

طراحی آماری - اقتصادی نمودار کنترلی \bar{X} برای داده‌های همبسته تحت مدل‌های شوک نمایی تعمیم‌یافته و وایبول

سعیدرضا رفیعی

کارشناس ارشد، گروه آمار دانشگاه علامه طباطبائی، saeedreza.rafiy@gmail.com

محمد بامنی‌مقدم

(نویسنده مسئول) استاد گروه آمار دانشگاه علامه طباطبائی*

چکیده از مهم‌ترین ابزارهای کنترل آماری فرایند، نمودار کنترلی است. ساخت نمودارهای کنترلی، با تعیین پارامترهای طراحی اندازه‌ی نمونه، فاصله‌ی نمونه‌گیری و ضریب حدود کنترلی حاصل می‌شود. طراحی آماری - اقتصادی بهترین روش با در نظر گرفتن خواص آماری و هزینه برای تعیین این پارامترها است. طراحی آماری - اقتصادی نمودارهای کنترلی نیاز به یک توزیع برای سازوکار شکست فرایند دارند. مشهورترین توزیع‌ها در تحلیل سازوکار شکست فرایند توزیع نمایی، گاما و وایبول هستند. اخیراً توزیع جدیدی با عنوان توزیع نمایی تعمیم‌یافته، به توزیع‌های مرسوم در تحلیل داده‌های طول عمر و سازوکار شکست فرایند اضافه شده است. چنانچه داده‌های سازوکار شکست از این توزیع پیروی کنند، استفاده از توزیع‌های دیگر نتایج گمراه‌کننده و نامناسبی را به کاربران ارائه می‌دهد. از طرف دیگر، یک فرض اساسی در اکثر نمودارهای کنترلی، مستقل بودن مشاهدات ناشی از فرایند است؛ ولی، در عمل موقعیت‌هایی با داده‌های همبسته داریم. در نتیجه، شناسایی نمودارهای کنترلی که بتواند برای کنترل این‌گونه داده‌ها مورد استفاده قرار گیرد، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این مقاله طراحی آماری - اقتصادی نمودار کنترلی \bar{X} با داده‌های همبسته تحت مدل شوک نمایی تعمیم‌یافته و وایبول را توسعه داده و با ارائه‌ی مثال عددی، کاربرد آن‌ها را نشان می‌دهیم. یک تحلیل حساسیت برای بررسی اثر تغییر خواص کنترل شده‌ی نرخ خطای نوع اول، توان و ضریب همبستگی اعمال کرده‌ایم. نتایج نشان می‌دهد که این نوع نمودارهای کنترلی دارای خواص آماری نامطلوبی هستند و محدودیت بر خطای نوع اول اثر قابل توجهی بر تعیین متوسط هزینه در واحد زمان و پارامترهای طراحی می‌گذارد. همچنین، ضریب همبستگی رابطه غیرمستقیم با اندازه‌ی نمونه و فاصله‌ی نمونه‌گیری و رابطه مستقیم با متوسط هزینه در واحد زمان دارد.

کلمات کلیدی طراحی آماری - اقتصادی، مدل شوک نمایی تعمیم‌یافته، مدل شوک وایبول، داده‌های همبسته

۱- مقدمه

ایده‌ی اصلی طراحی اقتصادی نمودارهای کنترلی، ابتدا توسط گرشیک و روبین [۲] به صورت ناقص مطرح شد. سپس، دانکن [۳] ایده آن‌ها را به عنوان اولین طراحی اقتصادی نمودار کنترلی تکمیل کرد. طراحی اقتصادی نمودارهای کنترلی بر پایه‌ی مینیمم کردن هزینه‌ها استوار است و هیچ‌گونه دخالتی بر معیارهای آماری ندارد. به منظور فائق آمدن بر این مشکل، سانگا [۴] طراحی آماری - اقتصادی را مطرح نمود. این طراحی معایب طراحی‌های اقتصادی را با در نظر گرفتن همزمان جنبه‌های آماری و اقتصادی برطرف می‌کند. طراحی اقتصادی و آماری - اقتصادی نمودارهای کنترلی برای تعیین بهینه‌ی پارامترهای طراحی، نیاز به یک توزیع برای سازوکار -

کیفیت در جهان رقابتی امروز، به عنوان مهم‌ترین عامل پیش‌برد هدف‌های سازمان‌ها مطرح است. از ابزارهای بهبود کیفیت برای ایجاد و حفظ کنترل آماری فرایندهای ساخت، نمودارهای کنترلی هستند. از زمانی که شوهارت [۱] برای اولین بار نمودار کنترلی را معرفی کرد تاکنون انواع مختلفی از این ابزار ارائه و توسعه داده شده است. نمودارهای کنترلی در ابتدا تنها با در نظر گرفتن معیارهای آماری طراحی می‌شدند، در حالی که خواستگاه اصلی کنترل آماری فرایند جنبش اقتصادی بود.

