی ( $E(\varphi) = 1$ )، مقدار شکندگی برای اپراتور دوم از رابطه‌ی ۱۰ حاصل می‌شود:

$$\varphi_2 = \frac{1-\varphi_1\omega}{1-\omega} \quad (10)$$

برای به‌دست آوردن توابع بقا و مخاطره غیر شرطی، می‌توان از تبدیل لاپلاس استفاده کرد. تبدیل لاپلاس در تئوری احتمالات برای متغیر تصادفی  $U$  به صورت رابطه‌ی ۱۱ تعریف می‌شود:

$$L(a) = E(e^{-aU}) \quad (11)$$

از طرفی، تابع بقای شرطی برای متغیر خروجی  $y$ ، با مقدار شکندگی  $\varphi$  به صورت رابطه‌ی ۱۲ می‌باشد:

(۱۲)

$$f(y|x) = \begin{cases} \omega \varphi_1 (p + (1-p) \exp(-\lambda)) \exp(\beta x) \\ e^{\varphi_1 \ln(1-p-(1-p) \exp(-\lambda)) \exp(\beta x)} + \\ (1-\omega) \varphi_2 (p + (1-p) \exp(-\lambda)) \\ \exp(\beta x) e^{\varphi_2 \ln(1-p-(1-p) \exp(-\lambda)) \exp(\beta x)}, & y = 0 \\ \omega \varphi_1 \frac{\exp(-\lambda) \lambda^y}{y! - y \Gamma(y, \lambda)} \exp(\beta x) \\ e^{\varphi_1 \ln(1-p-(1-p) \frac{\Gamma((y+1), \lambda)}{y!}) \exp(\beta x)} + \\ (1-\omega) \varphi_2 \frac{\exp(-\lambda) \lambda^y}{y! - y \Gamma(y, \lambda)} \exp(\beta x) \\ e^{\varphi_2 \ln(1-p-(1-p) \frac{\Gamma((y+1), \lambda)}{y!}) \exp(\beta x)}, & y = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (20)$$

$$h(y|x) = \begin{cases} \omega \varphi_1 e^{\varphi_1 \ln(1-p-(1-p) \exp(-\lambda)) \exp(\beta x)} + \\ (1-\omega) \varphi_2 e^{\varphi_2 \ln(1-p-(1-p) \exp(-\lambda)) \exp(\beta x)} \\ \frac{\omega e^{\varphi_1 \ln(1-p-(1-p) \exp(-\lambda)) \exp(\beta x)} + \\ (1-\omega) e^{\varphi_2 \ln(1-p-(1-p) \exp(-\lambda)) \exp(\beta x)}}{*} \\ (p + (1-p) \exp(-\lambda)) \exp(\beta x), & y = 0 \\ \omega \varphi_1 e^{\varphi_1 \ln(1-p-(1-p) \frac{\Gamma((y+1), \lambda)}{y!}) \exp(\beta x)} + \\ (1-\omega) \varphi_2 e^{\varphi_2 \ln(1-p-(1-p) \frac{\Gamma((y+1), \lambda)}{y!}) \exp(\beta x)} \\ \frac{\omega e^{\varphi_1 \ln(1-p-(1-p) \frac{\Gamma((y+1), \lambda)}{y!}) \exp(\beta x)} + \\ (1-\omega) e^{\varphi_2 \ln(1-p-(1-p) \frac{\Gamma((y+1), \lambda)}{y!}) \exp(\beta x)}}{*} \\ \left( \frac{\exp(-\lambda) \lambda^y}{y! - y \Gamma(y, \lambda)} \right) \exp(\beta x), & y = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (21)$$

اول مبتنی بر مدل پواسن صفر آماسیده در حالت استاندارد و بدون حضور متغیرهای تأثیرگذار می‌باشد که توسط محققان بسیاری بررسی شده و در ادبیات به آن اشاره شده است [۱۸]. سناریو دوم نمودار کنترل CUSUM مبتنی بر مدل رگرسیونی مخاطره متناسب (پیشنهادی) و سناریو سوم نیز نمودار کنترل CUSUM با استفاده از تلفیق مدل رگرسیونی مخاطره متناسب و مدل رگرسیونی شکنندگی (پیشنهادی) می‌باشد. در نهایت در مطالعات شبیه‌سازی عملکرد دو نمودار کنترل CUSUM مبتنی بر مدل پیشنهادی در مقایسه با عملکرد نمودار CUSUM مبتنی بر مدل پواسن صفر آماسیده در حالت استاندارد و بدون حضور متغیرهای تأثیرگذار بررسی خواهد شد. در این مطالعه برآنیم تأثیر شیفت‌های افزایشی در پارامترهای مدل پواسن صفر آماسیده یعنی متوسط تعداد خرابی و نرخ رخداد صفر بررسی شود، به همین دلیل حد بالای نمودار کنترل برای پایش فرایندها طراحی می‌شود اما به راحتی می‌توان حد بالا و حد پایین نمودار کنترل را به

در بخش بعد رویکرد ساخت سه نمودار کنترل CUSUM بر مبنای مدل پواسن صفر آماسیده به ترتیب در حالت استاندارد و بدون در نظر گرفتن تأثیر متغیرهای تأثیرگذار، با استفاده از مدل رگرسیونی مخاطره متناسب و نیز با استفاده از تلفیق مدل مخاطره متناسب و مدل شکنندگی بررسی خواهد شد.

### ۳- نمودارهای کنترل CUSUM پیشنهادی

در فرایندهای با کیفیت بالا، نمودارهای کنترل بر مبنای توزیع‌های صفر آماسیده طراحی می‌شوند. بر مبنای مدل‌های مطرح شده در بخش قبلی مدل‌های تعدیل رگرسیون شده، برای لحاظ کردن تأثیر متغیرهای تأثیرگذار در مدل، مطرح شده است. زمانی که شیفتی در فرآیند ایجاد می‌شود، انتظار بر این است که نمودار کنترل به سرعت شیفت را تشخیص داده و سیگنال خارج از کنترل بودن فرآیند، سریعتر دریافت شود [۲۵]. در این بخش طراحی سه نمودار کنترل CUSUM در سه سناریو مختلف ارائه شده است. نمودار کنترل سناریو

$$L(y_i) = f(y_i) \quad (24)$$

در این مطالعه هر سه نمودار کنترل CUSUM ارائه شده بر مبنای اعمال شیفت افزایشی در پارامتر  $\lambda$ ، در پارامتر  $p$  و نیز ایجاد شیفت هم‌زمان در هر دو پارامتر توزیع پواسن صفر آماسیده طراحی می‌شوند. در صورتی که  $q_i > UCL$  باشد نمودار سیگنال می‌دهد، که در آن،  $UCL$  حد کنترل بالای نمودار کنترل است و به‌گونه‌ای تعیین می‌شود که به مقدار متوسط طول دنباله تحت کنترل مشخصی برسیم. حال می‌توان آماره CUSUM را برای سناریوهای مختلف محاسبه کرد.

