

بهینه‌سازی نمودارهای کنترل تحت تأثیر نمونه‌گیری چندمرحله‌ای با استفاده از الگوریتم ژنتیک

زینب لطیفی

مربی، عضو هیئت علمی*، دانشکده مهندسی، دانشگاه صنعتی شهدای هوپزه، سوسنگرد، ایران

آسیه ثالثی

مربی، گروه علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شیخ بهایی، اصفهان، ایران، a.salehi98@gmail.com

چکیده در کنترل کیفیت آماری، معمولاً تمرکز و پراکندگی مشخصه‌های کیفیت پیوسته در یک فرایند، توأمأ و با کمک دو نمودار بررسی می‌شوند. بدین ترتیب تغییرها در هر یک به صورت هم‌زمان قابل شناسایی خواهند بود. به علت کارایی بالای نمودارهای کنترل توأم میانگین و انحراف معیار با نمونه‌گیری دوگانه در شناسایی سریع تغییرهای میانگین و انحراف استاندارد فرایند، بحث و بررسی در مورد این دسته از نمودارها لازم و ضروری به نظر می‌رسد. در این مقاله، بر پایه‌ی نتایج حاصل از طراحی نمودارهای کنترل توأم میانگین و انحراف معیار با نمونه‌گیری دوگانه، نمودارهای کنترل توأم میانگین و انحراف معیار با نمونه‌گیری دوگانه، نمودارهای کنترل توأم میانگین و انحراف معیار با نمونه‌گیری سه‌گانه معرفی می‌شوند. طراحی آماری توأم نمودارهای کنترل میانگین و انحراف معیار با نمونه‌گیری سه‌گانه به عنوان مسئله‌ی بهینه‌سازی فرمول‌بندی می‌شوند و برای حل این مسئله، الگوریتم ژنتیک پیش‌نهاد می‌شود.

کلمات کلیدی کنترل آماری فرایند، نمودارهای کنترل، مشخصه‌ی کیفیت، نمونه‌گیری چندمرحله‌ای، الگوریتم ژنتیک

۱- مقدمه

وقتی تعداد مرحله‌های نمونه‌گیری (فراوانی نمونه‌گیری) از یک مرحله بیش‌تر می‌شود، نمودارهای کنترل با نمونه‌گیری چندگانه حساسیت بیش‌تری برای شناسایی تغییرها از خود ارائه می‌دهند. در نمودار \bar{X} با نمونه‌گیری دوگانه (DS)، که اولین بار توسط کروسدیل معرفی شد [۳]. فرض بر این است که انحراف معیار در کل مسیر کنترل فرایند بدون تغییر باقی بماند که فرض معقولی به نظر نمی‌رسد. نمودار کنترل S با نمونه‌گیری دوگانه به وسیله‌ی هی و گریگوریان معرفی شد تا مکمل خوبی برای نمودار کنترل \bar{X} با نمونه‌گیری دوگانه باشد [۴]. در این مقاله به معرفی، شرح و اجرای نمودارهای کنترل توأم \bar{X} و S با نمونه‌گیری دوگانه و نمودارهای کنترل توأم \bar{X} و S با نمونه‌گیری سه‌گانه (TS) پرداخته می‌شود. طراحی آماری این گونه نمودارها به صورت مسئله‌ی بهینه‌سازی فرمول‌بندی شده و به وسیله‌ی الگوریتم ژنتیک حل می‌شوند.

در دنیای صنعتی امروز، به دلیل گسترده شدن عرصه‌ی رقابت، افزایش هزینه‌های نیروی انسانی، انرژی و مواد اولیه و نیز ارتقاء سطح آگاهی و توقع مصرف‌کننده نسبت به کیفیت، همواره باید به دنبال یافتن راه‌حل‌های کارا و سودمند در جهت بهبود کیفیت محصول‌ها بود. نمودار کنترلی آماری فرایند (SPC)، به منظور نشان دادن این که آیا فرایند موردنظر دارای وضعیت پایداری (تحت کنترل آماری) در رابطه با مشخصه‌های کیفیت مورد بررسی هست یا نه، مورد استفاده قرار گرفته و ایزاری توانمند برای ایجاد ثبات در فرایند و بهبود کارایی آن از طریق کاهش تغییرپذیری است. [۱]. چنانچه رفتار (تغییرپذیری) متغیر یا متغیرهای خروجی از محدوده‌ی تعیین شده تجاوز نماید و روند یا چرخه‌ی غیرطبیعی از خود نشان دهد، نمودارهای کنترل، هشدارهای لازم را مبنی بر عدم پایداری فرایند خواهند داد [۲].

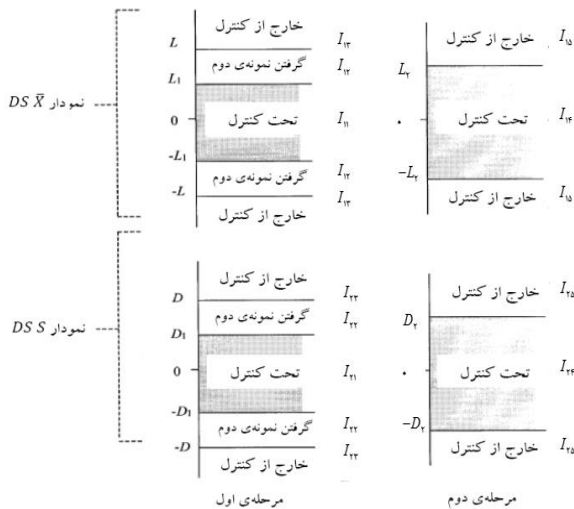
* (Corresponding author) z.latifi@shhut.ac.ir

