

# طراحی آماری اقتصادی نمودار کنترل $\bar{X}$ برای مشخصه کیفی غیرنرمال با رویکرد زنجیره‌های مارکوف

اصغر سیف

استادیار، دانشگاه بوعلی سینا، دانشکده‌ی علوم پایه، گروه آمار، همدان، ایران

محسن ترابیان\*

استادیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تاکستان، گروه ریاضی، تاکستان، ایران\*

**چکیده** نمودارهای کنترل در پایش فرایندها به منظور تشخیص هرگونه تغییری که می‌تواند کیفیت فرایند را تحت تاثیر قرار دهد، مورد استفاده قرار می‌گیرند. در اغلب اوقات، فرض می‌شود داده‌های فرایند دارای توزیع نرمال هستند که این فرض ممکن است در عمل برقرار نباشد. در این مقاله، طراحی آماری اقتصادی نمودار کنترل  $\bar{X}$  زمانی که توزیع مشخصه‌ی کیفی نرمال نباشد را با رویکرد زنجیره‌های مارکوف مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این ارتباط، از توزیع بر به عنوان مدلی برای توزیع متغیر کیفیت فرایند استفاده می‌کنیم. این توزیع بدلیل انعطاف‌پذیری مولفه‌هایش می‌تواند بسیاری از توزیع‌ها از جمله توزیع نرمال را مدل‌سازی کند. عملکرد طراحی را نیز به وسیله‌ی تحلیل حساسیت پارامترهای فرایند و بر اساس مقادیر چولگی و کشیدگی جامعه، با بکارگیری الگوریتم ژنتیک، برای کاربردی صنعتی نشان می‌دهیم.

**کلمات کلیدی** طراحی اقتصادی، نمودار کنترل  $\bar{X}$ ، زنجیره‌های مارکوف، توزیع بر، الگوریتم ژنتیک

نمودار کنترل، به معنای تعیین پارامترهای نمودار کنترل است، بگونه‌ای که هزینه‌ی کل فرایند بر واحد زمان را کمینه کند.

## ۱- مقدمه

با این وجود طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل گرچه متوسط هزینه در واحد زمان را کمینه می‌کند، اما از منظر معیارهای آماری می‌تواند دارای ضعف‌های فاحشی باشد. به عنوان مثال برای کشف تغییرات کوچک در میانگین فرایند این نوع از طراحی می‌تواند منجر به نرخ وقوع بالای هشدار اشتباه یا احتمال بالای خطای نوع اول شود. احتمال خطای نوع دوم نیز ممکن است بسیار بزرگ باشد.

نمودارهای کنترل یکی از مهمترین ابزار برای ارزیابی عملکرد و پایش فرایند هستند. در زمان پایش، نمودار کنترل برای تشخیص وقوع انحراف با دلیل بکار گرفته می‌شود. طراحی نمودارهای کنترل دارای پیامدهای آماری و اقتصادی متعددی است که هر دوی آنها متأثر از انتخاب پارامترهای نمودار کنترل، شامل اندازه‌ی نمونه ( $n$ )، حدود کنترل ( $k$ ) و فاصله‌ی بین نمونه‌ها ( $h$ ) است. طراحی اقتصادی<sup>۱</sup> (ED)

\* (Corresponding author) torabianmohsen@gmail.com

این دو مساله می‌تواند منجر به سلب اعتماد مدیر خط تولید در یک بنگاه اقتصادی نسبت به بکارگیری نمودارهای کنترل در پایش فرایند شود. سانیکا(۱۹۸۶)، راه حلی برای این مساله ارائه کرد که نتیجه‌ی آن را طراحی آماری اقتصادی<sup>۲</sup> (ESD) نامید. در این نوع از طراحی، با قایل شدن کران بالا برای احتمال خطاهای نوع اول و دوم علاوه بر کمینه کردن هزینه این دو نوع خطا نیز در سطح مطلوبی کنترل می‌شوند.

در نمودار کنترل با نرخ نمونه‌گیری ثابت نمونه‌هایی با اندازه‌ی ثابت در فواصل نمونه‌گیری ثابت استخراج شده و مقادیر آماره‌ی مربوط رسم می‌شود. زمانی که مقدار این آماره خارج از حدود کنترل قرار گیرد، ممکن است فرایند متوقف شده و جستجو برای کشف و حذف انحراف با دلیل آغاز شود، مگر این که هشدار اشتباه صادر شده باشد. اگر مشخصه‌ی کیفی نرمال نباشد، در صورتی که واریانس آن متناهی و اندازه‌ی نمونه به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد، طبق قضیه‌ی حد مرکزی  $\bar{X}$  به طور تقریبی دارای توزیع نرمال خواهد بود، این در حالی است که در طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل، معمولاً از اندازه‌های نمونه‌ی کوچک استفاده می‌شود و بنابراین، در چنین شرایطی بدیهی است قضیه‌ی فوق برقرار نمی‌باشد.

دانکن(۱۹۵۶) و لورنزن و وانس(۱۹۸۶) طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل را برای مشخصه‌ی کیفی نرمال در حالی که مکانیزم شکست فرایند دارای توزیع نمایی است بررسی کردند. رحیم(۱۹۸۵) طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل تحت شرط غیر نرمال بودن مشخصه‌ی کیفی را ارائه کرد. بنرجی و رحیم(۱۹۸۸) تحقیق مرتبطی را برای مکانیزم شکست فرایند با توزیع ویبل انجام دادند. یانگ و هانکوک(۱۹۹۰) با دیدگاه و مشخصه‌ی کیفی مشابه طراحی آماری نمودارهای کنترل را برای نمونه‌های همبسته ارائه کردند. یوراستون و زیمر(۱۹۹۲) ضمن استفاده از توزیع بر<sup>۳</sup> برای تقریب توزیع‌های غیر نرمال طراحی آماری نمودارهای کنترل را ارائه کردند. برای مشخصه‌ی کیفی نرمال طراحی اقتصادی نمودار کنترل با مکانیزم شکست فرایند ویبل و گاما توسط رحیم و بنرجی

(۱۹۹۳) و طراحی آماری اقتصادی نمودار مذکور برای مکانیزم شکست فرایند با توزیع گاما به وسیله‌ی الاورینی و رحیم(۲۰۰۳) صورت پذیرفت. چن(۲۰۰۴) طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل را برای مشخصه‌ی کیفی با توزیع بر در حالی که مکانیزم شکست فرایند دارای توزیع نمایی است بررسی کرد. چن و چنگ(۲۰۰۷) همچنین، چن و یه(۲۰۰۹) با دیدگاه و مشخصه‌ی کیفی مشابه طراحی آماری اقتصادی نمودارهای کنترل را در حالی که مکانیزم شکست فرایند به ترتیب از توزیع ویبل و گاما تبعیت می‌کند، مورد بررسی قرار دادند. برای مشخصه‌ی کیفی دارای توزیع بر، طراحی اقتصادی نمودار کنترل با مکانیزم شکست ویبل به وسیله‌ی یه و همکاران(۲۰۱۱) و طراحی آماری اقتصادی برای مکانیزم شکست با توزیع نمایی توسط سیف و همکاران(۲۰۱۵) انجام پذیرفت. طراحی آماری اقتصادی برای مکانیزم شکست با توزیع بر زمانی که توزیع مشخصه‌ی کیفی نرمال باشد به وسیله‌ی حیدری و همکاران(۲۰۱۶) و در حالی که توزیع مشخصه‌ی کیفی بر باشد به وسیله‌ی حیدری و مقدم(۲۰۱۷) انجام شده است. نکته قابل توجه در تمامی مطالعات مذکور این است که برای بناسازی معیارهای آماری و اقتصادی از رویکردی غیر مارکوفی استفاده شده است. جدول ۱ خلاصه‌ای از ادبیات موضوع را نشان می‌دهد.

