

Paper Type: Original Article

Development of Probability-Limits-Based Control Chart Using Copula Functions and Cox Proportional Hazards Model

Citation:

Received: ----

Revised: ----

Accepted: ---

LastName, Initial First Name., & LastName, Initial First Name. (Date).

Paper Title. *Journal of Quality Engineering and Management*, Volume(Issue), PP.

Abstract

Purpose: The aim of this study is to develop a novel framework for designing probability-limit-Based control chart to jointly monitor the time between events and event intensity while accounting for their dependence and the effects of observable covariates.

Methodology: In this study, First, the dependence between the time between events and event intensity is modeled using the Archimedean Clayton, Frank, and Gumbel copulas. Subsequently, the Cox proportional hazards model is employed to account for the effects of observable covariates on event occurrence times. Based on the marginal distributions of the variables and the dependence structure specified by the copula, a ratio-based monitoring statistic is defined and the corresponding upper control limit is determined. The performance of the proposed monitoring approaches is then evaluated and compared under various shift scenarios involving changes in the time between events, event intensity, and simultaneous shifts in both variables, across different levels of dependence and copula models, using the average run length (ARL) as the performance criterion.

Findings: The results show that incorporating the effects of observable covariates through the Cox proportional hazards model, particularly under simultaneous-shift scenarios, enhances the sensitivity of the proposed monitoring approach, resulting in lower ARL values. Furthermore, comparison of the copula functions demonstrates that the appropriate specification of the dependence structure plays a critical role in control chart performance, with its importance becoming particularly evident when simultaneous changes occur in the time between events and event intensity.

Originality/Value: The main novelty of this study lies in developing an integrated framework for monitoring event data that simultaneously accounts for the dependence between the time between events and event intensity and the effects of observable covariates within the control chart structure. In this framework, copula functions are employed to model the dependence structure, while the Cox proportional hazards model is used to incorporate the effects of observable covariates. This integration provides a more flexible and realistic framework for monitoring processes in which event timing and intensity are interdependent and influenced by observable factors.

 Corresponding Author:



Licensee System Analytics. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).

Keywords: Probability-Limits-Based-Control Chart, Copula Functions, Correlated Data, Ratio Statistic.

آماده انتشار

توسعه نمودار کنترل مبتنی بر حدود احتمال به کمک توابع کاپولا و مدل مخاطره متناسب کاکس

چکیده

هدف: این پژوهش، با هدف ارائه یک چارچوب جدید برای طراحی نمودار کنترل مبتنی بر حدود احتمال به منظور پایش همزمان زمان بین رویدادها و شدت رویدادها با در نظر گرفتن وابستگی میان آن‌ها و اثر متغیرهای قابل مشاهده انجام شده است.

روش‌شناسی پژوهش: در این پژوهش، ابتدا وابستگی میان زمان بین رویداد و شدت رویداد با استفاده از توابع کاپولای ارشمیدسی کلاتون، فرانک و گامبل مدل‌سازی می‌شود. سپس، به منظور لحاظ کردن اثر متغیرهای قابل مشاهده بر زمان وقوع رویدادها، مدل رگرسیون مخاطرات متناسب کاکس به کار گرفته شده و بر اساس توزیع‌های حاشیه‌ای متغیرها و ساختار وابستگی تعیین شده توسط کاپولا، آماره نسبت تعریف و حدود کنترل بالا محاسبه می‌شود. در ادامه، عملکرد رویکردهای پایش پیشنهادی تحت سناریوهای مختلف شیفت در زمان بین رویداد، شدت رویداد و شیفت همزمان این دو متغیر، در سطوح مختلف وابستگی و برای مدل‌های مختلف کاپولا، بر مبنای معیار متوسط طول دنباله ارزیابی و با یکدیگر مقایسه می‌شود.

یافته‌ها: نتایج نشان می‌دهد که لحاظ کردن اثر متغیرهای قابل مشاهده از طریق مدل کاکس، به‌ویژه در سناریوهای شیفت همزمان، موجب افزایش حساسیت رویکرد پایش شده و کمترین مقادیر متوسط طول دنباله را ایجاد می‌کند. همچنین، مقایسه عملکرد توابع کاپولا نشان می‌دهد که انتخاب ساختار وابستگی مناسب نقش تعیین‌کننده‌ای در عملکرد نمودار کنترل دارد؛ این اهمیت به‌ویژه در شرایطی که تغییرات همزمان در زمان بین رویداد و شدت رویداد رخ می‌دهد، برجسته‌تر است.

اصالت/ارزش افزوده علمی: نوآوری اصلی این پژوهش در ارائه یک چارچوب یکپارچه برای پایش داده‌های رویدادی است که وابستگی میان زمان بین رویداد و شدت رویداد، اثر متغیرهای قابل مشاهده و ناهمگنی مشاهده‌نشده را به‌صورت همزمان در ساختار نمودار کنترل لحاظ می‌کند. در این چارچوب، توابع کاپولا برای مدل‌سازی وابستگی و مدل مخاطرات متناسب کاکس برای لحاظ کردن اثر متغیرهای قابل مشاهده به کار گرفته می‌شوند. این یکپارچگی، چارچوبی انعطاف‌پذیرتر و واقع‌بینانه‌تر برای پایش فرایندهایی فراهم می‌کند که در آن‌ها زمان وقوع و شدت رویدادها به یکدیگر وابسته بوده و تحت تأثیر عوامل اثرگذار قابل مشاهده قرار دارند.

کلیدواژه‌ها: نمودار کنترل با حدود احتمال، توابع کاپولا، داده‌های همبسته، آماره نسبت

۱- مقدمه

امروزه کنترل آماری فرایند نقش مهمی در محیط رقابتی سیستم‌های تولیدی و خدماتی دارد و امکان شناسایی به موقع وضعیت‌های خارج از کنترل را فراهم می‌کند. در فرایندهای با کیفیت بالا، استفاده از روش‌های متداول پایش می‌تواند با نرخ هشدار غلط بالا و منفی شدن حدود کنترل همراه باشد؛ ازاین‌رو، نمودارهای کنترل زمان بین رویدادها به عنوان ابزاری مناسب مورد توجه قرار گرفته‌اند. بااین‌حال، اثر یک رویداد در یک بازه زمانی مشخص تنها به زمان بین رویدادها محدود نبوده و شدت رویداد نیز در تعیین وضعیت فرایند نقش دارد. بنابراین، پایش همزمان زمان بین رویدادها و شدت آن‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. اگرچه در بسیاری از نمودارهای کنترل، تنها یکی از ویژگی‌های زمان بین رویدادها یا شدت رویداد مورد توجه قرار گرفته است، پیچیده‌تر شدن فرایندهای تولیدی و خدماتی، ضرورت پایش همزمان چند ویژگی را افزایش داده است. از سوی دیگر، با وجود وابستگی میان زمان بین رویداد و شدت رویداد، نادیده گرفتن این وابستگی می‌تواند به نتایج غیرواقعی و گمراه‌کننده منجر شود. ازاین‌رو، استفاده از یک رویکرد انعطاف‌پذیر برای مدل‌سازی وابستگی میان این دو متغیر ضروری است. افزون بر این، هنگامی که مشخصه کیفی تحت تأثیر متغیرهای قابل مشاهده قرار گیرد، لازم است اثر این متغیرها در مدل لحاظ شده و در نظر گرفتن آن چالش مهم دیگری در پایش این فرایندها محسوب می‌شود. در این مقاله، یک رویکرد نوین برای پایش داده‌های همبسته زمان بین رویداد و شدت رویداد در حضور متغیرهای اثرگذار قابل مشاهده ارائه می‌شود. مدل‌سازی وابستگی میان متغیرها توسط توابع کاپولا و اثر متغیرهای اثرگذار قابل مشاهده از طریق مدل مخاطره متناسب کاکس به آن اضافه شده است. ساختار مقاله به این صورت است که ابتدا مبانی نظری و پیشینه پژوهش ارائه می‌شود. سپس مدل‌های کاکس و توابع کاپولا و نحوه تلفیق آن‌ها تشریح می‌گردد. در ادامه، رویکرد پیشنهادی در دو حالت، شامل مدل پایه (رویکرد اول) و مدل حضور متغیرهای اثرگذار قابل مشاهده (رویکرد دوم)، ارائه شده و عملکرد آن با استفاده از شاخص متوسط طول دنباله ارزیابی می‌شود. در نهایت، با استفاده از یک مطالعه موردی نتایج حاصل از دو رویکرد مقایسه و تحلیل می‌شوند.

۲- مبانی نظری و پیشینه پژوهش

در بسیاری از فرایندهای صنعتی، خدماتی، قابلیت اطمینان و پدیده‌های طبیعی، وقوع یک رویداد را نمی‌توان تنها با تعداد رویدادها توصیف کرد؛ بلکه زمان بین دو رویداد متوالی و شدت رویداد نیز از ویژگی‌های مهم آن هستند. برای مثال، در خرابی تجهیزات، زمان بین دو خرابی و هزینه تعمیر و در رویدادهای طبیعی، فاصله زمانی و شدت رویداد بیانگر این دو ویژگی‌اند. در بسیاری از کاربردها، کاهش زمان بین رویداد و افزایش شدت می‌تواند همزمان نشان‌دهنده وخیم‌شدن وضعیت فرایند باشد [۶-۱].

