

روشی جدید برای مدل‌سازی قابلیت اطمینان سیستم‌های مکانیکی با نرخ شکست وانی شکل براساس آزمون‌های سانسور شده و شتاب‌دهنده

روح‌اله رضانی

مریی گروه آمار، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه دامغان*

چکیده رفتار تابع نرخ شکست برخی سیستم‌های مکانیکی وانی شکل است. مدل وایبل معمولی قادر نیست طول عمر چنین سیستم‌هایی با تابع نرخ شکست وانی شکل را بطور کامل مدل‌سازی نماید. در این مقاله از یک توزیع وایبل تعمیم یافته جدید برای مدل‌سازی توابع نرخ شکست با رفتار وانی شکل استفاده شده است. این مدل بر روی سه مجموعه داده مورد ارزیابی قرار گرفته است. در این سه مجموعه داده، به منظور کاهش زمان اجرای آزمون طول عمر از آزمون‌های شتاب‌دهنده و سانسور شده نوع یک استفاده شده است. پارامترهای مدل نیز براساس روش ماکزیمم درست‌نمایی برآورد شده‌اند. شاخص‌های آکائیک، لگاریتم تابع درست‌نمایی و معیار اطلاع بیزی به دست آمده، حاکی از کارایی این مدل برای داده‌های حاصل از انجام آزمون‌های طول عمر ذکر شده است. بنابراین میانگین طول عمر پیش‌بینی شده از اعتبار خوبی برخوردار است.

کلمات کلیدی قابلیت اطمینان سیستم‌های مکانیکی، توزیع وایبل، آزمون طول عمر شتاب‌دهنده، آزمون طول عمر سانسور شده

۱- مقدمه

خرابی در سازه‌های تیری شکل با استفاده از الگوریتم فازی-ژنتیک معرفی گردیده است که توانایی تشخیص مکان و شدت خرابی را دارد. در [۲] الگوریتمی برای طراحی بهینه زیرسیستم‌های سامانه‌های فضایی با توجه به پارامترهای قابلیت اطمینان ارائه شده است. در [۳] تحلیل طول عمر یک سیستم منسجم چندحالتی تشخیص شرایط بحرانی یک فضاپیما براساس آنالیز درخت خطا مورد بررسی قرار گرفته است. آزمایش تحت شرایط طبیعی نیازمند یک زمان طولانی (حتی چند سال) و استفاده از تعداد زیادی دستگاه می‌باشد. معمولاً انجام آزمایش‌های قابلیت اطمینان تحت شرایط طبیعی پرهزینه و غیرعملی است. از طرفی آزمون‌های طول عمر برای محصولات با قابلیت اطمینان بالادریک شرایط عملکردی عادی غالباً زمان‌بر و هزینه‌بر هستند، زیرا می‌بایست یک زمان طولانی بگذرد تا تعداد شکست‌های

در جهان امروز رقابت شدیدی در تولید و توسعه محصولات جدید در کوتاه‌ترین زمان وجود دارد. از طرفی تولیدکنندگان و مشتریان انتظار دارند که این محصولات برای مدت زمان مناسبی کار کنند. بنابراین تضمین دوام محصول به عنوان یک استاندارد می‌بایست همراه محصول به مشتری در قالب خدمات گارانتی و وارانتی ارائه گردد. این موضوع نیازمند این است که بتوان برآورد درستی از قابلیت اطمینان محصول با انجام آزمایش‌هایی بر روی مواد، مولفه‌ها و سیستم‌ها در مراحل مختلف توسعه، داشت. برای این منظور بسیاری از محققان تلاش نموده‌اند با مدل‌سازی طول عمر انواع سیستم‌های مکانیکی تخمینی از میزان طول عمر آن بدست آورند. به عنوان مثال در [۱] یک سیستم مکانیکی پرتابل هوشمند جهت شناسایی

* (Corresponding author) r_amezani@du.ac.ir

قابل قبولی برای تحلیل بدست آید. بطور کلی برای حل این موضوع دو راهکار ذیل وجود دارد:

الف) آزمون‌های طول عمر سانسور شده

ب) آزمون‌های طول عمر شتاب‌دهنده

در آزمون‌های طول عمر سانسور شده منتظر نمی‌مانند تا تمام واحدهای تحت آزمایش دچار شکست شوند. نمونه‌هایی که از این نوع آزمون‌های طول عمر به دست می‌آید نمونه‌های سانسور شده نامیده می‌شوند. چند روش برای سانسور داده‌ها وجود دارد به عنوان مثال آزمون طول عمر با در نظر گرفتن سانسور نوع یک و سانسور نوع دوم. در سانسور نوع یک زمان اجرای آزمایش از قبل تعیین و ثابت در نظر گرفته می‌شود و واحدهای تحت آزمایش که تا آن زمان سالم باقی مانده‌اند تحت سانسور قرار می‌گیرند. در سانسور نوع دوم آزمون طول عمر زمانی خاتمه می‌یابد که تعداد خرابی واحدهای تحت آزمایش به یک تعداد مشخص و از قبل تعیین شده برسد.

روش دیگر برای کاهش زمان آزمون‌های طول عمر استفاده از آزمون‌های طول عمر شتاب‌دهنده^۱ است. در این آزمون‌ها سیستم تحت شرایط عملکردی شدیدتر (افزایش یا کاهش سطح استرس) نسبت به شرایط کارکرد طبیعی قرار می‌گیرد، لذا شکست را در یک مدت زمان کوتاه‌تری در طول برگزاری آزمون می‌توان مشاهده نمود. اطلاعات بدست آمده از این روش برای پیش‌بینی مدل طول عمر تحت شرایط استرسی و برآورد خصوصیات توزیع طول عمر تحت شرایط طبیعی بکار گرفته می‌شود.