یکی از راهکارهای مفید برای بناسازی مدل هزینه در طراحی‌های آماری اقتصادی، استفاده از مفاهیم زنجیر مارکوف است. یک رویکرد مارکوفی عموماً منجر به ساده‌سازی چشم‌گیری در یافتن و فرموله کردن معیارهای آماری مورد نیاز در طراحی، مانند متوسط تعداد هشدارهای غلط یا متوسط زمان تعدیل شده تا بروز هشدار بعد از تغییر در میانگین فرایند خواهد شد. با این حال، در پژوهش‌های انجام شده فوق به منظور طراحی اقتصادی و آماری اقتصادی نمودار کنترل  $\bar{X}$  در بناسازی مدل هزینه، از رویکرد غیر مارکوفی استفاده شده است. به همین منظور، در این مقاله طراحی آماری اقتصادی نمودار کنترل  $\bar{X}$  تحت فرض غیر نرمال بودن مشخصه‌ی کیفی، با رویکرد مارکوفی بررسی می‌شود.

در این ارتباط، برای تقریب توزیع تغییرات مشخصه کیفی توزیع بر مورد استفاده قرار می‌گیرد. شایان ذکر است، زنجیر مارکوفی که در مقاله حاضر بنا سازی شده است، به راحتی قابل تسری به نمودارهای کنترل تطبیقی از جمله نمودار کنترل  $\bar{X}$  با پارامترهای متغیر (VP)، استفاده شده در مقاله سیف و همکاران (۲۰۱۵) خواهد بود. در واقع می‌توان با استفاده از تکنیک‌های مورد استفاده در زنجیره‌های مارکوف، تمامی نمودارهای کنترل تطبیقی (VSS, VSI, VSSI, VP) را با فرض غیرنرمال بودن مشخصه کیفی، بناسازی کرد.

جدول ۱- خلاصه ادبیات موضوع

دیدگاه	توزیع مشخصه کیفی	نوع طرح	توزیع مکانیزم شکست فرایند	نویسنده(ها) و سال ارایه
غیرمارکوفی	نرمال	اقتصادی	نمایی	دانکن(۱۹۵۶)
غیرمارکوفی	نرمال	اقتصادی	نمایی	لورنزن و وانس(۱۹۸۶)
غیرمارکوفی	نرمال	اقتصادی	ویبل	بنرجی و رحیم(۱۹۸۸)
غیرمارکوفی	نرمال	آماري	-	یانگ و هانکوک(۱۹۹۰)
غیرمارکوفی	نرمال	اقتصادی	ویبل- گاما	رحیم و بنرجی(۱۹۹۳)
غیرمارکوفی	نرمال	آماري- اقتصادی	گاما	الاورینی و رحیم(۲۰۰۳)
غیرمارکوفی	بر	اقتصادی	نمایی	چن(۲۰۰۴)
غیرمارکوفی	بر	آماري- اقتصادی	ویبل	چن و چنگ(۲۰۰۷)
غیرمارکوفی	بر	آماري- اقتصادی	گاما	چن و یه(۲۰۰۹)
غیرمارکوفی	بر	اقتصادی	ویبل	یه و همکاران(۲۰۱۱)
غیرمارکوفی	بر	آماري- اقتصادی	نمایی	سیف و همکاران(۲۰۱۵)
غیرمارکوفی	نرمال	آماري- اقتصادی	بر	حیدری و همکاران(۲۰۱۶)
غیرمارکوفی	بر	آماري- اقتصادی	بر	حیدری و مقدم(۲۰۱۷)
مارکوفی	بر	آماري- اقتصادی	نمایی	این مقاله

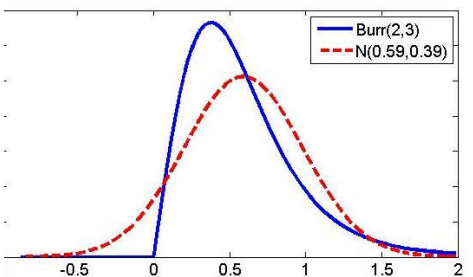
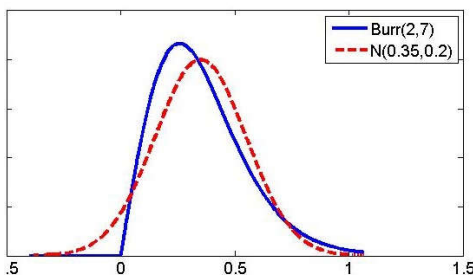
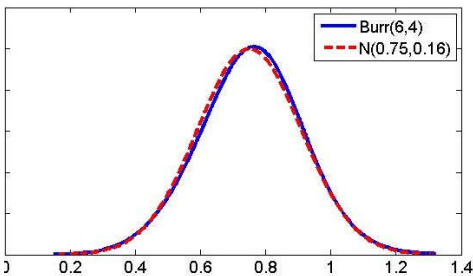
ساختار مقاله به شرح زیر است:

## ۲- مروری بر توزیع بر

اگر متغیر تصادفی  $X$  مشخصه کیفی تحت بررسی بوده و  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ، میانگین نمونه‌ای  $\bar{X}$  نیز دارای توزیع نرمال خواهد بود. با این حال چنانچه توزیع مشخصه کیفی نرمال نباشد، زمانی که  $n$  به اندازه‌ی کافی بزرگ و واریانس مشاهدات متناهی باشد، توزیع  $\bar{X}$  همچنان تقریباً نرمال خواهد بود. اگر توزیع مشاهدات غیر نرمال و  $n$  کوچک باشد، تعیین توزیع  $\bar{X}$  پیچیده خواهد بود. بر(۱۹۴۲) تابع توزیعی ارایه کرد که می‌تواند

در بخش دوم مروری بر توزیع بر خواهد شد. بخش سوم به طراحی نمودار کنترل  $\bar{X}$  با استفاده از مفاهیم زنجیر مارکوف می‌پردازد. در بخش چهارم مدل هزینه و پارامترهای مربوط معرفی می‌شود. در بخش پنجم، جهت بیان کاربرد صنعتی طراحی اقتصادی نمودار کنترل، مثالی ارایه و حل خواهد شد. بخش ششم به تحلیل حساسیت مدل اختصاص یافته و در نهایت، آخرین بخش به ارایه نتایج کلی می‌پردازد.

است که در این ارتباط برخی توزیع‌های چوله و متقارن را مورد بررسی قرار می‌دهیم. با بکارگیری ترکیب‌های مختلف پارامترهای توزیع بر ( $r$  و  $c$ ) می‌توان به مقایسه‌ی این توزیع با توزیع نرمال متناظر پرداخت. نمودار ۱ را ببینید.