در سناریو اول محاسبات امتیاز CUSUM بدون حضور متغیرهای تأثیرگذار قابل مشاهده و غیر قابل مشاهده مطابق رابطه‌ی ۲۵ است:

$$w_i = \begin{cases} \log\left(\frac{p + (1-p)\exp(-\theta\lambda)}{p + (1-p)\exp(-\lambda)}\right) = \\ \log(p + (1-p)\exp(-\theta\lambda)) - \log(p + (1-p)\exp(-\lambda)), & y_i = 0 \\ \\ \log\left(\frac{(1-p)\exp(-\theta\lambda)(\theta\lambda)^{y_i}}{y_i!}\right) = \\ \log\left(\frac{(1-p)\exp(-\lambda)(\lambda)^{y_i}}{y_i!}\right) = \\ \log((1-p)\exp(-\theta\lambda)(\theta\lambda)^{y_i}) - \log((1-p)\exp(-\lambda)(\lambda)^{y_i}), & y_i = 1,2,3,\dots \end{cases} \quad (25)$$

$$f(y_i | x_i) = h(y_i | x_i) * S(y_i | x_i) \quad (27)$$

بنابراین امتیاز CUSUM مربوط به سناریو دوم مبتنی بر مدل مخاطره متناسب، طبق رابطه‌ی ۲۸ به دست می‌آید:

$$w_i = \begin{cases} \log\left(\frac{(p + (1-p)\exp(-\theta\lambda))\exp(\beta x_i)}{(1-p - (1-p)\exp(-\theta\lambda))\exp(\beta x_i)}\right), & y_i = 0 \\ \\ \log\left(\frac{\frac{\exp(-\theta\lambda)(\theta\lambda)^{y_i}}{y_i! - y_i\Gamma(y_i, \theta\lambda)}\exp(\beta x_i)}{(1-p - (1-p)\frac{\Gamma((y_i+1), \theta\lambda)}{y_i!})\exp(\beta x_i)}\right), & y_i = 1,2,3,\dots \\ \\ \log\left(\frac{\frac{\exp(-\lambda)\lambda^{y_i}}{y_i! - y_i\Gamma(y_i, \lambda)}\exp(\beta x_i)}{(1-p - (1-p)\frac{\Gamma((y_i+1), \lambda)}{y_i!})\exp(\beta x_i)}\right), & y_i = 1,2,3,\dots \end{cases} \quad (28)$$

منظور پایش هم‌زمان شیفت‌های افزایشی و کاهش‌ی فرآیند توسعه داد.

آماره CUSUM به صورت رابطه‌ی ۲۲ تعریف می‌شود:

$$q_i = \max(0, q_{i-1} + w_i) \quad i = 1,2,3,\dots \\ q_0 = 0 \quad (22)$$

که در آن  $w_i$  امتیاز CUSUM است و از رابطه‌ی ۲۳ حاصل می‌شود:

$$w_i = \log\left(\frac{L(y_i|\theta\mu)}{L(y_i|\mu)}\right) \quad (23)$$

و در آن  $\theta$  یک شیفت از پیش تعیین شده‌است که برای طراحی نمودار CUSUM برای شناسایی شیفت بهینه استفاده می‌شود و  $\mu$  پارامتری از توزیع پواسن صفر آماسیده است که شیفت در آن پایش می‌شود و تابع درستنمایی طبق رابطه‌ی ۲۴ تعریف می‌شود:

تابع درستنمایی، با در نظر گرفتن تأثیر متغیر قابل اندازه‌گیری به صورت رابطه‌ی ۲۶ تعریف می‌شود:

$$L(y_i) = f(y_i | x_i) \quad (26)$$

و تابع جرم احتمال از رابطه‌ی ۲۷ حاصل می‌شود:

را بر مبنای ایجاد شیفت در پارامتر  $p$  و نیز اعمال شیفت به طور هم‌زمان در هر دو پارامتر  $\lambda$  و  $p$  نشان داد. در هر سه سناریو، در صورتی که مقدار آماره بیشتر از UCL باشد، نمودار سیگنال می‌دهد.

$$w_i = \log\left(\frac{\omega\varphi_1(p + (1-p)\exp(-\theta\lambda)\exp(\beta x_i))}{e^{\varphi_1 \ln(1-p-(1-p)\exp(-\theta\lambda)\exp(\beta x_i))} + (1-\omega)\varphi_2(p + (1-p)\exp(-\theta\lambda)\exp(\beta x_i))}{\omega\varphi_1(p + (1-p)\exp(-\lambda)\exp(\beta x_i))}{e^{\varphi_1 \ln(1-p-(1-p)\exp(-\lambda)\exp(\beta x_i))} + (1-\omega)\varphi_2(p + (1-p)\exp(-\lambda)\exp(\beta x_i))}\right), \quad y_i = 0 \quad (29)$$

$$w_i = \log\left(\frac{\omega\varphi_1 \frac{\exp(-\theta\lambda)(\theta\lambda)^{y_i}}{y_i! - y_i\Gamma(y_i, \theta\lambda)} \exp(\beta x_i)}{e^{\varphi_1 \ln(1-p-(1-p)\frac{\Gamma((y_i+1), \theta\lambda)}{y_i!})} \exp(\beta x_i)} + (1-\omega)\varphi_2 \frac{\exp(-\theta\lambda)(\theta\lambda)^{y_i}}{y_i! - y_i\Gamma(y_i, \theta\lambda)} \exp(\beta x_i)}{e^{\varphi_2 \ln(1-p-(1-p)\frac{\Gamma((y_i+1), \theta\lambda)}{y_i!})} \exp(\beta x_i)} + \omega\varphi_1 \frac{\exp(-\lambda)\lambda^{y_i}}{y_i! - y_i\Gamma(y_i, \lambda)} \exp(\beta x_i)}{e^{\varphi_1 \ln(1-p-(1-p)\frac{\Gamma((y_i+1), \lambda)}{y_i!})} \exp(\beta x_i)} + (1-\omega)\varphi_2 \frac{\exp(-\lambda)\lambda^{y_i}}{y_i! - y_i\Gamma(y_i, \lambda)} \exp(\beta x_i)}{e^{\varphi_2 \ln(1-p-(1-p)\frac{\Gamma((y_i+1), \lambda)}{y_i!})} \exp(\beta x_i)}\right), \quad y_i = 1, 2, 3, \dots \quad (30)$$

شبیه‌سازی، حد بالای نمودار کنترل به منظور رسیدن به ARL تحت کنترل نزدیک به ۲۰۰ تعیین شده است. برای افزایش دقت در شبیه‌سازی و کاهش مقدار خطا، شبیه‌سازی ۱۰۰۰۰ بار تکرار شده و مقادیر خطای استاندارد نیز به همراه مقادیر ARL ثبت شده است. عملکرد نمودارهای کنترل پیشنهادی در هر سه سناریو مطرح شده در بخش‌های پیشین با اعمال شیفت‌های افزایشی در پارامتر  $\lambda$ ، با اندازه‌های ۱/۲۵، ۱/۵، ۱/۷۵، ۲، ۲/۲۵، ۲/۵، ۲/۷۵ و ۳ شیفت افزایشی در پارامتر  $p$  با اندازه‌های ۱/۰۱، ۱/۰۲، ۱/۰۳، ۱/۰۴، ۱/۰۵ و نیز شیفت‌های افزایشی به طور هم‌زمان در هر دو پارامتر با اندازه‌های ۱/۲۵، ۱/۵، ۲، ۲/۵ و ۳ در پارامتر  $\lambda$  و اندازه‌های ۱/۰۱، ۱/۰۲، ۱/۰۳، ۱/۰۴ و ۱/۰۵ در پارامتر  $p$  بررسی شده است و نتایج ارزیابی به ترتیب در جدول‌های ۱، ۲ و ۳ نشان داده شده است. بررسی دقیق نتایج بیانگر این است که مطابق انتظار با اعمال شیفت‌های افزایشی در پارامترهای  $\lambda$  و  $p$  به

امتیاز CUSUM مربوط به سناریو سوم مبتنی بر تلفیق مدل مخاطره متناسب و مدل شکنندگی نیز به ترتیب برای مقادیر  $y_i=0, 1, 2, 3, \dots$  طبق رابطه‌ی ۲۹ و ۳۰ حاصل می‌شود. با به دست آوردن امتیاز CUSUM و با توجه به روابط ۲۵، ۲۸، ۲۹ و ۳۰ به سادگی می‌توان محاسبات آماره CUSUM

#### ۴- مطالعات شبیه‌سازی و ارزیابی عملکرد

در این بخش به بررسی عملکرد نمودارهای کنترل پیشنهادی، به منظور مقایسه قدرت تشخیص نمودارها در شیفت‌های افزایشی در پارامترهای مدل، می‌پردازیم. در واقع عملکرد دو نمودار کنترل CUSUM تعدیل ریسک شده پیشنهادی در سناریو دوم و سوم با نمودار کنترل CUSUM مبتنی بر مدل صفر آماسیده در حالت استاندارد (موجود در ادبیات) و بدون لحاظ کردن تأثیر متغیرهای تأثیرگذار در سناریو اول، مقایسه و بررسی می‌شود. در مقاله‌ی حاضر به منظور بررسی کارایی و عملکرد نمودارهای کنترل پیشنهادی، عملکرد نمودارهای کنترل در محیط نرم افزاری MATLAB شبیه‌سازی شده است. شایان ذکر است تولید اعداد تصادفی با استفاده از روش تبدیل معکوس تابع توزیع تجمعی انجام شده است. در مراحل