یکی از بهترین توزیع‌های طول عمر برای تحلیل نتایج حاصل از آزمون‌های طول عمر در حالت سانسور شده و حتی در آزمون‌های شتاب‌دهنده توزیع احتمالی وایبل می‌باشد که در زمینه‌های مختلف، بسیار مورد توجه قرار گرفته است. دلیل عمده این موضوع انعطاف رفتار تابع نرخ شکست این توزیع است که می‌تواند افزایشی، کاهش‌ی و یا ثابت باشد [۴]. به عنوان مثال در [۵] از توزیع وایبل برای پیش‌بینی زمان خرابی یک پمپ آب فشار قوی استفاده شده است. در [۶] از توزیع وایبل سه پارامتری برای مدل‌سازی زمان‌های خرابی توربین بادی جهت انجام محاسبات سود و زیان انرژی تولید شده در یک مزرعه بادی استفاده شده است. در [۷] از یک مدل نیمه مارکوفی برای مدل‌سازی طول عمر سیستم خنک‌کننده یک نیروگاه اتمی استفاده شده است. در این مدل با شبیه‌سازی سیستم به صورت یک نمودار بلوکی حاوی چند مولفه تعمیرپذیر و غیرقابل تعمیر،

فرض بر این است که زمان شکست هر مولفه از توزیع وایبل تبعیت می‌کند. در [۸] از توزیع دو پارامتری وایبل برای مدل‌سازی قابلیت اطمینان ترانسفورماتور قدرت به منظور بهینه‌سازی تعداد قطعات یدکی در هنگام تعمیر و نگهداری استفاده شده است. در [۹] دو مدل وایبل و وایبل آمیخته دوپارامتری برای تعیین قابلیت اطمینان ۱۵۸۴ ماهواره پرتاب شده به مدار زمین در طی مدت ژانویه ۱۹۹۰ تا اکتبر ۲۰۰۸ استفاده شده است.

یکی از محدودیت‌های توزیع وایبل این است که تابع نرخ شکست این توزیع می‌تواند فقط یکی از سه حالت کاهش‌ی، ثابت یا افزایش‌ی را بپذیرد. بنابراین از این توزیع برای مدل‌بندی طول عمر سیستم‌های مکانیکی که شکل تابع نرخ شکست آنها بشکل وانی^۲ است، نمی‌توان استفاده نمود. در طی سال‌های اخیر، محققان سعی کرده‌اند با تغییر تعداد پارامترهای توزیع بین ۲ تا ۵ پارامتر تعمیم‌های جدیدی از این توزیع بدست آورند. در [۱۰] سعی شده است یک تعمیم ۲ پارامتری قابل انعطاف از این توزیع ارائه گردد که رفتار تابع نرخ شکست بصورت افزایشی-کاهش‌ی و یا وانی شکل باشد. در [۱۱] یک مدل سه پارامتری با نام توزیع وایبل گسترش‌یافته ارائه گردیده است. توزیع وایبل اصلاح شده با چهار پارامتر، در [۱۲] معرفی شده است. تعمیمی از توزیع وایبل با پنج پارامتر توسط [۱۳، ۱۴] انجام شده است.

در این مقاله یک توزیع احتمالی طول عمر جدید براساس توزیع وایبل و توزیع وایبل اصلاح شده معرفی خواهد شد. رفتار تابع نرخ شکست این توزیع وانی شکل است. در ادامه تعمیمی از این مدل برای داده‌های سانسور شده نوع یک و آزمون طول عمر شتاب‌دهنده به کار گرفته شده است. تابع نرخ شکست توزیع جدید حاصل از جمع توابع نرخ شکست توزیع وایبل و توزیع وایبل اصلاح شده می‌باشد. بخش ۲، شامل تعریف، ویژگی‌ها، فواید مدل و لیستی از مدل‌های فرعی آن می‌باشد. در بخش ۳، این مدل بر روی دو مجموعه داده داده‌های سانسور شده نوع یک پیاده‌سازی و نتایج ارائه شده است. در بخش ۴، شیوه پیاده‌سازی توزیع طول عمر وایبل دو مولفه‌ای بر روی یک مجموعه داده حاصل از آزمون شتاب‌دهنده بحث شده است. بخش ۵، نتایج مقاله را بیان می‌کند.

۲- مدل وایبل دو مولفه‌ای

²Bathub shape

¹Accelerated Life Testing

سیستم‌هایی که دارای نرخ شکست طبیعی و نابهنگام هستند مورد استفاده قرار می‌گیرد. هدف از مولفه وایبل ایجاد یک تابع نرخ شکست کاهشی در صورت لزوم با انتخاب $\beta_1 < 1$ می‌باشد، همانند توزیع وایبل جمعی در [۱۶] (و افزایشی با انتخاب $\beta_1 > 1$). مولفه وایبل اصلاح شده نیز دارای یک تابع نرخ شکست با رفتار افزایشی یا یک رفتار وانی شکل می‌باشد. جمع این دو مولفه باعث می‌گردد که رفتار تابع نرخ شکست وانی شکل باشد (مگر اینکه رفتار هر دو تابع نرخ شکست افزایشی باشد)، البته با انعطاف بیشتر نسبت به توزیع وایبل جمعی.

همانطور که در شکل ۲ دیده می‌شود تابع نرخ شکست می‌تواند شکل‌های متفاوتی از جمله شکل وانی داشته باشد. با توجه به رابطه ۴ می‌توان استنباط نمود اگر $\beta_1, \beta_2 \geq 1$ رفتار تابع افزایشی، اگر $\beta_1, \beta_2 < 1$ و $k = 0$ رفتار تابع نرخ شکست کاهشی و در سایر موارد وانی شکل می‌باشد. تابع نرخ شکستی مطلوب است که با نسبت دادن یک مقدار ثابت برای نرخ شکست بتواند دوره طول مفید در یک سیستم مکانیکی را نیز مدل‌بندی نماید [۱۷]. تعداد کمی از توزیع‌های احتمالی طول عمر چنین ویژگی را دارند که توزیع وایبل دو مولفه‌ای مطابق شکل ۲ این چنین است.

۳- آزمون طول عمر سانسور شده

در سیستم های با قابلیت اطمینان نسبتاً بالا زمان آزمون طول عمر برای شکست تمام واحدهای تحت آزمایش معمولاً طولانی می‌گردد. یکی از راه‌کارها برای اجرای آزمون طول عمر استفاده از سانسور نوع یک می‌باشد. در این نوع اجرای آزمون از قبل زمان τ به عنوان زمان سانسور در نظر گرفته می‌شود. بنابراین داده‌های طول عمر آزمون شامل مجموعه‌ای از زمان-های شکست سیستم و مجموعه‌ای از داده‌های سانسور شده در زمان τ هستند.