ریشه مطالعات این حوزه به پایش فرایندهای با نرخ رویداد پایین بازمی‌گردد. کالوین [۱] پایش فاصله بین اقلام نامنتطبق را مطرح کرد و مطالعات چان و همکاران [۲]، شیه و همکاران [۳] و بورور و همکاران [۴] چارچوب‌های کنترل زمان بین رویدادها را توسعه دادند. مزیت اصلی این رویکرد، استفاده مستقیم از اطلاعات زمانی در فرایندهای با رویدادهای نادر است. مطالعات بعدی نیز استفاده از توزیع‌هایی مانند ویبول و گاما را در کنار توزیع نمایی بررسی کردند [۵-۶]. در این مطالعات، زمان بین رویداد عمدتاً به عنوان تنها متغیر پایش در نظر گرفته شده و نمودارهای شوارت، میانگین متحرک موزون نمایی و سایر روش‌های کنترل توسعه یافتند. با توجه به در دسترس بودن همزمان اطلاعات زمان و شدت، پژوهش‌ها به سمت پایش مشترک این دو ویژگی حرکت کردند. ژانگ و همکاران [۷] نمودار گاما و وانگ و همکاران [۸] نمودارهای مبتنی بر ویبول را برای زمان بین رویدادها توسعه دادند. وو و همکاران [۹] نموداری برای پایش همزمان فراوانی و شدت رویداد بر مبنای آماره نسبت ارائه کردند و چیو و همکاران [۱۰] نیز این ایده را با توسعه نمودار کنترل جمع تجمعی مشترک گسترش دادند. این مطالعات نشان دادند که ترکیب اطلاعات زمان و شدت می‌تواند نسبت به پایش جداگانه آن‌ها توان بیشتری داشته باشد؛ بااین‌حال، وابستگی آماری میان دو متغیر هنوز به صورت صریح و انعطاف‌پذیر مدل نشده بود. چنگ و همکاران [۱۱] با استفاده از توزیع گامای دو متغیره، وابستگی میان زمان و شدت را به صورت مستقیم وارد مدل کردند. اگرچه این رویکرد ساختار مشترک متغیرها را لحاظ می‌کند، انتخاب یک توزیع دو متغیره مشخص می‌تواند انعطاف‌پذیری مدل را محدود کند. رحالی و همکاران [۱۲] نیز با بررسی توزیع‌های گاما، لگ‌نرمال، نرمال و ویبول، محدودیت فرض‌های توزیعی در مطالعات اولیه را نشان دادند.

یکی از مهم‌ترین تحولات روش‌شناختی، استفاده از کاپولا برای مدل‌سازی وابستگی میان زمان و شدت بود. کاپولا امکان انتخاب مستقل توزیع‌های حاشیه‌ای و ساختار وابستگی را فراهم می‌کند و از این نظر انعطاف بیشتری نسبت به توزیع‌های دو متغیره مشخص دارد. رحالی و همکاران [۱۳] با

استفاده از کاپولا وابستگی میان زمان و شدت را مدل کردند و کاستالیولا و همکاران [۱۴] نیز حالت‌های مستقل و وابسته را با استفاده از کاپولا و رویکردهای توزیع آزاد بررسی کردند. باین حال، در این مطالعات کاپولا عمدتاً برای ساخت توزیع مشترک یا آماره پایش به کار رفته و اثر عوامل توضیحی قابل مشاهده بر زمان رویداد در یک چارچوب ساختاری لحاظ نشده است. در ادامه، روش‌های توزیع آزاد نیز برای کاهش وابستگی به انتخاب توزیع پارامتریک توسعه یافتند. وو و همکاران [۱۵] نمودار میانگین متحرک موزون نمایی توزیع آزاد و هه و همکاران [۱۶] نمودار کنترل جمع تجمعی ناپارامتریک را برای داده‌های زمان بین رویدادها و شدت ارائه کردند. در سال‌های اخیر نیز نمودار میانگین متحرک موزون نمایی تطبیقی و ناپارامتریک برای داده‌های چندمتغیره توسعه یافته [۱۷] و نمودارهای رتبه‌محور و نقطه تغییر توزیع آزاد نیز معرفی شدند [۱۸-۱۹]. این مطالعات نشان‌دهنده حرکت ادبیات به سمت روش‌های انعطاف‌پذیرتر و کاهش فرض‌های توزیعی هستند؛ باین حال، معمولاً ساختار کاکس برای عوامل توضیحی را در خود جای نمی‌دهند.

در جریان دیگری از ادبیات، زمان رویداد از دیدگاه تحلیل بقا و رویدادهای تکرارشونده بررسی شده است. مدل کاکس [۲۰] چارچوبی مهم برای ارتباط نرخ مخاطره با متغیرهای توضیحی مشاهده‌شده فراهم می‌کند. برای رویدادهای تکرارشونده نیز اندرسون و گیل [۲۱]، پرتیس و همکاران [۲۲] و وی و همکاران [۲۳] چارچوب‌هایی مبتنی بر مدل‌های بقا و فرایند شمارشی ارائه کردند. همچنین، احمد و همکاران [۲۴] چارچوب پایش تعدیل‌شده بر اساس ریسک را برای زمان بین رویدادها بر مبنای فرایند پواسون ناهمگن ارائه کردند و نشان دادند که در سیستم‌های پیچیده، فرض نرخ رویداد ثابت ممکن است مناسب نباشد. این رویکرد اهمیت لحاظ کردن عوامل محیطی و عملیاتی در مدل زمان رویداد را نشان می‌دهد؛ باین حال، شدت رویداد و وابستگی مشترک آن با زمان بین رویداد در قالب کاپولا در آن وارد نشده است. در همین راستا، مطالعات جدید در سال‌های اخیر نیز روش‌های تطبیقی، ناپارامتریک و حداکثر میانگین متحرک موزون نمایی با فاصله نمونه‌گیری متغیر را برای پایش مشترک زمان بین رویدادها و شدت توسعه داده‌اند [۲۵-۱۹-۱۷]. همچنین، مطالعات دیگری نیز به توسعه نمودارهای کنترل برای پایش زمان بین رویدادها و پایش همزمان زمان بین رویداد و شدت پرداخته‌اند که بر گسترش روش‌های پایش در این حوزه تأکید دارند [۲۸-۲۶]. مرور جامع سال ۲۰۲۶ نیز نشان می‌دهد که ادبیات این حوزه عمدتاً در زمینه نمودارهای کنترل، توزیع‌های نمایی، ویبول و گاما، نمودارهای کنترل میانگین متحرک موزون نمایی و جمع تجمعی، پایش چندمتغیره و روش‌های توزیع آزاد گسترش یافته است [۶].

بنابراین، بر اساس ادبیات بررسی‌شده، شکاف روش‌شناختی مشخصی در ادغام همزمان مدل بقا برای زمان بین رویدادها، اثر متغیرهای توضیحی قابل مشاهده با مدل کاکس و وابستگی میان زمان و شدت با استفاده از توابع کاپولا در یک چارچوب واحد وجود دارد. این شکاف، تفاوت اصلی پژوهش حاضر با مطالعات پیشین را شکل می‌دهد. در رویکرد پیشنهادی، زمان بین رویدادها به‌عنوان متغیری با ساختار نرخ مخاطره مدل می‌شود، متغیر توضیحی مشاهده‌شده از طریق مدل کاکس وارد شده و توابع کاپولا وابستگی میان زمان و شدت رویداد را مدل می‌نماید. بدین ترتیب، اطلاعات زمان، شدت و عوامل اثرگذار مشاهده‌شده به‌صورت همزمان در چارچوب پایش در نظر گرفته می‌شوند [۲۷-۹-۶-۳].

۳- روش تحقیق

مدل کاکس به‌طور مستقیم به نرخ مخاطره می‌پردازد که نشان‌دهنده احتمال وقوع رویداد در یک زمان مشخص با توجه به این‌که رویداد تا آن زمان رخ نداده است، می‌باشد. در این مدل تابع چگالی زمان بقا از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$f(t) = h(t)s(t) \quad (۱)$$

که در آن $S(t) = P(T > t)$ تابع بقا و $h(t)$ که به‌صورت زیر تعریف می‌گردد به عنوان تابع مخاطره معرفی می‌شود.

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} \quad (۲)$$

بدین ترتیب رابطه بین تابع بقا و تابع توزیع به‌صورت زیر بیان می‌شود که $F(t) = \int_0^t f(t) dt$ تابع توزیع تجمعی زمان بقا می‌باشد.

$$S(t) = 1 - F(t) \quad (3)$$

در این مدل، متغیرهای تاثیرگذار ورودی (x) موجب تاثیر بر تابع مخاطره آماره شده و در نتیجه تابع مخاطره شرطی به صورت رابطه زیر می باشد:

$$h(t|x) = h_0(t)q(x) \quad (4)$$

که $q(x)$ یک تابع غیر منفی مشخص و $h_0(t)$ یک تابع مخاطره پایه اختیاری می باشد. همچنین یک مدل رایج برای $q(x)$ همان $\exp(\beta^T x)$ می باشد که $\beta^T = (\beta_1, \dots, \beta_p)$ بردار ضرایب رگرسیون و x بردار متغیرهای تاثیرگذار می باشد. در نتیجه تابع مخاطره شرطی به صورت رابطه زیر به دست می آید:

$$h(t|x) = h_0(t)\exp(\beta^T x) \quad (5)$$

با استفاده از تعریف مخاطره تجمعی، از آنجایی که $s_0(t) = \exp(-H_0(t)) = \exp(-\int_0^t h_0(t)dt)$ تابع بقا و H_0 تابع مخاطره پایه تجمعی می باشد، به طور مشابه، می توان اثبات کرد که تابع بقا مطابق رابطه زیر قابل دستیابی است:

$$s(t|x) = s_0(t)^{q(x)} = s_0(t)^{\exp(\beta^T x)} \quad (6)$$

در نهایت، با هدف لحاظ کردن اثر متغیرهای تاثیرگذار کمی قابل مشاهده (قابل اندازه گیری) داریم:

$$h(t|x) = h_0(t)\exp(\beta^T x) \quad (7)$$

$$s(t|x) = s_0(t)^{\exp(\beta^T x)} = e^{-H_0(t)\exp(\beta^T x)} \quad (8)$$

$$f(t|x) = h_0(t)\exp(\beta^T x)e^{-H_0(t)\exp(\beta^T x)} \quad (9)$$

انگیزه اصلی استفاده از توابع کاپولا در این پژوهش، وجود وابستگی میان زمان بین رخداد و شدت رخداد است. در شرایطی که این دو ویژگی به صورت وابسته تغییر می کنند، مدل سازی حاشیه ای و مستقل آن ها نمی تواند رفتار مشترک فرآیند را به طور کامل نمایش دهد. از آنجا که آماره پایش پیشنهادی تابعی از هر دو متغیر است، ساختار وابستگی آن ها مستقیماً بر توزیع آماره و در نتیجه بر حدود کنترل تاثیر می گذارد. توابع کاپولا با تفکیک توزیع های حاشیه ای از ساختار وابستگی، امکان استفاده از توزیع های حاشیه ای متفاوت و در عین حال مدل سازی مستقل وابستگی میان آن ها را فراهم می کنند. بنابراین، کاپولا در چارچوب حاضر ابزاری برای انتقال ساختار وابستگی میان زمان و شدت به توزیع آماره پایش و حدود کنترل محسوب می شود.