مختلف برای بیان مشخصات محصولات خود نیاز به این برچسب‌ها دارند تا بتوانند کالای خود را در سریع‌ترین زمان ممکن به مشتری معرفی نمایند. به منظور بهبود بهره‌وری، کاهش هزینه‌ها و افزایش رضایت مشتری واحد کنترل کیفیت یک کارخانه چاپ لیبل نیاز به کنترل و پایش تعداد خرابی در رول‌های لیبل‌های چاپ شده (باطله‌ها) دارد. مطالعه‌ی موردی مقاله در کارخانه چاپ لیبل کامل برچسب واقع در تهران است که طی ۲۵۰ روز ثبت شده‌است. متوسط تعداد رول‌های خراب چاپ شده در هر روز، در فرآیند پس از چاپ، توسط واحد کنترل کیفیت کارخانه ثبت می‌شود. تعداد رول‌های لیبل‌های چاپ شده به طور متوسط ۱۰۰ رول در روز بوده و توسط ۸ دستگاه چاپ فلکسو انجام می‌شود. از متوسط تعداد خرابی رول‌ها در ۲۵۰ روز ثبت شده، ۱۶۱ روز بدون خرابی، ۴۰ روز یک رول خراب، ۲۳ روز دو رول خراب، ۱۸ روز سه رول و مابقی بیشتر از سه رول در روز بوده‌است. متراژ هر رول ۱۰۰۰ متر می‌باشد و در ابتدای چاپ هر کار به طور متوسط ۳۰ متر از هر رول جهت تنظیم دستگاه‌ها باطله شده که از در نظر گرفتن آن صرف‌نظر شده‌است. جابه‌جایی چاپ، جابه‌جایی قالب، اختلاف رنگ، زیره زدگی قالب، عدم چسبندگی مناسب لیبل و پاک شدن رنگ لیبل از مواردی است که در صورت وجود کیفیت لیبل را از بین برده و لیبل چاپ شده، مورد پسند مشتری نبوده و باطله محسوب می‌شود.

طور جداگانه و نیز اعمال شیفت‌های افزایشی به طور هم‌زمان در هر دو پارامتر مدل پواسن صفر آماسیده، مقدار ARL در نمودار CUSUM پیشنهادی سناریو سوم مبتنی بر تلفیق مدل مخاطره متناسب و مدل شکنندگی، کمتر از دو سناریو دیگر است. به همین دلیل می‌توان گفت لحاظ کردن هم‌زمان متغیرهای تأثیرگذار قابل مشاهده و اندازه‌گیری و متغیرهای تأثیرگذار غیر قابل مشاهده و اندازه‌گیری، در بنا نهادن نمودار CUSUM تأثیر به‌سزایی در تشخیص زود هنگام شیفت‌های افزایشی دارد. علاوه بر این واضح است که با اعمال شیفت‌های افزایشی در دو پارامتر توزیع پواسن صفر آماسیده به طور هم‌زمان و نیز به طور جداگانه، نمودار CUSUM سناریو دوم، مبتنی بر مدل مخاطره متناسب نیز به دلیل در نظر گرفتن تأثیر متغیرهای قابل مشاهده و اندازه‌گیری، عملکرد بهتری نسبت به نمودار CUSUM سناریو اول مبتنی بر مدل استاندارد پواسن صفر آماسیده بدون حضور متغیرهای تأثیرگذار دارد.

#### ۵- مطالعه موردی

امروزه صنعت تولید لیبل‌های پشت چسب‌دار بسیار مهم بوده و نقش کلیدی در صنایع دارد. کارخانه‌ها و تولیدی‌های

جدول ۱- مقادیر متوسط طول دنباله و خطای استاندارد برای نمودارهای کنترل تحت شیفت  $\lambda$  به  $\alpha * \lambda$

نمودار CUSUM	سناریو اول		سناریو دوم		سناریو سوم	
	ARL	Standard error	ARL	Standard error	ARL	Standard error
شیفت افزایشی						
۱	۲۰۰/۴۵۶۷	۲/۲۴۸	۲۰۰/۶۱۵	۲/۲۱۱۵	۱۹۹/۹۶	۲/۳۲۴۲
۱/۲۵	۱۶۶/۴۹	۱/۹۱۹۹	۱۵۴/۶۹۵۸	۱/۴۴۷۹	۱۴۹/۶۸۷	۱/۴۳۶۲
۱/۵	۱۲۷/۶۷۴۷	۱/۷۷۸	۱۱۸/۶۸	۱/۱۸۶۸	۱۱۲/۷۵۸	۱/۰۹۸۶
۱/۷۵	۱۱۹/۵۵۹۹	۱/۱۲۵۷	۱۱۰/۱۳	۱/۰۸۹۳	۱۰۱/۷۶	۱/۰۰۶
۲	۱۱۳/۵۵۹۷	۱/۰۸۲۷	۱۰۳/۷۴	۰/۹۰۲۱	۹۶/۵۶۶	۰/۸۰۱
۲/۲۵	۱۰۱/۵۴	۱/۰۰۲	۹۵/۰۹	۰/۸۳	۸۴/۴۴۱	۰/۷۴۷
۲/۵	۹۵/۴۷۸۵	۰/۹۷۵۸	۸۴/۳۲	۰/۸۰	۶۹/۶۵۲	۰/۶۹۲۵
۲/۷۵	۸۱/۲	۰/۸۸۲	۷۴/۲۶۱	۰/۷۵۵	۵۸/۶	۰/۵۸۷
۳	۶۵/۲۳	۰/۸۰۱	۵۱/۹۸	۰/۶۸۱	۴۸/۹۴۶	۰/۴۵۲

جدول ۲- مقادیر متوسط طول دنباله و خطای استاندارد برای نمودارهای کنترل تحت شیفت  $p$  به  $p^*U$ 

نمودار CUSUM	سناریو اول		سناریو دوم		سناریو سوم	
	ARL	Standard error	ARL	Standard error	ARL	Standard error
شیفت افزایشی						
۱	۲۰۰/۴۵۶۷	۲/۲۴۸	۲۰۰/۶۱۵	۲/۲۱۱۵	۱۹۹/۹۶	۲/۳۲۴۲
۱/۰۱	۱۱۲/۸۷	۱/۷۵	۹۳/۹۷	۱/۳۸	۶۵/۴۸	۱/۰۹۷
۱/۰۲	۹۰/۹۴	۱/۴۵	۵۴/۱۵	۱/۱۴	۴۲/۹۹	۰/۹۳۴
۱/۰۳	۶۰/۸۸	۱/۳۳	۴۱/۶۲	۱/۰۴	۳۳/۶۵	۰/۷۴۵
۱/۰۴	۳۹/۴۴	۱/۲۷	۲۲/۷۳	۰/۹۱	۱۶/۰۲	۰/۴۱۴
۱/۰۵	۲۸/۴۷	۱/۱۴	۱۹/۲۸	۰/۶۵	۱۰/۶۳	۰/۲۴۷

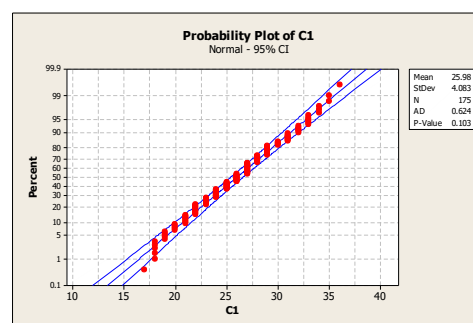
جدول ۳- مقادیر متوسط طول دنباله و خطای استاندارد برای نمودارهای کنترل تحت شیفت همزمان  $\lambda$  به  $\alpha * \lambda$  و  $p$  به  $p^*U$ 