نمودار ۱. مقایسه‌ی توزیع بر با توزیع نرمال

### ۳- نمودار کنترل $\bar{X}$ با رویکرد مارکوفی

در نمودارهای کنترل، فرایند بوسیله یک حالت تحت کنترل  $\mu_0$  توصیف می‌شود و یک انحراف با دلیل به اندازه‌ی  $\delta$  که به صورت تصادفی رخ می‌دهد باعث می‌شود تا میانگین از  $\mu_0$  به  $\mu_0 + \delta\sigma$  تغییر کند. نمودار کنترل با خط مرکز  $\mu_0$  و حدود کنترل بالا و پایین  $\mu_0 \pm k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  بناسازی می‌شود. نمونه‌ها در فاصله‌ی  $h$  ساعت از یکدیگر انتخاب شده و هنگامی که نقطه‌ای، خارج از حدود کنترل رسم شود، جستجو برای شناسایی انحراف با دلیل آغاز می‌شود. در رسم این نمودار، پارامترهای  $\mu_0$  و  $\delta$  و  $\sigma$

بطور موفقیت آمیزی برای تقریب بسیاری از توزیع‌ها بکار رود. بنابراین در چنین وضعیتی می‌توان برای تقریب توزیع میانگین نمونه‌ای  $\bar{X}$  از این توزیع استفاده کرد. معادله‌ی (۱) تابع توزیع تجمعی توزیع بر را نشان می‌دهد:

$$F(y) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{(1+y^c)^r}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$= 1 - \frac{1}{(1 + (\max(0, y))^c)^r}$$

که مقادیر  $r$  و  $c$  مثبت هستند. کاربردهای مختلفی از توزیع بر در ادبیات کنترل کیفیت وجود دارد. به عنوان مثال زیمر و بر (۱۹۶۳) از این توزیع در طرح‌های مربوط به متغیرهای غیر نرمال استفاده کردند. همچنین چن و همکاران (۲۰۰۰) این توزیع را در نمودارهای ED  $\bar{X}$  مورد استفاده قرار دادند.

با استفاده از ضرایب چولگی ( $\alpha_3$ ) و کشیدگی ( $\alpha_4$ ) داده‌ها، می‌توان توابع چگالی احتمال مختلفی از جمله نرمال، نمایی، گاما و بتا را با استفاده از توزیع بر تقریب زد. به عنوان مثال توزیع بر به ازای  $c = 6$  و  $r = 4$  تقریباً معادل توزیع نرمال با  $\alpha_3 = -0.019$  و  $\alpha_4 = 3.169$  است. بر (۱۹۴۲) میانگین، انحراف استاندارد، چولگی و کشیدگی توزیع بر را به ازای ترکیبات مختلف  $r$  و  $c$  در جدولی ارائه کرد که با بکارگیری آن‌ها یک تبدیل استاندارد بین متغیر تصادفی بر ( $Y$ ) با هر متغیر تصادفی دیگر ( $X$ ) که چولگی و کشیدگی یکسانی با یکدیگر داشته باشند، قابل تعریف خواهد بود. فرض کنید نمونه یا نمونه‌هایی از متغیر تصادفی  $X$  انتخاب شده است. چنانچه چولگی و کشیدگی آن‌ها مشخص شود، میانگین  $M$  و انحراف استاندارد  $S$  متناظر توزیع بر بر اساس جداول مربوط قابل محاسبه خواهد بود. تبدیل استاندارد بین متغیر تصادفی بر  $Y$  و متغیر تصادفی  $X$  به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{X - \bar{X}}{S_x} = \frac{Y - M}{S} \quad (2)$$

که  $S_x$  و  $\bar{X}$  به ترتیب میانگین و انحراف استاندارد نمونه است. با این تبدیل ساده امکان تقریب توزیع متغیر تصادفی  $X$  فراهم می‌شود. یکی از اهداف این مقاله بررسی تاثیر غیر نرمال بودن توزیع مشاهدات در طراحی نمودارهای کنترل

استفاده در طراحی اقتصادی نمودار کنترل  $\bar{X}$  را محاسبه خواهیم کرد.

در نمودار کنترل  $\bar{X}$  هر بار که از فرایند نمونه‌گیری می‌شود، یکی از حالت‌های زیر ممکن است رخ دهد:

$$(۱) : |V_j| \leq k \text{ و فرایند تحت کنترل است} \\ (\delta = 0)$$

$$(۲) : |V_j| > k \text{ و فرایند تحت کنترل است (هشدار غلط)} \\ (\delta = 0)$$

$$(۳) : |V_j| \leq k \text{ و فرایند خارج از کنترل است} \\ (\delta \neq 0)$$

$$(۴) : |V_j| > k \text{ و فرایند خارج از کنترل است} \\ (\delta \neq 0)$$

به طوری که :

$$V_j = \frac{\bar{X}_j - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (۷)$$

زمانی که  $|V_j| > k$  باشد، نمودار کنترل هشدار را مبنی بر خارج کنترل بودن فرایند اعلام می‌کند. واضح است چنانچه فرایند تحت کنترل باشد این هشدار یک زنگ خطر اشتباهی (حالت ۲) و چنانچه فرایند خارج از کنترل باشد، هشدار اعلام شده یک هشدار صحیح است. بنابراین حالت ۴ را می‌توان حالت جاذب در زنجیره‌های مارکوف نامید. برای یک زنجیر مارکوف با حالت‌های گذرای فوق، ماتریس احتمال انتقال به قرار

زیر است

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ 0 & 0 & p_{33} & p_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

که در آن  $p_{ij}$  بیانگر احتمال شرطی تغییر وضعیت از حالت قبلی  $i$  به حالت فعلی  $j$  است. با فرض:

$$\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$$

آنگاه:

$$p_{11} = (1 + \max(0, M - Sk)^c)^{-r} \\ - (1 + \max(0, M + Sk)^c)^{-r} \times e^{-\lambda h}$$

$$p_{12} = [(1 + \max(0, M - Sk)^c)^{-r} \\ - (1 + \max(0, M + Sk)^c)^{-r}] \times e^{-\lambda h}$$

$$p_{13} = [(1 + \max(0, M - S\delta\sqrt{n} - Sk)^c)^{-r} \\ - (1 + \max(0, M - S\delta\sqrt{n} + Sk)^c)^{-r}] \times \\ (1 - e^{-\lambda h})$$

$$p_{14} = [1 - [(1 + \max(0, M - S\delta\sqrt{n} - Sk)^c)^{-r} \\ - (1 + \max(0, M - S\delta\sqrt{n} + Sk)^c)^{-r}]] \times \\ (1 - e^{-\lambda h})$$

معلوم فرض می‌شوند در حالی که پارامترهای نمودار کنترل،  $n$  و  $h$  باید تعیین شوند. در ادبیات موضوع مرسوم‌ترین معیار مورد استفاده برای مقایسه طرح‌های کنترل با استراتژی‌های مختلف، معیار  $AATS^f$  (متوسط زمان تعدیل شده تا بروز هشدار) می‌باشد.

$$(۳) \quad AATS = ATC - (\text{متوسط زمان تحت کنترل})$$

به قسمی که  $ATC$  (متوسط زمان چرخه) برابر با متوسط زمان بروز اولین هشدار بعد از تغییر در میانگین فرایند از زمان شروع فرایند است. چنانچه زمان وقوع یک انحراف با دلیل متغیر تصادفی با توزیع نمایی با پارامتر  $\lambda$  باشد آن‌گاه متوسط زمانی که فرایند تحت کنترل باقی می‌ماند برابر با  $\frac{1}{\lambda}$  خواهد بود. یکی از روش‌های مفید برای محاسبه  $ATC$  استفاده از مفاهیم زنجیره‌های مارکوف است. برای توضیح بیشتر در ارتباط با روش‌های مورد استفاده در این قسمت، خواننده را به سینلار (۱۹۷۵)، ارجاع می‌دهیم.

زنجیر مارکوفی را با فضای حالت متناهی  $E = \{1, 2, \dots, N\}$  و ماتریس احتمال انتقال  $P$  در نظر بگیرید.