قضیه اسکالر، به نقشی که کاپولاها در ارتباط میان توابع توزیع توام چندمتغیره و توابع حاشیه ای یک متغیره آن ها ایفا می کنند، اشاره دارد. این قضیه چارچوب اساسی برای تفکیک ساختار وابستگی از توزیع های حاشیه ای و ساخت توزیع مشترک بر مبنای کاپولا فراهم می کند [۲۹-۳۰]. فرض کنید H تابع توزیع توام با توابع توزیع حاشیه ای F و G باشد، در این صورت کاپولای C وجود دارد به طوری که برای هر $y, t \in R$ داشته باشیم:

$$H(y, t) = C(F(y), G(t)) \quad (10)$$

اگر توابع حاشیه ای F و G پیوسته باشند آن گاه کاپولای C یکتا می باشد. اگر C یک کاپولا باشد و $F(y)$ و $G(t)$ توابع توزیع باشند، آن گاه تابع H تعریف شده به شکل تساوی بالا، یک تابع توزیع توام با توابع حاشیه ای $F(y)$ و $G(t)$ است. این قضیه، نحوه تفکیک وابستگی از حاشیه ها و ارتباط بین توزیع توام با توابع کاپولا و توابع توزیع حاشیه ای را ممکن ساخته و باعث می شود مدل سازی وابستگی، مستقل از نوع توزیع های حاشیه ای انجام شود. قضیه مذکور، قابلیت بیان تابع کاپولا بر حسب تابع توزیع توام و وارون توابع توزیع حاشیه ای را دارد. اگر $H(y, t)$ تابع توزیع توام با توابع توزیع حاشیه ای $F(y)$ و $G(t)$ و دارای کاپولای C باشد و $F^{(-1)}$ و $G^{(-1)}$ به ترتیب وارون های توابع $F(y)$ و $G(t)$ باشند. آن گاه برای هر (u, v) داریم:

$$C(u, v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)) \quad (11)$$

در این پژوهش از کاپولای ارشمیدسی به دلیل تشخیص آسان ساختار آن ها، گوناگونی این خانواده از کاپولاها و قابلیت بسیار بالا در توصیف وابستگی های دمی، برای مدل سازی وابستگی بکارگیری شده است. در این خانواده از کاپولاها، کاپولای کلاتون برای وابستگی دمی پایین، کاپولای

گامبل برای وابستگی دمی بالا و کاپولای فرانک برای وابستگی متقارن بدون وابستگی دمی انتخاب شده‌اند. تابع توزیع کاپولای دومتغیره گامبل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(u, v; \theta) = \exp\left(-((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta)^{\frac{1}{\theta}}\right), \quad \theta \geq 1 \quad (12)$$

که یک کاپولای نامتقارن می‌باشد و وابستگی بیشتری را در دم مثبت نسبت به دم منفی نشان می‌دهد. برای کاپولای گامبل، می‌توان اثبات کرد که ضریب همبستگی رتبه‌ای کندال از طریق معادله زیر با پارامتر وابستگی کاپولا مرتبط است.

$$\tau = 1 - \frac{1}{\theta} \iff \theta = \frac{1}{1-\tau} \quad (13)$$

همچنین تابع توزیع کاپولای دو متغیره کلایتون به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(u, v; \theta) = (u^{(-\theta)} + v^{(-\theta)} - 1)^{\left(\frac{-1}{\theta}\right)}, \quad \theta > 0 \quad (14)$$

این کاپولا نیز یک کاپولای نامتقارن است که وابستگی بیشتری را در دم منفی نسبت به دم مثبت نشان می‌دهد. برای کاپولای کلایتون، می‌توان اثبات کرد که ضریب همبستگی رتبه‌ای کندال از طریق معادله زیر با پارامتر وابستگی مرتبط است:

$$\tau = \frac{\theta}{\theta + 2} \iff \theta = \frac{2\tau}{1 - \tau} \quad (15)$$

و در نهایت تابع توزیع کاپولای دو متغیره فرانک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(u, v; \theta) = -\left(\frac{1}{\theta}\right) \ln \left(1 + \frac{(e^{(-\theta u)} - 1)(e^{(-\theta v)} - 1)}{e^{(-\theta)} - 1}\right) \quad (16)$$

این کاپولا متقارن است و برای مدل‌سازی ساختارهای وابستگی با همبستگی مثبت یا منفی استفاده می‌شود. می‌توان اثبات کرد که ضریب همبستگی رتبه‌ای کندال از طریق معادله (۱۷) با پارامتر وابستگی کاپولا مرتبط است که در آن $D_1(\theta)$ تابع دبی از نوع اول است.

$$\tau = 1 + \frac{4(D_1(\theta) - 1)}{\theta} \quad (17)$$

$$D_1(\theta) = \frac{1}{\theta} \int \frac{t}{e^t - 1} dt \quad (18)$$

۴- رویکردهای پایش پیشنهادی

نمودارهای کنترل مورد بحث در این بخش تحت سناریوی حضور و عدم حضور متغیرهای قابل مشاهده (قابل اندازه‌گیری) با استفاده از توابع کاپولای ارشمیدسی (در نظر گرفتن وابستگی) بسط داده خواهند شد. با توجه به این که هدف پژوهش تشخیص سریع وخامت وضعیت سیستم است، تنها افزایش ریسک مورد مطالعه قرار گرفته است. رویکردهای پایش پیشنهادی شامل نمودار کنترل مبتنی بر حدود احتمال می‌باشد.

انتخاب توزیع‌های حاشیه‌ای برای متغیرهای زمان بین رخدادها و شدت رخداد با توجه به ماهیت آماری متغیرها و شواهد ارائه‌شده در داده‌های واقعی انجام شد. متغیر زمان بین رخدادها T دارای مقادیر مثبت بوده و ماهیت آن با متغیرهای زمان بین رخدادها مطابقت دارد. از این رو، توزیع ویبول به دلیل انعطاف‌پذیری در نمایش رفتارهای مختلف نرخ خطر، قابلیت مدل‌سازی متغیرهای زمانی مثبت و کاربرد گسترده در تحلیل بقا و قابلیت اطمینان، به عنوان توزیع حاشیه‌ای T در نظر گرفته شد. از سوی دیگر، شدت رخداد Y نیز یک متغیر مثبت است که می‌تواند دارای چولگی و پراکندگی قابل توجه باشد. توزیع گاما به دلیل پشتیبانی روی مقادیر مثبت و انعطاف‌پذیری آن در نمایش شکل‌های مختلف توزیع برای مدل‌سازی شدت رخداد مناسب در نظر گرفته شد. همچنین با استفاده از آزمون کولموگروف-اسمیرنوف که در بخش مطالعه موردی به آن اشاره شده است، توزیع‌های ویبول و

گاما به عنوان توزیع های مناسب برای متغیرهای متناظر شناسایی شده اند. بنابراین، در پژوهش حاضر توزیع ویبول برای مدل سازی زمان بین رخدادها و توزیع گاما برای مدل سازی شدت رخداد به عنوان توزیع های حاشیه ای انتخاب شدند. استفاده از این توزیع های متفاوت در دو حاشیه با چارچوب کاپولا سازگار است، زیرا در این چارچوب می توان توزیع های حاشیه ای متفاوت را متناسب با ویژگی هر متغیر انتخاب و سپس وابستگی میان آن ها را به صورت جداگانه مدل سازی کرد.

تابع چگالی گاما و میانگین آن مطابق روابط (۱۹) و (۲۰) می باشد که در آن $\alpha > 0$ پارامتر شکل و $\eta > 0$ پارامتر مقیاس و $\Gamma(\alpha)$ تابع گاما می باشد.

$$f(y; \alpha, \eta) = \frac{y^{\alpha-1} \exp\left(\frac{-y}{\eta}\right)}{\Gamma(\alpha) \eta^\alpha}, y > 0 \quad (19)$$

$$E(Y) = a\eta \quad (20)$$

تابع چگالی ویبول و میانگین آن مطابق روابط (۲۱) و (۲۲) می باشد که در آن $\kappa > 0$ پارامتر شکل و $\lambda > 0$ پارامتر مقیاس است.

$$f(t; \kappa, \lambda) = \frac{\kappa}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\kappa-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^\kappa\right) \quad (21)$$

$$E(T) = \lambda \Gamma\left(1 + \frac{1}{\kappa}\right) \quad (22)$$

همچنین در مدل مخاطره متناسب کاکس، تابع مخاطره پایه به صورت تابع ویبول و مطابق رابطه (۲۳) فرض شده است.

$$h_0(t) = \frac{\kappa}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\kappa-1} \quad (23)$$

مشتق مرتبه دوم تابع توزیع کاپولا، $c(u, v; \theta) = \frac{\partial^2 C(u, v; \theta)}{\partial u \partial v}$ تابع چگالی کاپولا می باشد و با توجه به قضیه اسکالر، $F_Y(y) = u$ و $F_T(t) = v$ بوده و تابع چگالی مشترک زمان بین رویداد و شدت رویداد مطابق رابطه زیر بدست می آید:

$$f_{Y,T}(y, t) = c(u, v; \theta) f_Y(y) f_T(t) = c(F_Y(y), F_T(t)) f_Y(y) f_T(t) \quad (24)$$

از آنجا که عملکرد فرایند به طور همزمان تحت تاثیر زمان بین رویداد و شدت رویداد قرار دارد، استفاده از آماره نسبت، امکان تلفیق اطلاعات این دو متغیر وابسته را در قالب یک شاخص واحد فراهم می کند و مبنای مناسبی برای طراحی نمودار کنترل فراهم می آورد.

$$R = \frac{Y}{T} \quad (25)$$

این آماره به گونه ای طراحی شده است که افزایش شدت رویداد یا کاهش زمان بین رویدادها که هر دو نشان دهنده بدتر شدن عملکرد فرایند و افزایش احتمال خروج آن از شرایط تحت کنترل هستند، موجب افزایش مقدار R می شوند. بنابراین، تشخیص تغییرات نامطلوب بر مبنای افزایش مقدار آماره R انجام شده و به همین دلیل، برای پایش فرایند از حد کنترل بالایی به عنوان معیار اعلام هشدار استفاده می شود. به دلیل تفاوت مقیاس دو متغیر تصادفی اشاره شده، متغیرهای جدیدی تحت عنوان T' و Y' به عنوان نسخه های استاندارد شده و تحت کنترل T و Y به صورت رابطه (۲۶) تعریف می شوند به طوری که $E(T') = E(Y') = 1$ و تابع توزیع آن ها $F_{T'}(t) = F_T(t \mu_{T_0})$ ، $F_{Y'}(y) = F_Y(y \mu_{Y_0})$ و تابع توزیع و تابع چگالی مشترک آن ها $f_{Y',T'}(y, t)$ و $F_{Y',T'}(y, t)$ می باشد.