۲- بررسی نمودارهای کنترل توأم میانگین و انحراف معیار با نمونه‌گیری دوگانه

$$c_{\phi_1} = \left(\sqrt{\frac{2}{n_1 - 1}} \right) \frac{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1 - 1}{2}\right)}$$

• C_{ϕ} ضریب اندازه‌ی نمونه‌ی $n_1 + n_2$:

$$c_{\phi} = \left(\sqrt{\frac{2}{n_1 + n_2 - 2}} \right) \frac{\Gamma\left(\frac{n_1 + n_2 - 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1 + n_2 - 2}{2}\right)}$$



شکل ۱: نمودارهای کنترل توأم \bar{X} و S با نمونه‌گیری دوگانه

روش اجرای نمودارهای کنترل توأم \bar{X} و S با نمونه‌گیری دوگانه به‌طور خلاصه در زیر آمده است [۶]:

گام اول: نمونه‌ای به اندازه‌ی n_1 می‌گیریم و میانگین نمونه \bar{X}_1 و انحراف معیار نمونه S_1 را محاسبه می‌کنیم.

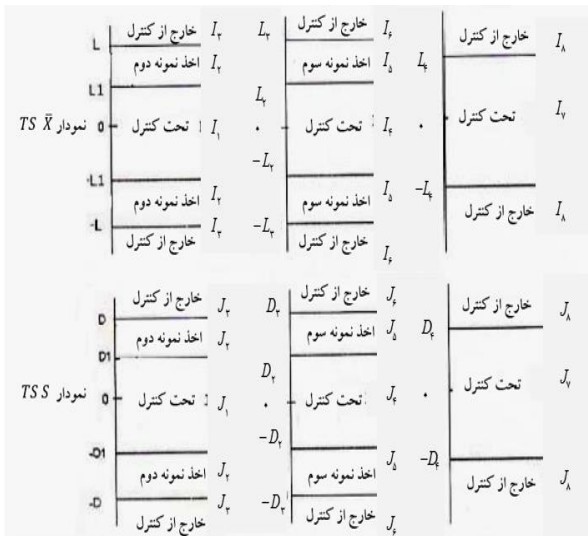
گام دوم: اگر $\frac{\bar{X}_1 - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n_1}}$ در دامنه‌ی $[-L_1, L_1]$ و

در دامنه‌ی $[-D_1, D_1]$ قرار بگیرد، آن‌گاه فرایند تحت کنترل نامیده می‌شود.

تحقیق‌های دادین [۵]، هی و گریگوریان [۶] و هی و همکاران [۷]، باعث پیشرفت چشم‌گیری در توسعه‌ی نمودارهای کنترل توأم \bar{X} و S شد. در تمام این مقاله، فرض شده که نمودارهای کنترل توأم \bar{X} و S با نمونه‌گیری دوگانه، برای کنترل فرایندی که مشاهده‌هایی مستقل از مشخصه‌ی کیفیت مورد نظر X دارند، استفاده می‌شود، همچنین آن‌ها به‌صورت نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 توزیع شده‌اند. به‌علاوه این فرض را در نظر می‌گیریم که زمانی که فرایند خارج از کنترل است، یا ناشی از تغییر در میانگین از $\mu_0 = \mu \pm \delta\sigma$ با $\delta > 0$ است، یا ناشی از تغییر در انحراف استاندارد فرایند از $\sigma_0 = \rho\sigma$ با $\rho > 1$ است و یا ناشی از تغییرهای هر دو خواهد بود. نمودارهای کنترل توأم \bar{X} و S با نمونه‌گیری دوگانه در شکل ۱ ترسیم شده است. لازم است که قبل از هر چیز، ابتدا پارامترهای طراحی نمودار کنترل موردنظر معرفی شوند.

- n_1 و n_2 - به ترتیب اندازه‌ی اولین و دومین نمونه
- $[-D_1, D_1]$: حدود کنترل مربوط به اولین نمونه‌ی نمودار S با نمونه‌گیری دوگانه، که در درون این حدود، فرایند تحت کنترل نامیده می‌شود.
- $[-D, D]$: حدود کنترل مربوط به اولین نمونه‌ی نمودار S با نمونه‌گیری دوگانه، که در بیرون از این حدود، فرایند خارج از کنترل نامیده می‌شود.
- $[-D_2, D_2]$: حدود مربوط به دومین نمونه‌ی نمودار S با نمونه‌گیری دوگانه، که در درون این حدود، فرایند تحت کنترل نامیده می‌شود.
- $[-L_1, L_1]$: حدود کنترل مربوط به اولین نمونه برای نمودار \bar{X} با نمونه‌گیری دوگانه، که در درون این حدود، فرایند تحت کنترل است.
- $[-L, L]$: حدود کنترل مربوط به دومین نمونه برای نمودار \bar{X} با نمونه‌گیری دوگانه، که در بیرون از این حدود، فرایند خارج از کنترل است.
- $[-L_2, L_2]$: حدود کنترل مربوط به دومین نمونه برای نمودار \bar{X} با نمونه‌گیری دوگانه، که در درون این حدود، فرایند تحت کنترل است.
- C_{ϕ_1} ضریب اندازه‌ی نمونه‌ی n_1 :

هر سه‌ی آن‌ها از توزیع احتمال یکسانی پیروی می‌کنند. نمای کلی طرح با استفاده از شکل ۲ ارائه شده است.