* (Corresponding author) bamenimoghdam@gmail.com

مقاله نظر خود را به طراحی نمودار کنترلی \bar{X} با داده‌های همبسته تحت مدل شوک توزیع نمایی تعمیم‌یافته و وایبول معطوف می‌داریم.

۲- مدل هزینه

نمادهای مورد استفاده در این مقاله به این صورت است: n ، اندازه‌ی نمونه؛ n_1 ، [امین فاصله‌ی نمونه‌گیری؛ L ، ضریب حدود کنترلی؛ Z_0 ، متوسط زمان جستجو برای یک هشدار اشتباه؛ Z_1 ، متوسط زمان جستجو برای یک هشدار درست؛ Z_2 ، متوسط زمان برای تعمیر فرایند؛ a ، هزینه‌ی ثابت نمونه‌گیری؛ b ، هزینه‌ی هر واحد نمونه‌گیری؛ Y ، هزینه‌ی هر هشدار اشتباه؛ W ، هزینه‌ی مکانیابی، تشخیص و تعمیر علت؛ D_0 ، هزینه‌ی چرخه‌ی کیفیت در هر ساعتی که فرایند تولید تحت کنترل است؛ D_1 ، هزینه‌ی چرخه‌ی کیفیت در هر ساعتی که فرایند تولید خارج از کنترل است؛ δ ، اندازه‌ی تغییر میانگین؛ α ، احتمال اعلام هشدار از سوی نمودار مبنی بر خارج از کنترل قرار گرفتن فرایند، در حالی که فرایند تحت کنترل است؛ β ، احتمال پی نبردن به وجود تغییر در فرایند، زمانی که فرایند خارج از کنترل است. همچنین، متوسط زمان چرخه $(E(T))$ و متوسط هزینه چرخه $(E(C))$ برای مدل با توزیع شکست وایبول از مقاله بنرجی و رحیم [۶] به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E(T) = Z_1 + Z_2 + \frac{\alpha(1-p)}{p} Z_0 + h_1 p A(p) + \frac{h_1 p \beta (p A(1-p) - (1-\beta)A(\beta))}{1-\beta-p}. \quad (1)$$

$$E(C) = (a + bn) \left(\frac{\beta}{1-\beta} + \frac{1}{p} \right) + (D_0 - D_1) \left(\frac{1}{\sigma} \right)^{\frac{1}{k}} \Gamma \left(1 + \frac{1}{k} \right) + \frac{\alpha Y (1-p)}{p} + \frac{D_1 h_1 p \beta (p A(1-p) - (1-\beta)A(\beta))}{1-\beta-p} + D_1 h_1 p (1-p) A(1-p) + D_1 h_1 p^2 A(1-p) + W. \quad (2)$$

که در آن $A(x) = \sum_{v=0}^{\infty} (1+v)^{\frac{1}{k}} x^v$ است.

متوسط زمان چرخه $(E(T))$ و متوسط هزینه چرخه $(E(C))$ برای مدل با توزیع شکست نمایی تعمیم‌یافته از مقاله رفیعی و همکاران [۱۱] به صورت زیر محاسبه می‌شود:

