Journal of Quality Engineering and Management

www.pqprc.ir

J. Qual. Eng. Manag. Vol. 16, No. 1 (2026) 93–107.

Paper Type: Original Article

Development of Probability-Limits-Based Control Chart Using Copula Functions and Cox Proportional Hazards Model

Mohammad Fayazinezhad[1], Shervin Asadzadeh[1,*], Amir Najafi[1]

[1] Department of Industrial Engineering, NT.C., Islamic Azad University, Tehran, Iran; mfayazinezhad@gmail.com; sh_asadzadeh@iau.ac.ir; anajafi@iau.ac.ir.

Citation:

Received: 23 June 2025 *Revised: 26 September 2025* *Accepted: 05 October 2025*	Fayazinezhad, M., Asadzadeh, S., & Najafi, A. (2026). Development of probability-limits-based control chart using copula functions and cox proportional hazards model. *Journal of Quality Engineering and Management, 16*(1), 93-107.

Abstract

Purpose: The aim of this study is to develop a novel framework for designing probability-limit-Based control chart to jointly monitor the time between events and event intensity while accounting for their dependence and the effects of observable covariates.

Methodology: In this study, First, the dependence between the time between events and event intensity is modeled using the Archimedean Clayton, Frank, and Gumbel copulas. Subsequently, the Cox proportional hazards model is employed to account for the effects of observable covariates on event occurrence times. Based on the marginal distributions of the variables and the dependence structure specified by the copula, a ratio-based monitoring statistic is defined and the corresponding upper control limit is determined. The performance of the proposed monitoring approaches is then evaluated and compared under various shift scenarios involving changes in the time between events, event intensity, and simultaneous shifts in both variables, across different levels of dependence and copula models, using the Average Run Length (ARL) as the performance criterion.

Findings: The results show that incorporating the effects of observable covariates through the Cox proportional hazards model, particularly under simultaneous-shift scenarios, enhances the sensitivity of the proposed monitoring approach, resulting in lower ARL values. Furthermore, comparison of the copula functions demonstrates that the appropriate specification of the dependence structure plays a critical role in control chart performance, with its importance becoming particularly evident when simultaneous changes occur in the time between events and event intensity.

Originality/Value: The main novelty of this study lies in developing an integrated framework for monitoring event data that simultaneously accounts for the dependence between the time between events and event intensity and the effects of observable covariates within the control chart structure. In this framework, copula functions are employed to model the dependence structure, while the Cox proportional hazards model is used to incorporate the effects of observable covariates. This integration provides a more flexible and realistic framework for monitoring processes in which event timing and intensity are interdependent and influenced by observable factors.

Keywords: Probability-limits-based-control chart, Copula functions, Correlated data, Ratio statistic.

Corresponding Author: sh_asadzadeh@iau.ac.ir

10.48313/jqem.2026.598642.1615

Licensee System Analytics. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0).

مهندسی و مدیریت کیفیت

www.pqprc.ir

دوره ۱۶، شماره (۱)، (۱۴۰۵)، ۱۰۷-۹۳

نوع مقاله: پژوهشی

توسعه نمودار کنترل مبتنی بر حدود احتمال به کمک توابع کاپولا و مدل مخاطره متناسب کاکس

محمد فیاضی‌نژاد[۱]، شروین اسدزاده[۱*]، امیر نجفی[۱]

[۱]گروه مهندسی صنایع، واحد تهران شمال، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

چکیده

هدف: این پژوهش، با هدف ارایه یک چارچوب جدید برای طراحی نمودار کنترل مبتنی بر حدود احتمال به‌منظور پایش هم‌زمان زمان بین رویدادها و شدت رویدادها با در نظر گرفتن وابستگی میان آن‌ها و اثر متغیرهای قابل‌مشاهده انجام شده است.

روش‌شناسی پژوهش: در این پژوهش، ابتدا وابستگی میان زمان بین رویداد و شدت رویداد با استفاده از توابع کاپولای ارشمیدسی کلایتون، فرانک و گامبل مدل‌سازی می‌شود. سپس، به‌منظور لحاظ‌کردن اثر متغیرهای قابل‌مشاهده بر زمان وقوع رویدادها، مدل رگرسیون مخاطرات متناسب کاکس به‌کار گرفته‌شده و بر اساس توزیع‌های حاشیه‌ای متغیرها و ساختار وابستگی تعیین‌شده توسط کاپولا، آماره نسبت تعریف و حدود کنترل بالا محاسبه می‌شود. در ادامه، عملکرد رویکردهای پایش پیشنهادی تحت سناریوهای مختلف شیفت در زمان بین رویداد، شدت رویداد و شیفت هم‌زمان این دو متغیر، در سطوح مختلف وابستگی و برای مدل‌های مختلف کاپولا، بر مبنای معیار متوسط طول دنباله ارزیابی و با یکدیگر مقایسه می‌شود.

یافته‌ها: نتایج نشان می‌دهد که لحاظ‌کردن اثر متغیرهای قابل‌مشاهده از طریق مدل کاکس، به‌ویژه در سناریوهای شیفت هم‌زمان، موجب افزایش حساسیت رویکرد پایش شده و کمترین مقادیر *ARL* را ایجاد می‌کند. همچنین، مقایسه عملکرد توابع کاپولا نشان می‌دهد که انتخاب ساختار وابستگی مناسب نقش تعیین‌کننده‌ای در عملکرد نمودار کنترل دارد؛ این اهمیت به‌ویژه در شرایطی که تغییرات هم‌زمان در زمان بین رویداد و شدت رویداد رخ می‌دهد، برجسته‌تر است.

اصالت/ارزش‌افزوده علمی: نوآوری اصلی این پژوهش در ارایه یک چارچوب یکپارچه برای پایش داده‌های رویدادی است که وابستگی میان زمان بین رویداد و شدت رویداد و اثر متغیرهای قابل‌مشاهده را به‌صورت هم‌زمان در ساختار نمودار کنترل لحاظ می‌کند. در این چارچوب، توابع کاپولا برای مدل‌سازی وابستگی و مدل مخاطرات متناسب کاکس برای لحاظ‌کردن اثر متغیرهای قابل‌مشاهده به‌کار گرفته می‌شوند. این یکپارچگی، چارچوبی انعطاف‌پذیرتر و واقع‌بینانه‌تر برای پایش فرایندهایی فراهم می‌کند که در آن‌ها زمان وقوع و شدت رویدادها به یکدیگر وابسته بوده و تحت تاثیر عوامل اثرگذار قابل‌مشاهده قرار دارند.

کلیدواژه: نمودار کنترل با حدود احتمال، توابع کاپولا، داده‌های همبسته، آماره نسبت.

۱- مقدمه

امروزه کنترل آماری فرایند نقش مهمی در محیط رقابتی سیستم‌های تولیدی و خدماتی دارد و امکان شناسایی به‌موقع وضعیت‌های خارج از کنترل را فراهم می‌کند. در فرایندهای با کیفیت بالا، استفاده از روش‌های متداول پایش می‌تواند با نرخ هشدار غلط بالا و منفی شدن حدود کنترل همراه باشد؛ ازاین‌رو، نمودارهای کنترل زمان بین رویدادها به‌عنوان ابزاری مناسب موردتوجه قرار گرفته‌اند. با این‌حال، اثر یک رویداد در یک بازه زمانی

مشخص تنها به زمان بین رویدادها محدود نبوده و شدت رویداد نیز در تعیین وضعیت فرایند نقش دارد؛ بنابراین، پایش هم‌زمان زمان بین رویدادها و شدت آن‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. اگرچه در بسیاری از نمودارهای کنترل، تنها یکی از ویژگی‌های زمان بین رویدادها یا شدت رویداد موردتوجه قرار گرفته است، پیچیده‌تر شدن فرایندهای تولیدی و خدماتی، ضرورت پایش هم‌زمان چند ویژگی را افزایش داده است. از سوی دیگر، با وجود وابستگی میان زمان بین رویداد و شدت رویداد، نادیده گرفتن این وابستگی می‌تواند به نتایج غیرواقعی و گمراه‌کننده منجر شود. ازاین‌رو، استفاده از یک رویکرد انعطاف‌پذیر برای مدل‌سازی وابستگی میان این دو متغیر ضروری است. افزون بر این، هنگامی‌که مشخصه کیفی تحت تاثیر متغیرهای قابل‌مشاهده قرار گیرد، لازم است اثر این متغیرها در مدل لحاظ شده و در نظر گرفتن آن چالش مهم دیگری در پایش این فرایندها محسوب می‌شود. در این مقاله، یک رویکرد نوین برای پایش داده‌های همبسته زمان بین رویداد و شدت رویداد در حضور متغیرهای اثرگذار قابل‌مشاهده ارایه می‌شود. مدل‌سازی وابستگی میان متغیرها توسط توابع کاپولا و اثر متغیرهای تاثیرگذار قابل‌مشاهده از طریق مدل مخاطره متناسب کاکس به آن اضافه شده است. ساختار مقاله به این صورت است که ابتدا مبانی نظری و پیشینه پژوهش ارایه می‌شود. سپس مدل‌های کاکس و توابع کاپولا و نحوه تلفیق آن‌ها تشریح می‌گردد. در ادامه، رویکرد پیشنهادی در دو حالت، شامل مدل پایه (رویکرد اول) و مدل حضور متغیرهای اثرگذار قابل‌مشاهده (رویکرد دوم)، ارایه شده و عملکرد آن با استفاده از شاخص متوسط طول دنباله ارزیابی می‌شود. در نهایت، با استفاده از یک مطالعه موردی نتایج حاصل از دو رویکرد مقایسه و تحلیل می‌شوند.

۲- مبانی نظری و پیشینه پژوهش

در بسیاری از فرایندهای صنعتی، خدماتی، قابلیت اطمینان و پدیده‌های طبیعی، وقوع یک رویداد را نمی‌توان تنها با تعداد رویدادها توصیف کرد؛ بلکه زمان بین دو رویداد متوالی و شدت رویداد نیز از ویژگی‌های مهم آن هستند. برای مثال، در خرابی تجهیزات، زمان بین دو خرابی و هزینه تعمیر و در رویدادهای طبیعی، فاصله زمانی و شدت رویداد بیانگر این دو ویژگی‌اند. در بسیاری از کاربردها، کاهش زمان بین رویداد و افزایش شدت می‌تواند هم‌زمان نشان‌دهنده وخیم‌شدن وضعیت فرایند باشد [6–1].