شکل ۲ نمایش نمودارهای کنترل توأم \bar{X} و S با نمونه‌گیری سه‌گانه

قبل از ارائه‌ی دستورالعمل اجرای طرح TS، به معرفی پارامترهای نامعلوم زیر می‌پردازیم:

- n_i : اندازه نمونه در مرحله i ام
- L_1, L : حدود نمودار کنترل \bar{X} در اولین مرحله
- L_2, L_3 : حدود نمودار کنترل \bar{X} در دومین مرحله
- L_4 : حدود نمودار کنترل \bar{X} در سومین مرحله
- D_1, D : حدود نمودار کنترل S در اولین مرحله
- D_2, D_3 : حدود نمودار کنترل S در دومین مرحله
- D_4 : حدود نمودار کنترل S در سومین مرحله

برای اجرای نمودار کنترل توأم \bar{X} و S در طرح TS، علاوه بر پنج مرحله‌ی اول صورت گرفته در نمونه‌گیری دوگانه، در ادامه، سه مرحله‌ی زیر نیز انجام می‌شود [۸]:

مرحله‌ی اول: اگر $\frac{\bar{Y} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n_1 + n_2}$ در بازه‌های $(L_2, +\infty)$ یا

$(-\infty, -L_4)$ قرار گیرد، و یا مقدار $\frac{S_{12} - c_{\beta}\sigma}{\sigma\sqrt{1-c_{\beta}^2}}$ در بازه‌های

گام سوم: اگر $\frac{\bar{X}_1 - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n_1}$ در دامنه‌ی $(L_1, +\infty)$ یا

$(-\infty, -L)$ قرار بگیرد یا $\frac{S_1 - c_{\beta_1}\sigma}{\sigma\sqrt{1-c_{\beta_1}^2}}$ در دامنه‌ی $(D_1, +\infty)$ و $(-\infty, -D)$ قرار بگیرد، بنا بر این فرایند خارج از کنترل است.

گام چهارم: اگر $\frac{\bar{X}_1 - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n_1}$ در فاصله‌ی $[L_1, L]$ یا

$[-L, -L_1]$ (ناحیه‌ی هشدار) قرار بگیرد و یا اگر $\frac{S_1 - c_{\beta_1}\sigma}{\sigma\sqrt{1-c_{\beta_1}^2}}$ در فاصله‌ی $[D_1, D]$ یا $[-D, -D_1]$ (ناحیه‌ی هشدار) قرار بگیرد، باید نمونه‌ی دوم را با اندازه‌ی n_2 بگیریم و میانگین نمونه \bar{X}_2 و میانگین نمونه‌ی کل $\bar{Y} = \frac{n_1\bar{X}_1 + n_2\bar{X}_2}{n_1 + n_2}$ و انحراف استاندارد نمونه‌ی کل را

$$S_{12} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^2 (n_i - 1)S_i^2}{\sum_{i=1}^2 n_i - 2}} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

محاسبه کنیم.

گام پنجم: اگر $\frac{\bar{Y} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n_1 + n_2}$ در فاصله‌ی $[-L_4, L_4]$ و

در فاصله‌ی $[-D_4, D_4]$ قرار بگیرد، بنا بر این، فرایند تحت کنترل خواهد بود، در غیر این صورت فرایند خارج از کنترل است.

۳- بررسی نمودارهای کنترل توأم میانگین و انحراف معیار با نمونه‌گیری سه‌گانه

برای معرفی طرح TS، همان فرض‌هایی که برای نمودار کنترل توأم \bar{X} و S با نمونه‌گیری دوگانه فرض شد، برقرار است. برای طرح TS، این فرض نیز در نظر گرفته می‌شود که در صورت لزوم، سه نمونه می‌تواند بدون اتلاف زمان گرفته شود و به این ترتیب

در این بخش طراحی آماری نمودارهای کنترل توأم \bar{X} و S با نمونه گیری سه گانه، به شکل یک مسئله‌ی بهینه‌سازی به صورت رابطه‌ی ۱ فرمول‌بندی می‌شود [۸].

$$\text{Min } ARL \quad (1)$$

$$ARL = \frac{1}{1 - \beta_{\bar{X}} \beta_S}$$

که در آن،

$$\beta_{\bar{X}} = (P_{\alpha_1 \bar{X}} + P_{\alpha_2 \bar{X}} + P_{\alpha_3 \bar{X}} | \mu = \mu_1, \sigma = \sigma_1)$$

$$\beta_S = (P_{\alpha_1 S} + P_{\alpha_2 S} + P_{\alpha_3 S} | \mu = \mu_1, \sigma = \sigma_1)$$

رابطه‌ی ۲ به عنوان شرط در مسئله‌ی بهینه‌سازی رابطه‌ی ۱، اعمال می‌شود:

$$n_1 + n_2 \times P[\text{select } n_2 | \mu = \mu_1; \sigma = \sigma_1] + n_3 \times P[\text{select } n_3 | \mu = \mu_1; \sigma = \sigma_1] \leq N_{\max}$$

$$P[\text{Alarms of (TS } \bar{X}) \text{ chart } | \mu = \mu_1; \sigma = \sigma_1] \leq \alpha_{\bar{X}} \quad (2)$$

$$P[\text{Alarms of (TSS) chart } | \sigma = \sigma_1] \leq \alpha_S$$

$$L_1 < L, D_1 < D, L_2 < L_2, D_2 < D_2$$

از آن‌جا که، طرح‌هایی نظیر DS و TS، در مواقعی که کارایی و دقت در کنترل، دارای اهمیت بیش‌تری نسبت به هزینه می‌باشند، استفاده می‌شوند، بنا بر این، ترجیح داده می‌شود که مسئله‌ی بهینه‌سازی طرح TS را بر اساس کمینه کردن تابع هدف که همان نمودار کنترل توأم \bar{X} و S در طرح TS است، حل شود. به این ترتیب، برای این‌که نمونه‌های اخذ شده از حد مورد نظر ما فراتر نروند، مقدار بیشینه را برای آن در نظر گرفته‌ایم و شرط مذکور را به گونه‌ای طراحی کرده‌ایم که تعداد نمونه‌ی اخذ شده در حالت تحت کنترل را در حد کم‌تر و یا مساوی مقدار بیشینه در نظر گرفته شده محدود کند.