شکست فرایند دارند. تاکنون توزیع‌های نمایی، گاما و وایبول به عنوان رایج‌ترین توزیع‌ها برای تحلیل سازوکار شکست یک فرایند تولیدی به کار برده شده است. مدل‌های فراوانی با استفاده از این توزیع‌ها مطرح شده است که می‌توان به مدل بنرجی و رحیم [۵] تحت مدل شوک گاما با رویکرد قضیه تجدید پاداش اشاره کرد. آن‌ها در مقاله‌ی خود یک روش فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر را به جای فاصله‌ی نمونه‌گیری ثابت برای سیستم‌هایی با نرخ خطر افزایشی به کار بردند. در سال ۱۹۸۸ آن‌ها طراحی اقتصادی نمودار کنترلی \bar{X} را تحت سازوکار شکست وایبول پیشنهاد کردند [۶]. ژانگ و براردی [۷] کار آن‌ها را تعمیم داده و یک طراحی آماری-اقتصادی برای نمودار کنترلی \bar{X} با سازوکار شکست وایبول ارائه دادند. ال‌اورینی و رحیم [۸] طراحی آماری-اقتصادی مدل بنرجی و رحیم [۵] را تحت سازوکار شکست گاما مورد بررسی قرار دادند. استفاده از این توزیع‌ها در تحلیل سازوکار شکست در بسیاری از فرایندهای تولیدی معمولاً مناسب به نظر نمی‌رسد. گوپتا و کندو [۹] در سال ۱۹۹۹ توزیع نمایی تعمیم‌یافته را مطرح کردند که در بسیاری از مواقع می‌تواند جای‌گزین بهتری برای خانواده‌های توزیع وایبول و گاما در تحلیل داده‌های طول عمر باشد. آقاییگ و مقدم [۱۰] طراحی اقتصادی نمودار کنترلی \bar{X} را تحت سازوکار شکست توزیع نمایی تعمیم‌یافته با فاصله‌های نمونه‌گیری یکنواخت مورد بررسی قرار دادند. رفیعی و همکاران [۱۱] در ادامه پژوهش آقاییگ و مقدم [۱۰] طراحی آن‌ها را با فاصله‌های نمونه‌گیری نایکنواخت ارائه دادند. از طرف دیگر، در عمل با موارد بسیاری مواجهیم که در آن‌ها داده‌های ناشی از فرایند همبسته هستند و فرض اساسی در اکثر نمودارها، مستقل بودن مشاهدات ناشی از فرایند است. شوهارت [۱۲] و [۱۳] و [۱۴] برای اولین بار اثرات همبستگی موجود در داخل یک زیر گروه در یک نمودار کنترلی را مورد بحث قرار داد. یانگ و هنکاک [۱۵] مطالعه نئوهارت را برای تعیین اثر داده‌های به هم وابسته روی نمودارهای \bar{X} ، R ، S و S_2 به‌وسیله شبیه‌سازی مونت‌کارلو توسعه دادند. چو و همکاران [۱۶] مدل یانگ و هنکاک را با رویکرد طراحی اقتصادی برای تعیین پارامترهای نمودار کنترلی تحت نمونه‌های به هم وابسته ترکیب کردند. لیو و همکاران [۱۷] مدل همبسته یانگ و هنکاک [۱۵] و فاصله نمونه‌گیری ثابت (FSI) را برای توسعه یک طراحی مینیمم هزینه نمودارهای کنترلی \bar{X} داده‌های همبسته به کار گرفتند. چن و یه [۱۸] مدل همبستگی یانگ و هنکاک [۱۵] را با طراحی آماری-اقتصادی توزیع سازوکار شکست گامای ال‌اورینی و رحیم [۱۰] ترکیب کرده و طراحی جدیدی در این زمینه ارائه دادند. از آن‌جا که طراحی نمودارهایی که بتواند داده‌های همبسته را مورد نظارت قرار دهد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، در این

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} [1 + (n-1)\rho] \quad (8)$$

که در آن $\rho = \frac{\sum_{i \neq j} r_{ij}}{n(n-1)}$ به عنوان ضریب همبستگی متوسط تعریف شده است.

احتمال خطای نوع اول یک نمودار \bar{X} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \alpha &= Pr(\bar{X} > UCL | \mu = \mu_0) \\ &+ Pr(\bar{X} < LCL | \mu = \mu_0) \\ &= 2\Phi\left(\frac{-L}{\sqrt{1 + (n-1)\rho}}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

به همین صورت برای عبارت ریاضی احتمال خطای نوع دوم یک نمودار کنترلی \bar{X} داریم:

$$\begin{aligned} \beta &= Pr(LCL < \bar{X} < UCL | \mu_1 = \mu_0 + \sigma\delta) \\ &= \Phi\left(\frac{L - \delta\sqrt{n}}{\sqrt{1 + (n-1)\rho}}\right) - \Phi\left(\frac{-L - \delta\sqrt{n}}{\sqrt{1 + (n-1)\rho}}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

۴- مثال عددی

در این بخش، با ارائه یک مثال عددی طراحی آماری- اقتصادی نمودار کنترلی \bar{X} با داده‌های همبسته را تحت توزیع وایبول و نمایی تعمیم‌یافته می‌پردازیم. پارامترهای هزینه، زمان و اندازه‌ی تغییر با استفاده از برآوردهای مقاله‌ی چن و یه [۱۸] در جدول ۱ نشان داده شده است. جدول ۲ شامل مقادیرهای بهینه‌ی طراحی آماری- اقتصادی نمودار کنترلی \bar{X} تحت توزیع وایبول و نمایی تعمیم‌یافته داده است. مقادیرهای پارامترهای فرایند برای توزیع وایبول از مقاله ژانگ و براردی [۷] و برای توزیع نمایی تعمیم‌یافته از مقاله رفیعی و همکاران [۱۱] قرار داده‌ایم. با توجه به این‌که مدل داده‌های همبسته که در بخش قبل معرفی شد، نمی‌تواند هم خطای نوع اول و هم خطای نوع دوم را کاهش دهد، بنا بر این، محدودیت طراحی آماری- اقتصادی در این مثال عددی را برای خطای نوع اول ۰/۱ در نظر گرفته و در بخش تحلیل حساسیت به‌طور مفصل به بررسی اثرات خطای نوع اول و توان می‌پردازیم.