چنانچه  $A = \{1, 2, \dots, m\}$  مجموعه جاذب و  $B = \{m+1, \dots, N\}$  مجموعه حالت‌های غیر جاذب باشد، ماتریس احتمال انتقال زنجیر را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$(۴) \quad P = \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ R & Q \end{pmatrix}$$

به قسمی که  $I$  ماتریس همبندی  $m \times m$  و  $\mathbf{0}$  ماتریس صفر با مرتبه  $m \times (N - m)$  و درایه‌های ماتریس  $R$ ، احتمال انتقال یک مرحله‌ای از حالت‌های غیر جاذب به جاذب، و درایه‌های ماتریس  $Q$  احتمال‌های انتقال یک مرحله‌ای بین حالت‌های غیر جاذب است.

فرض کنید،  $U$  یک ماتریس  $(N - m) \times m$  باشد، به طوری که درایه‌های آن، احتمال‌های جذب از حالت‌های غیر جاذب مختلف زنجیر را نشان دهد. به عبارت دیگر:

$$(۵) \quad u_{ij} = P(X_n = j(\in A) \mid X_0 = i(\in B))$$

می‌توان نشان داد:

$$(۶) \quad U = (I - Q)^{-1}R$$

ماتریس  $\Phi = (I - Q)^{-1}$  را ماتریس اساسی زنجیر مارکوف می‌نامند. با استفاده از درایه‌های این ماتریس می‌توان متوسط زمان جذب از یک حالت غیر جاذب را محاسبه کرد. در ادامه، ابتدا نمودار کنترل را در غالب یک زنجیر مارکوف معرفی و سپس با استفاده از ماتریس اساسی  $\Phi$  معیارهای آماری مورد

برای بهینه‌سازی درآمد خالص برای مجموعه‌ای از پارامترهای طرح ممکن است.

#### ۱-۴ پذیره‌های مدل هزینه

جهت بناسازی مدل هزینه برای نمودار کنترل  $\bar{X}$  پذیره‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

- ۱- یک انحراف با دلیل باعث تغییر میانگین فرایند ( $\mu_0$ ) به اندازه‌ی  $\delta$  برابر انحراف معیار مشخصه‌ی کیفی می‌شود ( $\mu_0 + \delta\sigma$ ).
- ۲- هنگامی که یک نقطه، خارج حدود کنترل واقع می‌شود وجود یک انحراف با دلیل هشدار داده می‌شود.
- ۳- فرض می‌شود که انحراف با دلیل براساس یک فرایند پواسون با میزان متوسط  $\lambda$  مشاهده در ساعت رخ می‌دهد. به عبارت دیگر با فرض این که فرایند در حالت تحت کنترل شروع به کار می‌کند، مدت زمانی که فرایند در حالت تحت کنترل باقی می‌ماند یک متغیر تصادفی نمایی با میانگین  $\frac{1}{\lambda}$  ساعت خواهد بود.
- ۴- هزینه حذف یک انحراف با دلیل و تعمیر (یا تنظیم) فرایند از درآمد خالص کسر نمی‌شود.
- ۵- مشخصه‌ی کیفی دارای توزیع بر است.

#### ۲-۴ پذیره‌های مدل هزینه

در این بخش از مدل هزینه‌ی لورنزن و وانس (۱۹۸۶)، استفاده می‌شود. این مدل، سه هزینه‌ی مختلف را در نظر می‌گیرد: هزینه‌ی تولید در شرایط تحت کنترل و خارج از کنترل، هزینه‌ی نمونه‌گیری و هزینه‌ی بروز هشدارهای غلط و اصلاح و تعمیر فرایند. روش رایج در طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل می‌نیم‌سازی هزینه‌ی مورد انتظار در واحد زمان است. به همین منظور باید هزینه‌ی مورد انتظار را در یک چرخه، بر زمان مورد انتظار چرخه تقسیم کرد و سپس نتیجه‌ی حاصله را می‌نیم کرد. بنابر فرایند تجدید پاداش هزینه‌ی مورد انتظار در هر ساعت برابر خواهد بود با:

$$E(A) = \frac{E(C)}{E(T)} \quad (9)$$

به قسمی که:

$$\begin{aligned} p_{21} &= p_{11}, p_{22} = p_{12}, p_{23} = p_{13}, p_{24} = p_{14} \\ p_{33} &= \left[ \left( 1 + \max(0, M - S\delta\sqrt{n} - Sk) \right)^c \right]^{-r} \\ &\quad - \left[ \left( 1 + \max(0, M - S\delta\sqrt{n} + Sk) \right)^c \right]^{-r} \\ p_{34} &= 1 - \left[ \left( 1 + \max(0, M - S\delta\sqrt{n} - Sk) \right)^c \right]^{-r} \\ &\quad - \left[ \left( 1 + \max(0, M - S\delta\sqrt{n} + Sk) \right)^c \right]^{-r} \end{aligned}$$

با توجه به مفاهیم زنجیر مارکف داریم:

$$U = (I - Q)^{-1}h \quad (8)$$

به قسمی که  $h = (h, h, h)'$  بردار فاصله‌ی نمونه‌گیری،  $Q$  یک ماتریس  $3 \times 3$  با حذف سطر و ستون حالت جاذب ماتریس احتمال انتقال  $I, P$  ماتریس واحد از مرتبه 3 و  $b = (p_1, p_2, p_3)'$  بردار احتمال آغازین با شرط  $\sum_{i=1}^3 p_i = 1$  می‌باشد. از آنجا که در آغاز هر فرایندی مهندس کیفیت از تحت کنترل بودن فرایند اطمینان حاصل می‌کند، لذا فرض می‌شود که فرایند از حالت اول شروع به فعالیت می‌کند. به عبارت دیگر  $b = (1, 0, 0)$  فرض می‌شود.

همان‌گونه که قبلاً متذکر شدیم، در صنعت، نمودارهای کنترل معمولاً فقط بر اساس معیارهای آماری طراحی می‌شوند. در این رویکرد، پارامترهای نمودار کنترل یعنی اندازه‌ی نمونه، فاصله‌ی نمونه‌گیری و حدود کنترل به گونه‌ای تعیین می‌شوند، تا توان آزمون جهت پی‌بردن به وجود یک تغییر خاص در مشخصه کیفی ( $1 - \beta$ ) و همچنین احتمال خطای نوع اول ( $\alpha$ ) مقادیر خاصی باشند. این درحالی است که طراحی یک نمودار کنترل، عواقب اقتصادی متعددی به همراه خواهد داشت. به همین منظور در بخش بعد با معرفی یک مدل هزینه مناسب، نمودارهای کنترل با دیدگاه اقتصادی طراحی می‌شوند.

#### ۴- مدل هزینه

جهت طراحی یک نمودار کنترل با دیدگاه اقتصادی چرخه‌ی کیفی در فرایند SPC<sup>۶</sup> به چهار مرحله زیر تقسیم می‌شود:

- ۱- زمان تحت کنترل
- ۲- زمان خارج از کنترل تا صدور هشدار
- ۳- زمان اخذ، بررسی و تفسیر نمونه خارج از کنترل
- ۴- زمان جستجو و حذف انحرافات با دلیل

این چهار مرحله، اساس فرایند تجدید پاداش است که برای محاسبه‌ی درآمد خالص در هر ساعت برای مجموعه‌ی مشخصی از پارامترهای طرح مورد استفاده قرار می‌گیرد. حال بررسی،

- $a_3$ : هزینه‌ی تعیین محل، تعمیر و اصلاح انحرافات بادلیل.
- $a_1, a_2$ : هزینه‌های ثابت و متغیر نمونه‌گیری.
- چنانچه  $ANI$  و  $ANS$  بیانگر متوسط تعداد اقلام بازرسی شده و نمونه‌ی اخذ شده در یک چرخه‌ی کیفیت تا صدور هشدار باشند آنگاه:

$$ANI = \hat{b}(I - Q)^{-1}n \quad (14)$$

$$ANS = \hat{b}(I - Q)^{-1}1 \quad (15)$$

به‌قسمی که،  $n = (n, n, n)'$  و  $1 = (1, 1, 1)'$ .