ریشه مطالعات این حوزه به پایش فرایندهای با نرخ رویداد پایین بازمی‌گردد. کالوین [1] پایش فاصله بین اقلام نامنطبق را مطرح کرد و مطالعات چان و همکاران [2] ، شیه و همکاران [3] و بورور و همکاران [4] چارچوب‌های کنترل زمان بین رویدادها را توسعه دادند. مزیت اصلی این رویکرد، استفاده مستقیم از اطلاعات زمانی در فرایندهای با رویدادهای نادر است. مطالعات بعدی نیز استفاده از توزیع‌هایی مانند ویبول و گاما را در کنار توزیع نمایی بررسی کردند [5]، [6]. در این مطالعات، زمان بین رویداد عمدتا به‌عنوان تنها متغیر پایش در نظر گرفته‌شده و نمودارهای شوارت، میانگین متحرک موزون نمایی و سایر روش‌های کنترل توسعه یافتند. با توجه به در دسترس بودن هم‌زمان اطلاعات زمان و شدت، پژوهش‌ها به سمت پایش مشترک این دو ویژگی حرکت کردند. ژانگ و همکاران [7] نمودار گاما و وانگ و همکاران [8] نمودارهای مبتنی بر ویبول را برای زمان بین رویدادها توسعه دادند. وو و همکاران [9] نموداری برای پایش هم‌زمان فراوانی و شدت رویداد بر مبنای آماره نسبت ارایه کردند و چیو و همکاران [10] نیز این ایده را با توسعه نمودار کنترل جمع تجمعی مشترک گسترش دادند. این مطالعات نشان دادند که ترکیب اطلاعات زمان و شدت می‌تواند نسبت به پایش جداگانه آن‌ها توان بیشتری داشته باشد؛ بااین‌حال، وابستگی آماری میان دو متغیر هنوز به‌صورت صریح و انعطاف‌پذیر مدل نشده بود. چنگ و همکاران [11] با استفاده از توزیع گامای دومتغیره، وابستگی میان زمان و شدت را به‌صورت مستقیم وارد مدل کردند. اگرچه این رویکرد ساختار مشترک متغیرها را لحاظ می‌کند، انتخاب یک توزیع دومتغیره مشخص می‌تواند انعطاف‌پذیری مدل را محدود کند. رحالی و همکاران [12] نیز با بررسی توزیع‌های گاما، لگ‌نرمال، نرمال و ویبول، محدودیت فرض‌های توزیعی در مطالعات اولیه را نشان دادند.

یکی از مهم‌ترین تحولات روش‌شناختی، استفاده از کاپولا برای مدل‌سازی وابستگی میان زمان و شدت بود. کاپولا امکان انتخاب مستقل توزیع‌های حاشیه‌ای و ساختار وابستگی را فراهم می‌کند و از این نظر انعطاف بیشتری نسبت به توزیع‌های دومتغیره مشخص دارد. رحالی و همکاران [13] با استفاده از کاپولا وابستگی میان زمان و شدت را مدل کردند و کاستالیولا و همکاران [14] نیز حالت‌های مستقل و وابسته را با استفاده از کاپولا و رویکردهای توزیع‌آزاد بررسی کردند. بااین‌حال، در این مطالعات کاپولا عمدتا برای ساخت توزیع مشترک یا آماره پایش به‌کار رفته و اثر عوامل توضیحی قابل‌مشاهده بر زمان رویداد در یک چارچوب ساختاری لحاظ نشده است. در ادامه، روش‌های توزیع آزاد نیز برای کاهش وابستگی به انتخاب توزیع پارامتریک توسعه یافتند. وو و همکاران [15] نمودار میانگین متحرک موزون نمایی توزیع‌آزاد و هه و همکاران [16] نمودار کنترل جمع تجمعی ناپارامتریک را برای داده‌های زمان بین رویدادها و شدت ارایه کردند. در سال‌های اخیر نیز نمودار میانگین متحرک موزون نمایی تطبیقی و

ناپارامتریک برای داده‌های چندمتغیره توسعه‌یافته [17] و نمودارهای رتبه‌محور و نقطه تغییر توزیع‌آزاد نیز معرفی شدند [18]، [19]. این مطالعات نشان‌دهنده حرکت ادبیات به سمت روش‌های انعطاف‌پذیرتر و کاهش فرض‌های توزیعی هستند؛ بااین‌حال، معمولا ساختار کاکس برای عوامل توضیحی را در خود جای نمی‌دهند.

در جریان دیگری از ادبیات، زمان رویداد از دیدگاه تحلیل بقا و رویدادهای تکرارشونده بررسی شده است. مدل کاکس [20] چارچوبی مهم برای ارتباط نرخ مخاطره با متغیرهای توضیحی مشاهده‌شده فراهم می‌کند. برای رویدادهای تکرارشونده نیز اندرسون و گیل [21]، پرنتیس و همکاران [22] و وی و همکاران [23] چارچوب‌هایی مبتنی بر مدل‌های بقا و فرایند شمارشی ارایه کردند. همچنین، احمد و همکاران [24] چارچوب پایش تعدیل‌شده بر اساس ریسک را برای زمان بین رویدادها بر مبنای فرایند پواسون ناهمگن ارایه کردند و نشان دادند که در سیستم‌های پیچیده، فرض نرخ رویداد ثابت ممکن است مناسب نباشد. این رویکرد اهمیت لحاظ کردن عوامل محیطی و عملیاتی در مدل زمان رویداد را نشان می‌دهد؛ بااین‌حال، شدت رویداد و وابستگی مشترک آن با زمان بین رویداد در قالب کاپولا در آن وارد نشده است. در همین راستا، مطالعات جدید در سال‌های اخیر نیز روش‌های تطبیقی، ناپارامتریک و حداکثر میانگین متحرک موزون نمایی با فاصله نمونه‌گیری متغیر را برای پایش مشترک زمان بین رویدادها و شدت توسعه داده‌اند [17]، [19]، [25]. همچنین، مطالعات دیگری نیز به توسعه نمودارهای کنترل برای پایش زمان بین رویدادها و پایش هم‌زمان زمان بین رویداد و شدت پرداخته‌اند که بر گسترش روش‌های پایش در این حوزه تاکید دارند [28–26]. مرور جامع سال ۲۰۲۶ نیز نشان می‌دهد که ادبیات این حوزه عمدتا در زمینه نمودارهای کنترل، توزیع‌های نمایی، ویبول و گاما، نمودارهای کنترل میانگین متحرک موزون نمایی و جمع تجمعی، پایش چندمتغیره و روش‌های توزیع‌آزاد گسترش یافته است [6].

بنابراین، بر اساس ادبیات بررسی‌شده، شکاف روش‌شناختی مشخصی در ادغام هم‌زمان مدل بقا برای زمان بین رویدادها، اثر متغیرهای توضیحی قابل‌مشاهده با مدل کاکس و وابستگی میان زمان و شدت با استفاده از توابع کاپولا در یک چارچوب واحد وجود دارد. این شکاف، تفاوت اصلی پژوهش حاضر با مطالعات پیشین را شکل می‌دهد. در رویکرد پیشنهادی، زمان بین رویدادها به‌عنوان متغیری با ساختار نرخ مخاطره مدل می‌شود، متغیر توضیحی مشاهده‌شده از طریق مدل کاکس وارد شده و توابع کاپولا وابستگی میان زمان و شدت رویداد را مدل می‌نماید. بدین‌ترتیب، اطلاعات زمان، شدت و عوامل اثرگذار مشاهده‌شده به‌صورت هم‌زمان در چارچوب پایش در نظر گرفته می‌شوند [3]، [6]، [9]، [27].

۳- روش تحقیق

مدل کاکس به‌طور مستقیم به نرخ مخاطره می‌پردازد که نشان‌دهنده احتمال وقوع رویداد در یک‌زمان مشخص با توجه به این‌که رویداد تا آن زمان رخ نداده است، است. در این مدل تابع چگالی زمان بقا از **رابطه (۱)** به‌دست می‌آید:

$$f(t) = h(t)s(t) \qquad (۱)$$

که در آن $S(t) = P(T > t)$ تابع بقا و $h(t)$ که به‌صورت زیر تعریف می‌گردد به‌عنوان تابع مخاطره معرفی می‌شود.

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \le T < t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} \qquad (۲)$$

بدین ترتیب رابطه بین تابع بقا و تابع توزیع به‌صورت زیر بیان می‌شود که $F(t) = \int_0^t f(t)\, dt$ تابع توزیع تجمعی زمان بقا است.

$$S(t) = 1 - F(t) \qquad (۳)$$

در این مدل، متغیرهای تاثیرگذار ورودی (x) موجب تاثیر بر تابع مخاطره آماره شده و در نتیجه تابع مخاطره شرطی به‌صورت **رابطه (۴)** است:

$$h(t|x) = h_0(t)q(x) \qquad (۴)$$

که $q(x)$ یک تابع غیرمنفی مشخص و $h_0(t)$ یک تابع مخاطره پایه اختیاری است، همچنین یک مدل رایج برای $q(x)$ همان $exp(\beta^T x)$ است که $\beta^T = (\beta_1, \ldots, \beta_p)$ بردار ضرایب رگرسیون و x بردار متغیرهای تاثیرگذار است. در نتیجه تابع مخاطره شرطی به‌صورت **رابطه (۵)** به‌دست می‌آید:

$$h(t|x) = h_0(t)exp(\beta^T x) \quad (۵)$$

با استفاده از تعریف مخاطره تجمعی، از آن‌جایی که $s_0(t) = exp\big(-H_0(t)\big) = exp(-\int_0^t h_0(t)dt)$ تابع بقا و H_0 تابع مخاطره پایه تجمعی است، به‌طور مشابه، می‌توان اثبات کرد که تابع بقا مطابق **رابطه (۶)** قابل‌دستیابی است:

$$s(t|x) = s_0(t)^{q(x)} = s_0(t)^{\exp(\beta^T x)} \quad (۶)$$

در نهایت، با هدف لحاظ کردن اثر متغیرهای تاثیرگذار کمی قابل‌مشاهده (قابل‌اندازه‌گیری) داریم:

$$h(t|x) = h_0(t)\exp(\beta^T x) \quad (۷)$$

$$s(t|x) = s_0(t)^{\exp(\beta^T x)} = e^{-H_0(t)\exp(\beta^T x)} \quad (۸)$$

$$f(t|x) = h_0(t)\exp(\beta^T x)e^{-H_0(t)\exp(\beta^T x)} \quad (۹)$$

انگیزه اصلی استفاده از توابع کاپولا در این پژوهش، وجود وابستگی میان زمان بین رخداد و شدت رخداد است. در شرایطی که این دو ویژگی به‌صورت وابسته تغییر می‌کنند، مدل‌سازی حاشیه‌ای و مستقل آن‌ها نمی‌تواند رفتار مشترک فرایند را به‌طور کامل نمایش دهد. ازآن‌جاکه آماره پایش پیشنهادی تابعی از هر دو متغیر است، ساختار وابستگی آن‌ها مستقیما بر توزیع آماره و در نتیجه بر حدود کنترل تاثیر می‌گذارد. توابع کاپولا با تفکیک توزیع‌های حاشیه‌ای از ساختار وابستگی، امکان استفاده از توزیع‌های حاشیه‌ای متفاوت و درعین‌حال مدل‌سازی مستقل وابستگی میان آن‌ها را فراهم می‌کنند؛ بنابراین، کاپولا در چارچوب حاضر ابزاری برای انتقال ساختار وابستگی میان زمان و شدت به توزیع آماره پایش و حدود کنترل محسوب می‌شود. قضیه اسکلار، به نقشی که کاپولاها در ارتباط میان توابع توزیع توام چندمتغیره و توابع حاشیه‌ای یک‌متغیره آن‌ها ایفا می‌کنند، اشاره دارد. این قضیه چارچوب اساسی برای تفکیک ساختار وابستگی از توزیع‌های حاشیه‌ای و ساخت توزیع مشترک بر مبنای کاپولا فراهم می‌کند [29]، [30]. فرض کنید H تابع توزیع توام با توابع توزیع حاشیه‌ای F و G باشد، در این صورت کاپولای C وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $y, t \in R$ داشته باشیم:

$$H(y,t) = C(F(y), G(t)) \quad (۱۰)$$

اگر توابع‌حاشیه‌ای F و G پیوسته باشند آن‌گاه کاپولای C یکتا است. اگر C یک کاپولا باشد و $F(y)$ و $G(t)$ توابع توزیع باشند، آن‌گاه تابع H تعریف‌شده به شکل تساوی بالا، یک تابع توزیع توام با توابع‌حاشیه‌ای $F(y)$ و $G(t)$ است. این قضیه، نحوه تفکیک وابستگی از حاشیه‌ها و ارتباط بین توزیع توام با توابع کاپولا و توابع توزیع حاشیه‌ای را ممکن ساخته و باعث می‌شود مدل‌سازی وابستگی، مستقل از نوع توزیع‌های حاشیه‌ای انجام شود. قضیه مذکور، قابلیت بیان تابع کاپولا بر حسب تابع توزیع توام و وارون توابع توزیع حاشیه‌ای را دارد. اگر $H(y, t)$ تابع توزیع توام با توابع توزیع حاشیه‌ای $F(y)$ و $G(t)$ و دارای کاپولای C باشد و $F^{(-1)}$ و $G^{(-1)}$ به‌ترتیب وارون‌های توابع $F(y)$ و $G(t)$ باشند. آن‌گاه برای هر (u, v) داریم:

$$C(u,v) = H\left(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)\right) \quad (۱۱)$$

در این پژوهش از کاپولای ارشمیدسی به دلیل تشخیص آسان ساختار آن‌ها، گوناگونی این خانواده از کاپولاها و قابلیت بسیار بالا در توصیف وابستگی‌های دمی، برای مدل‌سازی وابستگی به‌کارگیری شده است. در این خانواده از کاپولاها، کاپولای کلایتون برای وابستگی دمی پایین، کاپولای گامبل برای وابستگی دمی بالا و کاپولای فرانک برای وابستگی متقارن بدون وابستگی دمی انتخاب شده‌اند. تابع توزیع کاپولای دومتغیره گامبل به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(u,v;\ \theta) = \exp\left(-\left((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}\right),\ \theta \geq 1 \quad (۱۲)$$

که یک کاپولای نامتقارن است و وابستگی بیشتری را در دم مثبت نسبت به دم منفی نشان می‌دهد. برای کاپولای گامبل، می‌توان اثبات کرد که ضریب همبستگی رتبه‌ای کندال از طریق معادله زیر با پارامتر وابستگی کاپولا مرتبط است.

$$\tau = 1 - \frac{1}{\theta} \Leftrightarrow \theta = \frac{1}{1-\tau} \quad (۱۳)$$

همچنین تابع توزیع کاپولای دو متغیره کلایتون به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(u, v;\ \theta) = \left(u^{(-\theta)} + v^{(-\theta)} - 1\right)^{\left(-\frac{1}{\theta}\right)} \quad \theta > 0 \quad (۱۴)$$

این کاپولا نیز یک کاپولای نامتقارن است که وابستگی بیشتری را در دم منفی نسبت به دم مثبت نشان می‌دهد. برای کاپولای کلایتون، می‌توان اثبات کرد که ضریب همبستگی رتبه‌ای کندال از طریق معادله زیر با پارامتر وابستگی مرتبط است:

$$\tau = \frac{\theta}{\theta + 2} \Leftrightarrow \theta = \frac{2\tau}{1-\tau} \quad (۱۵)$$

و در نهایت تابع توزیع کاپولای دو متغیره فرانک به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(u, v;\ \theta) = -\left(\frac{1}{\theta}\right)\ln\left(1 + \frac{\left(e^{(-\theta u)} - 1\right)\left(e^{(-\theta v)} - 1\right)}{e^{(-\theta)} - 1}\right) \quad (۱۶)$$

این کاپولا متقارن است و برای مدل‌سازی ساختارهای وابستگی با همبستگی مثبت یا منفی استفاده می‌شود. می‌توان اثبات کرد که ضریب همبستگی رتبه‌ای کندال از طریق **معادله (۱۷)** با پارامتر وابستگی کاپولا مرتبط است که در آن $D_1(\theta)$ تابع دبی از نوع اول است.

$$\tau = 1 + \frac{4(D_1(\theta) - 1)}{\theta} \quad (۱۷)$$

$$D_1(\theta) = \frac{1}{\theta}\int \frac{t}{e^t - 1} dt \quad (۱۸)$$

۴- رویکردهای پایش پیشنهادی

نمودارهای کنترل موردبحث در این بخش تحت سناریوی حضور و عدم حضور متغیرهای قابل‌مشاهده (قابل‌اندازه‌گیری) با استفاده از توابع کاپولای ارشمیدسی (در نظر گرفتن وابستگی) بسط داده خواهند شد. با توجه به این‌که هدف پژوهش تشخیص سریع وخامت وضعیت سیستم است، تنها افزایش ریسک موردمطالعه قرارگرفته است. رویکردهای پایش پیشنهادی شامل نمودار کنترل مبتنی بر حدود احتمال است.

انتخاب توزیع‌های حاشیه‌ای برای متغیرهای زمان بین رخدادها و شدت رخداد با توجه به ماهیت آماری متغیرها و شواهد ارایه‌شده در داده‌های واقعی انجام شد. متغیر زمان بین رخدادها T دارای مقادیر مثبت بوده و ماهیت آن با متغیرهای زمان بین رخدادها مطابقت دارد. از این‌رو، توزیع ویبول به دلیل انعطاف‌پذیری در نمایش رفتارهای مختلف نرخ خطر، قابلیت مدل‌سازی متغیرهای زمانی مثبت و کاربرد گسترده در تحلیل بقا و قابلیت اطمینان، به‌عنوان توزیع حاشیه‌ای T در نظر گرفته شد. از سوی دیگر، شدت رخداد Y نیز یک متغیر مثبت است که می‌تواند دارای چولگی و پراکندگی قابل‌توجه باشد. توزیع گاما به دلیل پشتیبانی روی مقادیر مثبت و انعطاف‌پذیری آن در نمایش شکل‌های مختلف توزیع برای مدل‌سازی شدت رخداد مناسب در نظر گرفته شد. همچنین با استفاده از آزمون کولموگروف-اسمیرنوف که در بخش مطالعه موردی به آن اشاره شده است، توزیع‌های ویبول و گاما به‌عنوان توزیع‌های مناسب برای متغیرهای متناظر شناسایی شده‌اند؛ بنابراین، در پژوهش حاضر توزیع ویبول برای مدل‌سازی زمان بین رخدادها و توزیع گاما برای مدل‌سازی شدت رخداد به‌عنوان توزیع‌های حاشیه‌ای انتخاب شدند. استفاده از این توزیع‌های متفاوت در دو حاشیه با چارچوب کاپولا سازگار است، زیرا در این چارچوب می‌توان توزیع‌های حاشیه‌ای متفاوت را متناسب با ویژگی هر متغیر انتخاب و سپس وابستگی میان آن‌ها را به‌صورت جداگانه مدل‌سازی کرد.

تابع چگالی گاما و میانگین آن مطابق **رابطه‌های (۱۹)** و **(۲۰)** است که در آن $\alpha > 0$ پارامتر شکل و $\eta > 0$ پارامتر مقیاس و $\Gamma(\alpha)$ تابع گاما است.

$$f(y;\alpha,\eta) = \frac{y^{\alpha-1}\exp\left(\frac{-y}{\eta}\right)}{\Gamma(\alpha)\eta^{\alpha}}, \qquad y > 0 \tag{۱۹}$$

$$E(Y) = a\eta \tag{۲۰}$$

تابع چگالی ویبول و میانگین آن مطابق **رابطه‌های (۲۱)** و **(۲۲)** است که در آن $\kappa > 0$ پارامتر شکل و $\lambda > 0$ پارامتر مقیاس است.

$$f(t;k,\lambda) = \frac{\kappa}{\lambda}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\kappa-1} exp\left(-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\kappa}\right) \tag{۲۱}$$

$$E(T) = \lambda\,\Gamma\left(1+\frac{1}{\kappa}\right) \tag{۲۲}$$

همچنین در مدل مخاطره متناسب کاکس، تابع مخاطره پایه به‌صورت تابع ویبول و مطابق **رابطه (۲۳)** فرض شده است.

$$h_0(t) = \frac{\kappa}{\lambda}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\kappa-1} \tag{۲۳}$$

مشتق مرتبه دوم تابع توزیع کاپولا، $c(u,v;\ \theta) = \frac{\partial^2 C(u,v;\,\theta)}{\partial u \partial v}$ تابع چگالی کاپولا است و با توجه به قضیه اسکلار، $F_T(t) = v$ و $F_Y(y) = u$ بوده و تابع چگالی مشترک زمان بین رویداد و شدت رویداد مطابق رابطه زیر به دست می‌آید:

$$f_{Y.T}(y,t) = c(u,v;\ \theta) f_Y(y) f_T(t) = c(F_Y(y), F_T(t)\,) f_Y(y) f_T(t) \tag{۲۴}$$