جدول ۱: مدل‌های فرعی توزیع طول عمر وایبل دو مولفه‌ای

مدل	λ_1	λ_2	β_1	β_2	k	مرجع
وایبل جمعی	*	*	*	*	۰	[۱۳]
وایبل اصلاح شده	۰	*	۰	*	*	[۸]
وایبل اصلاح شده S-Z	*	*	۱	*	۰	[۱۴]
وایبل با نرخ شکست خطی	*	*	۱	۲	۰	[۲۱]
وایبل حد نهایی	۰	۱	۰	۰	*	[۲۱]
وایبل	*	۰	*	۰	۰	[۱]
ریلی	*	۰	۲	۰	۰	[۲۱]
نمایی	*	۰	۱	۰	۰	[۲۱]

تابع توزیع مدل وایبل دو مولفه‌ای که توسط [۱۵] معرفی شده عبارتست از:

$$F(t) = 1 - e^{-[\lambda_1 t^{\beta_1} + \lambda_2 t^{\beta_2} e^{kt}]} \quad (1)$$

بطوریکه پارامترهای $\lambda_1, \lambda_2, \beta_1, \beta_2, k$ نامنفی هستند. β_1, β_2 پارامترهای شکل توزیع، λ_1, λ_2 پارامترهای مقیاس و k پارامتر شتاب می‌باشند. تابع چگالی احتمال عبارت است از:

$$f(t) = [\lambda_1 \beta_1 t^{\beta_1 - 1} + \lambda_2 (\beta_2 + kt) t^{\beta_2 - 1} e^{kt}] \times e^{-[\lambda_1 t^{\beta_1} + \lambda_2 t^{\beta_2} e^{kt}]} \quad (2)$$

این تابع براساس مقادیر مثبت پارامترهای خود رفتارهای متفاوتی از خود نشان می‌دهد که در شکل ۱ نشان داده شده است.

توزیع احتمالی وایبل دو مولفه‌ای، شامل مدل‌های فرعی است که بطور گسترده‌ای در تحلیل‌های طول عمر و قابلیت اطمینان مورد استفاده قرار می‌گیرد. جدول ۱، لیستی از مدل‌هایی که از این توزیع مشتق می‌شوند را نشان می‌دهد.

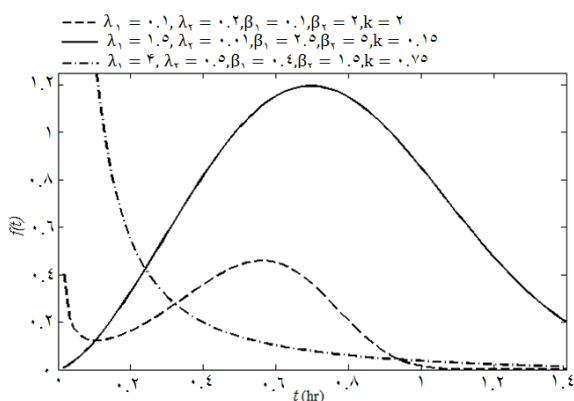
تابع قابلیت اطمینان توزیع وایبل دو مولفه‌ای عبارت است از:

$$R(t) = e^{-[\lambda_1 t^{\beta_1} + \lambda_2 t^{\beta_2} e^{kt}]} \quad (3)$$

و تابع نرخ شکست برابر است با

$$h(t) = \lambda_1 \beta_1 t^{\beta_1 - 1} + \lambda_2 (\beta_2 + kt) t^{\beta_2 - 1} e^{kt} \quad (4)$$

این تابع مشابه تابع نرخ شکست یک سیستم مکانیکی سری با دو مولفهمستقل است. در این سیستم تابع نرخ شکست کل سیستم برابر است با جمع تابع نرخ شکست دو مولفه مستقل.



شکل ۱: تابع چگالی احتمال توزیع طول عمر وایبل دو مولفه‌ای

تابع نرخ شکست مولفه اول از توزیع وایبل با پارامترهای λ_1, β_1 تابع نرخ شکست مولفه دوم از توزیع وایبل اصلاح شده در [۱۱] با پارامترهای λ_2, β_2, k تبعیت می‌کند. بنابراین توزیع در مورد

خطی، حاصل از روابط ۸، ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۲ بر حسب پارامترهای مدل بدست آورد. برای این منظور از نرم افزار مطلب استفاده شده است.

$$\sum_{i=1}^n \phi_i \frac{\lambda_1 t_i^{\beta_1 - 1} (1 + \beta_1 \ln(t_i))}{h(t_i | \bar{\theta})} - \lambda_1 \left[\sum_{i=1}^n \phi_i t_i^{\beta_1} \ln(t_i) + \sum_{i=1}^n \bar{\phi}_i \tau^{\beta_1} \ln(\tau) \right] = 0, \quad (8)$$

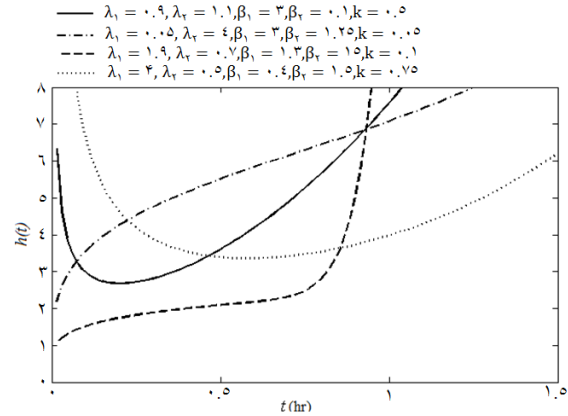
$$\sum_{i=1}^n \phi_i \frac{(\beta_\tau + kt_i) t_i^{\beta_\tau - 1} e^{kt_i}}{h(t_i | \bar{\theta})} - \left[\sum_{i=1}^n \phi_i t_i^{\beta_\tau} e^{kt_i} + \sum_{i=1}^n \bar{\phi}_i \tau^{\beta_\tau} e^{k\tau} \right] = 0, \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^n \phi_i \frac{t_i^{\beta_\tau - 1} e^{kt_i} ((\beta_\tau + kt_i) \ln(t_i) + 1)}{h(t_i | \bar{\theta})} - \sum_{i=1}^n \phi_i t_i^{\beta_\tau} e^{kt_i} \ln(t_i) - \sum_{i=1}^n \bar{\phi}_i \tau^{\beta_\tau} e^{k\tau} \ln(\tau) = 0, \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n \phi_i \frac{(1 + \beta_\tau + kt_i) t_i^{\beta_\tau} e^{kt_i}}{h(t_i | \bar{\theta})} - \sum_{i=1}^n \phi_i t_i^{\beta_\tau + 1} e^{kt_i} - \sum_{i=1}^n \bar{\phi}_i \tau^{\beta_\tau + 1} e^{k\tau} = 0, \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^n \phi_i \frac{\beta_1 t_i^{\beta_1 - 1}}{h(t_i | \bar{\theta})} - \sum_{i=1}^n \phi_i t_i^{\beta_1} - \sum_{i=1}^n \bar{\phi}_i \tau^{\beta_1} = 0. \quad (12)$$

در ادامه نتایج برازش مدل وایبل دو مولفه‌ای، وایبل دو مولفه‌ای سانسور شده و سایر مدل‌های موجود بر روی دو مجموعه داده ارائه و میزان خوبی برازش آن‌ها براساس معیارهایی همچون لگاریتم تابع درستنمایی، معیار اطلاع آکائیک^۳ و معیار اطلاع بیزی^۴ با یکدیگر مورد مقایسه می‌شود. در این پیاده‌سازی فرض شده است که دو مجموعه داده شامل داده‌های سانسور شده هستند.