نمودار CUSUM	سناریو اول		سناریو دوم		سناریو سوم	
	ARL	Standard error	ARL	Standard error	ARL	Standard error
شیفت افزایشی						
$\alpha = 1$	۲۰۰/۴۵۶۷	۲/۲۴۸	۲۰۰/۶۱۵	۲/۲۱۱۵	۱۹۹/۹۶	۲/۳۲۴۲
$U = 1$						
$\alpha = 1/25$	۱۲۹/۵۴	۱/۶۱۲	۹۰/۹۳۵	۱/۴۱۴	۸۳/۷۴	۱/۰۵۲
$U = 1/0.1$						
$\alpha = 1/5$	۷۷/۶۷	۰/۹۸	۶۴/۰۲۱	۰/۸۳۵	۶۰/۳۲۴	۰/۷۴۴
$U = 1/0.2$						
$\alpha = 2$	۵۲/۶۹	۰/۷۶۸	۴۱/۳۸	۰/۷۲	۳۲/۰۴۴	۰/۵۷۲
$U = 1/0.3$						
$\alpha = 2/5$	۴۴/۵۷	۰/۶۱۱	۲۰/۳۹	۰/۵۵۷	۱۸/۰۲	۰/۲۷۲
$U = 1/0.4$						
$\alpha = 3$	۲۱/۳۱	۰/۴۴۰۵	۱۲/۳۶	۰/۳۴	۸/۰۱	۰/۰۹
$U = 1/0.5$						

مینی تب بررسی شده است (شکل ۱). علاوه بر این در داده‌های ثبت شده در مدت ۲۵۰ روز، دو اپراتور مشخص در خط تولید حضور دارند. از آنجایی که مهارت دو اپراتور متفاوت است، در مدل تعدیل ریسک شده اپراتورها به عنوان متغیر تأثیرگذار در نظر گرفته می‌شوند. از مجموع کل داده‌ها، ۱۷۵ داده اول ثبت شده به منظور داده‌های فاز اول و تخمین پارامترها با استفاده از روش ماکزیمم درست‌نمایی (MLE) استفاده می‌شود و ۷۵ داده‌ی بعدی برای بررسی عملکرد نمودارهای کنترل و کشف سریع شیفت در پارامترهای مدل مورد استفاده قرار گرفته است. تعداد روزهایی که اپراتور اول در خط تولید مشغول به کار بوده است ۹۱ روز و تعداد روزهای کار اپراتور دوم ۸۴ روز بوده است و نسبت تعداد روزهایی که اپراتور اول و اپراتور دوم در واحد تولید حضور داشته‌اند به ترتیب ۰/۵۲ و ۰/۴۸ است.

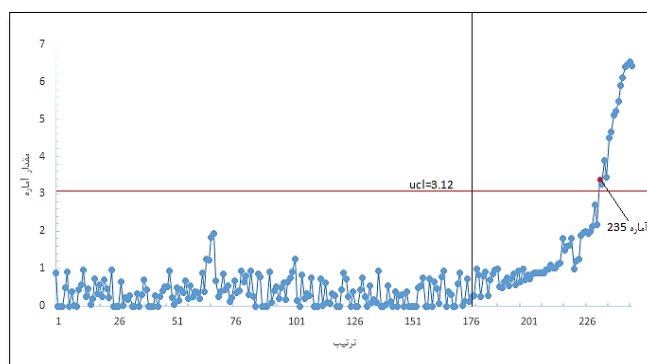
به غیر از دو مورد عدم چسبندگی مناسب لیبیل و پاک شدن رنگ، سایر موارد وابسته به مهارت اپراتور خط تولید است. عوامل متعددی نظیر دما، رطوبت، کیفیت مواد، آلودگی دستگاه چاپ و مهارت اپراتور بر کیفیت لیبیل‌های چاپ شده و تعداد خرابی در چاپ تأثیرگذار است که در اینجا دما و مهارت اپراتور به عنوان دو عامل تأثیرگذار در نظر گرفته شده و در هر روز ثبت شده است. در واقع تأثیر دمای محیط واحد تولید کارخانه به عنوان متغیر قابل مشاهده و اندازه‌گیری در مدل لحاظ می‌شود. دمای ایده‌آل هنگام چاپ ۱۸ تا ۲۵ درجه می‌باشد. به گونه‌ای که دمای بیشتر در میزان چسبندگی لیبیل و کیفیت رنگ آن تأثیرگذار است. این در حالی است که در واحد تولید کارخانه دما تا ۳۶ درجه هم می‌رسد. توزیع متغیر تصادفی دما در مجموع داده‌ها یک توزیع نرمال با میانگین ۲۵/۹۸ و انحراف معیار ۴/۰۸ است که توسط نرم افزار

۱۷۵ داده‌ی فاز اول، مشخصه‌ی کیفی در هر سه سناریو در شرایط تحت کنترل قرار دارد. ۷۵ داده‌ی فاز دوم در هر سه نمودار پیشنهادی به منظور تحلیل عملکرد روی نمودار کنترل قرار می‌گیرند. نمودار کنترل زمانی سیگنال می‌دهد که آماره آن بالاتر از حد کنترل تعیین شده باشد. در سناریو اول آماره CUSUM، با مقدار حد بالای تعیین شده در شرایط تحت کنترل برابر با ۳/۱۲ می‌باشد، نتایج نشان می‌دهد که اولین بار در آماره ۲۳۵ ام سیگنال خارج از کنترل بودن فرآیند دریافت می‌شود. نتایج عملکرد نمودار در سناریو اول در شکل ۲ نشان داده شده‌است. به همین ترتیب در سناریو دوم مبتنی بر مدل تعدیل رگرسیون شده مخاطره متناسب، حد بالای نمودار کنترل برابر با ۲/۰۴ به دست آمده و نمودار کنترل CUSUM سیگنال خارج از کنترل بودن فرآیند را اولین بار در آماره ۲۱۹ ام نشان می‌دهد (شکل ۳). در نمودار کنترل CUSUM سناریو سوم مبتنی بر تلفیق مدل رگرسیونی مخاطره متناسب و مدل شکنندگی با حد بالای کنترل ۲/۰۱۷ اولین سیگنال در آماره ۲۰۱ ام دریافت می‌شود (شکل ۴). بنابراین مقایسه نتایج حاصله در مطالعه موردی نیز برتری نمودار CUSUM را که مبتنی بر تلفیق مدل مخاطره متناسب و مدل شکنندگی، به منظور لحاظ کردن تأثیر هم‌زمان متغیرهای قابل مشاهده و غیرقابل مشاهده است، در تشخیص زود هنگام شیفت نسبت به دو نمودار کنترل رقیب، ثابت می‌کند.

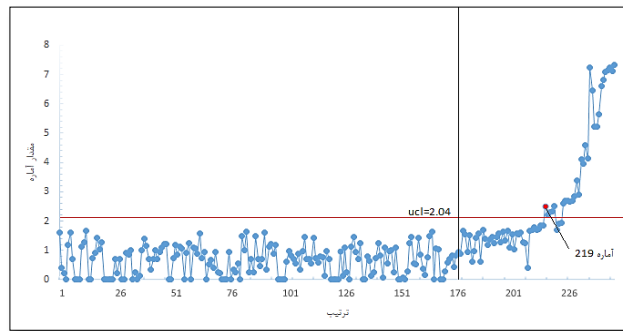


شکل ۱- آزمون نرمال بودن برای متغیر تصادفی دما

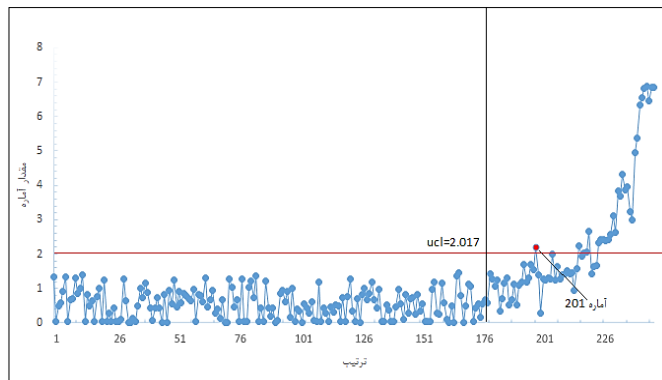
مقادیر پارامترهای تخمین زده شده در هر سه سناریو، سناریو اول بدون در نظر گرفتن تأثیر متغیرهای تأثیرگذار و مبتنی بر مدل پواسن صفر آماسیده در حالت استاندارد، سناریو دوم با در نظر گرفتن تأثیر متغیر دما به عنوان عامل تأثیرگذار قابل مشاهده با استفاده از مدل تعدیل رگرسیون شده مخاطره متناسب و سناریو سوم مبتنی بر مدل تعدیل رگرسیون شده با تلفیق مدل مخاطره متناسب و مدل شکنندگی به منظور لحاظ کردن هم‌زمان تأثیر متغیر قابل اندازه‌گیری دما و مهارت اپراتورها به عنوان متغیر غیر قابل مشاهده، در جدول ۴ ارائه شده‌است. همان طور که پیش‌تر مطرح شد حد بالای نمودار کنترل جمع جمعی به منظور رسیدن به ARL تقریباً ۲۰۰ در شرایط تحت کنترل، تعیین شده‌است. بدیهی است که در