$$T' = \frac{T}{\mu_{T_0}}, \quad Y' = \frac{Y}{\mu_{Y_0}}, \quad T = T' \mu_{T_0}, \quad Y = Y' \mu_{Y_0} \quad (26)$$

که در این صورت زمان بین رویدادها به توزیع ویبول با پارامتر جدید شکل $\kappa > 0$ و مقیاس $\lambda = \frac{\mu_{T_0}}{\Gamma(1+\frac{1}{\kappa})}$ و شدت رویداد به توزیع گاما با پارامتر جدید شکل $\alpha > 0$ و مقیاس $\alpha = \frac{\mu_{Y_0}}{\alpha}$ تبدیل خواهند شد. همچنین پس از تغییر متغیر رابطه (۲۶)، ماتریس ژاکوبین تبدیل متغیر، به صورت رابطه زیر بدست می آید:

$$J = \frac{\partial(T, Y)}{\partial(T', Y')} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial T'} & \frac{\partial T}{\partial Y'} \\ \frac{\partial Y}{\partial T'} & \frac{\partial Y}{\partial Y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{T_0} & 0 \\ 0 & \mu_{Y_0} \end{bmatrix} \quad (27)$$

از آنجا که قدر مطلق دترمینان ماتریس ژاکوبین برابر است با $|J| = \mu_{T_0}\mu_{Y_0}$ ، تابع چگالی مشترک رابطه (۲۴) با توجه به متغیرهای جدید به صورت رابطه زیر خواهد بود:

$$f_{Y', T'}(y, t) = \mu_{T_0}\mu_{Y_0} c(F_Y(y\mu_{Y_0}), F_T(t\mu_{T_0})) f_Y(y\mu_{Y_0}) f_T(t\mu_{T_0}) \quad (28)$$

همچنین آماره نسبت، با استفاده از نسخه های استاندارد شده زمان بین رویداد و شدت رویداد به صورت زیر تبدیل می شود:

$$R' = \frac{Y'}{T'}, \quad Y' = R' T' \quad (29)$$

با این وجود، تابع چگالی آماره R' تابع چگالی حاشیه ای رابطه (۲۸) بوده و به صورت زیر استخراج می گردد که به دلیل مثبت بودن زمان، انتگرال روی بازه $(0, +\infty)$ محاسبه می شود:

$$f_{R'}(r) = \int_0^{\infty} t f_{Y', T'}(rt, t) dt \quad (30)$$

در نهایت، با مدنظر قراردادن روابط (۲۸)، (۲۹) و (۳۰) تابع چگالی آماره نسبت به صورت رابطه زیر بدست می آید.

$$f_{R'}(r) = \mu_{T_0}\mu_{Y_0} \int_0^{\infty} t c(F_Y(rt\mu_{Y_0}), F_T(t\mu_{T_0})) f_Y(rt\mu_{Y_0}) f_T(t\mu_{T_0}) dt \quad (31)$$

اگرچه در مطالعه حاضر به دلیل تمرکز بر تشخیص وخامت فرآیند، پایش بر اساس حد کنترل بالایی و افزایش مقدار آماره R انجام شده است، چارچوب مبتنی بر حدود احتمال قابلیت توسعه به پایش دوطرفه را نیز دارد. در این حالت، علاوه بر حد بالایی برای شناسایی افزایش ریسک، حد پایینی نیز برای شناسایی کاهش ریسک قابل تعریف است. با تعریف $LCL = F_R^{-1}(\alpha_L)$ و $UCL = F_R^{-1}(1 - \alpha_U)$ ، مقادیر کمتر از حد پایین می توانند بیانگر بهبود فرآیند و مقادیر بیشتر از حد بالا بیانگر وخامت فرآیند باشند. برای سطح خطای کلی 0.0027 و تقسیم مساوی خطا میان دودم، می توان $\alpha_L = \alpha_U = 0.00135$ را در نظر گرفت. توسعه کامل این ساختار دوطرفه می تواند در مطالعات آتی مورد بررسی قرار گیرد.

۴-۱- رویکرد پایش اول (عدم حضور متغیرهای تاثیرگذار)

در ابتدا حالت ساده تر بدون حضور متغیرهای تاثیرگذار، بررسی و سپس حالت پیچیده تر ارائه می شود. با توجه به این که دو متغیر زمان بین رویداد و شدت رویداد وابسته به هم فرض شده و این وابستگی توسط کاپولاهای ارشمیدسی مطرح شده مدل سازی می شود، لذا با در نظر گرفتن مفروضات توزیع های حاشیه ای اشاره شده و رابطه (۳۱)، نمودار کنترل مبتنی بر حدود احتمال برای رویکرد پایش اول به صورت زیر می باشد:

$$a_1 = \int_{UCL_1}^{+\infty} \mu_{T_0} \mu_{Y_0} \int_0^{\infty} \left(\frac{(rt\mu_{Y_0})^{\alpha-1} \exp\left(\frac{-rt\mu_{Y_0}}{\eta}\right)}{\Gamma(\alpha)\eta^\alpha} \right) \left(\frac{\kappa}{\lambda} \left(\frac{t\mu_{T_0}}{\lambda}\right)^{\kappa-1} \exp\left(-\left(\frac{t\mu_{T_0}}{\lambda}\right)^\kappa\right) \right) t dt \left(c \int_0^{rt\mu_{Y_0}} \frac{m^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{m}{\eta}\right)}{\Gamma(\alpha)\eta^\alpha} dm, 1 - \exp\left(-\left(\frac{t\mu_{T_0}}{\lambda}\right)^\kappa\right) \right) dr \quad (32)$$

۲-۴- رویکرد پایش دوم (حضور متغیرهای تاثیرگذار کمی قابل مشاهده)

در ادامه، اثر متغیرهای تاثیرگذار قابل مشاهده (قابل اندازه‌گیری) در طراحی نمودار کنترل لحاظ می‌شود. در حضور متغیرهای تاثیرگذار قابل مشاهده، مدل مخاطره متناسب کاکس امکان لحاظ کردن اثر این متغیرها بر زمان بین رویداد را فراهم می‌کند. با در نظر گرفتن مفروضات توزیع‌های حاشیه‌ای اشاره شده و مدل مخاطره متناسب کاکس بر اساس روابط (۷) تا (۹) و همچنین رابطه (۳۱)، نمودار کنترل مبتنی بر حدود احتمال به صورت رابطه (۳۳) بدست می‌آید. از آنجا که متغیر توضیحی قابل مشاهده در مدل کاکس می‌تواند در میان مشاهدات مقادیر متفاوتی داشته باشد، به منظور تعیین یک حد کنترل ثابت و مستقل از مقدار مشخصی از x ، اثر این متغیر به صورت حاشیه‌ای در نظر گرفته شد.

با در نظر گرفتن مقداری مشخص برای خطای نوع اول a_1 و a_2 و با جایگذاری توابع کاپولای ارائه شده در روابط (۳۲) و (۳۳)، حد کنترل بالا نمودارهای کنترل ارائه شده که با UCL_1 و UCL_2 نمایش داده می‌شود، برای سطح خطای نوع اول به صورت عددی تعیین می‌شوند.

$$a_2 = \int_{UCL_2}^{+\infty} \mu_{T_0} \mu_{Y_0} \int_0^{\infty} \int_x \left(\frac{(rt\mu_{Y_0})^{\alpha-1} \exp\left(\frac{-rt\mu_{Y_0}}{\eta}\right)}{\Gamma(\alpha)\eta^\alpha} \right) \left(\frac{h_0(t\mu_{T_0}) \exp(\beta_1 x) e^{-H_0(t\mu_{T_0}) \exp(\beta_1 x)}}{c \int_0^{rt\mu_{Y_0}} \frac{m^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{m}{\eta}\right)}{\Gamma(\alpha)\eta^\alpha} dm, 1 - e^{-H_0(t\mu_{T_0}) \exp(\beta_1 x)}} \right) (f(x)) t dx dt \left(c \int_0^{rt\mu_{Y_0}} \frac{m^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{m}{\eta}\right)}{\Gamma(\alpha)\eta^\alpha} dm, 1 - e^{-\left(\int_0^{t\mu_{T_0}} h_0(t\mu_{T_0}) dt\right) \exp(\beta_1 x)} \right) dr \quad (33)$$

$$= \int_{UCL_2}^{+\infty} \mu_{T_0} \mu_{Y_0} \int_0^{\infty} \int_x \left(\frac{(rt\mu_{Y_0})^{\alpha-1} \exp\left(\frac{-rt\mu_{Y_0}}{\eta}\right)}{\Gamma(\alpha)\eta^\alpha} \right) \left(\frac{h_0(t\mu_{T_0}) \exp(\beta_1 x) e^{-\left(\int_0^{t\mu_{T_0}} h_0(t\mu_{T_0}) dt\right) \exp(\beta_1 x)}}{c \int_0^{rt\mu_{Y_0}} \frac{m^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{m}{\eta}\right)}{\Gamma(\alpha)\eta^\alpha} dm, 1 - e^{-\left(\int_0^{t\mu_{T_0}} h_0(t\mu_{T_0}) dt\right) \exp(\beta_1 x)}} \right) (f(x)) t dx dt \left(c \int_0^{rt\mu_{Y_0}} \frac{m^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{m}{\eta}\right)}{\Gamma(\alpha)\eta^\alpha} dm, 1 - e^{-\left(\int_0^{t\mu_{T_0}} h_0(t\mu_{T_0}) dt\right) \exp(\beta_1 x)} \right) dr$$

$$= \int_{UCL_2}^{+\infty} \mu_{T_0} \mu_{Y_0} \int_0^{\infty} \int_x \left(\frac{\left(\frac{rt\mu_{Y_0}}{\eta} \right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{rt\mu_{Y_0}}{\eta}\right)}{\Gamma(\alpha)\eta^{\alpha}} \right) \left(\frac{\left(\frac{t\mu_{T_0}}{\lambda} \right)^{\kappa-1} \exp(\beta_1 x) e^{-\left(\frac{t\mu_{T_0}}{\lambda}\right)^{\kappa}}}{\exp(\beta_1 x)} \right) (f(x)) t dx dt dr$$