شکل ۲: تابع نرخ شکست توزیع طول عمر وایبل دو مولفه‌ای

۱-۳- برآورد پارامترهای مدل وایبل دو مولفه‌ای برای داده‌های سانسور شده نوع یک

در این بخش می‌خواهیم پارامترهای توزیع وایبل دو مولفه‌ای را براساس مشاهدات سانسور شده در مورد دو مجموعه داده، برآورد نمائیم. مدل وایبل دو مولفه‌ای با در نظر گرفتن داده‌های سانسور شده به اختصار مدل وایبل دو مولفه‌ای سانسوری نامیده می‌شود. یکی از بهترین روش‌ها برای برآورد پارامترهای توزیع استفاده از روش ماکزیمم درستنمایی می‌باشد [۱۸]. از روش‌های دیگری مانند روش بی‌زین با تقریب لیندلی [۱۹] یا روش MCMC نیز برای برآورد پارامترها می‌توان استفاده نمود [۲۰]. فرض کنید که $\bar{\theta} = (\lambda_1, \lambda_\tau, \beta_1, \beta_\tau, k)$

$$\varphi_i = \begin{cases} 1 & t \leq \tau \\ 0 & o.w \end{cases} \quad (5)$$

بنابراین تابع درستنمایی برای داده‌های (t_i, φ_i) عبارت است از:

$$L = \prod_{i=1}^n [f(t_i | \bar{\theta})]^{\varphi_i} [R(\tau | \bar{\theta})]^{\bar{\varphi}_i} \quad (6)$$

بطوریکه $\bar{\varphi}_i = 1 - \varphi_i$ بنابراین لگاریتم تابع درستنمایی عبارت است از:

$$L = \sum_{i=1}^n \varphi_i \left\{ \ln \left[\lambda_1 \beta_1 t_i^{\beta_1 - 1} + \lambda_\tau (\beta_\tau + kt_i) t_i^{\beta_\tau - 1} e^{kt_i} \right] - \lambda_1 \sum_{i=1}^n t_i^{\beta_1} - \lambda_\tau \sum_{i=1}^n t_i^{\beta_\tau} e^{kt_i} \right\} + \sum_{i=1}^n \bar{\varphi}_i [-\lambda_1 \tau^{\beta_1} - \lambda_\tau \tau^{\beta_\tau} e^{k\tau}] \quad (7)$$

با گرفتن مشتق جزئی از رابطه ۷ نسبت به هر یک از پارامترها و مساوی صفر قرار دادن هر یک از روابط یک دستگاه غیرخطی با ۵ معادله و ۵ پارامتر مجهول به دست می‌آید. برآوردهای ماکزیمم درستنمایی را می‌توان از حل این دستگاه معادلات غیر

³Akaike information criterion: AIC

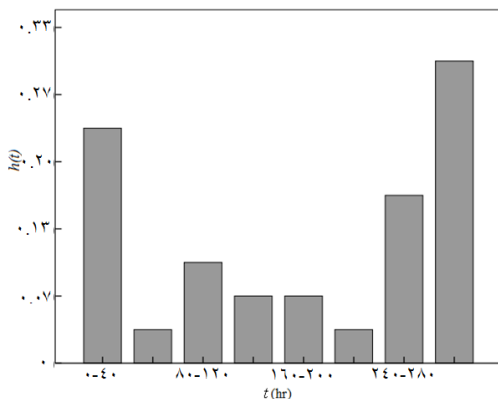
⁴Bayesian Information Criterion: BIC

۳-۳-۳- مجموعه داده میکرو و اسکوبار^۶

این مجموعه شامل داده‌های شکست و زمان‌های کار ۳۰ دستگاه می‌باشد [۲۳]. همانطور که در شکل ۴ دیده می‌شود و در [۱۴] نیز اشاره شده است، تابع نرخ شکست این مجموعه داده وانی شکل است. زمان سانسور در این مجموعه داده $\tau = 300$ در نظر گرفته شده است. مدل وایبل دو مولفه‌ای سانسوری توانسته بصورت مناسبی این داده‌ها را مدل نماید. جدول ۴، برآوردهای درست‌نمایی ماکزیمم مدل وایبل دو مولفه‌ای سانسوری را در کنار سایر مدل‌ها جهت مقایسه نشان می‌دهد. آماره‌های نیکویی برازش در جدول ۵ نشان داده شده است. همانطور که در جدول ۵ دیده می‌شود، مدل وایبل دو مولفه‌ای نسبت به مدل وایبل اصلاح شده که در مرجع [۲۱] خوب ارزیابی شده، با تعداد پارامترهای یکسان برازش بهتری را نشان می‌دهد. بطوریکه مدل وایبل دو مولفه‌ای دارای بیشترین مقدار درست‌نمایی و کمترین مقدار معیارهای آکائیک و اطلاع بیزی در مقایسه با سایر مدل‌ها می‌باشد. همانطور که در جدول ۴ دیده می‌شود اگرچه در مدل وایبل دو مولفه‌ای سانسوری برخی داده‌ها سانسور شده‌اند ولی همچنان پارامترهای برآورد شده نزدیک مقادیر پارامترهای برآورد شده مدل وایبل دو مولفه‌ای می‌باشند و مقدار شاخص‌های آکائیک و اطلاع بیزی در مدل وایبل دو مولفه‌ای سانسوری کمتر از مدل غیرسانسوری می‌باشد که نشان می‌دهد مدل بخوبی به داده‌ها برازش شده

جدول ۳: آماره‌های نیکویی برازش توزیع‌های طول عمر وایبل مختلف برای مجموعه داده آرست