نرخ خطای نوع اول در خروجی هر دو مدل وایبول و نمایی تعمیم‌یافته برابر با ۰/۱ و همچنین مقدار توان به ترتیب برابر با

$$\begin{aligned} E(T) &= Z_1 + Z_2 - \frac{p(1-\beta)}{\beta-1+p} A(p) + \frac{\alpha(1-p)}{p} Z_0 \\ &+ \frac{p(1-\beta)}{\beta-1+p} B(\beta, p). \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} E(C) &= \frac{(a+bn)(\beta p - \beta + 1)}{p(1-\beta)} + \frac{\alpha Y(1-p)}{p} \\ &+ \frac{D_1 p(1-\beta)}{\beta-1+p} B(\beta, p) + (D_0 - D_1)\mu_t + W \\ &+ \left[\frac{D_1 p(p-\beta)}{1-p} - \frac{D_1 p\beta(1-\beta)}{(1-p)(\beta-1+p)} + D_1 p \right] \\ &\times A(p). \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن $A(x)$ و $B(y, u)$ به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} A(x) &= -\sigma \sum_{j=1}^{\infty} (1-x)^j \\ &\times \ln\left(1 - \sqrt[k]{1 - (1-x)^j}\right). \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} B(y, u) &= -\sigma \sum_{j=1}^{\infty} (1-y)^j \\ &\times \ln\left(1 - \sqrt[k]{1 - (1-u)^j}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

بنا بر این، با توجه به قضیه تجدید پاداش، متوسط هزینه در واحد زمان ($E(V)$) از تقسیم $E(C)$ بر $E(T)$ حاصل می‌شود. فرمول کلی برای طراحی آماری- اقتصادی یک نمودار کنترلی \bar{X} ، از مینیمم کردن متوسط هزینه در واحد زمان با محدودیت روی خواص آماری حاصل می‌شود، که در این مقاله نرخ خطای نوع اول توان را محدود می‌کنیم. برای بهینه‌سازی این مقاله از نرم‌افزار R و بسته nloptr استفاده شده است.

۳- مدل همبسته

در مدل همبسته، یانگ و هنگاک [۱۳] فرض می‌کنند که هر زیر گروه یک بردار تصادفی است، $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ دارای توزیع نرمال چندمتغیره (μ, Σ) است که μ بردار مقادیر میانگین و Σ ماتریس کوواریانس است. به علاوه، $\mu = \mu e$ که e یک بردار از یک‌ها است و $\mu = E(X_i)$ و $(i = 1, 2, \dots, n)$ ؛ $\Sigma = \sigma^2 R$ که $R = \{r_{ij}\}$ و $i = 1, 2, \dots, n$ و $j = 1, 2, \dots, n$ و σ انحراف استاندارد فرایند است. امید ریاضی و واریانس میانگین نمونه به صورت زیر است:

$$E(\bar{X}) = \mu \quad (7)$$

$\sigma = 0.02$ از مقاله ژانگ و براردی [۷] و برای توزیع نمایی تعمیم یافته $k=2$ و $\sigma = 0.07$ از مقاله رفیعی و همکاران [۱۱] در نظر گرفته ایم. جدول های خروجی ۳ و ۴ به ترتیب اثر نرخ خطای نوع اول و توان را روی مدل شوک وایبول و جدول های خروجی ۵ و ۶ به ترتیب اثر نرخ خطای نوع اول و توان را روی مدل شوک نمایی تعمیم یافته نمایش می دهند.

در هر ۴ جدول مشاهده می کنیم که مقدار توان و خطای نوع اول خروجی برنامه در محدودیت خود قرار می گیرند که این امر نشان دهنده نامطلوب بودن خواص آماری این نوع نمودار کنترلی است. در هر دو مدل وایبول و نمایی تعمیم یافته محدودیت بر روی خطای نوع اول و توان تاثیری بر اندازهی نمونه نمی گذارد و اندازهی نمونه در حداقل مقدار خود ($2n$) باقی می ماند. همچنین با افزایش محدودیت خطای نوع اول فاصلهی نمونه گیری کاهش می یابد و با افزایش توان سبب افزایش فاصلهی نمونه گیری می شود. مقدار متوسط هزینه در واحد زمان با افزایش محدودیت خطای نوع اول به شدت افزایش می یابد. به عنوان مثال، در جدول ۳ با افزایش محدودیت از ۰/۳ تا ۰/۲۵ مقدار متوسط هزینه در واحد زمان ۱ درصد افزایش می یابد، در حالی که؛ این افزایش هزینه برای محدودیت ۰/۱ از ۰/۵، ۸/۲ درصد است (به طور مشابه برای جدول ۵).