$[\mathbf{D}_2, +\infty)$ یا $(-\infty, -\mathbf{D}_2]$ قرار گیرد، طرح TS نشان دهنده‌ی خارج از کنترل بودن فرایند است.

مرحله‌ی دوم: اگر مقدار $\frac{\bar{Y} - \mu_1}{\sigma} \sqrt{n_1 + n_2}$ در داخل بازه‌ی

$[L_2, L_2]$ یا $[-L_2, -L_2]$ (ناحیه‌ی هشدار) قرار گیرد، و یا اگر مقدار $\frac{S_{12} - c_{f2} \sigma}{\sigma \sqrt{1 - c_{f2}^2}}$ در داخل بازه‌ی $[\mathbf{D}_2, \mathbf{D}_2]$ یا

$[-\mathbf{D}_2, -\mathbf{D}_2]$ (ناحیه‌ی هشدار) واقع شود، نمونه‌ی سوم را با اندازه‌ی n_3 انتخاب می‌کنیم و بر اساس نمونه‌ی جدید، میانگین نمونه‌ی \bar{X}_3 و میانگین ادغام شده‌ی سه نمونه یعنی $\bar{W} = \frac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2 + n_3 \bar{X}_3}{n_1 + n_2 + n_3}$ و همچنین انحراف

استاندارد ادغام شده برای سه نمونه

$$S_{PP} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2 + (n_3 - 1)S_3^2}{n_1 + n_2 + n_3 - 3}}$$

خواهد شد.

مرحله‌ی سوم: اگر $\frac{\bar{W} - \mu_1}{\sigma} \sqrt{n_1 + n_2 + n_3}$ در بازه‌ی $[-L_3, L_3]$

قرار گیرد و مقدار $\frac{S_{PP} - c_{f3} \sigma}{\sigma \sqrt{1 - c_{f3}^2}}$ در داخل فاصله‌ی

$[-\mathbf{D}_3, \mathbf{D}_3]$ قرار گیرد، طرح TS نشان می‌دهد که فرایند تحت کنترل است و در غیر این صورت فرایند خارج از کنترل خواهد

$$c_{f3} = \left(\frac{\Gamma(\frac{n_1 + n_2 + n_3 - 2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1 + n_2 + n_3 - 3}{2})} \right)^2 \quad \text{و} \quad \left(\frac{\Gamma(\frac{n_1 + n_2 + n_3 - 2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1 + n_2 + n_3 - 3}{2})} \right)^2$$

ضریبی برای اندازه‌ی نمونه‌ی $n_1 + n_2 + n_3$ است و از آن برای محاسبه‌ی میانگین و واریانس S_{PP} استفاده می‌شود [۸].

۴- بهینه‌سازی نمودارهای کنترل توأم میانگین و انحراف معیار با نمونه‌گیری سه گانه

$$I_1 = \left[\mu - \frac{L_1\sigma}{\sqrt{n_1}}, \mu - \frac{L_1\sigma}{\sqrt{n_1}} \right],$$

$$I_r = \left[\mu - \frac{L_r\sigma}{\sqrt{n_1}}, \mu - \frac{L_r\sigma}{\sqrt{n_1}} \right]$$

$$\cup \left[\mu + \frac{L_1\sigma}{\sqrt{n_1}}, \mu + \frac{L_r\sigma}{\sqrt{n_1}} \right],$$

$$I_r = \left[\mu - \frac{L_r\sigma}{\sqrt{n_1 + n_r}}, \mu + \frac{L_r\sigma}{\sqrt{n_1 + n_r}} \right],$$

$$I_f = \left[\mu - \frac{L_f\sigma}{\sqrt{n_1 + n_r}}, \mu - \frac{L_f\sigma}{\sqrt{n_1 + n_r}} \right]$$

$$\cup \left[\mu + \frac{L_f\sigma}{\sqrt{n_1 + n_r}}, \mu + \frac{L_f\sigma}{\sqrt{n_1 + n_r}} \right],$$

$$I_\delta = \left[\mu - \frac{L_\delta\sigma}{\sqrt{n_1 + n_r + n_f}}, \mu + \frac{L_\delta\sigma}{\sqrt{n_1 + n_r + n_f}} \right],$$

$$J_1 = \left[c_{f1}\sigma - D_1\sigma\sqrt{1-c_{f1}^2}, c_{f1}\sigma + D_1\sigma\sqrt{1-c_{f1}^2} \right],$$

$$J_r = \left[c_{fr}\sigma - D_r\sigma\sqrt{1-c_{fr}^2}, c_{fr}\sigma - D_r\sigma\sqrt{1-c_{fr}^2} \right]$$

$$\cup \left[c_{f1}\sigma + D_1\sigma\sqrt{1-c_{f1}^2}, c_{f1}\sigma + D_r\sigma\sqrt{1-c_{fr}^2} \right],$$

$$J_r = \left[c_{fr}\sigma - D_r\sigma\sqrt{1-c_{fr}^2}, c_{fr}\sigma + D_r\sigma\sqrt{1-c_{fr}^2} \right],$$

$$J_f = \left[c_{ff}\sigma - D_f\sigma\sqrt{1-c_{ff}^2}, c_{ff}\sigma - D_f\sigma\sqrt{1-c_{ff}^2} \right]$$

$$\cup \left[c_{fr}\sigma + D_r\sigma\sqrt{1-c_{fr}^2}, c_{ff}\sigma + D_f\sigma\sqrt{1-c_{ff}^2} \right],$$

$$J_\delta = \left[c_{ff}\sigma - D_f\sigma\sqrt{1-c_{ff}^2}, c_{ff}\sigma + D_f\sigma\sqrt{1-c_{ff}^2} \right]$$