شاخص	دو مولفه‌ای سانسوری	دو مولفه‌ای	اصلاح شده	جمعی
لگاریتم درست‌نمایی	-۲۰۲.۵	-۲۱۲.۹	-۲۲۷.۵	-۲۲۱.۵
آکائیک	۴۱۵.۰	۴۳۵.۸	۴۶۰.۳	۴۵۱.۰
اطلاع بیزی	۴۲۴.۶	۴۴۵.۴	۴۶۶.۰	۴۵۸.۷



شکل ۴: تابع تجربی نرخ شکست مجموعه داده میکرو و اسکوبار

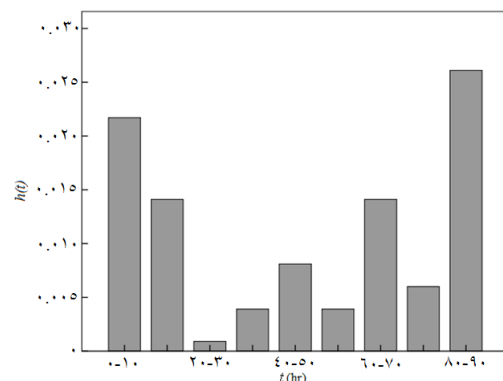
۳-۳-۲- مجموعه داده آرست^۵

این مجموعه داده طول عمر ۵۰ قطعه را نشان می‌دهد [۲۱]. محققان زیادی این مجموعه داده را تحلیل نموده‌اند [۱۲،۲۲]. همانطور که در شکل ۳ دیده می‌شود این مجموعه داده تابع نرخ شکست وانی شکل دارد. زمان سانسور در این مجموعه داده $\tau = 85$ در نظر گرفته شده است.

جدول ۲ برآوردهای ماکزیمم درست‌نمایی مدل وایبل دو مولفه‌ای و مدل وایبل دو مولفه‌ای سانسوری را در کنار سایر مدل‌ها جهت مقایسه نشان می‌دهد. شاخص‌های نیکویی برازش در جدول ۳، آورده شده‌اند. همانطور که در جدول ۳ دیده می‌شود، مدل وایبل دو مولفه‌ای نسبت به مدل وایبل اصلاح شده، با تعداد پارامترهای یکسان برازش بهتری را نشان می‌دهد.

جدول ۲: برآورد MLE پارامترهای توزیع‌های طول عمر وایبل مختلف برای مجموعه داده آرست

پارامترها	دو مولفه‌ای سانسوری	دو مولفه‌ای	اصلاح شده	جمعی
λ_1	۰.۰۶۷	۰.۰۷۱	۰	۱.۱۵-۸
λ_2	۷.۹۵-۸	۷.۰۵-۸	۰.۰۶۲	۰.۰۸۶
β_1	۰.۶۲۶	۰.۵۹۵	۰	۴.۲۱۴
β_2	۰.۰۳۰	۰.۰۱۶	۰.۳۵۶	۰.۴۷۷
k	۰.۱۸۹	۰.۱۹۷	۰.۰۲۳	۰



شکل ۳: تابع تجربی نرخ شکست مجموعه داده آرست

بطوریکه مدل وایبل دو مولفه‌ای دارای بیشترین مقدار درست‌نمایی و کمترین مقدار معیارهای آکائیک و اطلاع بیزی در مقایسه با سایر مدل‌ها می‌باشد. با توجه به جدول ۳، مقدار درست‌نمایی مدل وایبل دو مولفه‌ای سانسوری از مدل وایبل دو مولفه‌ای نیز بیشتر است معیارهای آکائیک و اطلاع بیزی این مدل نیز از حالت غیر سانسوری کمتر می‌باشد. بنابراین مدل وایبل دو مولفه‌ای، داده‌های سانسور شده را بخوبی مدل نموده است. مقادیر پارامترهای برآورد شده در مدل وایبل دو مولفه‌ای سانسوری، به مقادیر پارامترهای برآورد شده مدل وایبل دو مولفه‌ای نیز بسیار نزدیک می‌باشند.

^۶Meeker&Escobar dataset

^۵Aarset dataset

جدول ۴: برآورد MLE پارامترهای توزیع‌های طول عمر وایبل مختلف برای مجموعه داده میکرو اسکوپار

پارامترها	دو مولفه‌ای سانسوری	دو مولفه‌ای اصلاح شده	جمع‌ی
λ_1	۰.۰۱۹	۰.۰۲۴	۱.۳۵-۷
λ_2	۸.۲۵-۸	۱.۱۵-۸	۰.۰۱۹
β_1	۰.۶۹۵	۰.۶۲۹	۲.۸۳۰
β_2	۰.۰۱	۰.۰۱۲	۰.۶۰۴
k	۰.۰۵۱	۰.۰۵۶	۰

جدول ۵: آماره‌های نیکویی برازش توزیع‌های طول عمر وایبل مختلف برای مجموعه داده میکرو اسکوپار

شاخص	دو مولفه‌ای سانسوری	دو مولفه‌ای اصلاح شده	جمع‌ی
لگاریتم درست‌نمایی	-۱۴۱.۷	-۱۶۶.۲	-۱۷۸.۱
آکائیک	۲۹۳.۴	۳۴۴.۴	۳۶۴.۲
اطلاع بیزی	۳۰۰.۴	۳۵۱.۴	۳۶۹.۸

است.

۴-آزمون شتاب‌دهنده طول عمر

برای انجام یک آزمون شتاب‌دهنده طول عمر ابتدا می‌بایست نحوه اجرای آزمون را طرح‌ریزی نمود. در این طرح نوع استرس، نحوه اعمال استرس، سطوح اندازه استرس، تعداد واحدهای تحت آزمایش و مدلی که زمان شکست را در شرایط استرسی نسبت به شرایط طبیعی مدل‌بندی می‌کند، می‌بایست مشخص گردند. در [۲۴] یک جدول راهنمای عملیاتی و گسترده برای طرح‌ریزی یک آزمون شتاب‌دهنده ارائه شده است.

استرس در آزمون شتاب‌دهنده را می‌توان به شکل‌های مختلفی اعمال نمود. نمونه‌هایی از بکارگیری شرایط استرسی در شکل ۵، نشان داده شده است. فرض کنید واحدهای تحت آزمایش در سطوح استرس S_1, S_2, \dots, S_n آزمون گردند.