شکل ۲- عملکرد نمودار کنترل CUSUM سناریو ۱ در عدم حضور متغیرهای تأثیرگذار در مطالعه‌ی موردی کارخانه چاپ لیبل



شکل ۳. عملکرد نمودار کنترل CUSUM سناریو ۲ در حضور متغیر تأثیرگذار قابل اندازه‌گیری در مطالعه‌ی موردی کارخانه چاپ لیبل



شکل ۴. عملکرد نمودار کنترل CUSUM سناریو ۳ با حضور متغیرهای تأثیرگذار قابل اندازه‌گیری و غیرقابل اندازه‌گیری در مطالعه‌ی موردی کارخانه چاپ لیبل

جدول ۴. مقادیر پارامترهای تخمین زده شده با روش ماکزیمم درستنمایی برای سه سناریو مختلف

$\phi_1$	$\beta$	$\lambda$	$P$	سناریو
-	-	۱/۴۷۰۳	۰/۵۱	سناریو اول مبتنی بر مدل پواسن صفر آماسیده
-	-۰/۰۳۱۶	۰/۰۵۸۹	۰/۲۳۶۷	سناریو دوم مبتنی بر مدل مخاطره متناسب
۰/۲۱۴۵	-۰/۰۵۹۲	۰/۰۰۸۲	۰/۲۵۴۹	سناریو سوم مبتنی بر تلفیق مدل مخاطره متناسب و مدل شکنندگی

## ۶- نتیجه گیری

نیز عملکرد بهتری نسبت به نمودار کنترل CUSUM مبتنی بر مدل ساده پواسن صفر آماسیده بدون حضور متغیرهای قابل اندازه گیری و غیر قابل اندازه گیری دارد.

## ۷- اعلام تعارض منافع

نویسندگان اعلام می کنند که هیچ نوع تعارض منافی وجود ندارد.

## ۸- مراجع

- [1] Mahmood, T., and Xie, M. (2019). Models and monitoring of zero-inflated processes: The past and current trends. *Quality and Reliability Engineering International*, 35(8), 2540-2557.
- [2] Xie, Y., Xie, M., and Goh, T. N. (2011). Two MEWMA charts for Gumbel's bivariate exponential distribution. *Journal of Quality Technology*, 43(1), 50-65.
- [3] Steiner, S. H., and MacKay, R. J. (2004). Effective monitoring of processes with part per million defective: A hard problem. *In Frontiers in Statistical Quality Control* 7, 140-149.
- [4] Keshavarz, M., and Asadzadeh, S. (2021). Phase II monitoring of survival times with categorical covariates. *Quality and Reliability Engineering International*, 37(2), 451-463.
- [5] Wen, H., Liu, L., and Yan, X. (2021). Regression-adjusted Poisson EWMA control chart. *Quality and Reliability Engineering International*, 37(5), 1956-1964.
- [6] Borrer, C. M., Champ, C. W., and Rigdon, S. E. (1998). Poisson EWMA control charts. *Journal of Quality Technology*, 30(4), 352-361.
- [7] Jiang, W., Shu, L., and Tsui, K. L. (2011). Weighted CUSUM control charts for monitoring Poisson processes with varying sample sizes. *Journal of Quality Technology*, 43(4), 346-362.
- [8] Katemee, N., and Mayuresawan, T. (2012). Control charts for zero-inflated Poisson models. *Applied Mathematical Sciences*, 6(26), 2791-2803.
- [9] Fatahi, A. A., Noorossana, R., Dokouhaki, P., and Moghaddam, B. F. (2012). Zero inflated Poisson EWMA control chart for monitoring rare

در این مقاله برای پایش متوسط تعداد خرابی در فرآیندهای با کیفیت بالا یک رویکرد مبتنی بر مدل با در نظر گرفتن تأثیر متغیرهای قابل اندازه گیری با استفاده از مدل مخاطره متناسب و نیز رویکرد دیگری با در نظر گرفتن همزمان تأثیر متغیرهای تأثیرگذار قابل اندازه گیری و غیرقابل اندازه گیری با استفاده از تلفیق مدل رگرسونی مخاطره متناسب و مدل رگرسونی شکنندگی دو سطحی گسسته، در فاز دو ارائه شده است. به همین منظور، دو نمودار کنترل CUSUM یک طرفه با در نظر گرفتن حد بالای نمودار کنترل طراحی شده و عملکرد آن دو نمودار کنترل با نمودار کنترل CUSUM مبتنی بر مدل پواسن صفر آماسیده در حالت استاندارد و بدون حضور متغیرهای قابل اندازه گیری و غیرقابل اندازه گیری، مقایسه شده است. مطالعات شبیه سازی برای مقایسه عملکرد سه نمودار کنترل مطرح شده با اعمال شیفت های افزایشی در دو پارامتر مدل پواسن صفر آماسیده به طور جداگانه و نیز اعمال شیفت همزمان در هر دو پارامتر انجام شده است. با توجه به محاسبات متوسط طول دنباله ARL پس از اعمال شیفت های افزایشی در پارامترها، نتایج حاکی از آن است که عملکرد نمودار CUSUM پیشنهادی مبتنی بر تلفیق مدل مخاطره متناسب و مدل شکنندگی، توانایی تشخیص بهتری نسبت به دو نمودار کنترل CUSUM دیگر در کشف شیفت های افزایشی دارد. علاوه بر این کاربرد نمودار پیشنهادی در فاز دو بر داده های واقعی کارخانه چاپ لیبل به منظور پایش تعداد خرابی در رول های لیبل های چاپ شده در هر روز، بررسی شده است. نتایج برتری نمودار کنترل پیشنهادی را نسبت به دو نمودار دیگر نشان می دهد. به گونه ای که در نمودار کنترل CUSUM مبتنی بر ترکیب مدل مخاطره متناسب و مدل شکنندگی، متغیر دما به عنوان عامل تأثیرگذار قابل اندازه گیری و عملکرد دو اپراتور در خط تولید، به عنوان متغیر تأثیرگذار غیرقابل اندازه گیری در نظر گرفته شده اند و سیگنال خارج از کنترل بودن این نمودار زودتر از نمودار کنترل CUSUM مبتنی بر مدل مخاطره متناسب دریافت می شود. در نمودار CUSUM مبتنی بر مدل مخاطره متناسب نیز متوسط دمای هوا در هر روز در واحد تولید کارخانه، به عنوان تنها متغیر تأثیرگذار قابل اندازه گیری در نظر گرفته شده است که نتایج بررسی نشان می دهد این نمودار