۰/۱۴۹۵ و ۰/۱۴۳۷ است، که این مقدار توان مناسب نیست. البته همان طور که ذکر شد این افت توان در طراحی آماری اقتصادی به سبب رابطه های این نوع از نمودارهای کنترلی است که بهبود یک شاخص سبب افت شاخص دیگر می شود. با توجه به مقدارهای بهینه پارامترهای طراحی درمی یابیم که این نوع طراحی با نمودار کنترلی داده های همبسته متمایل به گرفتن حداقل نمونه برای بهینه کردن هزینه هستند، به طوری که در هر دو مدل مشاهده می کنیم که اندازهی نمونه برابر ۲ است (با توجه به این که اندازهی نمونه ۱ اثر همبستگی را از بین می برد).

۵- تحلیل حساسیت

تحلیل حساسیت، به طراحان کمک می کند تا اثر تصمیماتشان را روی هزینه، اندازهی نمونه، فاصلهی نمونه گیری و ضریب حدود کنترلی مشاهده کنند. در این بخش، ما اثر تغییر کران نرخ خطای نوع اول (α) و توان (p) را روی مینیمم متوسط هزینه بر واحد زمان و سه پارامتر طراحی بررسی می کنیم. مقدارهایی که برای هر متغیر حساسیت بررسی شده برای α از ۰/۰۵ تا ۰/۳ و برای p از ۰/۶ تا ۰/۹۵ تغییر می کند. پارامترهای زمان، هزینه و اندازه تغییر همان مقدارهای جدول ۱ است و پارامترهای توزیع فرایند برای توزیع وایبول $k=3$ و

جدول ۱: مقدار پارامترهای هزینه، زمان، اندازهی تغییر و ضریب همبستگی

Z_0	Z_1	Z_2	a	b	D_0	D_1	Y	W	δ	ρ
۰/۲۵ ساعت	۰/۲۵ ساعت	۰/۷۵ ساعت	۲۰ دلار	۴/۲۲ دلار	۵۰ دلار	۹۵۰ دلار	۵۰۰ دلار	۱۱۰۰ دلار	۰/۵	۰/۷

جدول ۲: طراحی آماری- اقتصادی نمودار کنترلی برای داده های همبسته تحت توزیع وایبول و نمایی

خروجی برنامه	پارامترهای طراحی			پارامترهای فرایند		α	p	$E(V)$
	n	h_1	L	σ	k			
توزیع وایبول	۲	۳/۶۴	۱/۶۸	۰/۰۰۲	۳	۰/۱۰۰۰	۰/۱۴۹۵	۳۹۷/۵۳
نمایی تعمیم یافته	۲	۱/۵۳	۱/۷۲	۰/۰۰۷	۲	۰/۱۰۰۰	۰/۱۴۳۷	۴۲۳/۲۰

جدول ۳: تحلیل حساسیت نرخ خطای نوع اول برای مدل هزینه تحت توزیع وایبول

محدودیت	پارامترهای طراحی			خروجی برنامه			
	α_x	n	h_1	L	$E(V)$	α	p
	۰/۳۰۰	۲	۴/۸۴	۱/۱۱	۳۶۹/۶۰	۰/۳۰۰۰	۰/۳۶۱۲
	۰/۲۵۰	۲	۴/۶۰	۱/۲۳	۳۷۳/۳۳	۰/۲۵۰۰	۰/۳۱۰۱
	۰/۲۰۰	۲	۴/۳۳	۱/۳۵	۳۷۸/۱۸	۰/۲۰۰۰	۰/۲۵۷۱
	۰/۱۵۰	۲	۴/۰۲	۱/۵۰	۳۸۵/۲۴	۰/۱۵۰۰	۰/۲۰۱۷
	۰/۱۰۰	۲	۳/۶۴	۱/۶۸	۳۹۷/۵۳	۰/۱۰۰۰	۰/۱۴۹۵
	۰/۰۵۰	۲	۳/۲۴	۲/۵۶	۴۳۳/۴۴	۰/۰۵۰۰	۰/۰۸۳۸