از زمان‌های شکست بدست آمده برای مشخص کردن مناسب‌ترین توزیع احتمالی طول عمر به همراه پارامترهای آن استفاده می‌گردد. در این نوع آزمون‌های طول عمر فرض بر این است که توزیع احتمالی زمان شکست در سطح استرس S_1 با سطوح مختلف S_2, \dots, S_n تحت شرایط عملیاتی طبیعی یکسان است. به عبارتی پارامتر شکل توزیع برای همه سطوح استرس (از جمله شرایط طبیعی) یکسان است (فرض خطی بودن توزیع) ولی پارامتر مقیاس متفاوت می‌باشد. بنابراین روابط اصلی بین شرایط استرسی و طبیعی بصورت ذیل بیان می‌گردند:

• زمان شکست

$$t_0 = At_s \quad (13)$$

بطوریکه t_0 عبارتست از زمان شکست در شرایط طبیعی، t_s زمان شکست در شرایط استرس و A فاکتور شتاب‌دهنده

• تابع توزیع تجمعی

$$F_0(t) = F_s\left(\frac{t}{A}\right) \quad (14)$$

• تابع چگالی احتمال

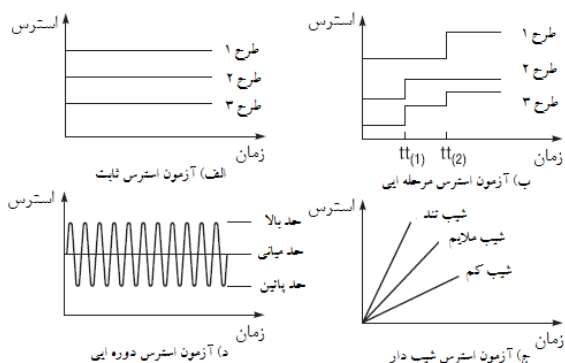
$$f_0(t) = \frac{1}{A} f_s\left(\frac{t}{A}\right) \quad (15)$$

• نرخ شکست

$$h_0(t) = \frac{1}{A} h_s\left(\frac{t}{A}\right) \quad (16)$$

۱-۴-آزمون تعیین طول عمر فشارسنج بوردون

در [۲۵] آزمایشی جهت تعیین طول عمر لوله‌های بوردون (به عنوان بخشی از سنسورهای فشار در الکترونیک هواپیمایی) بیان شده است. در این آزمایش شکست به عنوان نشانه در لوله تعریف شده است. لوله‌ها از فولاد نیکول‌دار بادی (۱۸(۲۵۰ ساخته شده است و در خشکی ۹۹.۹ درصد



شکل ۵: شکل‌های مختلف اعمال استرس در آزمون شتاب‌دهنده

نیتروژن یا مایع هیدرولیک به عنوان مایع آن عمل می‌کند. در نتیجه ترد شدن و خوردگی لوله، این لوله‌ها سوراخ و اصطلاحاً دچار شکست می‌شوند. به دلیل حساسیت این لوله‌ها تصمیم گرفته شده است با سرعت بخشیدن زمان شکست این لوله‌ها توسط عامل استرسی فشار در سه سطح، از یک آزمون شتاب-دهنده برای تخمین شاخص میانگین زمان شکست این لوله‌ها استفاده گردد. شرایط کارکرد طبیعی این لوله‌ها در فشار بین ۸۰ تا ۹۰ پوند بر اینچ مربع است. بنابراین سطوح فشاری ۱۰۰، ۱۲۰ و ۱۴۰ پوند بر اینچ مربع به عنوان سطوح عامل استرسی فشار در نظر گرفته و زمان رخ دادن نشانی ثبت شده است. واحدها به طور پیوسته با استفاده از یک روش آلتراسونیک برای تعیین نشانی بررسی شده است و بدینوسیله شکست لوله

نتایج برآورد پارامترهای توزیع وایبل دو مولفه‌ای براساس روش ماکزیمم درستنمایی و روابط در سطوح فشاری ۱۰۰، ۱۲۰ و ۱۴۰ پوند بر اینچ مربع در جدول ۷ نشان داده شده است. مقادیر شاخص‌های آکائیک، لگاریتم تابع درستنمایی و شاخص اطلاع بیزی نیز در جدول ۸ آمده است. برای محاسبه فاکتور شتاب-دهنده، میانه توزیع یا زمانی را که در آن ۵۰ درصد لوله‌ها دچار شکست می‌شوند، محاسبه و در جدول ۹، نشان داده شده‌اند.

با توجه به اینکه

$$\beta_{1S_{1..}} = \beta_{1S_{12.}} = \beta_{1S_{14.}} \cong 0.19357 \quad (21)$$

$$\beta_{2S_{1..}} = \beta_{2S_{12.}} = \beta_{2S_{14.}} \cong 0.04679$$

لذا پارامترهای شکل توزیع در هر سه سطح استرس با هم برابر بوده (فرض خطی بودن توزیع) و مدل وایبل دو مولفه‌ای برای برازش به داده‌های طول عمر تحت شرایط شتاب دهنده و شرایط کار طبیعی مناسب است

فرض می‌شود رابطه بین زمان شکست t و فشار اعمال شده P شبیه مدل آرهینوس است. بنابراین

$$t = ke^{c/P} \quad (22)$$

جدول ۷: برآورد ماکزیمم درستنمایی توزیع طول عمر وایبل دو مولفه-ای در سطوح مختلف عامل استرسی

فشار (پوند بر اینچ مربع)	λ_{1S}	λ_{2S}	β_{1S}	β_{2S}	k_S
۱۰۰	۰.۰۰۰۸۲	۰.۰۲۸۹۸	۰.۱۹۰۰۱	۰.۰۴۸۳۹	۲.۷۲۵-۴
۱۲۰	۰.۰۰۰۵۴	۰.۰۲۷۷۴	۰.۲۰۰۶۸	۰.۰۴۲۰۰	۴.۹۴۵-۴
۱۴۰	۰.۰۰۰۴	۰.۰۵۳۶۷	۰.۱۹۰۰۲	۰.۰۴۹۰۰	۰.۰۰۲۴۹۵

جدول ۸: آماره‌های نیکویی برازش توزیع طول عمر وایبل دو مولفه‌ای در سطوح مختلف عامل استرسی

فشار (پوند بر اینچ مربع)	لگاریتم درستنمایی	شاخص آکائیک	شاخص اطلاع بیزی
۱۰۰	-۲۸۱.۴۸	۵۷۲.۹۶	۵۷۹.۸۰
۱۲۰	-۲۶۴.۱۹	۵۳۸.۳۸	۵۴۵.۲۱
۱۴۰	-۲۱۵.۸۰	۴۴۱.۶۰	۴۴۸.۴۳