۵- ارزیابی عملکرد رویکردهای پایش

یکی از مهم‌ترین مراحل ارزیابی عملکرد رویکردهای پایش پیشنهادی، انتخاب مناسب پارامترهای مدل است؛ زیرا نتایج حاصل از ارزیابی عملکرد نمودارهای کنترل تا حد زیادی به مقادیر این پارامترها وابسته است. از این‌رو، پارامترهای مورد استفاده در این پژوهش به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که ضمن سازگاری با مفروضات مدل ارائه‌شده، امکان بررسی رفتار نمودارهای کنترل در شرایط مختلف فرایند و سطوح متفاوت وابستگی بین متغیرها را فراهم آورند. به منظور ایجاد قابلیت مقایسه بین نتایج، تنها پارامترهای مرتبط با ساختار وابستگی یا وضعیت فرایند، مطابق سناریوهای طراحی‌شده، تغییر می‌کنند و سایر پارامترها ثابت نگه داشته شدند. پارامترهای توزیع‌های حاشیه‌ای، تابع چگالی متغیر اثرگذار قابل مشاهده و ضریب مدل کاکس با استفاده از روش حداکثر درست‌نمایی در حالت تحت کنترل از داده‌های مورد مطالعه برآورد شدند. همچنین با استفاده از آزمون کولموگروف-اسمیرنوف، توزیع‌های ویبول و گاما به‌عنوان توزیع‌های مناسب برای متغیرهای متناظر شناسایی شده‌اند (جدول ۱). سپس با استفاده از این پارامترها، احتمال خروج از کنترل و ARL از طریق حل عددی روابط احتمال مربوط به هر رویکرد مورد محاسبه قرارگرفت. در حالت تحت کنترل، پارامترهای مدل به‌صورت جدول (۲) می‌باشد. برای ایجاد قابلیت مقایسه بین انتخاب کاپولا‌های مختلف، میزان وابستگی میان زمان بین رویداد و شدت رویداد بر اساس ضریب همبستگی رتبه‌ای کندال تعیین و پارامتر متناظر هر یک از کاپولا‌های مورد استفاده از روابط (۱۳)، (۱۵)، (۱۷) و (۱۸) محاسبه و در جدول (۳) مشخص گردید. همچنین سه دسته سناریوی شیف، شامل شیف در زمان بین رویدادها، شدت رویدادها و شیف همزمان در نظر گرفته شد. با توجه به تفاوت ماهیت زمان بین رویدادها و شدت رویدادها، شیف‌های یکسان برای این دو متغیر لزوماً مناسب نیست. از این‌رو، سناریوها با شیف‌های مستقل و متناسب با ویژگی هر متغیر طراحی شدند.

جدول ۱- نتایج آزمون برازش توزیع‌های حاشیه‌ای بر روی داده‌ها

Table 1. Results of fitting marginal distributions to the data

متغیر	عنوان توزیع	α	η	D_{KS}	عنوان توزیع	κ	λ	D_{KS}
زمان بین رویداد	گاما	11.6488	5.0562	0.1264	ویبول	3.8123	65.1584	0.0818
شدت رویداد		18.0107	274.6135	0.1129		4.8472	5396.4958	0.1228

جدول ۲- پارامترهای مدل در حالت تحت کنترل

Table 2. Model Parameters Under In-Control Condition

عنوان	زمان بین رویداد (توزیع ویبول)	شدت رویداد (توزیع گاما)	متغیر تاثیرگذار قابل مشاهده (x) (توزیع گاما)				
متغیر	λ	α	η	α	η	β	κ
مقدار	65.1584	18.0107	274.6135	7.3846	0.6714	0.2501	3.8123

جدول ۳- تعیین سطوح وابستگی و محاسبه پارامتر کاپولا

Table 3. Determination of Dependence Levels and Calculation of Copula Parameters

سطح وابستگی	ضریب همبستگی کندال	کلایتون	فرانک	گامبل
-------------	--------------------	---------	-------	-------

1.25	1.86	0.5	0.2	ضعیف
2	5.74	2	0.5	متوسط
5	18.19	8	0.8	قوی

جدول ۴- سناریوهای شیفت‌های کاهشی زمان بین رویداد، شیفت‌های افزایشی شدت رویداد و شیفت همزمان

Table 4. Scenarios for Decreasing Shifts in Time between Event, Increasing Shifts in Event Intensity, and Simultaneous Shifts

سناریو جداگانه	شیفت	وضعیت	سناریو همزمان	شیفت زمان	شیفت شدت	وضعیت
زمان	%1	تغییر خیلی کم	متوازن	%1	%5	تغییر خیلی کم هر دو
	%2.5	تغییر کم	متوازن	%2.5	%10	تغییر کم هر دو
	%5	تغییر متوسط	متوازن	%5	%20	تغییر متوسط هر دو
	%10	تغییر زیاد	متوازن	%10	%30	تغییر زیاد هر دو
	%15	تغییر خیلی زیاد	متوازن	%5	%40	تغییر خیلی زیاد هر دو
شدت	%5	تغییر خیلی کم	نامتوازن	%1	%40	شدت بسیار غالب
	%10	تغییر کم	نامتوازن	%5	%30	شدت نسبتا غالب
	%20	تغییر متوسط	نامتوازن	%15	%5	زمان بسیار غالب
	%30	تغییر زیاد	نامتوازن	%15	%10	زمان نسبتا غالب
	%40	تغییر خیلی زیاد	-	-	-	-

مطابق جدول (۴)، در سناریوی اول، کاهش زمان بین رویدادها با کاهش پارامتر مقیاس توزیع ویبول در نظر گرفته شد که بیانگر افزایش نرخ وقوع و نامطلوب‌تر شدن وضعیت فرایند است. در سناریوی دوم، افزایش شدت رویدادها با افزایش پارامتر مقیاس توزیع گاما اعمال شد که نشان‌دهنده افزایش هزینه و نامطلوب‌تر شدن عملکرد فرایند است. در سناریوی سوم، تغییرات زمان و شدت به‌صورت همزمان طوری اعمال شدند تا هم تغییرات مشابه و هم شرایطی که تغییر یکی از متغیرها غالب است، ارزیابی شود. برای ارزیابی عملکرد نمودار کنترل، احتمال واقعی عدم کشف وضعیت خارج از کنترل به‌صورت حل عددی روابط نهایی رویکردهای پایش محاسبه گردید. حدود کنترل بالا در شرایط تحت کنترل، با $\alpha = 0.0027$ ، به‌گونه‌ای تعیین شد که احتمال خطای نوع اول مطابق رابطه زیر باشد:

$$P(R > UCL | In - Control) = 0.0027 \quad (34)$$

در مقابل، احتمال عدم کشف شیفت که با β نمایش داده می‌شود برابر است با:

$$P(R < UCL | Out - Of - Control) = \beta \quad (35)$$

در این پژوهش، وابستگی موردنظر، وابستگی درون‌مشاهده‌ای زمان بین رویداد و شدت رویداد است و استقلال بین مشاهدات متوالی برای محاسبه ARL فرض می‌شود. در نتیجه متوسط طول دنباله توسط رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$ARL = \frac{1}{1 - \beta} \quad (36)$$

به‌منظور ارزیابی عملکرد دو رویکرد پایش، رفتار ARL تحت سناریوهای شیفت جدول شماره (۴) از طریق سه خانواده کاپولای فرانک، کلاتون و گامبل در سه سطح وابستگی بررسی شد. مقادیر کوچک‌تر ARL نشان‌دهنده حساسیت بیشتر نمودار کنترل نسبت به تغییرات فرایند است.

جدول ۵- عملکرد رویکردهای پایش پیشنهادی تحت سناریو شیفت زمان و شیفت شدت برای کاپولاهای ارشمیدسی

Table 5. Performance of the Proposed Monitoring Approaches under Time-Shift and Intensity-Shift Scenarios for Archimedean Copulas

۳	۴	۵	۶	۷	۸
ARL رویکرد پایش اول	ARL رویکرد پایش دوم	ARL رویکرد پایش اول	ARL رویکرد پایش دوم	ARL رویکرد پایش اول	ARL رویکرد پایش دوم

زمان	شیفت	وضعیت	واستگی	ARL رویکرد پیش اول	ARL رویکرد پیش دوم	گامبل	کلاتون	فرانک	گامبل	کلاتون	فرانک	گامبل	کلاتون	فرانک
0.2	348.39	337.18	347.65	344.48	337.28	343.55	261.47	236.93	260.58	251.33	232.30	244.95	232.30	251.33
0.5	345.46	325.91	341.87	344.03	309.12	340.70	258.92	196.61	246.94	247.60	196.24	236.85	196.24	247.60
0.8	320.22	300.46	323.38	342.24	276.68	283.39	253.14	163.81	191.35	209.29	134.88	155.72	134.88	209.29
0.2	317.63	292.98	315.96	308.79	292.77	306.68	188.45	157.95	186.64	176.29	149.03	167.23	149.03	176.29
0.5	310.28	274.10	302.50	307.69	247.32	300.30	185.23	110.13	169.36	168.11	109.07	155.86	109.07	168.11
0.8	303.58	218.74	263.11	251.37	184.07	190.55	175.73	78.51	101.63	115.67	49.52	70.45	49.52	115.67
0.2	268.13	231.43	265.32	256.84	226.70	253.34	104.75	76.25	101.09	93.28	65.60	86.79	65.60	93.28
0.5	254.77	190.22	242.68	252.98	153.83	240.65	100.26	40.48	85.64	81.00	38.67	71.16	38.67	81.00
0.8	247.48	127.11	185.09	154.31	95.66	97.19	85.85	21.71	31.12	35.45	6.71	18.30	6.71	35.45
0.2	184.82	143.82	181.29	176.38	132.03	171.63	62.78	40.78	59.59	52.42	33.15	49.10	33.15	52.42
0.5	172.78	97.77	156.86	155.96	67.23	142.52	57.42	17.65	46.72	40.90	16.83	35.12	16.83	40.90
0.8	161.20	39.44	88.76	53.80	31.76	30.34	41.85	7.70	10.69	12.18	1.84	6.52	1.84	12.18
0.2	119.90	89.00	115.18	118.45	72.94	115.49	39.74	24.04	37.54	31.36	18.96	29.25	18.96	31.36
0.5	115.27	50.42	99.97	83.66	30.94	74.51	34.42	8.86	27.28	21.75	8.69	18.83	8.69	21.75
0.8	101.27	12.90	40.75	20.08	10.55	11.92	19.13	3.49	4.31	5.15	1.26	3.09	1.26	5.15