- [19] Mahmood, T., Balakrishnan, N., and Xie, M. (2021). The generalized linear model-based exponentially weighted moving average and cumulative sum charts for the monitoring of high-quality processes. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 37(4), 703-724.
- [20] Tan, Y., Lai, X., Wang, J., Zhang, X., Zhu, X., Chong, K. Chan, PKS. & Tang, J. (2021). Risk-adjusted zero-inflated Poisson CUSUM charts for monitoring influenza surveillance data. *BMC Medical Informatics and Decision Making*, (21)2 ,1-11.
- [21] Lai, X., Liu, R., Liu, L., Wang, J., Zhang, X., Zhu, X., & Chong, K. C. (2022). Residuals based EWMA control charts with risk adjustments for zero-inflated Poisson models. *Quality and Reliability Engineering International*, 38(1) ,(283-303.
- [22] Lai, X., Lian, X., Jiyayin, W., and Chong, K. (2022). Generalized likelihood ratio based risk-adjusted control chart for zero-inflated Poisson process. *Quality and Reliability Engineering International*, 39(1), 363-381.
- [23] Asadzadeh, S., Aghaie, A., and Shahriari, H. (2014). Using frailty models to account for heterogeneity in multistage manufacturing and service processes. *Quality & Quantity*, 48, 593-604.
- [24] Wienke, A. (2011). *Frailty Models in Survival Analysis*. Boca Raton, FL: Taylor and Francis Group.
- [25] Asadzadeh, Sh., Torabi, A. (2018). Development of CUSUM and DEWMA control charts based on generalized linear regression models for monitoring cascade processes. *Journal of Quality Engineering and Management*, 7(2), 82-93 (In Persian).
- health-related events. *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*, 12(4), 1250065.
- [10] Lambert, D. (1992). Zero-inflated Poisson regression, with an application to defects in manufacturing. *Technometrics*, 34(1), 1-14.
- [11] Xie, M., & Goh, T. N. (1993). SPC of a near zero-defect process subject to random shocks. *Quality and Reliability Engineering International*, 9(2), 89-93.
- [12] Hu, Q., and Liu, L. (2021). Weighted score test based EWMA control charts for zero-inflated Poisson models. *Computers & Industrial Engineering*, 152.
- [13] Steiner, S. H., Cook, R. J., Farewell, V. T., and Treasure, T. (2000). Monitoring surgical performance using risk-adjusted cumulative sum charts. *Biostatistics*, 1(4), 441-452.
- [14] Yue, J., Lai, X., Liu, L., and Lai, P. B. (2017). A new VLAD-based control chart for detecting surgical outcomes. *Statistics in Medicine*, 36(28), 4540-4547.
- [15] Liu, L., Lai, X., Zhang, J., and Tsung, F. (2018). Online profile monitoring for surgical outcomes using a weighted score test. *Journal of Quality Technology*, 50(1), 88-97.
- [16] Megahed, F. M., Kensler, J. L., Bedair, K., and Woodall, W. H. (2011). A note on the ARL of two-sided Bernoulli-based CUSUM control charts. *Journal of Quality Technology*, 43(1), 43-49
- [17] Mahmood, T. (2020). Generalized linear model based monitoring methods for high-yield processes. *Quality and Reliability Engineering International*, 36(5), 1570-1591.
- [18] He, S., Huang, W., and Woodall, W. (2012). CUSUM charts for monitoring a zero-inflated Poisson process. *Quality and Reliability Engineering International*, 28(2), 181-192.

### پیوست ۱: اثبات تابع جرم احتمال توزیع پواسن صفر آماسیده

فرض کنید متغیر تصادفی  $Y$  با احتمال  $p$  مقدار صفر آماسیده را انتخاب می‌کند و با احتمال  $1-p$  مقدار آن از توزیع پواسن با پارامتر  $\lambda$  به دست می‌آید و رابطه‌ی ۱ برقرار است:

$$P(Y=y) = \begin{cases} p & y=0 \\ (1-p) \frac{\exp(-\lambda)\lambda^y}{y!} & y=1,2,3,\dots \end{cases} \quad (1)$$

بنابراین مقدار صفر متغیر تصادفی  $Y$ ، از دو منبع صفر آماسیده و صفر توزیع پواسن به دست می‌آید. بنابراین رابطه‌ی ۲ برقرار است:

$$P(Y=y) = \begin{cases} p + (1-p)\exp(-\lambda) & y=0 \\ (1-p) \frac{\exp(-\lambda)\lambda^y}{y!} & y=1,2,3,\dots \end{cases} \quad (2)$$

که در آن  $p$  احتمال صفر آماسیده است.

### پیوست ۲: اثبات تابع توزیع تجمعی توزیع پواسن صفر آماسیده

اگر  $Y$  یک متغیر تصادفی گسسته با تابع جرم احتمال  $P(Y=y)$  باشد. تابع توزیع تجمعی در نقطه  $y$  به صورت رابطه‌ی ۳ است:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \sum_{Y \leq y} P(Y=y) \quad (3)$$

از طرفی می‌دانیم، اگر  $Y$  دارای توزیع پواسن با پارامتر  $\lambda$  باشد، تابع جرم احتمال آن مطابق رابطه‌ی ۲ تعریف می‌شود و تابع توزیع تجمعی توزیع پواسن به صورت رابطه‌ی ۴ محاسبه می‌شود (اثبات رابطه تابع توزیع تجمعی توزیع پواسن در پیوست ۳ آورده شده است):

$$F_Y(y) = \sum_{Y \leq y} P(Y=y) = \sum_{y=0}^y P(Y=y) = \sum_{y=0}^y \frac{\exp(-\lambda)\lambda^y}{y!} = \exp(-\lambda) \sum_{y=0}^y \frac{\lambda^y}{y!} = \frac{\Gamma((y+1), \lambda)}{y!} \quad (4)$$

که در آن تابع  $\Gamma(\cdot, \cdot)$ ، تابع گاما ناقص بالایی می‌باشد، که به صورت رابطه‌ی ۵ تعریف می‌شود:

$$\Gamma(s, y) = \int_y^{\infty} t^{s-1} \exp(-t) dt \quad (5)$$

با توجه به تابع جرم احتمال توزیع پواسن صفر آماسیده که به صورت رابطه‌ی ۲ تعریف می‌شود، می‌توان نشان داد تابع توزیع تجمعی توزیع پواسن صفر آماسیده از رابطه‌ی ۶ به دست می‌آید:

$$F_Y(y) = p(Y \leq y) = \begin{cases} F(y) = p(Y \leq y) = \sum_{y=0}^y p + (1-p)\exp(-\lambda) = \\ p + (1-p)\exp(-\lambda), & y = 0 \\ \\ F(y) = p(y=0) + \sum_{y=1}^y (1-p) \frac{\exp(-\lambda)\lambda^y}{y!} = \\ \sum_{Y \leq y} p(Y=y) = p + (1-p)\exp(-\lambda) + \sum_{y=1}^y (1-p) \frac{\exp(-\lambda)\lambda^y}{y!} = \\ p + (1-p)(\exp(-\lambda) + \sum_{y=1}^y \frac{\exp(-\lambda)\lambda^y}{y!}) = \\ p + (1-p) \left( \sum_{y=0}^y \frac{\exp(-\lambda)\lambda^y}{y!} \right) = \\ p + (1-p) \frac{\Gamma((y+1), \lambda)}{y!}, & y = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (6)$$

### پیوست ۳: اثبات تابع توزیع تجمعی پواسن

اگر  $X$  دارای توزیع گاما با پارامتر شکل  $\alpha$  و پارامتر مقیاس  $\beta$  باشد. تابع چگالی احتمال آن به صورت رابطه ۷ است:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} \exp(-\frac{x}{\beta})}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \quad \alpha, \beta > 0 \quad (7)$$

از طرفی اگر متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع گاما با پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  باشد و  $\alpha$  یک عدد صحیح باشد. آن گاه رابطه ۸ برقرار است:

$$p(X \leq x) = p(Y \geq \alpha) \quad (8)$$

که در آن  $Y$  دارای توزیع پواسن با پارامتر  $\frac{x}{\beta}$  می باشد. بنابراین:

$$p(X > x) = p(Y < \alpha) = \sum_{y=0}^{\alpha-1} \frac{\exp(-\frac{x}{\beta}) (\frac{x}{\beta})^y}{y!} \quad (9)$$

از طرفی مطابق رابطه ۱۰ می دانیم:

$$p(X > x) = \int_x^\infty \frac{t^{\alpha-1} \exp(-\frac{t}{\beta})}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} dt \quad (10)$$

قرار دهید  $u = \frac{t}{\beta}$ ، بنابراین می توان نشان داد:

$$p(X > x) = \int_{\frac{x}{\beta}}^\infty \frac{u^{\alpha-1} \exp(-u)}{\Gamma(\alpha)} du = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha, \frac{x}{\beta}) = \frac{\Gamma(\alpha, \frac{x}{\beta})}{\Gamma(\alpha)} \quad (11)$$