جدول ۴: تحلیل حساسیت توان برای مدل هزینه تحت توزیع وایبول

محدودیت	پارامترهای طراحی			خروجی برنامه			
	p_x	n	h_1	L	$E(V)$	α	p
	۰/۹۵	۲	۶/۷۲	۰/۱۰	۳۴۴/۲۸	۰/۹۳۸۶	۰/۹۵۰۰
	۰/۹۰	۲	۶/۶۱	۰/۱۸	۳۴۵/۷۹	۰/۸۸۴۴	۰/۹۰۰۰
	۰/۸۵	۲	۶/۵۴	۰/۲۷	۳۴۷/۶۶	۰/۸۲۷۳	۰/۸۵۰۰
	۰/۸۰	۲	۶/۳۸	۰/۳۸	۳۴۹/۷۴	۰/۷۶۹۳	۰/۸۰۰۰
	۰/۷۰	۲	۶/۱۱	۰/۵۷	۳۵۳/۶۳	۰/۶۵۵۹	۰/۷۰۰۰
	۰/۶۰	۲	۵/۷۶	۰/۶۲	۳۵۷/۱۷	۰/۵۵۰۰	۰/۶۰۰۰

جدول ۵: تحلیل حساسیت نرخ خطای نوع اول برای مدل هزینه تحت توزیع نمایی تعمیم‌یافته

محدودیت	پارامترهای طراحی			خروجی برنامه			
	α_x	n	h_1	L	$E(V)$	α	p
	۰/۳۰۰	۲	۲/۵۵	۱/۱۶	۳۹۱/۱۹	۰/۲۹۹۰	۰/۳۶۱۵
	۰/۲۵۰	۲	۲/۳۲	۱/۲۷	۳۹۵/۱۲	۰/۲۵۰۰	۰/۳۱۱۵
	۰/۲۰۰	۲	۲/۰۸	۱/۴۰	۴۰۰/۸۵	۰/۲۰۰۰	۰/۲۵۸۴
	۰/۱۵۰	۲	۱/۸۲	۱/۵۵	۴۰۹/۰۳	۰/۱۵۰۰	۰/۲۰۲۷
	۰/۱۰۰	۲	۱/۵۳	۱/۷۲	۴۲۳/۲۰	۰/۱۰۰۰	۰/۱۴۳۷
	۰/۰۵۰	۲	۱/۳۱	۲/۵۶	۴۶۴/۵۰	۰/۰۵۰۰	۰/۰۸۳۸

جدول ۶: تحلیل حساسیت توان برای مدل هزینه تحت توزیع نمایی تعمیم یافته

محدودیت	پارامترهای طراحی			خروجی برنامه		
	p_x	n	h_1	L	$E(V)$	α
۰/۹۵	۲	۵/۰۱	۰/۱۰	۳۵۲/۴۴	۰/۹۳۸۹	۰/۹۵۰۰
۰/۹۰	۲	۴/۷۲	۰/۱۹	۳۵۵/۶۶	۰/۸۸۴۱	۰/۹۰۰۰
۰/۸۵	۲	۴/۶۳	۰/۲۸	۳۵۸/۶۵	۰/۸۳۰۰	۰/۸۵۰۰
۰/۸۰	۲	۴/۴۳	۰/۳۹	۳۶۲/۳۶	۰/۷۶۴۹	۰/۸۰۰۰
۰/۷۰	۲	۴/۵۱	۰/۵۸	۳۷۱/۷۳	۰/۶۵۶۴	۰/۷۰۰۰
۰/۶۰	۲	۳/۵۶	۰/۶۵	۳۷۴/۱۳	۰/۵۵۰۰	۰/۶۰۰۰

تعمیم یافته $k=2$ و $\sigma=1/9.07$ از مقاله رفیعی و همکاران [۱۱] در نظر گرفته ایم. با توجه به این که مقادیر منفی همبستگی سبب می شود که خطای نوع اول و دوم تعریف نشده شود، در نتیجه در این قسمت مقدار مثبت همبستگی از مقدار ۰/۱ تا ۰/۷ محاسبه شده است. با افزایش ضریب همبستگی در هر دو مدل شوک مقدار اندازه‌ی نمونه و فاصله‌ی نمونه‌گیری کاهش می‌یابد، اما؛ متوسط هزینه در واحد زمان افزایش می‌یابد. نکته مهم دیگر در این بخش، مقدار تغییرات در مقادیر بهینه از جمله متوسط هزینه در واحد زمان برای تغییر در ضرایب همبستگی بالا بیش‌تر از ضرایب همبستگی پایین است. به عنوان مثال، در جدول ۷ با افزایش ضریب همبستگی از ۰/۶ به ۰/۷ مقدار اندازه نمونه ثابت است، مقدار فاصله‌ی نمونه‌گیری به اندازه ۷/۷ درصد کاهش پیدا می‌کند و متوسط هزینه در واحد زمان ۰/۱۱ درصد افزایش می‌یابد، در حالی که؛ برای تغییر در ضریب همبستگی از ۰/۱ به ۰/۲ مقدار اندازه نمونه و فاصله‌ی نمونه‌گیری به ترتیب به اندازه ۰/۶ و ۲۷/۹۳ درصد کاهش دارند و متوسط هزینه در واحد زمان ۳/۳۸ درصد افزایش می‌یابد. ضریب حدود کنترلی در تغییرات ضریب همبستگی از الگوی خاصی پیروی نمی‌کند (به‌طور مشابه برای جدول ۸).