شرط‌های دیگر مسئله بهینه‌سازی، در رابطه با خطای نوع اول نمودار کنترل توأم \bar{X} و S در طرح نمونه‌گیری سه‌گانه (TS) است. میزان دقت در این شرط‌ها، تحت کنترل مجری طرح است. به این ترتیب که وی می‌تواند با انتخاب مقادیر مختلف برای $\alpha_{\bar{X}}$ و α_γ ، که به‌عنوان حد بالای احتمال خطای نوع اول برای نمودار کنترل توأم \bar{X} و S در طرح TS به شمار می‌روند و از طرفی در

لذا تابع هدف مسئله بهینه‌سازی، کمینه کردن ARL ، یعنی متوسط مدت اجرای نمودارهای کنترل توأم \bar{X} و S در شرایط خارج از کنترل فرایند است. در رابطه ۲، شرط اول بیان می‌کند که، اندازه‌ی نمونه‌ی نمودارهای توأم \bar{X} و S با نمونه‌گیری دوگانه و سه‌گانه هنگامی که فرایند تحت کنترل است، از مقدار مشخص N_{max} بزرگ‌تر نیست. اندازه‌ی نمونه، از مجموع اندازه نمونه‌ی مرحله‌ی اول، اندازه نمونه‌ی مرحله‌ی دوم در احتمال گرفتن نمونه‌ی دوم و اندازه‌ی نمونه‌ی مرحله‌ی سوم در احتمال گرفتن نمونه‌ی سوم حاصل می‌شود.

در رابطه ۲، شرط دوم بیان می‌کند که، احتمال قرار گرفتن نمودار \bar{X} با نمونه‌گیری سه‌گانه در ناحیه هشدار، بزرگ‌تر از مقدار $\alpha_{\bar{X}}$ نیست. همچنین، شرط سوم بیانگر این موضوع است که احتمال قرار گرفتن نمودار S با نمونه‌گیری سه‌گانه در ناحیه هشدار، بزرگ‌تر از مقدار α_γ نیست. علاوه بر این، شرط‌های بیان شده در رابطه ۲، کران‌های پایین و بالای نمودار را نیز روی D_f ، D_r ، D_1 ، D_r ، D_f ، D_r ، L_1 ، L_r ، L_f ، L_r و L وضع می‌کنند. از طرفی احتمال رفتن به مرحله‌ی دوم را می‌توان به‌صورت رابطه- ۳ نوشت:

$$P(\bar{X}_1 \in I_1)P(S_1 \in J_r)$$

$$+ P(\bar{X}_1 \in I_r)P(S_r \in J_r)$$

$$+ P(\bar{X}_1 \in I_r)P(S_r \in J_1)$$

(۳)

و احتمال رفتن به مرحله‌ی سوم به صورت رابطه‌ی ۴ خواهد بود:

$$P(\bar{Y} \in I_r)P(S_{1r} \in J_f)$$

$$+ P(\bar{Y} \in I_f)P(S_{1r} \in J_f)$$

$$+ P(\bar{Y} \in I_f)P(S_{1r} \in J_r)$$

(۴)

فاصله‌های I و J به‌کار رفته در رابطه‌های ۳ و ۴ به‌صورت زیر می‌باشند [۹]:

$$\begin{aligned}
 P_{\alpha\tau\bar{X}} &= \int_{x \in I_\tau} P[\bar{Y} \in I_\tau | \bar{X}_1 = x] \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 &= \int_{z \in I_\tau^*} P[\bar{Y} \in I_\tau | \mathbf{Z}_1 = z] \varphi(\mathbf{z}) \mathbf{d}\mathbf{z} \\
 &= \int_{z \in I_\tau^*} \left\{ \Phi\left[\mathbf{c}\left(\frac{L_\tau + r\delta}{\lambda}\right) - \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_\tau}} \mathbf{z}\right] \right. \\
 &\quad \left. - \Phi\left[\mathbf{c}\left(\frac{-L_\tau + r\delta}{\lambda}\right) - \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_\tau}} \mathbf{z}\right] \right\} \varphi(\mathbf{z}) \mathbf{d}\mathbf{z}, \quad (۸) \\
 I_\tau^* &= \left[\frac{1}{\lambda}(\sqrt{n_1}\delta - \mathbf{L}), \frac{1}{\lambda}(\sqrt{n_1}\delta - \mathbf{L}_1) \right] \\
 &\cup \left[\frac{1}{\lambda}(\sqrt{n_1}\delta + \mathbf{L}_1), \frac{1}{\lambda}(\sqrt{n_1}\delta + \mathbf{L}) \right]
 \end{aligned}$$