که در آن  $\Gamma(\alpha, \frac{x}{\beta})$  تابع گاما ناقص بالایی است. بنابراین طبق روابط ۹ و ۱۱ رابطه ۱۲ حاصل می شود:



$$\begin{aligned} \sum_{y=0}^y \frac{\exp(-\lambda)\lambda^y}{y!} &= p(Y \leq y) = p(Y < y+1) \\ &= \frac{\Gamma((y+1), \lambda)}{\Gamma(y+1)} = \frac{\Gamma((y+1), \lambda)}{y!} \end{aligned} \quad (12)$$

#### پیوست ۴: اثبات تابع بقا توزیع پواسن صفر آماسیده

با توجه به تعریف تابع بقا و محاسبات تابع توزیع تجمعی توزیع پواسن صفر آماسیده، به سادگی می توان نشان داد که تابع بقا توزیع پواسن صفر آماسیده از رابطه‌ی ۱۳ به دست می آید:

$$S(y) = 1 - F(y) = \begin{cases} 1 - p - (1-p)\exp(-\lambda), & y = 0 \\ 1 - p - (1-p)\frac{\Gamma((y+1), \lambda)}{y!}, & y = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (13)$$

# Monitoring Zero-inflated Poisson Processes Based on Model-based Cumulative Sum (CUSUM) Control Chart

**Elham Keyvani**

Ph.D Student, Department of Industrial Engineering, North Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran. ekeyvani@yahoo.com

**Shervin Asadzadeh<sup>10</sup>**

(Corresponding author) Associate Professor, Department of Industrial Engineering, North Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran. sh\_asadzadeh@iau-tnb.ac.ir

**Yaser Samimi**

Assistant Professor, Department of Industrial Engineering, K. N. Toosi University of Technology. y\_samimi@kntu.ac.ir

**Abstract:** In this article, three monitoring approaches using cumulative sum control charts in phase two for zero inflated poisson-based processes are presented. The first approach is based on the zero inflated poisson distribution, the second on a proportional hazard regression model, and the third integrates a proportional hazard regression model and a frailty model to consider both measurable and unmeasurable covariates. The performance of all three control charts was evaluated separately and simultaneously by applying shifts to both parameters of the zero inflated poisson distribution. Simulation studies were conducted to evaluate the performance of these monitoring methods in terms of the average run length of the control charts. The proposed cumulative sum control chart with simultaneous consideration of measurable and unmeasurable variables showed superior performance. Finally, a real case study in a label printing factory has been provided to show the effectiveness of the proposed control chart.

**Keywords:** Zero inflated poisson distribution, Frailty regression model, Proportional hazard regression model, Cumulative sum control chart, Influential variables.

## Aim and Introduction

In recent years, advancements in technology have greatly improved the quality and customer satisfaction of products and services. However, these improvements have made monitoring and controlling product quality more challenging, especially in high quality processes where the defect rate is low or close to zero [1]. The use of the number of defects in each inspection sample makes it difficult to gather sufficient information for effective monitoring. Consequently, monitoring such processes presents significant challenges. There are several techniques employed for monitoring high quality processes characterized by low defect rates. One of these approaches is the use of zero inflated distributions, which are suitable for modeling these processes due to the abundance of zero defects in the dataset. However, monitoring high quality processes presents significant challenges. One potential solution to this problem is to consider the factors that impact the defect rate. Given the low defect rate in high quality processes, developing effective monitoring methods can be a challenging task. By comprehending the effects of various factors on the

---

<sup>10</sup> Corresponding author: sh\_asadzadeh@iau-tnb.ac.ir

defect rate, suitable monitoring techniques can be devised. Regression models such as proportional hazard models can be utilized to assess the impact of observable variables, whereas frailty models can be employed to evaluate the effects of unobservable variables. By leveraging these methods, high quality processes can be effectively monitored, and any issues that arise can be promptly addressed.

Monitoring high quality processes has been extensively studied by many researchers. Some researchers have investigated the combination of risk adjusted modified models with ZIP models and examined shifts in both ZIP distribution parameters. Tan et al. [2] proposed modified risk adjusted zero inflated Poisson cumulative sum (CUSUM) control charts for monitoring influenza disease, where the effect of risk factors on influenza was modeled using a zero inflated Poisson regression model. They suggested control charts for simultaneous monitoring of both ZIP model parameters and for separate monitoring of each parameter. Lai et al. [3] proposed a risk adjusted exponentially weighted moving average (EWMA) control chart for detecting small changes in ZIP data. The proposed chart monitors both parameters of the ZIP distribution simultaneously and simulation studies using Monte Carlo methodology have shown that it outperforms other existing charts in detecting small changes in excess zero processes. Lai et al. [4] presented an EWMA control chart based on a generalized likelihood ratio for monitoring risk adjusted modified ZIP processes, which is capable of identifying random changes in both ZIP model parameters.

Due to the importance of monitoring high quality processes and detecting even small changes, many researchers have investigated the impact of covariates on ZIP model based processes and their effect on improving the detection of changes in control charts. However, it is evident that monitoring data based on ZIP models requires the integration of proportional hazard model and frailty model to simultaneously monitor observable and unobservable variables. In this article, a model-based CUSUM control chart based on proportional hazard (PH) and frailty models, is proposed for monitoring high quality processes to examine changes based on both observable and unobservable covariates in these processes. The performance of the proposed chart is compared and evaluated with the CUSUM chart based on the standard zero inflated Poisson distribution model without covariates and the CUSUM chart based on a proportional hazard model by simultaneously monitoring changes in both ZIP model parameters and monitoring each parameter separately.

## Methodology

In this section, CUSUM control charts are presented for quickly detecting shifts in the parameters of the zero inflated Poisson risk adjusted model. When a shift occurs in the process, it is expected that the control chart quickly detects the shift and the out-of-control signal is received faster. In this section, the design of the CUSUM chart is presented in three different scenarios, the first scenario is based on the zero inflated Poisson distribution in a standard state, the second scenario is based on the proportional hazard regression model, and the third scenario is the integration of the proportional hazard regression model and the frailty regression model. In this study, it is intended to monitor the effect of increasing shifts on the parameters of the zero inflated Poisson model, including the average number of failures and the rate of zero events. Therefore, the upper control limit is designed for process monitoring. However, the upper and lower control limits of the control chart can easily be developed for simultaneous monitoring of both increasing and decreasing shifts in the process.

The CUSUM statistic is defined as follows:

$$q_i = \max(0, q_{i-1} + w_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots \tag{1}$$

$$q_0 = 0$$

where  $w_i$  is the CUSUM score that is obtained from the following equation:

$$w_i = \log\left(\frac{L(y_i|\theta\mu)}{L(y_i|\mu)}\right) \tag{2}$$

and  $\theta$  is a predefined shift which is used for designing the CUSUM chart for optimal shift detection. Moreover, and  $\mu$  is a parameter of the zero inflated Poisson distribution is monitored for the shift, and the likelihood function is defined according to the following equation:

$$L(y_i) = f(y_i) \tag{3}$$

where  $f(y_i)$  represents the probability mass function of the designed model.

In this study, all three CUSUM control charts are designed based on the application of increasing shifts in the parameter  $\lambda$ , the rate parameter  $p$ , and also the simultaneous occurrence of shifts in both parameters of the zero inflated Poisson distribution.