جدول ۹: میانه توزیع طول عمر وایبل دو مولفه‌ای در سطوح مختلف عامل استرسی

عامل استرسی		
فشار (پوند بر اینچ مربع)	۱۰۰	۱۲۰
میانه	۹۷۶۱	۵۰۶۱
	۸۸۳	

که در آن k و c ثابت هستند. با استفاده از یک تبدیل لگاریتمی عبارت بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\ln(t) = \ln(k) + \frac{c}{p} \quad (23)$$

با استفاده از مدل رگرسیون خطی $k = ۳.۵۵۴$ و $c = ۸۱۲,۲۸۹$ بدست می‌آید. میانه طول عمر تخمین زده شده در فشارهای ۸۰ و ۹۰ پوند بر اینچ مربع به ترتیب عبارتند از: ۹۱۲۷۲ و ۲۹۵۳۸

مشخص می‌شود. نتایج در جدول نشان داده شده است. در ادامه می‌خواهیم شاخص میانگین زمان شکست و توابع نرخ خرابی لوله‌ها را در فشارهای کاری طبیعی ۸۰ و ۹۰ پوند بر اینچ مربع براساس توزیع وایبل دو مولفه‌ای تخمین بزنیم.

فرض بر این است که پارامترهای شکل توزیع وایبل دو مولفه‌ای در شرایط طبیعی و استرسی یکسان هستند. تابع قابلیت اطمینان در شرایط شتابی عبارتست از:

$$R_S(t) = e^{-[\lambda_{1S}t^{\beta_{1S}} + \lambda_{2S}t^{\beta_{2S}}e^{k_S t}]} \quad (17)$$

تابع قابلیت اطمینان در شرایط طبیعی برابر است با:

$$R_o(t) = R_S\left(\frac{t}{A}\right) = e^{-[\lambda_{1S}(t/A)^{\beta_{1S}} + \lambda_{2S}(t/A)^{\beta_{2S}}e^{k_S(t/A)}]} \quad (18)$$

رابطه بین پارامترها تحت شرایط طبیعی و شرایط استرسی عبارتست از:

$$\beta_{1o} = \beta_{1S}, \beta_{2o} = \beta_{2S} \quad (19)$$

$$\lambda_{1o} = \frac{\lambda_{1S}}{A^{\beta_{1S}}}, \lambda_{2o} = \frac{\lambda_{2S}}{A^{\beta_{2S}}}, k_o = \frac{k_S}{A}$$

اگر پارامترهای شکل توزیع در سطوح مختلف استرس برابر نباشند، ممکن است فرض خطی بودن نامعتبر بوده و توزیع وایبل دو مولفه‌ای برای مدل‌بندی چنین داده‌هایی مناسب نباشد.

فرض کنید که $\beta_{1o} = \beta_{1S} = \beta_1, \beta_{2o} = \beta_{2S} = \beta_2$ بنابراین تابع نرخ شکست تحت شرایط طبیعی عبارتست از:

$$h_o(t) = \frac{\lambda_{1S}}{A^{\beta_1}} \beta_1 t^{\beta_1-1} + \frac{\lambda_{2S}}{A^{\beta_2}} \left(\beta_2 + \frac{k_S}{A}t\right) t^{\beta_2-1} e^{\frac{k_S t}{A}} \quad (20)$$

جدول ۶: مجموعه داده طول عمر فشارسنج‌های بوردون تحت آزمون

طول عمر شتاب‌دهنده					
۱۴۰	۱۲۰	۱۰۰	۱۴۰	۱۲۰	۱۰۰
۸۶۵	۵۰۳۰	۸۸۷۱	۲۱۵	۱۳۷۸	۱۵۵۷
۸۹۴	۵۲۶۴	۹۶۵۲	۴۲۶	۲۰۵۵	۴۳۳۱
۹۲۷	۵۳۵۵	۹۹۸۹	۴۳۱	۲۰۹۲	۵۷۲۵
۹۵۹	۵۵۷۰	۱۰۴۷۱	۴۳۵	۲۱۲۷	۵۷۵۹
۹۶۶	۵۷۶۰	۱۱۴۵۸	۴۵۱	۲۶۵۶	۶۲۰۷
۱۰۶۷	۵۸۲۹	۱۱۷۲۸	۴۵۱	۲۸۰۱	۶۵۲۹
۱۱۲۴	۵۹۶۸	۱۲۱۰۲	۴۹۶	۳۳۶۲	۶۷۶۷
۱۱۳۹	۶۲۰۰	۱۲۲۵۶	۵۶۵	۳۳۹۳	۷۱۴۶
۱۱۵۸	۶۷۸۳	۱۲۵۱۲	۶۱۳	۳۴۳۳	۷۲۷۷
۱۱۹۸	۶۹۵۲	۱۳۴۲۹	۶۵۱	۳۴۷۷	۷۳۴۶
۱۲۹۳	۷۳۲۹	۱۳۵۳۶	۶۷۰	۳۹۶۷	۷۶۶۸
۱۳۷۶	۷۳۴۳	۱۴۱۶۰	۷۰۸	۴۱۰۱	۷۸۲۶
۱۳۸۵	۸۴۴۰	۱۴۹۹۷	۷۱۰	۴۳۳۳	۷۸۸۵
۱۷۸۰	۹۱۸۳	۱۷۶۰۶	۷۴۳	۴۵۴۵	۸۰۹۵
			۸۳۶	۴۹۳۲	۸۴۶۸

detection in beam using dynamic excitationsystem by experimental. *Modares Mechanical Engineering*, 16(4), 307-314.