در رابطه‌های ۷ و ۸، $f(\cdot)$ تابع چگالی احتمال نرمال \bar{X} و $\varphi(\cdot)$ تابع چگالی نرمال استاندارد می‌باشد. لازمی محاسبه‌ی مقدار $P_{\alpha\tau\bar{X}}$ در رابطه‌ی ۸، به‌دست آوردن احتمال حالتی است که \bar{X}_1 حاصل از نمونه‌ی اول در بازه‌ی I_τ قرار گیرد، و به این ترتیب اجرای طرح به مرحله‌ی دوم برود و مقدار محاسبه شده‌ی \bar{Y} در مرحله‌ی دوم در بازه‌ی I_τ قرار بگیرد و تصمیم‌گیری به بعد از گرفتن نمونه‌ی سوم موکول شود. سپس در مرحله‌ی سوم مقدار \bar{W} محاسبه شده در داخل بازه‌ی I_5 واقع شود. به این معنا که در مرحله‌ی اول و دوم مقادیر محاسبه شده در داخل نواحی هشدار قرار گیرد و در مرحله‌ی سوم تحت کنترل بودن فرایند تأیید شود. احتمال قرار گرفتن \bar{W} در بازه‌ی I_5 را بر روی مقدار \bar{Y} شرطی می‌کنیم. زیرا اگر \bar{Y} در طرح محاسبه شده باشد، به‌طور مستتر حاوی این معناست که در مرحله‌ی اول، \bar{X}_1 در ناحیه‌ی هشدار واقع شده است. بنا بر این $P_{\alpha\tau\bar{X}}$ به صورت رابطه‌ی ۹ در می‌آید [۸]:

شرط‌های مسئله‌ی بهینه‌سازی استفاده شده‌اند، مقدار دقت موردنظر را تعیین کند. α و β کلی برای طرح TS به صورت رابطه‌ی ۵ محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \alpha_{\bar{X}} + \alpha_S - \alpha_{\bar{X}}\alpha_S \\
 \beta &= \beta_{\bar{X}}\beta_S
 \end{aligned} \quad (۵)$$

همچنین در این طرح، $P_{\alpha\bar{X}}$ به صورت رابطه‌ی ۶ محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
 P_{\alpha\bar{X}} &= P_{\alpha_1\bar{X}} + (P_{\alpha\tau\bar{X}} | \text{go to second part}) \\
 &+ (P_{\alpha\tau\bar{X}} | \text{go to third part})
 \end{aligned} \quad (۶)$$

$P_{\alpha_1\bar{X}}$ که با قرار گرفتن \bar{X}_1 در بازه‌ی I_1 حاصل می‌شود و $P_{\alpha\tau\bar{X}}$ یعنی، احتمال این‌که فرایند در مرحله‌ی دوم توسط نمودار \bar{X} طرح TS تحت کنترل تشخیص داده شود که برابر است با احتمال این‌که \bar{Y} محاسبه شده در مرحله‌ی دوم داخل بازه‌ی I_τ بیفتد، به شرط آن‌که میانگین حاصل از نمونه‌ی اول در داخل بازه‌ی I_τ قرار گرفته باشد، به صورت رابطه‌ی ۷ و ۸ محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 P_{\alpha_1\bar{X}} &= P[\bar{X}_1 \in I_1] \\
 &= \Phi\left[\frac{1}{\lambda}(\sqrt{n_1}\delta + L_1)\right] \\
 &\quad - \Phi\left[\frac{1}{\lambda}(\sqrt{n_1}\delta + L_1)\right]
 \end{aligned} \quad (۷)$$

مرحله‌ی اول، در بازه‌ی مرکزی J_1 قرار بگیرد مطابق رابطه‌ی ۱۲:

$$P_{\alpha 1S} = \int_{x_1 \in J_1^*} \frac{1}{\lambda^r} \frac{x_1^{(n_1-1)-1} e^{-x_1/\lambda}}{\Gamma(n_1-1)} dx_1, \quad (12)$$

$$J_1^* = \left[\frac{(n_1-1)}{\lambda^r} (c_{f1} \sigma - D_1 \sigma \sqrt{1-c_{f1}^r})^r, \frac{(n_1-1)}{\lambda^r} (c_{f1} \sigma + D_1 \sigma \sqrt{1-c_{f1}^r})^r \right]$$

احتمال این‌که در مرحله‌ی دوم، تحت کنترل بودن فرایند، توسط نمودار کنترل S در طرح TS اعلام شود برابر است با احتمال این‌که در مرحله‌ی دوم S_{12} در داخل بازه‌ی J_3 واقع شود، به شرط آن‌که S_1 در مرحله‌ی اول در بازه‌ی J_2 قرار بگیرد. مقدار این احتمال، طبق رابطه‌ی ۱۳ محاسبه می‌شود:

$$P_{\alpha 2S} = \int_{x_1 \in J_2^*} \left\{ \int_{x_2 \in [A, B]} \frac{x_2^{(n_2-1)-1} e^{-x_2/\lambda}}{\Gamma(n_2-1)} dx_2 \right. \\ \left. \frac{x_1^{(n_1-1)-1} e^{-x_1/\lambda}}{\Gamma(n_1-1)} dx_1, \right. \quad (13)$$

$$J_2^* = \left[\frac{(n_1-1)}{\lambda^r} (c_{f1} \sigma - D_1 \sigma \sqrt{1-c_{f1}^r})^r, \frac{(n_1-1)}{\lambda^r} (c_{f1} \sigma + D_1 \sigma \sqrt{1-c_{f1}^r})^r \right]$$

$$\cup \left[\frac{(n_1-1)}{\lambda^r} (c_{f1} \sigma + D_1 \sigma \sqrt{1-c_{f1}^r})^r, \frac{(n_1-1)}{\lambda^r} (c_{f1} \sigma + D_2 \sigma \sqrt{1-c_{f1}^r})^r \right]$$