#### ۴-۳ طراحی آماری اقتصادی نمودار کنترل $\bar{X}$

در طراحی آماری اقتصادی نمودار  $\bar{X}$  هدف یافتن مقادیر پارامترهای نمودار کنترل  $(n, k, h)$  است، به قسمی که معادله (۲) با اعمال قیود آماری می‌نیمم شود. در چنین وضعیتی پارامترهای فرایند  $(E, \gamma_1, \gamma_2, T_0, T_1, T_2, \lambda, \delta)$  و پارامترهای هزینه  $(\hat{a}_3, a_1, a_2, a_3, C_0, C_1)$  معلوم فرض می‌شوند. اندازه نمونه  $n$  مقادیری گسسته و دیگر پارامترهای نمودار همواره مقادیری پیوسته اختیار می‌کنند. با در نظر گرفتن شرایط واقعی در یک فرایند تولید، حداکثر مقدار فاصله‌ی نمونه‌گیری ۸ ساعت در نظر گرفته می‌شود ( $h \leq 8$ ).

بنابراین مسأله‌ی بهینه‌سازی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} & \min E(A) \\ & 0 < h \leq 8 \\ & k > 0 \\ & n \in Z^+ \\ & ANTS \leq 1 \\ & ANF \leq 0.5 \end{aligned} \quad (16)$$

مسئله بهینه‌سازی فوق، دارای متغیرهای تصمیم گسسته و پیوسته و فضای پاسخ نامحدوب است. از آن‌رو حل این مدل با استفاده از روش‌های بهینه‌کاوی کلاسیک مقدور نمی‌باشد. به همین منظور برای عملیات بهینه‌سازی از الگوریتم ژنتیک (GA) به عنوان یک روش جستجوی فرا ابتکاری که توسط هلند (۱۹۷۵)، معرفی شده است، استفاده شد. در نرم افزار مطلب جعبه ابزاری جهت استفاده از GA در نظر گرفته شده است. جهت دسترسی به این جعبه ابزار، کاربر می‌تواند در خط فرمان دستور gatool را تایپ کند. شایان ذکر است، استفاده از این جعبه ابزار در بسیاری از مواقع برای برخی از مسایل بهینه سازی، همانند توابعی که در طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل

$$\begin{aligned} E(C) = & \frac{C_0}{\lambda} + C_1[AATS + nE + \gamma_1 T_1] \\ & + \gamma_2 T_2 + \hat{a}_3 ANF + a_3 \\ & + (a_1 ANS + a_2 ANI) \\ & + \frac{(a_1 + a_2 n)(nE + \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2)}{h} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} E(T) = & \frac{1}{\lambda} + (1 - \gamma_1)T_0 ANF \\ & + AATS + nE + T_1 + T_2 \\ = & ATC + (1 - \gamma_1)T_0 ANF \\ & + nE + T_1 + T_2 \end{aligned} \quad (11)$$

نمادهای بکار رفته در معادله‌های (۱۰) و (۱۱) به شرح زیر هستند:

- $AATS$ ، متوسط زمان تعدیل شده تا بروز هشدار بعد از تغییر در میانگین فرایند خواهد بود، که برابر است با:

$$AATS = ATC - \frac{1}{\lambda} \quad (12)$$

- $ANF$ ، متوسط تعداد هشدارهای غلط است که با توجه به خواص زنجیره‌های مارکف برابر خواهد بود با:

$$ANF = \hat{b}(I - Q)^{-1}f \quad (13)$$

به‌قسمی که:  $f = (0, 1, 0)'$

- فرض کنید زمان لازم برای تفسیر نمونه متناسب با اندازه‌ی نمونه باشد (ثابت تناسب را  $E$  در نظر می‌گیریم). در این صورت زمان صرف شده برای تفسیر نمونه برابر با  $nE$  خواهد بود.
- $T_0$ : متوسط زمان صرف شده برای بررسی یک هشدار غلط
- $T_1$ : زمان مورد انتظار برای کشف انحراف بادلیل
- $T_2$ : زمان مورد انتظار برای اصلاح انحراف بادلیل
- $\gamma_1$ : برابر با صفر است چنانچه فرایند جستجو برای یافتن انحراف با دلیل متوقف شود و در غیر این- صورت برابر با یک خواهد بود.
- $\gamma_2$ : برابر با صفر است چنانچه فرایند طی تصحیح و تعمیر انحراف بادلیل متوقف شود و در غیر این صورت برابر با یک خواهد بود.
- $C_0$ : هزینه‌ی تولید محصول‌های نامنتجب مادامی که فرایند تحت کنترل است.
- $C_1$ : هزینه‌ی تولید محصول‌های نامنتجب مادامی که فرایند خارج از کنترل است.
- $\hat{a}_3$ : هزینه‌ی بررسی هشدارهای اشتباه.

و به ترتیب صعودی مرتب می‌شوند. آن‌گاه بهترین‌های هر نسل برای عمل تلفیق انتخاب و مابقی حذف می‌شوند. نرخ انتخاب،  $X_{Rate}$  کسری از  $N_{Pop}$  است. تعداد کروموزوم‌هایی که در هر نسل نگهداری می‌شوند برابر است با  $X_{Keep} = X_{Rate} \times N_{Pop}$ . در واقع هر نسل شامل  $X_{Keep}$  کروموزوم ارشد و  $N_{Pop} - X_{Keep}$  فرزند است که با عمل جفت‌گیری از والدین بدست آمده‌اند. در این مطالعه از روش تورنامنت<sup>۹</sup> برای انتخاب تصادفی والدین استفاده شد. در این روش  $n$  والد از بین جمعیت به روش گردونه شانس و یا به طور تصادفی تعیین شده و برانزده‌ترین آن‌ها برای تولید نسل بعد انتخاب می‌شوند.  $n$  باید حداقل ۲ باشد. با افزایش مقدار  $n$  بخت انتخاب افراد دارای برانزده‌گی کمتر کاهش می‌یابد و بخت افراد برانزده‌تر زیاد می‌شود.

### ➤ تلفیق<sup>۱۰</sup>:

عملگر تلاقی استاندارد برای تولید نسل جدید، بدین صورت است که دو والد به‌عنوان پدر و مادر انتخاب می‌شوند و حاصل تلفیق دو فرزند است. والدین در مجموع باید  $N_{Pop} - X_{Keep}$  فرزند را تولید کنند تا نسل جدید تکمیل گردد. در این مطالعه از تابع تلفیق Scattered استفاده شده است. این تابع، تابع تلاقی پیش‌فرض می‌باشد.

### ➤ جهش<sup>۱۱</sup>:

برای آن که الگوریتم ژنتیک سریعاً به یک مقدار بهینه محلی همگرا نشود عملگر جهش اعمال می‌شود تا تنوع بررسی و آزادی عمل الگوریتم در بررسی نقاط فضای جواب افزایش یابد. در اینجا عددی تصادفی از توزیع خاصی به مقدار ژن کروموزوم انتخابی اضافه می‌شود. اغلب کاربران GA عددی تصادفی از توزیع نرمال با میانگین صفر را انتخاب می‌کنند. در این روش باید برای واریانس توزیع نرمال مقداری انتخاب شود. البته معمولاً کروموزوم‌هایی برای عمل جهش انتخاب می‌شوند که جزء بهترین کروموزوم‌های هر نسل نباشند. در تنظیمات پیش‌فرض نرم افزار مطلب از توزیع نرمال استفاده می‌شود. با این حال باید توجه کرد که تنها در مسائل بهینه‌سازی نامقید استفاده از این توزیع مناسب خواهد بود. از آنجا که مساله‌ی بهینه‌سازی در این مطالعه یک مساله‌ی مقید است از تابع Adaptive Feasible برای انجام عملیات جهش استفاده شد.