ازآن‌جاکه عملکرد فرایند به‌طور هم‌زمان تحت تاثیر زمان بین رویداد و شدت رویداد قرار دارد، استفاده از آماره نسبت، امکان تلفیق اطلاعات این دو متغیر وابسته را در قالب یک شاخص واحد فراهم می‌کند و مبنای مناسبی برای طراحی نمودار کنترل فراهم می‌آورد.

$$R = \frac{Y}{T} \tag{۲۵}$$

این آماره به‌گونه‌ای طراحی شده است که افزایش شدت رویداد یا کاهش زمان بین رویدادها که هر دو نشان‌دهنده بدتر شدن عملکرد فرایند و افزایش احتمال خروج آن از شرایط تحت کنترل هستند، موجب افزایش مقدار R می‌شوند؛ بنابراین، تشخیص تغییرات نامطلوب بر مبنای افزایش مقدار آماره R انجام‌شده و به همین دلیل، برای پایش فرایند از حد کنترل بالایی به‌عنوان معیار اعلام هشدار استفاده می‌شود. به دلیل تفاوت مقیاس دو متغیر تصادفی اشاره‌شده، متغیرهای جدیدی تحت عنوان T' و Y' به‌عنوان نسخه‌های استانداردشده و تحت کنترل T و Y به‌صورت **رابطه (۲۶)** تعریف می‌شوند به‌طوری‌که $E(T') = E(Y') = 1$ و تابع توزیع آن‌ها $F_{T'}(t) = F_T\left(t\mu_{T_0}\right)$ ، $F_{Y'}(y) = F_Y\left(y\mu_{Y_0}\right)$ و تابع توزیع و تابع چگالی مشترک آن‌ها $F_{Y',T'}(y,t)$ و $f_{Y',T'}(y,t)$ است.

$$T' = \frac{T}{\mu_{T_0}}, \qquad Y' = \frac{Y}{\mu_{Y_0}}, \qquad T = T'\mu_{T_0}, \qquad Y = Y'\mu_{Y_0} \tag{۲۶}$$

که در این صورت زمان بین رویدادها به توزیع ویبول با پارامتر جدید شکل $\kappa > 0$ و مقیاس $\lambda = \frac{\mu_{T_0}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)}$ و شدت رویداد به توزیع گاما با پارامتر جدید شکل $\alpha > 0$ و مقیاس $\alpha = \frac{\mu_{Y_0}}{a}$ تبدیل خواهند شد. همچنین پس از تغییر متغیر **رابطه (۲۶)**، ماتریس ژاکوبین تبدیل متغیر، به‌صورت رابطه زیر به دست می‌آید:

$$J = \frac{\partial(T,Y)}{\partial(T',Y')} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial T'} & \frac{\partial T}{\partial Y'} \\ \frac{\partial Y}{\partial T'} & \frac{\partial Y}{\partial Y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{T_0} & 0 \\ 0 & \mu_{Y_0} \end{bmatrix} \tag{۲۷}$$

از آن‌جاکه قدر مطلق دترمینان ماتریس ژاکوبین برابر است با ($|J| = \mu_{T_0}\mu_{Y_0}$)، تابع چگالی مشترک **رابطه (۲۴)** با توجه به متغیرهای جدید به‌صورت **رابطه (۲۸)** خواهد بود:

$$f_{Y'.T'}(y,t) = \mu_{T_0}\mu_{Y_0} c\left(F_Y\left(y\mu_{Y_0}\right), F_T\left(t\mu_{T_0}\right)\right) f_Y\left(y\mu_{Y_0}\right) f_T\left(t\mu_{T_0}\right) \quad (۲۸)$$

همچنین آماره نسبت، با استفاده از نسخه‌های استانداردشده زمان بین رویداد و شدت رویداد به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$R' = \frac{Y'}{T'}, \qquad Y' = R'T' \quad (۲۹)$$

با این‌وجود، تابع چگالی آماره R'، تابع چگالی حاشیه‌ای **رابطه (۲۸)** بوده و به‌صورت زیر استخراج می‌گردد که به دلیل مثبت بودن زمان، انتگرال روی بازه $(0, +\infty)$ محاسبه می‌شود:

$$f_{R'}(r) = \int_0^{\infty} t f_{Y',T'}(rt,t)\, dt \quad (۳۰)$$

در نهایت، با مدنظر قرار دادن **رابطه (۲۸)** تا **رابطه (۳۰)** تابع چگالی آماره نسبت به‌صورت رابطه زیر به دست می‌آید.

$$f_{R'}(r) = \mu_{T_0}\mu_{Y_0} \int_0^{\infty} t\, c\left(F_Y\left(rt\mu_{Y_0}\right), F_T\left(t\mu_{T_0}\right)\right) f_Y(rt\mu_{Y_0}) f_T(t\mu_{T_0})\, dt \quad (۳۱)$$

اگرچه در مطالعه حاضر به دلیل تمرکز بر تشخیص وخامت فرایند، پایش بر اساس حد کنترل بالایی و افزایش مقدار آماره R انجام شده است، چارچوب مبتنی بر حدود احتمال قابلیت توسعه به پایش دوطرفه را نیز دارد. در این حالت، علاوه بر حد بالایی برای شناسایی افزایش ریسک، حد پایینی نیز برای شناسایی کاهش ریسک قابل تعریف است. با تعریف $LCL = F_R^{-1}(\alpha_L)$ و $UCL = F_R^{-1}(1-\alpha_U)$، مقادیر کمتر از حد پایین می‌توانند بیانگر بهبود فرایند و مقادیر بیشتر از حد بالا بیانگر وخامت فرایند باشند. برای سطح خطای کلی ۰/۰۰۲۷ و تقسیم مساوی خطا میان دو دم، می‌توان $\alpha_L = \alpha_U = 0.00135$ را در نظر گرفت. توسعه کامل این ساختار دوطرفه می‌تواند در مطالعات آتی مورد بررسی قرار گیرد.

۴-۱- رویکرد پایش اول (عدم حضور متغیرهای تاثیرگذار)

در ابتدا حالت ساده‌تر بدون حضور متغیرهای تاثیرگذار، بررسی و سپس حالت پیچیده‌تر ارایه می‌شود. با توجه به این‌که دو متغیر زمان بین رویداد و شدت رویداد وابسته به هم فرض شده و این وابستگی توسط کاپولاهای ارشمیدسی مطرح‌شده مدل‌سازی می‌شود، لذا با در نظر گرفتن مفروضات توزیع‌های حاشیه‌ای اشاره‌شده و **رابطه (۳۱)**، نمودار کنترل مبتنی بر حدود احتمال برای رویکرد پایش اول به‌صورت زیر است:

$$a_1 = \int_{UCL_1}^{+\infty} \left(\mu_{T_0}\mu_{Y_0} \int_0^{\infty} c\left(\int_0^{rt\mu_{Y_0}} \frac{m^{\alpha-1} exp\left(-\frac{m}{\eta}\right)}{\Gamma(\alpha)\eta^{\alpha}} dm\, , 1 - exp\left(-\left(\frac{t\mu_{T_0}}{\lambda}\right)^{\kappa}\right) \right) \left(\frac{\left(rt\mu_{Y_0}\right)^{\alpha-1} exp\left(\frac{-rt\mu_{Y_0}}{\eta}\right)}{\Gamma(\alpha)\eta^{\alpha}} \right) \left(\frac{\kappa}{\lambda}\left(\frac{t\mu_{T_0}}{\lambda}\right)^{\kappa-1} exp\left(-\left(\frac{t\mu_{T_0}}{\lambda}\right)^{\kappa}\right) \right) t\, dt \right) dr \quad (۳۲)$$

۴-۲- رویکرد پایش دوم (حضور متغیرهای تاثیرگذار کمی قابل‌مشاهده)

در ادامه، اثر متغیرهای تاثیرگذار قابل‌مشاهده (قابل‌اندازه‌گیری) در طراحی نمودار کنترل لحاظ می‌شود. در حضور متغیرهای تاثیرگذار قابل‌مشاهده، مدل مخاطره متناسب کاکس امکان لحاظ کردن اثر این متغیرها بر زمان بین رویداد را فراهم می‌کند. با در نظر گرفتن مفروضات توزیع‌های حاشیه‌ای اشاره‌شده و مدل مخاطره متناسب کاکس بر اساس **رابطه (۷)** تا **رابطه (۹)** و همچنین **رابطه (۳۱)**، نمودار کنترل مبتنی بر حدود

احتمال به‌صورت **رابطه (۳۳)** به دست می‌آید. از آن‌جا که متغیر توضیحی قابل‌مشاهده در مدل کاکس می‌تواند در میان مشاهدات مقادیر متفاوتی داشته باشد، به‌منظور تعیین یک حد کنترل ثابت و مستقل از مقدار مشخصی از x، اثر این متغیر به‌صورت حاشیه‌ای در نظر گرفته شد.

با در نظر گرفتن مقداری مشخص برای خطای نوع اول a_1، a_2 و با جایگذاری توابع کاپولای ارایه شده در **رابطه‌های (۳۲)** و **(۳۳)**، حد کنترل بالا نمودارهای کنترل ارایه شده که با UCL_1 و UCL_2 نمایش داده می‌شود، برای سطح خطای نوع اول به‌صورت عددی تعیین می‌شوند.

$$a_2 = \int_{UCL_2}^{+\infty} \left(\mu_{T_0}\mu_{Y_0} \int_0^{\infty} \int_x \begin{pmatrix} \left(\frac{\left(rt\mu_{Y_0}\right)^{\alpha-1} exp\left(\frac{-rt\mu_{Y_0}}{\eta}\right)}{\Gamma(\alpha)\eta^{\alpha}} \right) \\ \left(h_0\left(t\mu_{T_0}\right) exp(\beta_1 x) e^{-H_0\left(t\mu_{T_0}\right) exp(\beta_1 x)} \right) \end{pmatrix} (f(x)) t\, dx\, dt \right) dr$$

$$= \int_{UCL_2}^{+\infty} \left(\mu_{T_0}\mu_{Y_0} \int_0^{\infty} \int_x \begin{pmatrix} \left(\frac{\left(rt\mu_{Y_0}\right)^{\alpha-1} exp\left(\frac{-rt\mu_{Y_0}}{\eta}\right)}{\Gamma(\alpha)\eta^{\alpha}} \right) \\ \left(h_0(t\mu_{T_0}) exp(\beta_1 x) e^{-\left(\int_0^{t\mu_{T_0}} h_0(t\mu_{T_0})dt\right) exp(\beta_1 x)} \right) \end{pmatrix} (f(x)) t\, dx\, dt \right) dr \qquad \textbf{(۳۳)}$$

$$= \int_{UCL_2}^{+\infty} \left(\mu_{T_0}\mu_{Y_0} \int_0^{\infty} \int_x \begin{pmatrix} \left(\frac{\left(rt\mu_{Y_0}\right)^{\alpha-1} exp\left(\frac{-rt\mu_{Y_0}}{\eta}\right)}{\Gamma(\alpha)\eta^{\alpha}} \right) \\ \left(\frac{\kappa}{\lambda}\left(\frac{t\mu_{T_0}}{\lambda}\right)^{\kappa-1} exp(\beta_1 x) e^{-\left(\frac{t\mu_{T_0}}{\lambda}\right)^{\kappa} exp(\beta_1 x)} \right) \end{pmatrix} (f(x)) t\, dx\, dt \right) dr$$