اما احتمال تحت کنترل بودن فرایند در مرحله‌ی سوم برابر است با احتمال آن‌که در مرحله‌ی اول به واسطه‌ی قرار گرفتن مقدار S_1 در بازه‌ی J_2 به مرحله‌ی دوم رفته باشیم و پس از آن در مرحله‌ی دوم نیز S_{12} در بازه‌ی J_4 واقع شود و ما مجبور به گرفتن نمونه‌ی سوم باشیم و سپس در مرحله‌ی سوم S_{PP}

$$P_{\alpha 2\bar{X}} = \int_{y \in I_{\delta}} P[\bar{W} \in I_{\delta} | \bar{Y} = y] f(y) dy \\ = \int_{z \in I_{\delta}^*} P[\bar{W} \in I_{\delta} | Z_{\tau} = z] \varphi(z) dz \\ = \int_{z \in I_{\delta}^*} [\Phi[\frac{c_{\tau} L_{\tau} + \delta c_{\tau} r_{\tau}}{\lambda} - \frac{\sqrt{n_1+n_{\tau}}}{\sqrt{n_{\tau}}} z] \\ - \Phi[-\frac{c_{\tau} L_{\tau} + \delta c_{\tau} r_{\tau}}{\lambda} - \frac{\sqrt{n_1+n_{\tau}}}{\sqrt{n_{\tau}}} z]] \varphi(z) dz, \quad (9)$$

$$I_{\delta}^* = \left[\frac{1}{\lambda} (\sqrt{n_1+n_{\tau}} \delta - L_{\tau}), \frac{1}{\lambda} (\sqrt{n_1+n_{\tau}} \delta - L_{\tau}) \right] \\ \cup \left[\frac{1}{\lambda} (\sqrt{n_1+n_{\tau}} \delta + L_{\tau}), \frac{1}{\lambda} (\sqrt{n_1+n_{\tau}} \delta + L_{\tau}) \right]$$

برای محاسبه‌ی خطای نوع اول و نوع دوم برای نمودار کنترل S در طرح TS نیز به دانستن مقادیر احتمال‌های تحت کنترل بودن فرایند توسط نمودار کنترل S، در مراحل مختلف طرح TS نیاز داریم. احتمال تحت کنترل بودن فرایند توسط نمودار کنترل S در طرح نمونه‌گیری سه‌گانه (TS) است و طبق رابطه‌ی ۱۰ محاسبه می‌شود:

$$P_{\alpha S} = P_{\alpha 1S} + (P_{\alpha 2S} | \text{go to second part}) \\ + (P_{\alpha 3S} | \text{go to third part}) \quad (10)$$

که $P_{\alpha iS}$ احتمال تحت کنترل بودن فرایند در مرحله‌ی iام است. در محاسبه‌ی $P_{\alpha iS}$ برای رسیدن به توزیع خنثی دو، در ابتدا تبدیل‌هایی روی S_i مطابق رابطه‌ی ۱۱ انجام می‌دهیم:

$$X_1 = \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \square \chi_{n_1-1}^2, X_2 = \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_1^2} \square \chi_{n_2-1}^2 \\ X_3 = \frac{(n_3-1)S_3^2}{\sigma_1^2} \square \chi_{n_3-1}^2, \quad (11)$$

$$X_4 = \frac{(n_1+n_2-2)S_{12}^2}{\sigma_1^2} \square \chi_{n_1+n_2-1}^2$$

هنگامی که تغییری در انحراف استاندارد فرایند رخ دهد، احتمال این‌که در مرحله‌ی اول، فرایند توسط نمودار S تحت کنترل اعلام شود برابر است با احتمال این‌که مقدار محاسبه شده‌ی S_1 در

استاندارد برای حل این مسئله با دشواری همراه است، به کارگیری الگوریتم ژنتیک در این زمینه مفید به نظر می‌رسد. شایان ذکر است که نتایج این مقاله را می‌توان به نمودارهای کنترل توام یک-متغیره \bar{X} و S با بیش از یک مرحله نمونه‌گیری نیز تعمیم داد. همچنین این نمودارهای توأم بهتر است زمانی که دقت نسبت به هزینه در اولویت قرار دارد، مورد استفاده قرار گیرند.

مراجع

[۱] مونتگومری، داگلاس سی (۱۹۹۸). کنترل کیفیت آماری. رسول نورالسنا متراجم (۱۳۷۷)، نوبت شانزدهم، تهران، انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران.

[۲] بامنی مقدم، محمد (۱۳۸۵). کنترل کیفیت آماری. تهران، انتشارات دانشگاه پیام نور.

[۳] Croasdale, P. (۱۹۷۴). *Control Charts for a Double Sampling scheme Based on Average Production Run Lengths. International Journal of Production Research*, Vol (۱۲), ۵۸۵-۵۹۲.

[۴] He, D., & Grigoryan, A. (۲۰۱۰). *An Improved Double Sampling S-chart, International Journal of Production Research*, Vol (۴۱), ۲۶۶۳-۲۶۷۹.

[۵] Daudin, J.J. (۱۹۹۲). *Double Sampling \bar{X} Charts. Journal of Quality Technology*, Vol (۲۴), ۷۸-۸۷.

[۶] He, D., & Grigoryan, A. (۲۰۱۵). *Joint Statistical Design of Double Sampling \bar{X} and S Charts. European Journal of Operational Research*, Vol (۱۶۸), ۱۲۲-۱۴۲.