مقدار متوسط هزینه در واحد زمان با افزایش توان کاهش می‌یابد. این پدیده به این علت است که در واقع اثر خطای نوع اول بیش‌تر بوده و با افزایش توان میزان خطای نوع اول کاهش پیدا کرده و در نهایت متوسط هزینه در واحد زمان را کاهش می‌دهد. به عنوان مثال، در جدول ۴ با افزایش محدودیت از ۰/۹ به ۰/۹۵ متوسط هزینه در واحد زمان ۰/۴ درصد کاهش می‌یابد، در حالی که؛ مقدار متوسط هزینه در واحد زمان با افزایش محدودیت از ۰/۶ به ۰/۷، ۱ درصد کاهش پیدا کرده است (به‌طور مشابه برای جدول ۶).

۶- اثر همبستگی

جدول ۷ و ۸ اثر تغییرات ضریب همبستگی را روی طراحی آماری- اقتصادی یک نمودار کنترلی \bar{X} تحت دو مدل شوک وایبول و نمایی تعمیم یافته نمایش می‌دهد. پارامترهای زمان، هزینه و اندازه تغییر همان مقدارهای جدول ۱ و محدودیت طراحی آماری- اقتصادی برای خطای نوع اول ۰/۱ است. پارامترهای توزیع فرایند برای توزیع وایبول $k=3$ و $\sigma=1/0.2$ از مقاله ژانگ و براردی [۷] و برای توزیع نمایی

جدول ۷: اثر ضریب همبستگی بر طراحی نمودار کنترلی با داده‌های همبسته تحت مدل شوک وایبول

ضریب همبستگی	پارامترهای طراحی			خروجی برنامه
	ρ	n	h_1	L
۰/۷	۲	۳/۶۴	۱/۶۸	۳۹۷/۵۳
۰/۶	۲	۳/۶۷	۱/۸۱	۳۹۷/۰۶
۰/۵	۲	۳/۷۰	۱/۹۰	۳۹۵/۹۱
۰/۴	۳	۳/۷۵	۱/۹۹	۳۹۳/۸۷
۰/۳	۳	۳/۸۲	۲/۰۵	۳۹۰/۴۲
۰/۲	۵	۳/۹۵	۲/۱۰	۳۸۴/۲۵
۰/۱	۸	۴/۲۳	۲/۰۹	۳۷۱/۲۳

جدول ۸: اثر ضریب همبستگی بر طراحی نمودار کنترلی با داده‌های همبسته تحت مدل شوک نمایی تعمیم‌یافته

ضریب همبستگی	پارامترهای طراحی			خروجی برنامه
	ρ	n	h_1	L
۰/۷	۲	۱/۵۳	۱/۷۲	۴۲۳/۲۰
۰/۶	۲	۱/۵۵	۱/۸۵	۴۲۲/۴۰
۰/۵	۲	۱/۵۸	۱/۹۴	۴۲۰/۶۴
۰/۴	۳	۱/۶۳	۲/۰۳	۴۱۷/۵۶
۰/۳	۳	۱/۶۷	۲/۰۷	۴۱۲/۷۵
۰/۲	۵	۱/۷۷	۲/۰۹	۴۰۴/۲۶
۰/۱	۸	۲/۰۲	۲/۰۹	۳۸۶/۱۹

۷- نتیجه‌گیری

در تحلیل حساسیت این طراحی دریافتیم که مقدار توان و خطای نوع اول خروجی برنامه در محدودیت خود قرار می‌گیرند که این امر نشان می‌دهد که خواص آماری این نوع نمودار کنترلی نامطلوب است. علاوه بر این، مقدار متوسط هزینه در واحد زمان با افزایش محدودیت خطای نوع اول به شدت افزایش می‌یابد؛ در حالی که، افزایش محدودیت توان نه تنها اثر چندانی بر مقدار متوسط هزینه در واحد زمان نمی‌گذارد بلکه سبب کاهش هزینه آن می‌شود. در انتها، اثر ضریب همبستگی مورد بررسی قرار دادیم و مشاهده کردیم، که با افزایش ضریب همبستگی در هر دو مدل شوک مقدار اندازه‌ی نمونه، فاصله‌ی