۵- ارزیابی عملکرد رویکردهای پایش

یکی از مهم‌ترین مراحل ارزیابی عملکرد رویکردهای پایش پیشنهادی، انتخاب مناسب پارامترهای مدل است؛ زیرا نتایج حاصل از ارزیابی عملکرد نمودارهای کنترل تا حد زیادی به مقادیر این پارامترها وابسته است. از این‌رو، پارامترهای مورداستفاده در این پژوهش به‌گونه‌ای انتخاب شده‌اند که ضمن سازگاری با مفروضات مدل ارایه‌شده، امکان بررسی رفتار نمودارهای کنترل در شرایط مختلف فرایند و سطوح متفاوت وابستگی بین متغیرها را فراهم آورند. به‌منظور ایجاد قابلیت مقایسه بین نتایج، تنها پارامترهای مرتبط با ساختار وابستگی یا وضعیت فرایند، مطابق سناریوهای طراحی‌شده، تغییر می‌کنند و سایر پارامترها ثابت نگه داشته شدند. پارامترهای توزیع‌های حاشیه‌ای، تابع چگالی متغیر اثرگذار قابل‌مشاهده و ضریب مدل کاکس با استفاده از روش حداکثر درست‌نمایی در حالت تحت کنترل از داده‌های مورد مطالعه برآورد شدند. همچنین با استفاده از آزمون کولموگروف-اسمیرنوف، توزیع‌های ویبول و گاما به‌عنوان توزیع‌های مناسب برای متغیرهای متناظر شناسایی شده‌اند (**جدول ۱**). سپس با

استفاده از این پارامترها، احتمال خروج از کنترل و میانگین طول مسیر[1] از طریق حل عددی روابط احتمال مربوط به هر رویکرد موردمحاسبه قرار گرفت. در حالت تحت کنترل، پارامترهای مدل به‌صورت **جدول ۲** است. برای ایجاد قابلیت مقایسه بین انتخاب کاپولاهای مختلف، میزان وابستگی میان زمان بین رویداد و شدت رویداد بر اساس ضریب همبستگی رتبه‌ای کندال تعیین و پارامتر متناظر هر یک از کاپولاهای مورداستفاده از **رابطه‌های (۱۳)**، **(۱۵)**، **(۱۷)** و **(۱۸)** محاسبه و در **جدول ۳** مشخص گردید. همچنین سه دسته سناریوی شیفت، شامل شیفت در زمان بین رویدادها، شدت رویدادها و شیفت هم‌زمان در نظر گرفته شد. با توجه به تفاوت ماهیت زمان بین رویدادها و شدت رویدادها، شیفت‌های یکسان برای این دو متغیر لزوما مناسب نیست. ازاین‌رو، سناریوها با شیفت‌های مستقل و متناسب با ویژگی هر متغیر طراحی شدند.

جدول ۱- نتایج آزمون برازش توزیع‌های حاشیه‌ای بر روی داده‌ها.
Table 1- Results of fitting marginal distributions to the data.

متغیر	عنوان توزیع	α	η	D_{KS}	عنوان توزیع	κ	λ	D_{KS}
زمان بین رویداد	گاما	11.6488	5.0562	0.1264	ویبول	3.8123	65.1584	0.0818
شدت رویداد		18.0107	274.6135	0.1129		4.8472	5396.4958	0.1228

جدول ۲- پارامترهای مدل در حالت تحت کنترل.
Table 2- Model parameters under in-control condition.

عنوان متغیر	زمان بین رویداد (توزیع ویبول)		شدت رویداد (توزیع گاما)		متغیر تاثیرگذار قابل‌مشاهده (X) (توزیع گاما)		
	κ	λ	α	η	α	η	β
مقدار	3.8123	65.1584	18.0107	274.6135	7.3846	0.6714	0.2501

جدول ۳- تعیین سطوح وابستگی و محاسبه پارامتر کاپولا.
Table 3. Determination of dependence levels and calculation of copula parameters.

سطح وابستگی	ضریب همبستگی کندال	کلایتون	فرانک	گامبل
ضعیف	0.2	0.5	1.86	1.25
متوسط	0.5	2	5.74	2
قوی	0.8	8	18.19	5

جدول ۴- سناریوهای شیفت‌های کاهشی زمان بین رویداد، شیفت‌های افزایشی شدت رویداد و شیفت هم‌زمان.
Table 4- Scenarios for decreasing shifts in time between event, increasing shifts in event intensity, and simultaneous shifts.

سناریو جداگانه	شیفت	وضعیت	سناریو هم‌زمان	شیفت زمان	شیفت شدت	وضعیت
	1%	تغییر خیلی کم	متوازن	1%	5%	تغییر خیلی کم هر دو
	2.5%	تغییر کم	متوازن	2.5%	10%	تغییر کم هر دو
زمان	5%	تغییر متوسط	متوازن	5%	20%	تغییر متوسط هر دو
	10%	تغییر زیاد	متوازن	10%	30%	تغییر زیاد هر دو
	15%	تغییر خیلی زیاد	متوازن	5%	40%	تغییر خیلی زیاد هر دو
	5%	تغییر خیلی کم	نامتوازن	1%	40%	شدت بسیار غالب
	10%	تغییر کم	نامتوازن	5%	30%	شدت نسبتا غالب
شدت	20%	تغییر متوسط	نامتوازن	15%	5%	زمان بسیار غالب
	30%	تغییر زیاد	نامتوازن	15%	10%	زمان نسبتا غالب
	40%	تغییر خیلی زیاد	-	-	-	-

[1] Average Run Length (ARL)

مطابق **جدول ۴**، در سناریوی اول، کاهش زمان بین رویدادها با کاهش پارامتر مقیاس توزیع ویبول در نظر گرفته شد که بیانگر افزایش نرخ وقوع و نامطلوب‌تر شدن وضعیت فرایند است. در سناریوی دوم، افزایش شدت رویدادها با افزایش پارامتر مقیاس توزیع گاما اعمال شد که نشان‌دهنده افزایش هزینه و نامطلوب‌تر شدن عملکرد فرایند است. در سناریوی سوم، تغییرات زمان و شدت به‌صورت هم‌زمان طوری اعمال شدند تا هم تغییرات مشابه و هم شرایطی که تغییر یکی از متغیرها غالب است، ارزیابی شود. برای ارزیابی عملکرد نمودار کنترل، احتمال واقعی عدم کشف وضعیت خارج از کنترل به‌صورت حل عددی روابط نهایی رویکردهای پایش محاسبه گردید. حدود کنترل بالا در شرایط تحت کنترل، با $a = 0.0027$، به‌گونه‌ای تعیین شد که احتمال خطای نوع اول مطابق **رابطه (۳۴)** است:

$$P(R > UCL \mid In - Control) = 0.0027 \quad (۳۴)$$

در مقابل، احتمال عدم کشف شیفت که با β نمایش داده می‌شود برابر است با:

$$P(R < UCL \mid Out - Of - Control) = \beta \quad (۳۵)$$

در این پژوهش، وابستگی موردنظر، وابستگی درون‌مشاهده‌ای زمان بین رویداد و شدت رویداد است و استقلال بین مشاهدات متوالی برای محاسبه *ARL* فرض می‌شود. در نتیجه متوسط طول دنباله توسط **رابطه (۳۶)** محاسبه می‌گردد:

$$ARL = \frac{1}{1-\beta} \quad (۳۶)$$

به‌منظور ارزیابی عملکرد دو رویکرد پایش، رفتار *ARL* تحت سناریوهای شیفت **جدول ۴** از طریق سه خانواده کاپولای فرانک، کلایتون و گامبل در سه سطح وابستگی بررسی شد. مقادیر کوچک‌تر *ARL* نشان‌دهنده حساسیت بیشتر نمودار کنترل نسبت به تغییرات فرایند است.

جدول ۵- عملکرد رویکردهای پایش پیشنهادی تحت سناریو شیفت زمان و شیفت شدت برای کاپولاهای ارشمیدسی.

Table 5- Performance of the proposed monitoring approaches under time-shift and intensity-shift scenarios for archimedean copulas.

شیفت زمان	وابستگی	ARL رویکرد پایش اول			ARL رویکرد پایش دوم			شیفت شدت	ARL رویکرد پایش اول			ARL رویکرد پایش دوم		
		فرانک	کلایتون	گامبل	فرانک	کلایتون	گامبل		فرانک	کلایتون	گامبل	فرانک	کلایتون	گامبل
1%	0.2	348.39	337.18	347.65	344.48	337.28	343.55	5%	261.47	236.93	260.58	251.33	232.30	244.95
	0.5	345.46	325.91	341.87	344.03	309.12	340.70		258.92	196.61	246.94	247.60	196.24	236.85
	0.8	320.22	300.46	323.38	342.24	276.68	283.39		253.14	163.81	191.35	209.29	134.88	155.72
2.5%	0.2	317.63	292.98	315.96	308.79	292.77	306.68	10%	188.45	157.95	186.64	176.29	149.03	167.23
	0.5	310.28	274.10	302.50	307.69	247.32	300.30		185.23	110.13	169.36	168.11	109.07	155.86
	0.8	303.58	218.74	263.11	251.37	184.07	190.55		175.73	78.51	101.63	115.67	49.52	70.45
5%	0.2	268.13	231.43	265.32	256.84	226.70	253.34	20%	104.75	76.25	101.09	93.28	65.60	86.79
	0.5	254.77	190.22	242.68	252.98	153.83	240.65		100.26	40.48	85.64	81.00	38.67	71.16
	0.8	247.48	127.11	185.09	154.31	95.66	97.19		85.85	21.71	31.12	35.45	6.71	18.30
10%	0.2	184.82	143.82	181.29	176.38	132.03	171.63	30%	62.78	40.78	59.59	52.42	33.15	49.10
	0.5	172.78	97.77	156.86	155.96	67.23	142.52		57.42	17.65	46.72	40.90	16.83	35.12
	0.8	161.20	39.44	88.76	53.80	31.76	30.34		41.85	7.70	10.69	12.18	1.84	6.52
15%	0.2	119.90	89.00	115.18	118.45	72.94	115.49	40%	39.74	24.04	37.54	31.36	18.96	29.25
	0.5	115.27	50.42	99.97	83.66	30.94	74.51		34.42	8.86	27.28	21.75	8.69	18.83
	0.8	101.27	12.90	40.75	20.08	10.55	11.92		19.13	3.49	4.31	5.15	1.26	3.09