نتایج جدول (۵) نشان می‌دهد که با افزایش اندازه شیفت زمانی، ARL در هر دو رویکرد کاهش می‌یابد؛ به گونه‌ای که انحرافات بزرگ‌تر از وضعیت تحت کنترل با سرعت بیشتری شناسایی می‌شوند. با این حال، الگوی تغییر ARL در سطوح مختلف وابستگی و ساختارهای کاپولا یکسان نیست. این موضوع نشان می‌دهد که اثر یک شیفت زمانی بر حساسیت نمودار، مستقل از ساختار وابستگی بین زمان و شدت نیست و تغییر در وابستگی می‌تواند احتمال ایجاد سیگنال را حتی با ثابت بودن اندازه شیفت تغییر دهد. از این رو، ارزیابی عملکرد نمودار در برابر شیفت‌های زمانی باید همزمان با ساختار وابستگی بین متغیرهای پایش انجام شود. نتایج جدول (۵) نشان‌دهنده برتری نمودار کنترل مبتنی بر کاکس (رویکرد دوم) در سناریوهای مختلف وابستگی و نوع کاپولا می‌باشد. اما میزان این برتری به قدرت وابستگی و نوع خانواده کاپولا وابسته بود.

در سناریوی شیفت شدت، افزایش شیفت به کاهش ARL منجر شده است که بیانگر افزایش قابلیت نمودار در تشخیص انحرافات شدیدتر در شدت رویداد است. با این حال، تفاوت ARL در سطوح مختلف وابستگی نشان می‌دهد که اثر شیفت شدت صرفاً به اندازه تغییر در شدت رویداد محدود نمی‌شود، بلکه به نحوه وابستگی آن با زمان بین رویداد نیز وابسته است. از آنجا که آماره پایش بر اساس ترکیب همزمان زمان و شدت تعریف شده است، تغییر ساختار وابستگی می‌تواند توزیع آماره و در نتیجه احتمال عبور از حد کنترل را تغییر دهد. بنابراین، ساختار وابستگی یکی از عوامل مؤثر در تفسیر حساسیت نمودار نسبت به تغییرات شدت است. نتایج نشان‌دهنده این است که برای شیفت خالص شدت، نمودار کنترل مبتنی بر کاکس (رویکرد دوم) در سناریوهای مختلف وابستگی و نوع کاپولا نسبت به نمودار کنترل رویکرد اول عملکرد بهتری داشت. به طور کلی، شدت به طور یکنواخت‌تری از متغیر اثرگذار بهره می‌برد، زیرا Y مستقیماً از طریق کاپولا به T مرتبط است و هرگونه اطلاعات که سیگنال مؤثر T را بیش‌تر می‌کند، به آماره‌ی ترکیبی نیز منتقل می‌شود.

جدول ۶- عملکرد رویکردهای پایش پیشنهادی تحت سناریو شیفت همزمان برای کاپولاهای ارشمیدسی

Table 6. Performance of the Proposed Monitoring Approaches under the Simultaneous Shift Scenario for Archimedean Copulas

ARL رویکرد پیش دوم		ARL رویکرد پیش اول		وابستگی	وضعیت شیفت	شیفت شدت	شیفت زمان	
گامبل	کلاتون	فرانک	گامبل					کلاتون
229.90	211.94	236.37	242.13	216.43	243.62	0.2	زمان خیلی کم شدت خیلی کم	%1
218.32	166.03	230.07	227.52	173.25	240.76	0.5		
120.61	108.94	176.06	166.96	125.11	233.86	0.8		
142.66	119.40	151.06	155.99	126.92	158.49	0.2	زمان کم شدت کم	%2.5
126.30	74.74	138.02	138.42	81.55	154.64	0.5		
39.88	27.97	71.55	71.98	43.76	143.37	0.8		
62.38	42.94	67.38	71.84	50.92	75.11	0.2	زمان متوسط	%20
44.75	20.59	51.16	57.95	23.51	70.08	0.5		

7.92	2.57	14.30	15.62	9.10	54.67	0.8	شدت متوسط		
24.81	15.04	26.40	31.00	19.46	33.01	0.2	زمان زیاد	%30	%10
13.31	6.23	15.17	21.90	6.80	27.78	0.5	شدت زیاد		
2.38	1.18	3.44	3.08	2.60	13.12	0.8			
10.45	6.50	10.99	14.80	8.79	15.70	0.2	زمان خیلی زیاد	%40	%15
4.88	2.74	5.42	9.14	2.78	11.33	0.5	شدت خیلی زیاد		
1.26	1.04	1.64	1.37	1.40	2.43	0.8			
27.53	17.65	29.49	35.32	22.44	37.41	0.2	شدت غالب	%40	1%
17.25	7.93	19.86	25.40	8.12	32.12	0.5			
2.83	1.23	4.57	3.85	3.16	17.00	0.8			
35.52	22.39	37.89	43.08	28.13	45.68	0.2	شدت نسبتا غالب	%30	%5
22.05	9.94	25.45	32.12	10.85	40.30	0.5			
3.61	1.36	5.90	5.61	4.08	24.75	0.8			
76.94	48.50	80.24	83.47	60.03	87.08	0.2	زمان غالب	5%	%15
47.23	19.65	53.04	68.51	29.75	81.77	0.5			
7.44	3.69	12.10	21.01	8.15	66.99	0.8			
52.98	33.55	56.39	61.74	42.19	64.53	0.2	زمان نسبتا غالب	%10	%15
31.01	13.25	34.69	48.25	18.47	59.16	0.5			
4.99	1.93	7.79	11.34	5.49	43.72	0.8			

اما مهم‌ترین یافته‌ها در جدول (۶) مشاهده می‌شود؛ در حالت شیفتم همزمان، افزایش اندازه شیفتم در هر دو مؤلفه با کاهش *ARL* همراه است و این کاهش در شیفتم‌های بزرگ‌تر آشکارتر می‌شود. این رفتار نشان می‌دهد که وقوع همزمان انحراف در زمان و شدت، اطلاعات بیشتری برای تشخیص تغییر در اختیار نمودار قرار می‌دهد. در عین حال، تفاوت مقادیر *ARL* در سطوح مختلف وابستگی و توابع کاپولا بیانگر آن است که اثر ترکیبی شیفتم‌های زمانی و شدت به ساختار وابستگی میان دو متغیر حساس است. نتایج شیفتم‌های همزمان در حالتی که تغییر یکی از متغیرها غالب باشد نیز اهمیت وابستگی میان دو متغیر را نشان می‌دهد. بنابراین، حتی با ثابت یا کوچک بودن یکی از مؤلفه‌ها، تغییر مؤلفه دیگر می‌تواند عملکرد نمودار را به‌طور محسوسی تحت تأثیر قرار دهد. این یافته اهمیت مدل‌سازی وابستگی با کاپولا را نشان می‌دهد؛ زیرا تغییرات زمان و شدت لزوماً مستقل نیستند و اثر یک متغیر می‌تواند به وضعیت متغیر دیگر وابسته باشد. از دیدگاه صنعتی، بسیاری از اختلالات به‌صورت همزمان در زمان و شدت رخ می‌دهند؛ بنابراین، رویکرد پیشنهادی می‌تواند به‌عنوان یک سیستم هشدار زود هنگام چندمتغیره عمل کند. در شرایطی که تغییرات زمان، شدت و عوامل اثرگذار همزمان رخ می‌دهند، مدل‌سازی وابستگی و عوامل مشاهده‌شده می‌تواند نسبت به نمودارهای ساده، تشخیص سریع‌تری فراهم کند. نتایج شیفتم همزمان، بیان‌کننده برتری نمودار کنترل مبتنی بر کاکس (رویکرد دوم) در سناریوهای مختلف وابستگی و نوع کاپولا می‌باشد. در مجموع، نتایج تأکید می‌کنند که ارزیابی عملکرد نمودار کنترل، نه تنها بر اندازه شیفتم، بلکه بر شدت و ساختار وابستگی بین متغیرهای پایش‌شده و انتخاب کاپولای مناسب نیز وابسته است.

۶- مطالعه موردی

برای یکی از ماشین‌های صنعتی، طی بازه زمانی ۶ ساله، تمامی تاریخ‌های خرابی (برحسب روز) و همچنین هزینه‌های برآوردشده متناظر با خرابی‌ها، به عنوان شدت خرابی برحسب یورو ثبت شده است. این هزینه‌ها شامل کلیه هزینه‌های تعمیر و راه‌اندازی مجدد ماشین، از جمله هزینه قطعات یدکی و نیروی انسانی، و همچنین هزینه ناشی از توقف تولید است. همچنین میانگین لرزش دستگاه در طول فاصله زمانی بین ۲ خرابی متوالی با واحد میلی‌متر بر ثانیه (*mm/s*)، می‌تواند به‌عنوان یک متغیر اثرگذار قابل مشاهده در مدل مخاطرات متناسب کاکس در نظر گرفته شود، زیرا افزایش میزان لرزش معمولاً بیانگر افزایش ناپایداری، فرسودگی یا تغییر در شرایط عملیاتی دستگاه است. این تغییرات می‌توانند احتمال وقوع رویداد بعدی و در نتیجه زمان بین دو رویداد را تحت تأثیر قرار دهند. داده‌های مورد مطالعه به ۲ بخش تقسیم شده است: ۳۰ خرابی ثبت‌شده طی ۵ سال، از سال ۲۰۱۲ تا ۲۰۱۶، که در این پژوهش به‌عنوان مجموعه داده فاز I مورد استفاده قرار گرفته‌اند و ۱۴ خرابی ثبت‌شده طی ۲ سال، از سال ۲۰۱۷ تا ۲۰۱۸، که به‌عنوان مجموعه داده فاز II در نظر گرفته شده‌اند. در اصطلاحات قابلیت اطمینان، فاز I مطالعه را می‌توان متناظر با دوره نرخ خرابی ثابت ماشین در نظر گرفت؛ در حالی که دوره فاز II به‌عنوان آغاز دوره‌ای با نرخ خرابی بالقوه افزایشی در نظر گرفته می‌شود. بررسی‌های انجام‌شده طی دوره ۲۰۱۲ تا