### ➤ نخبگی<sup>۱۲</sup>:

زمانی که از اپراتورهای ژنتیکی استفاده می‌شود ممکن است بهترین کروموزوم‌ها از دست بروند. لذا لازم است که به منظور حفظ بهترین اطلاعات هر نسل، نخبگان هر نسل مستقیماً به

استفاده می‌شود، ممکن است منجر به جواب‌های بهینه نشود. برای غلبه بر این مشکل کاربر می‌بایست با ترکیب توابع مطلب و نوشتن برنامه مناسب در M فایل، قابلیت GA را برای یافتن جواب بهینه افزایش دهد.

پارامترهای کلیدی الگوریتم ژنتیک عبارت‌اند از:

### ➤ جمعیت

الگوریتم ژنتیک با تعدادی از جواب‌های اولیه شدنی به نام جمعیت اولیه شروع به کار می‌کند. هر جمعیت دارای  $N_{pop}$  کروموزوم است که به طور کاملاً تصادفی از فضای جواب مسئله مورد بررسی تولید می‌شوند. هرچه این کمیت مقدار بزرگتری باشد، در هر نسل محدوده‌ی بزرگتری از فضای پاسخ مورد بررسی قرار می‌گیرد. در واقع در مساله بهینه‌سازی نمودار کنترل  $\bar{X}$ ، یک کروموزوم مرکب از ۳ ژن در نظر گرفته می‌شود و هر ژن معرف یک متغیر تصمیم است. متغیرهای تصمیم مدل  $(n, k, h)$  می‌باشند. شکل زیر نمونه‌ای از کروموزوم معرفی شده را نشان می‌دهد.

5	1.6	0.5
---	-----	-----

بنابراین، اگر اندازه جمعیت ۱۰۰ باشد، ماتریس جمعیت به صورت یک ماتریس  $100 \times 3$  خواهد بود. یک کروموزوم ممکن است چندین بار در یک جمعیت تکرار شود، به عنوان مثال، کروموزوم (5,1.6,0.5) می‌تواند در بیش از ۱ سطر در آرایه مربوط به جمعیت ظاهر شود. انداز جمعیت، تعیین کننده‌ی تعداد کروموزوم‌های موجود در هر نسل می‌باشد. برای مسایل بهینه‌سازی با تعداد متغیرهای کم، اندازه‌ی جمعیت کوچک می‌تواند مناسب باشد. باین حال اگر اندازه جمعیت بزرگ در نظر گرفته شود، الگوریتم ژنتیک فضای مربوط به جواب بهینه را به طور کامل جستجو نموده و در نتیجه احتمال ارائه‌ی مینیمم محلی که مینیمم جهانی نیست نیز کاهش می‌یابد، هرچند باعث کاهش سرعت اجرای الگوریتم خواهد شد. اندازه‌ی جمعیت بزرگ برای مسایل بهینه‌سازی با تعداد متغیرهای زیاد، مناسب‌تر است. از آنجا که در این مطالعه تعداد متغیرهای طراحی برابر با ۳ است، اندازه‌ی جمعیت ۷۰ در نظر گرفته شد.

### ➤ انتخاب<sup>۷</sup>:

در این مرحله براساس روشی خاص دو کروموزوم به‌عنوان والد برای نسل کنشی انتخاب می‌شوند. روش‌های انتخاب متفاوت منجر به نسل‌های متفاوت خواهند شد. روش انتخابی تورنامنت<sup>۹</sup>، روش‌های انتخاب استاندارد برای GA می‌باشند. معمولاً برای کروموزوم‌های هر نسل، مقدار تابع هزینه آن‌ها محاسبه می‌شود



عدم استفاده از طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل، در صنایع کشور، پیچیده بودن برآورد پارامترهای هزینه و فرایند است.

### تحلیل حساسیت مدل

جداول ۲ و ۳، با برآورد مقادیر چولگی و کشیدگی و همچنین تغییرات مختلف  $\delta$  برای چندین حالت دیگر نیز مقادیر بهینه‌ی پارامترهای نمودار کنترل را با فرض  $E = 0$ ،  $\gamma_1 = 0$  و  $\gamma_2 = 0$  ارائه می‌دهد. با تحلیل نتایج مندرج در جداول مذکور، می‌توان حساسیت پارامترهای نمودار کنترل، معیارهای آماری و متوسط هزینه بر واحد زمان را نسبت به تغییرات مقادیر ضرایب چولگی و کشیدگی و  $\delta$  مورد بررسی قرار داد. با توجه به نتایج مندرج در جدول ۳ برخی از نتایج تحلیل حساسیت مدل به شرح زیر است:

- ۱- تغییرات  $\delta$  بطور جدی اندازه نمونه را تحت تاثیر قرار می‌دهد، به طوری که با افزایش مقدار  $\delta$  اندازه‌ی نمونه‌ی بهینه کاهش یافته به عبارت دیگر مقدار  $\delta$  و اندازه‌ی نمونه‌ی بهینه رابطه‌ی عکس دارند.
- ۲- افزایش  $\delta$  باعث کاهش در متوسط هزینه بر واحد زمان خواهد شد. به بیان دیگر برای کشف تغییرات بزرگ در میانگین فرایند نسبت به تغییرات کوچک‌تر به طور متوسط هزینه‌ی کمتری مصرف می‌شود.
- ۳- به ازای مقادیر  $\delta \geq 1.5$  هر اندازه مقدار  $\delta$  افزایش می‌یابد، مقدار AATS با کاهش همراه خواهد بود. با توجه به مقادیر مندرج در جدول ۴، در تحلیل حساسیت نتایج زیر حاصل می‌شود:
- ۴- برآورد اشتباه پارامترهای توزیع پو، متوسط هزینه بر واحد زمان را به طور جدی تحت تاثیر قرار نمی‌دهد.
- ۵- شش سطر نخست به مشخصه‌های کیفی اختصاص یافته است که ضریب چولگی آن‌ها از مقادیر منفی به مثبت تغییر یافته و ضریب کشیدگی آن‌ها نیز نزدیک به ضریب کشیدگی توزیع نرمال است. در این سطرها مقدار  $h$  روندی افزایشی دارد.
- ۶- سطرهای ۷ تا ۱۲ مربوط به گروهی از داده‌هاست که ضریب چولگی نزدیک به نرمال و ضریب کشیدگی افزایشی دارند. در این گروه مقادیر  $h$ ،  $k$  و AATS نرخی افزایشی دارند.
- ۷- سطرهای ۱۳ تا ۱۷ به مشخصه‌های کیفی اختصاص یافته است که ضریب چولگی آن‌ها از مقادیر منفی به مثبت تغییر یافته و ضریب کشیدگی آن‌ها نزدیک به یک عدد ثابت است. در این گروه مقادیر  $k$  و AATS نرخی کاهشی دارند.