نتایج **جدول ۵** نشان می‌دهد که با افزایش اندازه شیفت زمانی، *ARL* در هر دو رویکرد کاهش می‌یابد؛ به‌گونه‌ای که انحرافات بزرگ‌تر از وضعیت تحت کنترل با سرعت بیشتری شناسایی می‌شوند. با این‌حال، الگوی تغییر *ARL* در سطوح مختلف وابستگی و ساختارهای کاپولا یکسان نیست. این موضوع نشان می‌دهد که اثر یک شیفت زمانی بر حساسیت نمودار، مستقل از ساختار وابستگی بین زمان و شدت نیست و تغییر در وابستگی می‌تواند احتمال ایجاد سیگنال را حتی با ثابت بودن اندازه شیفت تغییر دهد. ازاین‌رو، ارزیابی عملکرد نمودار در برابر شیفت‌های زمانی باید هم‌زمان با ساختار وابستگی بین متغیرهای پایش انجام شود. نتایج **جدول ۵** نشان‌دهنده برتری نمودار کنترل مبتنی بر کاکس (رویکرد دوم) در سناریوهای مختلف وابستگی و نوع کاپولا است؛ اما میزان این برتری به قدرت وابستگی و نوع خانواده کاپولا وابسته بود.

در سناریوی شیفت شدت، افزایش شیفت به کاهش *ARL* منجر شده است که بیانگر افزایش قابلیت نمودار در تشخیص انحرافات شدیدتر در شدت رویداد است. با این‌حال، تفاوت *ARL* در سطوح مختلف وابستگی نشان می‌دهد که اثر شیفت شدت صرفا به‌اندازه تغییر در شدت رویداد محدود نمی‌شود، بلکه به نحوه وابستگی آن با زمان بین رویداد نیز وابسته است. ازآن‌جاکه آماره پایش بر اساس ترکیب هم‌زمان زمان و شدت تعریف شده است، تغییر ساختار وابستگی می‌تواند توزیع آماره و در نتیجه احتمال عبور از حد کنترل را تغییر دهد؛ بنابراین، ساختار وابستگی یکی از عوامل موثر در تفسیر حساسیت نمودار نسبت به تغییرات شدت است. نتایج نشان‌دهنده این است که برای شیفت خالص شدت، نمودار کنترل مبتنی بر کاکس (رویکرد دوم) در سناریوهای مختلف وابستگی و نوع کاپولا نسبت به نمودار کنترل رویکرد اول عملکرد بهتری داشت. به‌طورکلی، شدت به‌طور یکنواخت‌تری از متغیر اثرگذار بهره می‌برد، زیرا Y مستقیما از طریق کاپولا به T مرتبط است و هرگونه اطلاعات که سیگنال موثر T را بیش‌تر می‌کند، به آماره‌ی ترکیبی نیز منتقل می‌شود.

جدول ۶- عملکرد رویکردهای پایش پیشنهادی تحت سناریو شیفت هم‌زمان برای کاپولاهای ارشمیدسی.
Table 6- Performance of the proposed monitoring approaches under the simultaneous shift scenario for archimedean copulas.

شیفت زمان	شیفت شدت	وضعیت شیفت	وابستگی	ARL رویکرد پایش اول			ARL رویکرد پایش دوم		
				فرانک	کلایتون	گامبل	فرانک	کلایتون	گامبل
1%	5%	زمان خیلی کم شدت خیلی کم	0.2	243.62	216.43	242.13	236.37	211.94	229.90
			0.5	240.76	173.25	227.52	230.07	166.03	218.32
			0.8	233.86	125.11	166.96	176.06	108.94	120.61
2.5%	10%	زمان کم شدت کم	0.2	158.49	126.92	155.99	151.06	119.40	142.66
			0.5	154.64	81.55	138.42	138.02	74.74	126.30
			0.8	143.37	43.76	71.98	71.55	27.97	39.88
5%	20%	زمان متوسط شدت متوسط	0.2	75.11	50.92	71.84	67.38	42.94	62.38
			0.5	70.08	23.51	57.95	51.16	20.59	44.75
			0.8	54.67	9.10	15.62	14.30	2.57	7.92
10%	30%	زمان زیاد شدت زیاد	0.2	33.01	19.46	31.00	26.40	15.04	24.81
			0.5	27.78	6.80	21.90	15.17	6.23	13.31
			0.8	13.12	2.60	3.08	3.44	1.18	2.38
15%	40%	زمان خیلی زیاد شدت خیلی زیاد	0.2	15.70	8.79	14.80	10.99	6.50	10.45
			0.5	11.33	2.78	9.14	5.42	2.74	4.88
			0.8	2.43	1.40	1.37	1.64	1.04	1.26
1%	40%	شدت غالب	0.2	37.41	22.44	35.32	29.49	17.65	27.53
			0.5	32.12	8.12	25.40	19.86	7.93	17.25
			0.8	17.00	3.16	3.85	4.57	1.23	2.83
5%	30%	شدت نسبتا غالب	0.2	45.68	28.13	43.08	37.89	22.39	35.52
			0.5	40.30	10.85	32.12	25.45	9.94	22.05
			0.8	24.75	4.08	5.61	5.90	1.36	3.61
15%	5%	زمان غالب	0.2	87.08	60.03	83.47	80.24	48.50	76.94
			0.5	81.77	29.75	68.51	53.04	19.65	47.23
			0.8	66.99	8.15	21.01	12.10	3.69	7.44
15%	10%	زمان نسبتا غالب	0.2	64.53	42.19	61.74	56.39	33.55	52.98
			0.5	59.16	18.47	48.25	34.69	13.25	31.01
			0.8	43.72	5.49	11.34	7.79	1.93	4.99

اما مهم‌ترین یافته‌ها در **جدول ۶** مشاهده می‌شود؛ در حالت شیفت هم‌زمان، افزایش اندازه شیفت در هر دو مولفه با کاهش *ARL* همراه است و این کاهش در شیفت‌های بزرگ‌تر آشکارتر می‌شود. این رفتار نشان می‌دهد که وقوع هم‌زمان انحراف در زمان و شدت، اطلاعات بیشتری برای تشخیص تغییر در اختیار نمودار قرار می‌دهد. در عین حال، تفاوت مقادیر *ARL* در سطوح مختلف وابستگی و توابع کاپولا بیانگر آن است که اثر ترکیبی شیفت‌های زمانی و شدت به ساختار وابستگی میان دو متغیر حساس است. نتایج شیفت‌های هم‌زمان در حالتی که تغییر یکی از متغیرها غالب باشد نیز اهمیت وابستگی میان دو متغیر را نشان می‌دهد؛ بنابراین، حتی با ثابت یا کوچک بودن یکی از مولفه‌ها، تغییر مولفه دیگر می‌تواند عملکرد

نمودار را به‌طور محسوسی تحت تاثیر قرار دهد. این یافته اهمیت مدل‌سازی وابستگی با کاپولا را نشان می‌دهد؛ زیرا تغییرات زمان و شدت لزوما مستقل نیستند و اثر یک‌متغیر می‌تواند به وضعیت متغیر دیگر وابسته باشد.

از دیدگاه صنعتی، بسیاری از اختلالات به‌صورت هم‌زمان در زمان و شدت رخ می‌دهند؛ بنابراین، رویکرد پیشنهادی می‌تواند به‌عنوان یک سیستم هشدار زودهنگام چندمتغیره عمل کند. در شرایطی که تغییرات زمان، شدت و عوامل اثرگذار هم‌زمان رخ می‌دهند، مدل‌سازی وابستگی و عوامل مشاهده‌شده می‌تواند نسبت به نمودارهای ساده، تشخیص سریع‌تری فراهم کند. نتایج شیفت هم‌زمان، بیان‌کننده برتری نمودار کنترل مبتنی بر کاکس (رویکرد دوم) در سناریوهای مختلف وابستگی و نوع کاپولا است. در مجموع، نتایج تاکید می‌کنند که ارزیابی عملکرد نمودار کنترل، نه‌تنها بر اندازه شیفت، بلکه بر شدت و ساختار وابستگی بین متغیرهای پایش‌شده و انتخاب کاپولای مناسب نیز وابسته است.

۶- مطالعه موردی

برای یکی از ماشین‌های صنعتی، طی بازه زمانی ۶ ساله، تمامی تاریخ‌های خرابی (برحسب روز) و همچنین هزینه‌های برآوردشده متناظر با خرابی‌ها، به‌عنوان شدت خرابی برحسب یورو ثبت شده است. این هزینه‌ها شامل کلیه هزینه‌های تعمیر و راه‌اندازی مجدد ماشین، از جمله هزینه قطعات یدکی و نیروی انسانی و همچنین هزینه ناشی از توقف تولید است. همچنین میانگین لرزش دستگاه در طول فاصله زمانی بین ۲ خرابی متوالی با واحد میلی‌متر بر ثانیه (*mm/s*)، می‌تواند به‌عنوان یک متغیر اثرگذار قابل‌مشاهده در مدل مخاطرات متناسب کاکس در نظر گرفته شود، زیرا افزایش میزان لرزش معمولا بیانگر افزایش ناپایداری، فرسودگی یا تغییر در شرایط عملیاتی دستگاه است. این تغییرات می‌توانند احتمال وقوع رویداد بعدی و در نتیجه زمان بین دو رویداد را تحت تاثیر قرار دهند. داده‌های موردمطالعه به ۲ بخش تقسیم شده است: ۳۰ خرابی ثبت‌شده طی ۵ سال، از سال ۲۰۱۲ تا ۲۰۱۶ که در این پژوهش به‌عنوان مجموعه داده فاز *I* مورداستفاده قرار گرفته‌اند و ۱۴ خرابی ثبت‌شده طی ۲ سال، از سال ۲۰۱۷ تا ۲۰۱۸ که به‌عنوان مجموعه داده فاز *II* در نظر گرفته شده‌اند.