در ۲۰۱۶ در خصوص این پدیده نشان داده‌اند که پس از وقوع و رفع یک خرابی، چنانچه خرابی بعدی در فاصله زمانی کوتاهی رخ دهد، این خرابی اغلب، ناشی از علل مشابه است. در نتیجه، زمان مورد نیاز برای شناسایی علت خرابی کاهش می‌یابد و هزینه قطعات یدکی نیز کمتر خواهد بود، زیرا این قطعات برای خرابی قبلی خریداری شده‌اند. در مقابل، هنگامی که خرابی بعدی پس از یک فاصله زمانی طولانی رخ می‌دهد، علل خرابی معمولاً با خرابی قبلی متفاوت بوده و به زمان بیشتری برای شناسایی علت خرابی و خرید قطعات یدکی جدید نیاز دارند. برای تأیید تحلیلی این رابطه، ضرایب همبستگی رتبه‌ای کندال و اسپیرمن به ترتیب برابر با ۰/۴۶۵۷ و ۰/۶۱۲۹ محاسبه و مقدار p -value متناظر نیز به ترتیب ۰/۰۰۰۳۵ و ۰/۰۰۰۳۲ می‌باشد. این نتایج وجود همبستگی مثبت معنادار میان این دو را تأیید می‌کند.

$$AIC = -2\ln(L) + 2K \quad (37)$$

$$BIC = -2\ln(L) + K\ln(n) \quad (38)$$

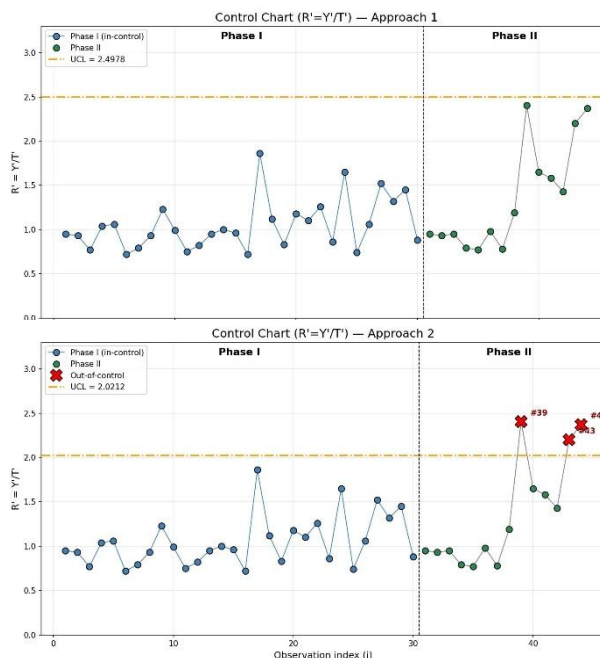
جدول ۷- مقدار پارامتر کاپولا برای داده‌های مورد مطالعه و انتخاب کاپولای مناسب

Table 7. Copula Parameter Estimates for the Study Data and Selection of the Appropriate Copula

عنوان کاپولا	مقدار پارامتر	Log-Likelihood	AIC	BIC
فرانک	4.148	6.146	-10.292	-8.890
گامبل	1.557	5.230	-8.460	-7.059
کلاپتون	0.925	5.189	-8.378	-6.977

برای انتخاب ساختار وابستگی مناسب، معیارهای اطلاعاتی آکائیک و بیزی بر اساس روابط (۳۷) و (۳۸) به کار رفتند که در آن L تابع درست‌نمایی بیشینه‌شده، k تعداد پارامترهای آزاد و n تعداد داده‌ها در فاز اول است. کاپولایی که مقادیر درست‌نمایی بیشتر و AIC و BIC کمتری داشته باشد، به عنوان مدل مناسب‌تر انتخاب می‌شود که مطابق جدول (۷) کاپولای فرانک برازش بهتری به داده‌های مورد مطالعه دارد.

در ادامه با استفاده از اطلاعات موجود در جدول (۱) و (۲) و پس از محاسبه مقدار آماره نسبت و تابع چگالی هر یک از رویکردهای پایش پیشنهادی، حدود کنترل به وسیله روابط (۳۲) و (۳۳) محاسبه گردید. نتایج در شکل (۱) بیانگر این است فاصله‌ی همه‌ی نقاط فاز اول از حدود کنترل کافی است و در هیچ کدام از دورویکرد، نقطه‌ای از فاز اول به عنوان نقطه خارج از کنترل شناسایی نمی‌شود. تفاوت اصلی دورویکرد در حساسیت تشخیص انحراف است. در نمودار کنترل ارائه شده به عنوان رویکرد اول، نقاط فاز دوم با وجود روند صعودی محسوس در انتهای بازه همچنان در داخل حدود کنترل قرار می‌گیرند. در نتیجه رویکرد اول حساسیتی به انحراف تدریجی روند صعودی نشان نمی‌دهد و هیچ نقطه خارج از کنترل را شناسایی نمی‌کند. با در نظر گرفتن اثر متغیر تاثیرگذار قابل مشاهده در رویکرد دوم، با کاهش مقدار حد کنترل بالا مواجه هستیم. در این رویکرد نمودار کنترل ارائه شده حساسیت بیشتری نسبت به انحراف تدریجی و پایدار روند صعودی انتهای فاز دوم دارد و ضمن اعلام نقطه ۳۹ به عنوان اولین نقطه خارج از کنترل، نقاط ۴۳ و ۴۴ را نیز به عنوان نقاط خارج از کنترل تشخیص می‌دهد که این مهم نشان از برتری نمودار کنترل ارائه شده در رویکرد دوم (نمودار کنترل مبتنی بر مدل کاکس) می‌باشد.



شکل ۱ - عملکرد رویکردهای پایش اول و دوم برای داده‌های مطالعه موردی

Figure 1. Performance of the First and Second Monitoring Approaches for the Case Study Data

۷- نتیجه‌گیری

این پژوهش یک چارچوب یکپارچه برای پایش همزمان زمان بین رویداد و شدت رویداد ارائه کرد که در آن، وابستگی میان این دو متغیر با استفاده از توابع کاپولا و اثر عوامل قابل مشاهده از طریق مدل مخاطرات متناسب کاکس لحاظ شد. نتایج نشان داد که عملکرد نمودار کنترل تابعی از نوع و اندازه شیفت، ساختار وابستگی میان متغیرها و نحوه مدل‌سازی عوامل اثرگذار است. همچنین، در نظر گرفتن همزمان وابستگی و اثر عوامل قابل مشاهده، به‌ویژه در سناریوهای دارای شیفت‌های شدیدتر، می‌تواند توانایی رویکرد پایش را در شناسایی تغییرات افزایش دهد. نتایج به‌روشنی نشان می‌دهند که نمودار زمان بین رویداد و شدت رویداد با یک متغیر اثرگذار مدل‌شده در چارچوب مدل کاکس، نسبت به حالتی که متغیر اثرگذار لحاظ نگردیده است برتری دارد. این مزیت برای نتایج شیفت‌های ناشی از زمان، شدت و شیفت‌های همزمان قابل مشاهده است، در حالی که مقدار این برتری به‌طور اساسی به قدرت وابستگی کاپولایی بین متغیرهای زمان و شدت و نوع کاپولای انتخاب شده بستگی دارد. بر این اساس، انتخاب خانواده کاپولا و پارامتر وابستگی باید با توجه به ساختار وابستگی داده‌ها و ویژگی‌های فرایند انجام شود. مطالعه موردی خرابی یک ماشین صنعتی نیز قابلیت کاربرد چارچوب پیشنهادی را در یک فرایند واقعی نشان داد؛ به‌گونه‌ای که لحاظ کردن همزمان وابستگی و عامل اثرگذار قابل مشاهده باعث افزایش توانایی نمودار کنترل شده است. در مجموع، یافته‌ها بر ضرورت توسعه روش‌های پایش انعطاف‌پذیر برای فرایندهای رویدادی پیچیده تأکید دارند.

تمایز میان انتخاب مدل بر اساس برازش آماری و عملکرد پایش در سناریوهای تغییر از نکات مهم در تفسیر نتایج این مطالعه است. در مطالعه موردی، کاپولای فرانک بر اساس معیارهای AIC و BIC به‌عنوان مدل مناسب‌تر برای نمایش ساختار وابستگی مشاهده‌شده در داده‌های واقعی انتخاب شد. در مقابل، با هدف ارزیابی حساسیت رویکردهای پایش تحت سناریوهای کنترل‌شده تغییر و سطوح مختلف وابستگی، سناریوهای شیفت طراحی گردید. بنابراین، عملکرد متفاوت یک کاپولا در تشخیص برخی تغییرات لزوماً به معنای برازش بهتر آن به داده‌های واقعی نیست. در واقع، برازش آماری و عملکرد پایشی دو هدف متفاوت را دنبال می‌کنند و ممکن است به انتخاب یک خانواده کاپولای یکسان منجر نشوند. ویژگی‌های دنباله‌ای خانواده‌های کاپولا نیز در تفسیر این تفاوت اهمیت دارند. کاپولای کلاپتون عمدتاً وابستگی در دنباله پایین، کاپولای گامبل وابستگی در دنباله بالا و کاپولای فرانک ساختار وابستگی متقارن‌تری را بدون وابستگی دمی مجانبی مدل می‌کند. در کاربردهای قابلیت اطمینان، این ویژگی‌ها اهمیت دارند، زیرا شرایط بحرانی ممکن است از ترکیب مقادیر نامطلوب دو متغیر

پایش شده ناشی شود. در مسئله حاضر، کاهش قابل توجه زمان بین رخدادها همراه با افزایش شدت رخداد می تواند وضعیت نامطلوب تری را ایجاد کند. بنابراین، انتخاب خانواده کاپولا می تواند بر احتمال اختصاص یافته به ترکیب های حدی و در نتیجه بر حساسیت نمودار کنترل نسبت به انواع مختلف تغییر اثرگذار باشد.