In the first scenario, the calculation of the CUSUM score is performed without taking observable and unobservable covariates into account, according to the below equation:

$$w_i = \begin{cases} \log\left(\frac{p+(1-p)\exp(-\theta\lambda)}{p+(1-p)\exp(-\lambda)}\right) = \log(p + (1-p)\exp(-\theta\lambda)) - \log(p + (1-p)\exp(-\lambda)), & y_i = 0 \\ \log\left(\frac{(1-p)\exp(-\theta\lambda)(\theta\lambda)^{y_i}}{y_i!}\right) = \log((1-p)\exp(-\theta\lambda)(\theta\lambda)^{y_i}) - \log((1-p)\exp(-\lambda)(\lambda)^{y_i}), & y_i = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \tag{4}$$

Furthermore, the CUSUM score for the second scenario based on the proportional hazard model is obtained according to the following equation:

$$w_i = \begin{cases} \log\left(\frac{(p + (1-p)\exp(-\theta\lambda))\exp(\beta x_i)(1-p - (1-p)\exp(-\theta\lambda))^{\exp(\beta x_i)}}{(p + (1-p)\exp(-\lambda))\exp(\beta x_i)(1-p - (1-p)\exp(-\lambda))^{\exp(\beta x_i)}}\right), & y_i = 0 \\ \log\left(\frac{\left(\frac{\exp(-\theta\lambda)(\theta\lambda)^{y_i}}{y_i! - y_i\Gamma(y_i, \theta\lambda)}\right)\exp(\beta x_i)(1-p - (1-p)\frac{\Gamma((y_i + 1), \theta\lambda)}{y_i!})^{\exp(\beta x_i)}}{\left(\frac{\exp(-\lambda)\lambda^{y_i}}{y_i! - y_i\Gamma(y_i, \lambda)}\right)\exp(\beta x_i)(1-p - (1-p)\frac{\Gamma((y_i + 1), \lambda)}{y_i!})^{\exp(\beta x_i)}}\right), & y_i = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \tag{5}$$

Finally, the CUSUM score for the third scenario based on the integration of the proportional hazard and frailty models is also obtained according to the following equation:

$$W_i = \begin{cases} \log\left(\frac{\omega\varphi_1(p+(1-p)\exp(-\theta\lambda)\exp(\beta x_i))e^{\varphi_1 \ln(1-p-(1-p)\exp(-\theta\lambda))\exp(\beta x_i)} + (1-\omega)\varphi_2(p+(1-p)\exp(-\lambda)\exp(\beta x_i))e^{\varphi_2 \ln(1-p-(1-p)\exp(-\lambda))\exp(\beta x_i)}}{\omega\varphi_1(p+(1-p)\exp(-\theta\lambda)\exp(\beta x_i))e^{\varphi_1 \ln(1-p-(1-p)\exp(-\theta\lambda))\exp(\beta x_i)} + (1-\omega)\varphi_2(p+(1-p)\exp(-\lambda)\exp(\beta x_i))e^{\varphi_2 \ln(1-p-(1-p)\exp(-\lambda))\exp(\beta x_i)}}\right), & y_i = 0 \\ \log\left(\frac{\omega\varphi_1 \frac{\exp(-\theta\lambda)(\theta\lambda)^{y_i}}{y_i! - y_i \Gamma(y_i, \theta\lambda)} \exp(\beta x_i) e^{\varphi_1 \ln(1-p-(1-p)\frac{\Gamma((y_i+1), \theta\lambda)}{y_i!})\exp(\beta x_i)} + (1-\omega)\varphi_2 \frac{\exp(-\theta\lambda)(\theta\lambda)^{y_i}}{y_i! - y_i \Gamma(y_i, \theta\lambda)} \exp(\beta x_i) e^{\varphi_2 \ln(1-p-(1-p)\frac{\Gamma((y_i+1), \theta\lambda)}{y_i!})\exp(\beta x_i)}}{\omega\varphi_1 \frac{\exp(-\lambda)\lambda^{y_i}}{y_i! - y_i \Gamma(y_i, \lambda)} \exp(\beta x_i) e^{\varphi_1 \ln(1-p-(1-p)\frac{\Gamma((y_i+1), \lambda)}{y_i!})\exp(\beta x_i)} + (1-\omega)\varphi_2 \frac{\exp(-\lambda)\lambda^{y_i}}{y_i! - y_i \Gamma(y_i, \lambda)} \exp(\beta x_i) e^{\varphi_2 \ln(1-p-(1-p)\frac{\Gamma((y_i+1), \lambda)}{y_i!})\exp(\beta x_i)}}\right), & y_i = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (6)$$

Using the CUSUM score and equations 4, 5, and 6, the CUSUM statistic can be calculated for both single parameter shifts and simultaneous shifts in both parameters. In all three scenarios, the control chart signals if the value of the statistic exceeds the upper control limit (UCL).

### Findings

The performance of the proposed control charts has been examined to compare their detection power in identifying increasing shifts in the parameters of the model. In the simulation stages, the upper control limit of the control chart was set to achieve an average run length (ARL) with a value close to 200 under in control conditions. To increase the accuracy of the simulation, the simulation was repeated 10,000 times, and the standard error values were recorded along with the ARL values. The performance of the proposed control charts in all three scenarios discussed in the previous sections was evaluated and recorded by applying increasing shifts in the parameters  $\lambda$  and  $p$  separately and simultaneously. The results of the simultaneous shifts to two Poisson distribution parameters are presented in Table 1.

The thorough investigation of the results demonstrates that, as expected, the proposed CUSUM control chart in the third scenario, which is constructed by the integration of PH and frailty models and takes into account the concurrent influence of both observable and measurable covariates, as well as unobservable and measurable covariates, has superior performance in detecting increasing shifts compared to the control charts in the first scenario, which is based on the zero inflated Poisson model, and the proposed CUSUM control chart in the second scenario, which is based on the proportional hazard regression model.

### Discussion and Conclusion

This article presents an approach for monitoring the average number of failures in high quality processes using a modified risk adjusted approach that considers the influence of measurable and unmeasurable covariates. The approach combines a proportional hazard model and a two-point discrete frailty regression model. To this end, a one sided CUSUM control chart with an upper control limit is designed, and its performance is compared with two other CUSUM control charts, one based solely on the proportional hazard model with measurable variables and the other a simple zero inflated Poisson model without the presence of measurable or unmeasurable variables. Simulation studies were conducted to compare the

performance of the three control charts by applying increasing shifts in the two parameters of the zero inflated Poisson model separately and simultaneously. The results showed that the proposed CUSUM control chart based on the integration of PH and frailty models has better detection capabilities for identifying increasing shifts compared to the two other CUSUM control charts, as evidenced by the average run length (ARL) calculations after applying increasing shifts in the parameters.

Table 1. Simulation results under simultaneous shifts in  $\lambda$  to  $\lambda * \alpha$  and  $p$  to  $p * \nu$ .

CUSUM control chart	Scenario One		Scenario two		Scenario three	
	ARL	Standard error	ARL	Standard error	ARL	Standard error
Increasing shift						
$\alpha = 1$	200.4567	2.248	200.615	2.2115	199.96	2.3242
$\nu = 1$						
$\alpha = 1.25$	129.54	1.612	90.953	1.414	83.74	1.052
$\nu = 1.01$						
$\alpha = 1.5$	77.67	0.98	64.021	0.835	60.324	0.744
$\nu = 1.02$						
$\alpha = 2$	52.69	0.768	41.38	0.72	32.044	0.572
$\nu = 1.03$						
$\alpha = 2.5$	44.57	0.611	20.39	0.557	18.02	0.272
$\nu = 1.04$						
$\alpha = 3$	21.31	0.4405	12.36	0.34	8.01	0.09
$\nu = 1.05$						

## References

- [1] Mahmood, T., & Xie, M. (2019). Models and monitoring of zero-inflated processes: The past and current trends. *Quality and Reliability Engineering International*, 35(8), 2540-2557.
- [2] Tan, Y., Lai, X., Wang, J., Zhang, X., Zhu, X., Chong, K. Chan, PKS. & Tang, J. (2021). Risk-adjusted zero-inflated Poisson CUSUM charts for monitoring influenza surveillance data. *BMC Medical Informatics and Decision Making*, (21)2, 1-11.
- [3] Lai, X., Liu, R., Liu, L., Wang, J., Zhang, X., Zhu, X., & Chong, K. C. (2022). Residuals based EWMA control charts with risk adjustments for zero-inflated Poisson models. *Quality and Reliability Engineering International*, 38(1), (283-303).
- [4] Lai, X., Lian, X., Jiyayin, W., & Chong, K. (2022). Generalized likelihood ratio based risk-adjusted control chart for zero-inflated Poisson process. *Quality and Reliability Engineering International*, 39(1), 363-381.