در اصطلاحات قابلیت اطمینان، فاز *I* مطالعه را می‌توان متناظر با دوره نرخ خرابی ثابت ماشین در نظر گرفت؛ درحالی‌که دوره فاز *II* به‌عنوان آغاز دوره‌ای با نرخ خرابی بالقوه افزایشی در نظر گرفته می‌شود. بررسی‌های انجام‌شده طی دوره ۲۰۱۲ تا ۲۰۱۶ در خصوص این پدیده نشان داده‌اند که پس از وقوع و رفع یک خرابی، چنانچه خرابی بعدی در فاصله زمانی کوتاهی رخ دهد، این خرابی اغلب، ناشی از علل مشابه است. در نتیجه، زمان موردنیاز برای شناسایی علت خرابی کاهش می‌یابد و هزینه قطعات یدکی نیز کمتر خواهد بود، زیرا این قطعات برای خرابی قبلی خریداری شده‌اند. در مقابل، هنگامی‌که خرابی بعدی پس از یک‌فاصله زمانی طولانی رخ می‌دهد، علل خرابی معمولا با خرابی قبلی متفاوت بوده و به زمان بیشتری برای شناسایی علت خرابی و خرید قطعات یدکی جدید نیاز دارند. برای تایید تحلیلی این رابطه، ضرایب همبستگی رتبه‌ای کندال و اسپیرمن به‌ترتیب برابر با ۰٫۴۶۵۷ و ۰٫۶۱۲۹ محاسبه و مقدار *p-value* متناظر نیز به ترتیب ۰٫۰۰۰۳۵ و ۰٫۰۰۰۳۲ است. این نتایج وجود همبستگی مثبت معنادار میان این دو را تایید می‌کند.

$$AIC = -2ln(L) + 2K \quad (۳۷)$$

$$BIC = -2ln(L) + Kln(n) \quad (۳۸)$$

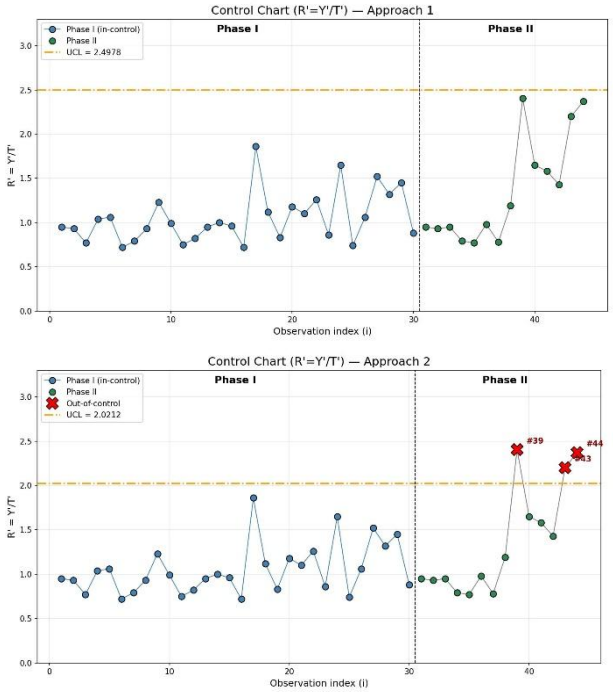
جدول ۷- مقدار پارامتر کاپولا برای داده‌های موردمطالعه و انتخاب کاپولای مناسب.

Table 7- Copula parameter estimates for the study data and selection of the appropriate copula.

عنوان کاپولا	مقدار پارامتر	Likelihood−Log	AIC	BIC
فرانک	4.148	6.146	-10.292	-8.890
گامبل	1.557	5.230	-8.460	-7.059
کلایتون	0.925	5.189	-8.378	-6.977

برای انتخاب ساختار وابستگی مناسب، معیارهای اطلاعاتی آکائیک و بیزی بر اساس **رابطه‌های (۳۷)** و **(۳۸)** به‌کار رفتند که در آن L تابع درست‌نمایی بیشینه‌شده، k تعداد پارامترهای آزاد و n تعداد داده‌ها در فاز اول است. کاپولایی که مقادیر درست‌نمایی بیشتر و *AIC* و *BIC* کمتری داشته باشد، به‌عنوان مدل مناسب‌تر انتخاب می‌شود که مطابق **جدول ۷** کاپولای فرانک برازش بهتری به داده‌های موردمطالعه دارد.

در ادامه با استفاده از اطلاعات موجود در **جدول‌های ۱** و **۲**، پس از محاسبه مقدار آماره نسبت و تابع چگالی هر یک از رویکردهای پایش پیشنهادی، حدود کنترل به‌وسیله **رابطه‌های (۳۲)** و **(۳۳)** محاسبه گردید. نتایج در **شکل ۱** بیانگر این است فاصله‌ی همه‌ی نقاط فاز اول از حدود کنترل کافی است و در هیچ‌کدام از دو رویکرد، نقطه‌ای از فاز اول به‌عنوان نقطه خارج از کنترل شناسایی نمی‌شود. تفاوت اصلی دو رویکرد در حساسیت تشخیص انحراف است. در نمودار کنترل ارایه شده به‌عنوان رویکرد اول، نقاط فاز دوم با وجود روند صعودی محسوس در انتهای بازه همچنان در داخل حدود کنترل قرار می‌گیرند. در نتیجه رویکرد اول حساسیتی به انحراف تدریجی روند صعودی نشان نمی‌دهد و هیچ نقطه خارج کنترل را شناسایی نمی‌کند. با درنظر گرفتن اثر متغیر تاثیرگذار قابل‌مشاهده در رویکرد دوم، با کاهش مقدار حد کنترل بالا مواجه هستیم. در این رویکرد نمودار کنترل ارایه شده حساسیت بیشتری نسبت به انحراف تدریجی و پایدار روند صعودی انتهای فاز دوم دارد و ضمن اعلام نقطه ۳۹ به‌عنوان اولین نقطه خارج از کنترل، نقاط ۴۳ و ۴۴ را نیز به‌عنوان نقاط خارج از کنترل تشخیص می‌دهد که این مهم نشان از برتری نمودار کنترل ارایه شده در رویکرد دوم (نمودار کنترل مبتنی بر مدل کاکس) است.



شکل ۱ - عملکرد رویکردهای پایش اول و دوم برای داده‌های مطالعه موردی.

Figure 1- Performance of the first and second monitoring approaches for the case study data.

۷- نتیجه‌گیری

این پژوهش یک چارچوب یکپارچه برای پایش هم‌زمان زمان بین رویداد و شدت رویداد ارایه کرد که در آن، وابستگی میان این دو متغیر با استفاده از توابع کاپولا و اثر عوامل قابل‌مشاهده از طریق مدل مخاطرات متناسب کاکس لحاظ شد. نتایج نشان داد که عملکرد نمودار کنترل تابعی از نوع و اندازه شیفت، ساختار وابستگی میان متغیرها و نحوه مدل‌سازی عوامل اثرگذار است. همچنین، درنظرگرفتن هم‌زمان وابستگی و اثر عوامل قابل‌مشاهده، به‌ویژه در سناریوهای دارای شیفت‌های شدیدتر، می‌تواند توانایی رویکرد پایش را در شناسایی تغییرات افزایش دهد. نتایج به‌روشنی نشان می‌دهند که نمودار زمان بین رویداد و شدت رویداد با یک متغیر اثرگذار مدل‌شده در چارچوب مدل کاکس، نسبت به حالتی که متغیر اثرگذار لحاظ نگردیده است برتری دارد. این مزیت برای نتایج شیفت‌های ناشی از زمان، شدت و شیفت‌های هم‌زمان قابل مشاهده است، در حالی‌که مقدار این برتری به‌طور اساسی به قدرت وابستگی کاپولایی بین متغیرهای زمان و شدت و نوع کاپولای انتخاب‌شده بستگی دارد. بر این اساس، انتخاب خانواده کاپولا و پارامتر وابستگی باید با توجه به ساختار وابستگی داده‌ها و ویژگی‌های فرایند انجام شود. مطالعه موردی خرابی یک ماشین صنعتی نیز قابلیت کاربرد چارچوب پیشنهادی را در یک فرایند واقعی نشان داد؛ به‌گونه‌ای که لحاظ‌کردن هم‌زمان وابستگی و عامل اثرگذار قابل‌مشاهده باعث افزایش توانایی نمودار کنترل شده است. در مجموع، یافته‌ها بر ضرورت توسعه روش‌های پایش انعطاف‌پذیر برای فرایندهای رویدادی پیچیده تاکید دارند.

تمایز میان انتخاب مدل بر اساس برازش آماری و عملکرد پایش در سناریوهای تغییر از نکات مهم در تفسیر نتایج این مطالعه است. در مطالعه موردی، کاپولای فرانک بر اساس معیارهای *AIC* و *BIC* به‌عنوان مدل مناسب‌تر برای نمایش ساختار وابستگی مشاهده‌شده در داده‌های واقعی انتخاب شد. در مقابل، با هدف ارزیابی حساسیت رویکردهای پایش تحت سناریوهای کنترل‌شده تغییر و سطوح مختلف وابستگی، سناریوهای شیفت طراحی گردید؛ بنابراین، عملکرد متفاوت یک کاپولا در تشخیص برخی تغییرات لزوما به معنای برازش بهتر آن به داده‌های واقعی نیست. در واقع، برازش آماری و عملکرد پایشی دو هدف متفاوت را دنبال می‌کنند و ممکن است به انتخاب یک خانواده کاپولای یکسان منجر نشوند. ویژگی‌های دنباله‌ای خانواده‌های کاپولا نیز در تفسیر این تفاوت اهمیت دارند. کاپولای کلایتون عمدتا وابستگی در دنباله پایین، کاپولای گامبل وابستگی در دنباله بالا و کاپولای فرانک ساختار وابستگی متقارن‌تری را بدون وابستگی دمی مجانبی مدل می‌کند. در کاربردهای قابلیت اطمینان، این ویژگی‌ها اهمیت دارند، زیرا شرایط بحرانی ممکن است از ترکیب مقادیر نامطلوب دو متغیر پایش‌شده ناشی شود. در مسئله حاضر، کاهش قابل‌توجه زمان بین رخدادها همراه با افزایش شدت رخداد می‌تواند وضعیت نامطلوب‌تری را ایجاد کند؛ بنابراین، انتخاب خانواده کاپولا می‌تواند بر احتمال اختصاص‌یافته به ترکیب‌های حدی و در نتیجه بر حساسیت نمودار کنترل نسبت به انواع مختلف تغییر اثرگذار باشد.