نسل بعدی انتقال یابند. در واقع، نخبگی روشی برای نگهداری یک کپی از بهترین کروموزوم‌های هر نسل در نسل جدید است. مکانیزم فوق الگوریتم ژنتیک را مجبور می‌سازد تا همواره تعدادی از بهترین‌ها را در هر نسل نگه دارد. به تجربه ثابت شده است که این مکانیزم، عملکرد الگوریتم ژنتیک را بهبود داده و در ضمن زمان همگرایی را کوتاه می‌نماید. این عملگر توسط گلدبرگ (۱۹۸۹)، معرفی شده است. تعداد کروموزوم‌هایی که طبق این قاعده به نسل بعدی کپی می‌شوند نیز خود بحث برانگیز بوده است. بعد از آنکه عملگر تلفیق و جهش صورت پذیرفت، میزان تابع مطلوبیت برای هر کروموزوم محاسبه می‌شود. کروموزوم‌ها رتبه‌بندی می‌شوند و مجدداً بهترین‌ها انتخاب می‌شوند، معیار توقف بررسی می‌شود و مجدداً این حلقه تا رسیدن به جواب بهینه ادامه می‌یابد.

در این پژوهش مقدار این کمیت برابر با ۴ در نظر گرفته شد.

### ۵- کاربرد صنعتی وملاحظه‌های کاربردی

جدول ۲، بیانگر برآورد پارامترهای مدل اقتصادی لورنزن و وانس برای یک فرایند بخصوص در یک بنگاه اقتصادی است (بای و لی، ۱۹۹۸). پس از بررسی‌های مربوط، مشخص شد توزیع پو با پارامترهای  $c = 6$  و  $r = 4$  بهترین توزیع ممکن است که می‌توان به مشخصه‌ی کیفی برازش داد.

حال به منزله اعمال کنترل بهتر بر روی فرایند تولید، قصد استفاده از یک طرح آماری اقتصادی  $\bar{X}$  را داریم. به همین منظور پارامترهای جدول ۲ را بر معادله‌ی (۹) اعمال کرده و متعاقباً با استفاده از الگوریتم ژنتیک و بکارگیری نرم‌افزار MATLAB، با اعمال قیود آماری مقادیر پارامترهای نمودار کنترل یعنی  $(n, k, h)$  را بگونه‌ای می‌یابیم که مقدار هزینه یا ضرر مورد انتظار کمینه شود. این بهینه سازی منجر به مقادیر زیر برای پارامترهای نمودار کنترل و میزان ضرر مورد انتظار شد:

$$n = 2, k = 2.769, \\ h = 1.39, E(A) = 1.508$$

به عبارت دیگر در شرایط مذکور، انتخاب مقادیر فوق برای پارامترهای نمودار کنترل منجر به تحمل کمترین هزینه ممکن در واحد زمان یعنی ۱/۵۰۸ دلار خواهد شد. واضح است، چنانچه از طراحی آماری برای بناسازی نمودار کنترل جهت مثال مذکور استفاده شود، هزینه ممکن در واحد زمان افزایش خواهد یافت.

شایان ذکر است در بخش های کنترل کیفیت صنایع کشور، علیرغم وجود عواقب اقتصادی در استفاده از نمودارهای کنترل، همچنان این نمودارهای کنترل با دیدگاه صرفاً آماری طراحی و مورد استفاده قرار می‌گیرند. البته یکی از دلایل عمده

اختصاص یافته است. در این گروه مقادیر  $h$  و  $k$  نیز هم زمان با افزایش مقادیر ضرایب چولگی و کشیدگی، افزایش می‌یابد.

۸- گروه چهارم در این جدول به مشخصه‌های کیفی با ضریب چولگی نزدیک به نرمال و ضریب کشیدگی بزرگتر از ۴ اختصاص دارد. در این گروه مقادیر  $k$  و  $h$  نرخ افزایشی دارند.

۹- سطرهای ۲۲ تا ۲۶ مشخصه‌های کیفی با ضریب چولگی نزدیک به یک و ضریب کشیدگی افزایشی می‌پردازد. در این گروه مقادیر AATS نیز همانند ضریب کشیدگی افزایشی می‌باشند.

۱۰- در نهایت آخرین گروه به ضرایب چولگی و کشیدگی افزایشی با مقادیری بزرگتر از مقادیر گروه‌های قبل

جدول ۲- برآورد پارامترهای مدل اقتصادی لورنزن و وانس

$\lambda = 0.1$	$\gamma_1 = \gamma_2 = E = 0$	$\delta = 2$	$T_0 = 0.01$
$T_1 = 0.2$	$T_2 = 0.1$	$C_0 = 0$	$C_1 = 100$
$a_1 = 0.5$	$a_2 = 0.1$	$a_3 = 30$	$a_3 = 10$

جدول ۳- برآوردهای بهینه‌ی پارامترهای نمودار کنترل  $\bar{X}$  ESD

$\delta$	$k$	$n$	$h$	AATS	ANF	E(A)
0.5	2.731	60	1.54	1	0.5	5.204
0.75	2.721	27	1.59	1	0.5	3.057
1	2.71	16	1.63	1	0.5	2.302
1.25	2.699	11	1.68	1	0.5	1.949
1.5	2.723	8	1.58	0.91	0.5	1.747
1.75	2.749	6	1.47	0.83	0.5	1.608
<b>2</b>	<b>2.769</b>	<b>5</b>	<b>1.39</b>	<b>0.78</b>	<b>0.5</b>	<b>1.508</b>
2.25	2.785	4	1.33	0.73	0.5	1.432
2.5	2.797	3	1.29	0.70	0.5	1.373
2.75	2.807	3	1.25	0.67	0.5	1.327
3	2.816	2	1.22	0.65	0.5	1.289

جدول ۴- اثر غیر نرمال بودن توزیع مشخصه‌ی کیفی بر طرح بهینه‌ی  $\bar{X}$  ESD

NO.	$c$	$r$	$a_3$	$a_4$	$n$	$k$	$h$	AATS	ANF	E(A)	ضرایب چولگی و کشیدگی
1	6	11	-0.254	3.027	2.73	5	1.37	0.776	0.500	1.510	
2	6	6	-0.147	3.065	2.74	5	1.38	0.774	0.500	1.507	گروه اول
3	5	6	-0.013	3.010	2.69	5	1.38	0.766	0.500	1.495	$\alpha_3$ از منفی تا مثبت
4	5	5	0.040	3.070	2.71	5	1.38	0.768	0.500	1.496	$\alpha_4$ نزدیک نرمال
5	4	7	0.136	2.979	2.66	5	1.39	0.760	0.500	1.482	

6	3	11	0.329	3.006	2.68	5	1.43	0.765	0.500	1.474	
7	4	11	0.050	2.866	2.61	5	1.37	0.755	0.500	1.479	
8	5	6	0.013	3.010	2.69	5	1.38	0.766	0.500	1.495	گروه دوم
9	5	5	0.040	3.070	2.71	5	1.38	0.768	0.500	1.496	$\alpha_3$ نزدیک نرمال
10	6	4	0.019	3.169	2.77	5	1.39	0.776	0.500	1.508	$\alpha_4$ افزایشی
11	7	3	0.005	3.329	2.83	5	1.40	0.783	0.500	1.516	
12	10	2	0.044	3.646	2.93	5	1.42	0.795	0.500	1.529	
13	10	10	0.519	3.462	2.91	5	1.41	0.806	0.500	1.544	گروه سوم
14	10	7	0.465	3.430	2.90	5	1.41	0.804	0.500	1.543	$\alpha_3$ از منفی تا مثبت
15	10	3	0.208	3.418	2.87	5	1.40	0.792	0.500	1.528	$\alpha_4$ تقریباً ثابت
16	5	3	0.277	3.485	2.81	5	1.42	0.781	0.500	1.504	
17	3	6	0.484	3.380	2.82	5	1.47	0.780	0.500	1.490	
18	6	2	0.434	4.106	2.94	5	1.46	0.798	0.500	1.520	گروه چهارم
19	5	2	0.635	4.630	3.01	5	1.50	0.809	0.500	1.523	$\alpha_3$ افزایشی
20	2	10	0.884	4.122	3.08	6	1.54	0.788	0.500	1.492	$\alpha_4$ ثابت و بزرگتر از ۴
21	2	7	1.014	4.707	3.18	6	1.57	0.798	0.500	1.501	
22	2	8	0.958	4.443	3.14	6	1.56	0.794	0.500	1.497	گروه پنجم
23	2	7	1.014	4.707	3.18	6	1.57	0.798	0.500	1.501	$\alpha_3$ نزدیک ۱
24	2	6	1.094	5.118	3.23	6	1.58	0.804	0.500	1.507	$\alpha_4$ افزایشی
25	4	2	0.956	5.937	3.17	6	1.56	0.825	0.500	1.536	
26	9	1	1.060	7.215	3.28	6	1.57	0.843	0.500	1.557	
27	9	1	1.060	7.215	3.28	6	1.57	0.843	0.500	1.557	گروه ششم
28	2	4	1.432	7.356	3.40	6	1.62	0.824	0.500	1.523	$\alpha_3$ افزایشی و بزرگتر از ۱
29	2	3	1.909	12.46	3.56	6	1.66	0.842	0.500	1.535	$\alpha_4$ افزایشی و بزرگتر از ۷
30	5	1	2.485	29.56	3.60	6	1.68	0.877	0.500	1.575	