- [2] Fakoor, M., Motamen, N. (2015). *System design algorithm for mission-oriented systems with reliability approach*. *Modares Mechanical Engineering*, 14(13), 7-18.
- [3] Farsi, M. A., Najafi, M. (2015). *Reliability Estimation of Multi-State System Based On Fault Tree Analysis*. *Modares Mechanical Engineering*, 15(1), 257-266.
- [4] Hjorth, U. (1980). *A Reliability Distribution with Increasing, Decreasing, Constant and Bathtub-Shaped Failure Rates*. *Technometrics*, 22(1), 99-107.
- [5] Zhang, Q., Hua, C., Xu, G., *A mixture Weibull proportional hazard model for mechanical system failure prediction utilising lifetime*. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 43, 103-112.
- [6] Guo, H., Watson, S., Tavner, P., Xiang, J. (2009). *Reliability analysis for wind turbines with incomplete failure data collected from after the date of initial installation*. *Reliability Engineering and System Safety*, 94, 1057-1063.
- [7] Veeramany, A., Pandey, M. D. (2011). *Reliability analysis of nuclear component cooling water system using semi-Markov process model*. *Nuclear Engineering and Design*, 241, 1799-1806.
- [8] Mijailovic, V. (2010). *Optimal spares availability strategy for power transformer components*. *Electric Power Systems Research*, 80, 987-992.
- [9] Castet, J. F., Saleh, J. H. (2010). *Single versus mixture Weibull distributions for nonparametric satellite reliability*, *Reliability Engineering and System Safety*, 95, 295-300.
- [10] Bebbington, M. S., Lai, CD., Zitikis, R. (2007). *A flexible Weibull extension*. *Reliability Engineering and System Safety*, 92(6), pp.719-26.
- [11] Marshall, A. W., Olkin, I. (1997). *A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families*. *Biometrika*, 84(3), 641-52.
- [12] Lai, C. D., Xie, M., Murthy, D. N. P. (2003). *A modified Weibull distribution*. *IEEE Transactions on Reliability*, 52(1), 33-7.

ساعت. فاکتور شتاب دهنده در فشار ۸۰ پوند بر اینچ مربع برابر است با ۹,۳۵ و در فشار ۹۰ پوند بر اینچ مربع، ۳,۰۳ می باشد. توابع نرخ شکست تحت شرایط عملیاتی نرمال عبارتند از:

$$h_{\lambda}(t) = \frac{t^{-0.80643}}{97.0} + \left(\frac{1}{81.19} + \frac{t}{1317523} \right) t^{-0.9532} e^{\frac{t}{33375}}$$

$$h_{\lambda_1}(t) = \frac{t^{-0.80643}}{781} + \left(\frac{1}{775} + \frac{t}{404858} \right) t^{-0.9532} e^{\frac{t}{1114}} \quad (24)$$

توابع قابلیت اطمینان نیز تحت شرایط عملیاتی طبیعی عبارتند از:

$$R_{\lambda}(t) = e^{-\left[\frac{t^{-0.19357}}{188} + \frac{t^{-0.468}}{38.3} e^{\frac{t}{33375}} \right]}$$

$$R_{\lambda_1}(t) = e^{-\left[\frac{t^{-0.19357}}{151} + \frac{t^{-0.468}}{36.3} e^{\frac{t}{1114}} \right]}$$

بنابراین با توجه به رابطه ۲۶

$$MTTF_o = \int_0^{+\infty} R_o(t) dt \quad (26)$$

میانگین مدت زمان طول عمر هر یک از لوله‌های مورد بررسی در شرایط طبیعی کارکرد در فشارهای ۸۰ و ۹۰ پوند بر اینچ مربع به ترتیب ۸۵۱۵۶ و ۲۷۵۸۸ ساعت مربع بصورت ذیل برآورد شده است.

۵- نتیجه گیری

این تحقیق به توسعه یک روش برای مدل‌سازی طول عمر سیستم‌های مکانیکی با تابع نرخ شکست وانی شکل پرداخته است. رویکرد جدید این تحقیق مدل‌سازی طول عمر براساس آزمون‌های سانسور شده و شتاب‌دهنده می‌باشد که تاثیر بسزایی در کاهش زمان اجرای آزمایش‌های طول عمر دارند. برای این منظور از یک توزیع وایبل تعمیم یافته با تابع نرخ شکست وانی شکل استفاده شده است. روش پیشنهادی بر روی دو مجموعه داده با داده‌های سانسور شده و یک مجموعه داده تحت آزمون شتاب‌دهنده، برگرفته از منابع مختلف پیاده‌سازی و میانگین زمان طول عمر سیستم‌های مکانیکی تحت مطالعه پیش‌بینی شده است. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که در شرایط آزمون سانسور شده و شتاب‌دهنده توزیع وایبل تعمیم یافته به خوبی توانسته پیک دوم خرابی را مدل نماید. سانسور در داده‌های حاصل از آزمون‌های شتاب‌دهنده مسئله مهمی است که لازم است در مطالعات آتی به آن پرداخته شود.

۵- مراجع

- [1] Lotfollahi Yaghin, M. A., Koohdaragh, Etefagh, M., Mojtahedi, A. (2016). *Damage*

- [19] Lindley, D. V. (1980). *Approximate Bayesian method*. *Trabajos Estadist*, 31(1), 223–45.
- [20] Upadhyaya S.K., Gupta A. (2010). *A Bayes analysis of modified Weibull distribution via Markov chain Monte Carlo simulation*. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 80(3), 241–54.
- [21] Aarset, M. V. (1987). *How to identify bathtub hazard rate*. *IEEE Transactions on Reliability*, 36(1), 106–8.
- [22] Silva, G.O., Ortega E.M., Cordeiro G.M., *The beta modified Weibull distribution*. *Lifetime Data Analysis*, 16, 409–30, 2010.
- [23] Meeker, W.Q., Escobar, L. A. (1998). *Statistical methods for reliability data*. New York: John Wiley.
- [24] Meeker, W. Q., Hahn, G. J. (1985). *How to plan an accelerated life test-some practical guidelines*. *Statistical techniques*, 10.
- [25] Pham, H. (2003). *Handbook of Reliability Engineering*, Springer
- [13] Phani, K. K. (1987). *A new modified Weibull distribution function*. *Communication of the American Ceramic Society*, 70(8), 182–4.
- [14] Nadarajah, S., Cordeiro, G. M., E. M. M. Ortega (2011). *General results for the beta-modified Weibull distribution*. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 81(10), 1211–32.
- [15] Saad, J. A., Jingsong, Y. (2013). *A new modified Weibull distribution*. *Reliability Engineering and System Safety*, 111, 164–170.
- [16] Xie, M., Lai, C. D. (1995). *Reliability analysis using an additive Weibull model with bathtub-shaped failure rate function*. *Reliability Engineering and System Safety*, 52, 87–93.
- [17] Kuo, W., Zuo, M. J. (2002). *Optimal reliability modeling: principles and applications*, Wiley.
- [18] Fisher, R. A. (1922). *On the mathematical foundation of theoretical statistics*. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 222, 309–68.