در چارچوب حاضر اثر متغیرهای اثرگذار قابل‌مشاهده از طریق مدل مخاطرات متناسب کاکس لحاظ شده است، ولی در کاربردهای قابلیت اطمینان ممکن است بخشی از عوامل موثر بر نرخ وقوع رخداد قابل‌مشاهده یا اندازه‌گیری نباشند. در چنین شرایطی، مدل‌های شکنندگی می‌توانند به‌عنوان ابزاری برای مدل‌سازی ناهمگونی مشاهده‌نشده به کار گرفته شوند. برای مثال، در خرابی تجهیزات، عواملی نظیر فرسودگی داخلی، تفاوت در وضعیت قطعات، کیفیت تعمیرات یا شرایط عملیاتی ثبت‌نشده می‌توانند موجب تفاوت در نرخ خرابی واحدهای مختلف شوند. ازاین‌رو، توسعه چارچوب حاضر با افزودن یک مولفه شکنندگی می‌تواند امکان تفکیک اثر عوامل مشاهده‌شده از ناهمگونی مشاهده‌نشده را فراهم کند. این توسعه در مطالعات آتی می‌تواند موردتوجه قرار گیرد. همچنین گسترش مدل به چندین متغیر توضیحی، بررسی خانواده‌های متنوع‌تر کاپولا و توسعه ساختارهای وابستگی پویا برای شرایطی که وابستگی میان زمان و شدت در طول زمان تغییر می‌کند، می‌تواند زمینه‌ساز پژوهش‌های آتی قرار گیرد.

اگرچه نظریه کاپولا به توزیع‌های حاشیه‌ای پارامتری محدود نیست، پیاده‌سازی ارایه‌شده در پژوهش حاضر ماهیتی پارامتری دارد؛ زیرا توزیع‌های حاشیه‌ای زمان بین رخداد و شدت رخداد و همچنین خانواده کاپولا به‌صورت پارامتری مشخص شده‌اند. ازاین‌رو، روش حاضر یک روش کاملاً ناپارامتریک محسوب نمی‌شود. با این‌حال، چارچوب پیشنهادی قابلیت توسعه به یک ساختار نیمه‌پارامتری یا ناپارامتری را دارد. در چنین توسعه‌ای می‌توان از توابع توزیع تجربی برای نمایش رفتار حاشیه‌ای استفاده کرد و ساختار وابستگی را به‌صورت جداگانه از طریق یک تابع کاپولا مدل نمود. چنین رویکردی می‌تواند وابستگی روش به فرض‌های توزیعی حاشیه‌ای را کاهش دهد و زمینه مناسبی را برای توسعه روش پیشنهادی در پژوهش‌های آتی فراهم آورد.

تشکر و قدردانی

نویسندگان، صمیمانه از دقت نظر هیئت تحریریه و داوران ارجمند و از رهنمودهای ارزشمند آن‌ها سپاسگزاری می‌نمایند.

منابع مالی

در طول انجام این پژوهش، هیچ‌گونه منابع مالی دریافت نشده است.

تعارض با منافع

نویسندگان اعلام می‌دارند که هیچ‌گونه تعارض منافعی در مورد انتشار این مقاله وجود ندارد.

مشارکت نویسندگان

نویسندگان در تمامی مراحل این پژوهش، مشارکتی فعال داشته و نسخه نهایی نیز توسط آن‌ها مطالعه و تایید شده است.

منابع

[1] Calvin, T. (1983). Quality control techniques for" zero defects". *IEEE Transactions on Components, Hybrids, and Manufacturing Technology*, *6*(3), 323–328. https://doi.org/10.1109/TCHMT.1983.1136174
[2] Chan, L. Y., Xie, M., & Goh, T. N. (2000). Cumulative quantity control charts for monitoring production processes. *International Journal of Production Research*, *38*(2), 397–408. https://doi.org/10.1080/002075400189482
[3] Xie, M., Goh, T. N., & Ranjan, P. (2002). Some effective control chart procedures for reliability monitoring. *Reliability Engineering & System Safety*, *77*(2), 143–150. https://doi.org/10.1016/S0951-8320(02)00041-8
[4] Borror, C. M., Champ, C. W., & Rigdon, S. E. (1998). Poisson EWMA control charts. *Journal of Quality Technology*, *30*(4), 352–361. https://doi.org/10.1080/00224065.1998.11979871
[5] Chakraborti, S., Kumar, N., Rakitzis, A. C., & Sparks, R. S. (2014). Time between events monitoring with control charts. *Wiley Statsref: Statistics Reference Online*, 1–13. https://doi.org/10.1002/9781118445112.stat08409
[6] Mirzaei Novin, M., Amiri, A., & Castagliola, P. (2026). A comprehensive review of time between events control charts: Models, applications, and future directions. *Applications, and Future Directions*. https://doi.org/10.1016/j.cie.2025.111789
[7] Zhang, C. W., Xie, M., Liu, J. Y., & Goh, T. N. (2007). A control chart for the Gamma distribution as a model of time between events. *International Journal of Production Research*, *45*(23), 5649–5666. https://doi.org/10.1080/00207540701325082
[8] Wang, F.-K., Bizuneh, B., & Abebe, T. H. (2017). A comparison study of control charts for Weibull distributed time between events. *Quality and Reliability Engineering International*, *33*(8), 2747–2759. https://doi.org/10.1002/qre.2238
[9] Wu, Z., Jiao, J., & He, Z. (2009). A single control chart for monitoring the frequency and magnitude of an event. *International Journal of Production Economics*, *119*(1), 24–33. https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2009.01.004
[10] Qu, L., Wu, Z., Khoo, M. B. C., & Castagliola, P. (2013). A CUSUM scheme for event monitoring. *International Journal of Production Economics*, *145*(1), 268–280. https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2013.04.048
[11] Cheng, Y., Mukherjee, A., & Xie, M. (2017). Simultaneously monitoring frequency and magnitude of events based on bivariate gamma distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, *87*(9), 1723–1741. https://doi.org/10.1080/00949655.2017.1284846
[12] Rahali, D., Castagliola, P., Taleb, H., & Khoo, M. B. C. (2019). Evaluation of Shewhart time-between-events-and-amplitude control charts for several distributions. *Quality Engineering*, *31*(2), 240–254. https://doi.org/10.1080/08982112.2018.1479036
[13] Rahali, D., Castagliola, P., Taleb, H., & Khoo, M. B. C. (2021). Evaluation of Shewhart time-between-events-and-amplitude control charts for correlated data. *Quality and Reliability Engineering International*, *37*(1), 219–241. https://doi.org/10.1002/qre.2731
[14] Castagliola, P., Celano, G., Rahali, D., & Wu, S. (2021). Control charts for monitoring time-between-events-and-amplitude data. In *Control Charts and Machine Learning for Anomaly Detection in Manufacturing* (pp. 43–76). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-83819-5_3
[15] Wu, S., Castagliola, P., & Celano, G. (2021). A distribution-free EWMA control chart for monitoring time-between-events-and-amplitude data. *Journal of Applied Statistics*, *48*(3), 434–454. https://doi.org/10.1080/02664763.2020.1729347
[16] He, Z., Gao, Y., Qu, L., & Wang, Z. (2022). A nonparametric CUSUM scheme for monitoring multivariate time-between-events-and-amplitude data with application to automobile painting. *International Journal of Production Research*, *60*(18), 5432–5449. https://doi.org/10.1080/00207543.2021.1959664
[17] Xue, L., An, L., Feng, S., Liu, Y., Wu, H., & Wang, Q. (2024). A nonparametric adaptive EWMA control chart for monitoring multivariate time-between-events-and-amplitude data. *Computers & Industrial Engineering*, *193*, 110250. https://doi.org/10.1016/j.cie.2024.110250
[18] Figueiredo, F. O., Castagliola, P., & Malela-Majika, J.-C. (2025). Rank-Based EWMA TBEA Control Chart. *Quality and Reliability Engineering International*, *41*(4), 1279–1292. https://doi.org/10.1002/qre.3711
[19] Scagliarini, M. (2026). Non-parametric time between events and amplitude methods for monitoring regional drought characteristics. *Environmental and Ecological Statistics*, 1–27. https://doi.org/10.1007/s10651-026-00760-3
[20] Cox, D. R. (1972). Regression models and life-tables. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, *34*(2), 187–202. https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1972.tb00899.x
[21] Andersen, P. K., & Gill, R. D. (1982). Cox's regression model for counting processes: a large sample study. *The Annals of Statistics*, 1100–1120. https://doi.org/10.1214/aos/1176345976
[22] Prentice, R. L., Williams, B. J., & Peterson, A. V. (1981). On the regression analysis of multivariate failure time data. *Biometrika*, *68*(2), 373–379.
[23] Wei, L.-J., Lin, D. Y., & Weissfeld, L. (1989). Regression analysis of multivariate incomplete failure time data by modeling marginal distributions. *Journal of the American Statistical Association*, *84*(408), 1065–1073. https://doi.org/10.1080/01621459.1989.10478873
[24] Ahmad, H., Nadi, A. A., Amini, M., & Chakraborti, S. (2026). Dynamic Risk-adjusted monitoring of time between events: Applications of NHPP in pipeline accident surveillance. *Quality and Reliability Engineering International*, *42*(1), 478–502. https://doi.org/10.1002/qre.70066
[25] Chong, Z. L., Teoh, W. L., Khoo, M. B. C., Teh, S. Y., & Khaw, K. W. (2025). Dynamic VSI Max-EWMA control chart for joint monitoring of time-between-events and amplitude in high-quality manufacturing processes. *Computers & Industrial Engineering*, *207*, 111204. https://doi.org/10.1016/j.cie.2025.111204
[26] Alevizakos, V., & Koukouvinos, C. (2020). A progressive mean control chart for monitoring time between events. *Quality and reliability engineering international*, *36*(1), 161–186. https://doi.org/10.1002/qre.2565
[27] Chakraborty, N., Human, S. W., & Balakrishnan, N. (2017). A generally weighted moving average chart for time between events. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, *46*(10), 7790–7817. https://doi.org/10.1080/03610918.2016.1252397
[28] Sanusi, R. A., Teh, S. Y., & Khoo, M. B. C. (2020). Simultaneous monitoring of magnitude and time-between-events data with a Max-EWMA control chart. *Computers & Industrial Engineering*, *142*, 106378. https://doi.org/10.1016/j.cie.2020.106378
[29] Nelsen, R. B. (2006). *An introduction to copulas*. Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-28678-0
[30] Joe, H. (2014). *Dependence modeling with copulas*. CRC press. https://copula.stat.ubc.ca/