## ۵- نتیجه‌گیری

## مراجع

- [1] Al-Oraini, H., Rahim, M.A. (2003). Economic statistical design of  $\bar{X}$ -control charts for systems with gamma (5, 2) in-control times. *Journal of Applied Statistics*, 30 (4):397-409. doi: 10.1080/0266476032000035430.
- [2] Bai, D. S., Lee, K. T. (1998). An Economic Design of Variable Sampling Interval  $\bar{X}$  Control Charts. *International Journal of Production Economics*, 54, 57-64.
- [3] Banerjee, P.K., Rahim, M.A. (1988). Economic Design of  $\bar{X}$ -Control Charts Under Weibull Shock Models. *Technometrics*, 30 (4):407-414. doi: 10.1080/00401706.1988.10488435.
- [4] Burr, I.W. (1942). Cumulative frequency distribution. *Annals of Mathematical Statistics*, 13:215-232.
- [5] Chen, Y.K. (2004). Economic design of  $\bar{X}$ -control charts for non-normal data using variable sampling policy. *International*
- در صنایع کشور، نمودارهای کنترل، معمولاً فقط بر اساس کنترل معیارهای آماری طراحی می‌شوند. این درحالیست که می‌توان به طراحی آماری اقتصادی نمودار کنترل  $\bar{X}$  به عنوان یک طرح جایگزین و مفید در مقایسه با طراحی آماری نمودار کنترل تاکید کرد. از سوی دیگر، در اغلب اوقات، علیرغم غیرنرمال بودن مشخصه کیفی، توزیع داده‌های فرایند نرمال فرض می‌شود، که البته فرضی غیرواقع‌بینانه خواهد بود. به همین منظور در این مطالعه، طراحی آماری اقتصادی نمودار کنترل  $\bar{X}$  زمانی که توزیع مشخصه کیفی نرمال نباشد را مورد بررسی قرار دادیم. برای دستیابی به معیارهای آماری، از روابط و قضیه‌های مرتبط با احتمال جذب و همینطور متوسط مراحل جذب در زنجیره‌های مارکوف استفاده شد. از توزیع برنزی به عنوان مدلی برای تقریب توزیع متغیر کیفیت استفاده شد. عملکرد این طراحی به وسیله‌ی تحلیل حساسیت پارامترهای فرایند و بر اساس مقادیر چولگی و کشیدگی جامعه، برای کاربردی صنعتی نشان داده شد.

- [13] Lorenzen, T.J., Vance, L.C. (1986). The Economic Design of Control Charts: A Unified Approach. *Technometrics*, 28 (1):3-10. doi: 10.1080/00401706.1986.10488092.
- [14] Rahim, M.A. (1985). Economic model of  $\bar{X}$  chart under non-normality and measurement errors. *Computers and Operations Research*, 12 (3):291-299.
- [15] Rahim, M.A., Banerjee, P.K. (1993). A generalized model for the economic design of  $\bar{x}$ -control charts for production systems with increasing failure rate and early replacement. *Naval Research Logistics (NRL)*, 40 (6):787-809. doi: 10.1002/1520-6750(199310)40:6<787::AID-NAV3220400605>3.0.CO;2-4.
- [16] Saniga, E.M. (1989). Economic statistical control chart designs with an application to  $\bar{X}$  and R charts. *Technometrics*, 31:313-320.
- [17] Seif, A., Faraz, A., & Saniga, E. (2015). Economic statistical design of the VP control charts for monitoring a process under non-normality. *International Journal of Production Research*, 53 (14):4218-4230. doi: 10.1080/00207543.2014.986298.
- [18] Yang, K.A.I., Hancock, W.M. (1990). Statistical quality control for correlated samples. *International Journal of Production Research*, 28 (3):595-608. doi: 10.1080/00207549008942738.
- [19] Yeh, L.L., Wang, P.K., Li, F.C. & Yeh, Y.M. (2011). An Extension of Economic Design of  $\bar{x}$ -Bar Control Charts for Non Normally Distributed Data Under Weibull Shock Models. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 40 (21):3879-3902. doi: 10.1080/03610926.2010.501939.
- [20] Yourstone, S.A., Zimmer, W.J. (1992). Non-Normality and the Design of Control Charts for Averages. *Decision sciences*, 23 (5):1099-1113.
- [6] Chen, H., Cheng, Y. (2007). Non-normality effects on the economic-statistical design of charts with Weibull in-control time. *European Journal of Operational Research*, 176 (2):986-998. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2005.08.021>.
- [7] Chen, F.L., Yeh, C.H. (2009). Economic statistical design of non-uniform sampling scheme  $\bar{X}$  bar control charts under non-normality and Gamma shock using genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, 36 (5):9488-9497. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.eswa.2009.01.018>.
- [8] Cinlar, E. (1975). *Introduction to stochastic Process*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall.
- [9] Duncan, A.J. (1956). The economic design of  $\bar{X}$ -charts used to maintain current control of a process. *Journal of American Statistical Association*, 51:228-242. doi: 10.1080/01621459.1956.10501322.
- [10] Heydari, A.A., Moghadam, M.B. (2017). Non-normality Effects on the Economic Statistical Design of  $\bar{X}$ -Control Charts Under Burr XII Shock Models. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*:1-13. doi: 10.1007/s40995-017-0172-6.
- [11] Heydari, A.A., Moghadam, M.B., & Eskandari, F. (2016). Economic and economic statistical designs of  $\bar{X}$ -control charts under Burr XII shock model. *International Journal of Quality Engineering and Technology*, 6 (1-2). doi: 10.1504/IJQET.2016.081626.
- [12] Holland, J. H. (1975). Adaptation in nature and artificial system. *Ann Arbor, Michigan, USA*, The University of Michigan Press.

- 
- <sup>۱</sup> Economic Design
  - <sup>۲</sup> Economic Statistical Design
  - <sup>۳</sup> Burr Distribution
  - <sup>۴</sup> Adjusted Average Time to Signal
  - <sup>۵</sup> Average Time of Cycle
  - <sup>۶</sup> Statistical Process Control
  - <sup>۷</sup> Selection
  - <sup>۸</sup> Tournament
  - <sup>۹</sup> Tournament
  - <sup>۱۰</sup> crossover
  - <sup>۱۱</sup> Mutation
  - <sup>۱۲</sup> Elitism