در چارچوب حاضر اثر متغیرهای اثرگذار قابل مشاهده از طریق مدل مخاطرات متناسب کاکس لحاظ شده است، ولی در کاربردهای قابلیت اطمینان ممکن است بخشی از عوامل مؤثر بر نرخ وقوع رخداد قابل مشاهده یا اندازه گیری نباشند. در چنین شرایطی، مدل های شکنندگی می توانند به عنوان ابزاری برای مدل سازی ناهمگونی مشاهده نشده به کار گرفته شوند. برای مثال، در خرابی تجهیزات، عواملی نظیر فرسودگی داخلی، تفاوت در وضعیت قطعات، کیفیت تعمیرات یا شرایط عملیاتی ثبت نشده می توانند موجب تفاوت در نرخ خرابی واحدهای مختلف شوند. از این رو، توسعه چارچوب حاضر با افزودن یک مؤلفه شکنندگی می تواند امکان تفکیک اثر عوامل مشاهده شده از ناهمگونی مشاهده نشده را فراهم کند. این توسعه در مطالعات آتی می تواند مورد توجه قرار گیرد. همچنین گسترش مدل به چندین متغیر توضیحی، بررسی خانواده های متنوع تر کاپولا و توسعه ساختارهای وابستگی پویا برای شرایطی که وابستگی میان زمان و شدت در طول زمان تغییر می کند، می تواند زمینه ساز پژوهش های آتی قرار گیرد.

اگرچه نظریه کاپولا به توزیع های حاشیه ای پارامتری محدود نیست، پیاده سازی ارائه شده در پژوهش حاضر ماهیتی پارامتری دارد؛ زیرا توزیع های حاشیه ای زمان بین رخداد و شدت رخداد و همچنین خانواده کاپولا به صورت پارامتری مشخص شده اند. از این رو، روش حاضر یک روش کاملاً ناپارامتریک محسوب نمی شود. با این حال، چارچوب پیشنهادی قابلیت توسعه به یک ساختار نیمه پارامتری یا ناپارامتری را دارد. در چنین توسعه ای می توان از توابع توزیع تجربی برای نمایش رفتار حاشیه ای استفاده کرد و ساختار وابستگی را به صورت جداگانه از طریق یک تابع کاپولا مدل نمود. چنین رویکردی می تواند وابستگی روش به فرض های توزیعی حاشیه ای را کاهش دهد و زمینه مناسبی را برای توسعه روش پیشنهادی در پژوهش های آتی فراهم آورد.

تشکر و قدردانی

نویسندگان، صمیمانه از دقت نظر هیئت تحریریه و داوران ارجمند و از رهنمودهای ارزشمند آن ها سپاسگزاری می نمایند.

منابع مالی

در طول انجام این پژوهش، هیچ گونه منابع مالی دریافت نشده است.

تعارض با منافع

نویسندگان اعلام می دارند که هیچ گونه تعارض منافی در مورد انتشار این مقاله وجود ندارد.

مشارکت نویسندگان

نویسندگان در تمامی مراحل این پژوهش، مشارکتی فعال داشته و نسخه نهایی نیز توسط آن ها مطالعه و تایید شده است.

منابع

- [1] Calvin, T. W. (1983). Quality control techniques for “zero defects.” *IEEE Transactions on Components, Hybrids, and Manufacturing Technology*, 6(3), 323–328. <https://doi.org/10.1109/TCHMT.1983.1136174>
- [2] Chan, L. Y., Xie, M., & Goh, T. N. (2000). Cumulative quantity control charts for monitoring production processes. *International Journal of Production Research*, 38(2), 397–408. <https://doi.org/10.1080/002075400189482>
- [3] Xie, M., Goh, T. N., & Ranjan, P. (2002). Some effective control chart procedures for reliability monitoring. *Reliability Engineering & System Safety*, 77(2), 143–150. [https://doi.org/10.1016/S0951-8320\(02\)00041-8](https://doi.org/10.1016/S0951-8320(02)00041-8)
- [4] Borror, C. M., Champ, C. W., & Rigdon, S. E. (1998). Poisson EWMA control charts. *Journal of Quality Technology*, 30(4), 352–361. <https://doi.org/10.1080/00224065.1998.11979871>
- [5] Chakraborti, S., Kumar, N., Rakitzis, A. C., & Sparks, R. S. (2026). Time between events monitoring with control charts. In *Wiley StatsRef: Statistics Reference Online*. <https://doi.org/10.1002/9781118445112.stat08409>
- [6] Mirzaei Novin, M., Amiri, A., & Castagliola, P. (2026). A comprehensive review of time between events control charts: Models, applications, and future directions. *Computers & Industrial Engineering*, 213, 111789. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2025.111789>
- [7] Zhang, C. W., Xie, M., Liu, J. Y., & Goh, T. N. (2007). A control chart for the Gamma distribution as a model of time between events. *International Journal of Production Research*, 45(23), 5649–5666. <https://doi.org/10.1080/00207540701325082>
- [8] Wang, F.-K., Bizuneh, B., & Abebe, T. H. (2017). A comparison study of control charts for Weibull distributed time between events. *Quality and Reliability Engineering International*, 33(8), 2747–2759. <https://doi.org/10.1002/qre.2238>
- [9] Wu, Z., Jiao, J., & He, Z. (2009). A single control chart for monitoring the frequency and magnitude of an event. *International Journal of Production Economics*, 119(1), 24–33. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2009.01.004>
- [10] Qu, L., Wu, Z., Khoo, M. B. C., & Castagliola, P. (2013). A CUSUM scheme for event monitoring. *International Journal of Production Economics*, 145(1), 268–280. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2013.04.048>
- [11] Cheng, Y., Mukherjee, A., & Xie, M. (2017). Simultaneously monitoring frequency and magnitude of events based on bivariate gamma distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 87(9), 1723–1741. <https://doi.org/10.1080/00949655.2017.1284846>
- [12] Rahali, D., Castagliola, P., Taleb, H., & Khoo, M. B. C. (2019). Evaluation of Shewhart time-between-events-and-amplitude control charts for several distributions. *Quality Engineering*, 31(2), 240–254. <https://doi.org/10.1080/08982112.2018.1479036>
- [13] Rahali, D., Castagliola, P., Taleb, H., & Khoo, M. B. C. (2021). Evaluation of Shewhart time-between-events-and-amplitude control charts for correlated data. *Quality and Reliability Engineering International*, 37(1), 219–241. <https://doi.org/10.1002/qre.2731>
- [14] Castagliola, P., Celano, G., Rahali, D., & Wu, S. (2022). Control charts for monitoring time-between-events-and-amplitude data. In K. P. Tran (Ed.), *Control charts and machine learning for anomaly detection in manufacturing* (pp. 43–76). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-83819-5_3
- [15] Wu, S., Castagliola, P., & Celano, G. (2021). A distribution-free EWMA control chart for monitoring time-between-events-and-amplitude data. *Journal of Applied Statistics*, 48(3), 434–454. <https://doi.org/10.1080/02664763.2020.1729347>
- [16] He, Z., Gao, Y., Qu, L., & Wang, Z. (2022). A nonparametric CUSUM scheme for monitoring multivariate time-between-events-and-amplitude data with application to automobile painting. *International Journal of Production Research*, 60(18), 5432–5449. <https://doi.org/10.1080/00207543.2021.1959664>
- [17] Xue, L., An, L., Feng, S., Liu, Y., Wu, H., & Wang, Q. (2024). A nonparametric adaptive EWMA control chart for monitoring multivariate time-between-events-and-amplitude data. *Computers & Industrial Engineering*, 193, 110250. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2024.110250>
- [18] Figueiredo, F. O., Castagliola, P., & Malela-Majika, J.-C. (2025). Rank-based EWMA TBEA control chart. *Quality and Reliability Engineering International*, 41(4), 1279–1292. <https://doi.org/10.1002/qre.3711>
- [19] Scagliarini, M. (2025). *Non-parametric time between events and amplitude methods for monitoring regional drought characteristics*. University of Bologna. <https://doi.org/10.1007/s10651-026-00760-3>
- [20] Cox, D. R. (1972). Regression models and life-tables. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 34(2), 187–202. <https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1972.tb00899.x>
- [21] Andersen, P. K., & Gill, R. D. (1982). Cox’s regression model for counting processes: A large sample study. *The Annals of Statistics*, 10(4), 1100–1120. <https://doi.org/10.1214/aos/1176345976>
- [22] Prentice, R. L., Williams, B. J., & Peterson, A. V. (1981). On the regression analysis of multivariate failure time data. *Biometrika*, 68(2), 373–379. <https://doi.org/10.1093/biomet/68.2.373>
- [23] Wei, L. J., Lin, D. Y., & Weissfeld, L. (1989). Regression analysis of multivariate incomplete failure time data by modeling marginal distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 84(408), 1065–1073. <https://doi.org/10.1080/01621459.1989.10478873>
- [24] Ahmad, H., Nadi, A. A., Amini, M., & Chakraborti, S. (2025). *Dynamic risk-adjusted monitoring of time between events: Applications of NHPP in pipeline accident surveillance*. <https://doi.org/10.1002/qre.70066>
- [25] Chong, Z. L., Teoh, W. L., Khoo, M. B. C., Teh, S. Y., & Khaw, K. W. (2025). Dynamic VSI Max-EWMA control chart for joint monitoring of time-between-events and amplitude in high-quality manufacturing processes. *Computers & Industrial Engineering*, 207, 111204. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2025.111204>
- [26] Alevizakos, V., & Koukouvinos, C. (2020). A progressive mean control chart for monitoring time between events. *Quality and Reliability Engineering International*, 36(1), 161–186. <https://doi.org/10.1002/qre.2565>
- [27] Chakraborty, N., Human, S. W., & Balakrishnan, N. (2017). A generally weighted moving average chart for time between events. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 46(10), 7790–7817. <https://doi.org/10.1080/03610918.2016.1252397>
- [28] Sanusi, R. A., Teh, S. Y., & Khoo, M. B. C. (2020). Simultaneous monitoring of magnitude and time-between-events data with a Max-EWMA control chart. *Computers & Industrial Engineering*, 142, 106378. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2020.106378>
- [29] Nelsen, R. B. (2006). *An introduction to copulas* (2nd ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/0-387-28678-0>
- [30] Joe, H. (2014). *Dependence modeling with copulas*. Chapman & Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/b17116>