[۷] He, D., Grigoryan, A., & Sigh, M. (۲۰۱۳). *Design of Double and Triple-Sampling \bar{X} Control Charts Using Genetic Algorithms. International Journal of Production Research*, Vol (۴۰), ۱۳۸۷-۱۴۰۴.

[۸] Bateni, N., & Hamadani, A. Z. (۲۰۱۱). *Computation of the Probability of a Process Being in Control at the Third Stage for the TS \bar{X} Chart. International Journal of Production Research*, Vol (۴۷), ۷۰۶۹-۷۰۷۳.

[۹] Woodall, W.H., & Montgomery, D.C. (۱۹۹۹). *Research Issues and Ideas in Statistical Process Control. Journal of Quality Control*, Vol (۳۱), ۳۷۶-۳۸۶.

حاصل، در داخل بازه‌ی مرکزی یعنی J_5 قرار گیرد؛ مطابق رابطه‌ی ۱۴:

$$P_{\alpha\gamma S} = \int_{x_f \in J_f^*} \left[\int_{x_r \in (C,D)} \frac{x_r^{\frac{(n_r-1)}{2}} e^{-x_r}}{\Gamma(\frac{n_r-1}{2})} dx_r \right] \frac{x_f^{\frac{(n_f-1)}{2}} e^{-x_f}}{\Gamma(\frac{n_f-1}{2})} dx_f, \quad (14)$$

$$J_f^* = [r_f \frac{1}{\lambda^2} (c_f - D_r \sqrt{1 - c_f^2})^2,$$

$$r_f \frac{1}{\lambda^2} (c_f + D_r \sqrt{1 - c_f^2})^2]$$

$$\cup [r_f \frac{1}{\lambda^2} (c_f + D_r \sqrt{1 - c_f^2})^2,$$

$$r_f \frac{1}{\lambda^2} (c_f + D_r \sqrt{1 - c_f^2})^2]$$

در رابطه‌ی ۱۴، $r_f = n_1 + n_r - 2$ و $\frac{\sigma_r^2}{\sigma_f^2} = \lambda$ است.

همان‌طوری که قبلاً اشاره شد، اگر از تکنیک‌های غیرخطی استاندارد برای حل این نوع مسائل بهینه‌سازی استفاده شود، از نظر محاسباتی پرهزینه و وقت‌گیر و ناکارآمد خواهد بود [۷]. اخیراً الگوریتم‌های ژنتیک به‌عنوان یک تکنیک بهینه‌سازی، برای مسائل پیچیده، به‌طور قابل ملاحظه‌ای مورد توجه قرار گرفته‌اند. بنا بر این مدل نهایی حاصل شده (مدل ARL رابطه‌ی ۱) را توسط الگوریتم ژنتیک حل کرده تا مقادیر بهینه‌ای برای پارامترهای طرح حاصل شود [۱۰].

۵- خلاصه و نتیجه‌گیری

در این مقاله نمودارهای کنترل توأم یک متغیره \bar{X} و S با نمونه‌گیری دوگانه و نمونه‌گیری سه‌گانه برپایه نمونه‌گیری دوگانه برای پایش هم‌زمان میانگین و تغییرپذیری فرایند معرفی و بررسی شدند. طراحی آماری این نمودارها به‌عنوان مسئله‌ی بهینه‌سازی مطرح گردید. مسئله‌ی بهینه‌سازی مطرح شده، کمینه کردن متوسط مدت اجرای (ARL) فرایند در شرایط تحت کنترل با شرط‌های مفروض است. از آن‌جا که، استفاده از روش‌های خطی

^۱Statistical Process Control

^۲Double Sampling

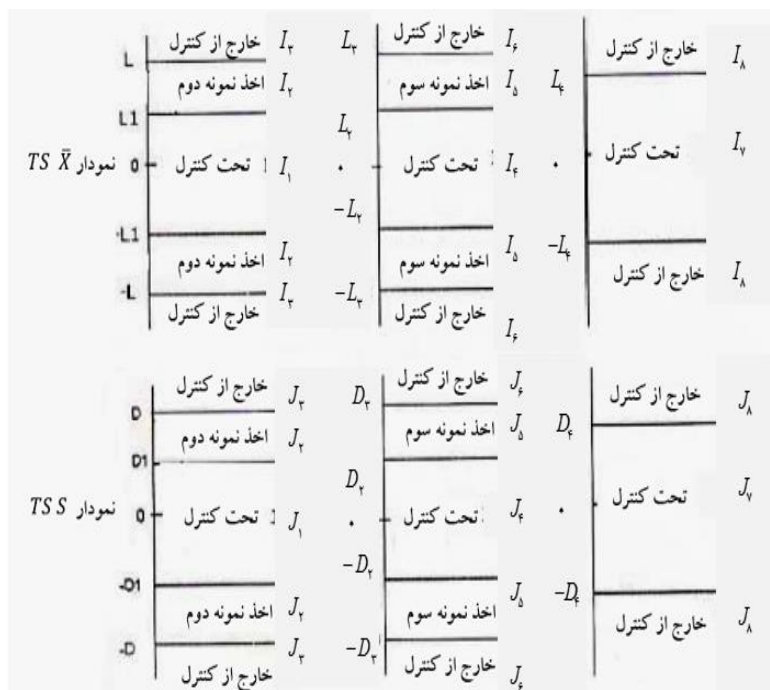
^۳Triple Sampling

[۱۰] Rao, S.S. (۱۹۹۶). *Engineering Optimization: Theory and practice*. New York: John Wiley and Sons.

پیوست‌ها



شکل یک^۴



شکل دو^۵