در این مقاله، طراحی آماری - اقتصادی نمودار کنترلی \bar{X} با داده‌های همبسته تحت مدل شوک وایبول و نمایی تعمیم‌یافته ارائه دادیم. در این نوع طراحی دریافتیم که نمی‌توان هر دو شاخص آماری توان و خطای نوع اول را به سبب ماهیت این نمودارهای کنترلی، همزمان بهبود بخشید. همچنین، این نوع طراحی متمایل به گرفتن حداقل نمونه برای بهینه کردن هزینه هستند، به طوری که در هر دو مدل مشاهده کردیم که اندازه‌ی نمونه بیش‌تر مقدار ۲ را به عنوان مقدار بهینه ارائه دادند.

[10] Aghabeig, D., & Moghadam, M. B. (2014). Economic design of \bar{X} -control charts under generalized exponential shock models with uniform sampling intervals. *European Online Journal of Natural and Social Sciences*, 2(3 (s)), pp-1540.

[11] رفیعی، سعیدرضا، آهنی، نازنین، نادری، محمدحسین و بامنی مقدم، محمد (۱۳۹۴). طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترلی \bar{X} تحت مدل شوک نمایی تعمیم یافته، نشریه مهندسی و مدیریت کیفیت، زمستان، جلد ۵، شماره ۴.

[12] Heydari, A. A., Moghadam, M. B. & Eskandari, F. (2016). An extension of Banerjee and Rahim model in economic and economic statistical designs for multivariate quality characteristics under Burr XII distribution, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 46:16, 7855-7871.

[13] Heydari, A. A., Moghadam, M. B. & Eskandari, F. (2017). Economic statistical design of the T2 control chart under the Weibull shock model with multiple assignable causes, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 88:1, 1-27.

[14] Neuhardt, J.B. (1987). Effects of correlated sub-samples in statistical process control. *III Transactions*, Vol.19, No, 2, pp208-214.

[15] Yang, K., Hancock, W.M. (1990) Statistical quality control for correlated samples. *International Journal of Production Research*, Vol.28, No, 3, pp595-608.

[16] Chou, C.Y., Chen, C.H., Liu, H.R. (2001) Economic design of X charts for non-normally data. *International Journal of Production Research*, Vol.39, No.9, pp1931-1941.

[17] Liu, H.R., Chou, C.Y., Chen, C.H. (2002). Minimum-loss design of X-bar charts for correlated data. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, Vol.15, pp 405-411.

[18] Chen, F. L., & Yeh, L. L. (2010, July). Economic statistical design of x-bar control charts for correlated data and Gamma failure mechanism with genetic algorithm. In *Computers and Industrial Engineering (CIE)*, 2010 40th International Conference on (pp. 1-6). IEEE.

نمونه‌گیری و ضریب حدود کنترلی کاهش می‌یابد؛ اما، متوسط هزینه در واحد زمان افزایش می‌یابد.

سپاس‌گزاری

این پژوهش با حمایت معنوی و مالی معاونت محترم پژوهشی دانشگاه علامه طباطبائی از هسته پژوهشی کیفیت انجام پذیرفته است.

مراجع

[1] Shewhart, W. A. (1931). *Economic control of quality of manufactured product*. ASQ Quality Press.

[2] Girshick, M. A., & Rubin, H. (1952). A Bayes approach to a quality control model. *The Annals of mathematical statistics*, 114-125.

[3] Duncan, A. J. (1956). The economic design of \bar{X} charts used to maintain current control of a process. *Journal of the American Statistical Association*, 51(274), 228-242.

[4] Saniga, E. M. (1989). Economic statistical control-chart designs with an application to \bar{X} and R charts. *Technometrics*, 31(3), 313-320.

[5] Banerjee, P. K., & Rahim, M. A. (1987). The economic design of control charts: a renewal theory approach. *Engineering Optimization*, 12(1), 63-73.

[6] Banerjee, P. K., & Rahim, M. A. (1988). Economic Design of \bar{X} -Control Charts Under Weibull Shock Models. *Technometrics*, 30(4), 407-414.

[7] Zhang, G., & Berardi, V. (1997). Economic statistical design of \bar{X} control charts for systems with Weibull in-control times. *Computers & industrial engineering*, 32(3), 575-586.

[8] Al-Oraini, H. A., & Rahim, M. A. (2002). Economic statistical design of \bar{X} control charts for systems with Gamma ($\lambda, 2$) in-control times. *Computers & industrial engineering*, 43(3), 645-654.

[9] Gupta, R. D., & Kundu, D. (1999). Theory & methods: Generalized exponential distributions. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, 41(2), 173-188.