

# طراحی آماری - اقتصادی نمودار کنترلی $\bar{X}$ برای پایش میانگین فرایند تحت نمونه - گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای

علیا رستمی

کارشناسی ارشد، دانشگاه علامه طباطبائی، Olia\_rostami@yahoo.com

سید رحمت شجاعی علی آبادی

دکتری، دانشگاه علامه طباطبائی، Shojaei\_ut@yahoo.com

محمد بامنی مقدم

(نویسنده مسئول) استاد، دانشگاه علامه طباطبائی\*

## چکیده

یکی از مهم‌ترین نمودارهای کنترلی، نمودار کنترلی  $\bar{X}$  است. در شرایطی که اندازه‌گیری واحدها دشوار و با هزینه بالا ولی در عوض رتبه‌بندی آن‌ها با هزینه‌ای ناچیز انجام پذیرد، طرح نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای<sup>۱</sup> (RSS) مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این مقاله برای اولین بار طراحی اقتصادی و آماری - اقتصادی نمودار کنترلی  $\bar{X}$  تحت طرح RSS بررسی شده است. با ارائه‌ی نتایج عددی، مزایای طراحی آماری - اقتصادی به طراحی اقتصادی نشان داده شده است. با توجه به این که طراحی آماری - اقتصادی همواره خواص آماری مطلوب‌تری دارد، نتایج نشان می‌دهد که هزینه‌ها در طراحی آماری - اقتصادی نسبت به طراحی اقتصادی با اندک تغییری افزایش یافته است. بنا بر این، با توجه به ویژگی‌های بهینه‌ی اقتصادی و آماری نمودار کنترلی  $\bar{X}_{RSS}$  و نتایج مقاله، پیشنهاد می‌شود که از نمودار کنترلی  $\bar{X}_{RSS}$  با طراحی آماری - اقتصادی، در کنترل میانگین فرایندهای صنعتی و خدماتی استفاده شود.

**کلمات کلیدی** طراحی آماری - اقتصادی، نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای، مدل شوک وایبول

## ۱- مقدمه

است. علت تصادفی بخشی از فرایند تولید محسوب می‌شود و تأثیر چندانی بر کیفیت محصول نهایی ندارد. در حالی که علت اسنادپذیر ناشی از عواملی است که بخشی از فرایند تولید نمی‌باشد و به صورت مقطعی در فرایند نمایان می‌شود و تأثیر بسزایی در تولید محصولات معیوب دارد. وقتی یک فرایند در حضور علت اسنادپذیر عمل می‌کند، فرایند خارج از کنترل تلقی می‌شود [۱]. یک نمودار کنترلی در حالت عمومی شامل سه خط افقی است که شامل حد کنترل بالا، خط مرکزی و حد کنترل پایین می‌شود.

کیفیت یک محصول، یکی از ویژگی‌های مهم در صنعت و تجارت می‌باشد که با استفاده از ابزارهای کنترل کیفیت آماری می‌توان این ویژگی مهم را حفظ کرد. یکی از این ابزارها، نمودار کنترلی است که جهت نظارت مستمر بر کیفیت فرایند تولید مورد استفاده قرار می‌گیرد. در واقع نمودار کنترلی علت تغییرپذیری در فرایند را به دو دسته علت اسنادپذیر و علت تصادفی تفکیک می‌کند و هدف اصلی آن، تشخیص سریع‌تر علت اسنادپذیر در صورت وقوع

\* (Corresponding author) bamenimoghadam@atu.ac.ir

<sup>۱</sup> Ranked Set Sampling

فرایند تحت کنترل آماری است اگر تمام نقاط رسم شده روی نمودار کنترلی، بین حدودکنترلی قرار گیرند. یک نقطه خارج از حدود کنترلی نمایانگر یک هشدار خارج از کنترل است که نیاز به اقدامات اصلاحی برای بازگرداندن فرایند به حالت تحت کنترل دارد. یکی از پرکاربردترین نمودارهای کنترلی، نمودار کنترلی  $\bar{X}$  است که در ادبیات گذشته بیش تر مواقع، تحت طرح نمونه‌گیری تصادفی ساده مورد بررسی قرار گرفته است. با بهره‌گیری از یک طرح نمونه‌گیری مناسب علاوه بر این که می‌توان کارایی یک نمودار کنترلی را از دیدگاه معیارهای آماری افزایش داد، بلکه می‌توان به لحاظ اقتصادی نیز به نتایج بهینه دست یافت. طرح نمونه‌گیری تصادفی ساده در شرایطی که اندازه‌گیری واحدها دشوار و با هزینه‌ی بالا ولی در عوض رتبه‌بندی واحدها (بدون نیاز به اندازه‌گیری دقیق واحدها) به راحتی و با هزینه‌ای ناچیز انجام پذیر باشد، از دقت و کارایی پایینی برخوردار است. در چنین شرایطی طرح نمونه‌گیری دیگری به نام طرح نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای (RSS) با اندازه نمونه برابر با طرح نمونه‌گیری تصادفی ساده (SRS)، مورد استفاده قرار می‌گیرد. این طرح نمونه‌گیری اولین بار توسط مک‌این‌تایر [۲] برای برآورد محصول مرتع معرفی شد. هالز و دل [۳] از این طرح نمونه‌گیری برای برآورد میانگین محصول علوفه و میانگین ارتفاع درختان یک جنگل استفاده کردند. اولین نتیجه‌ی نظری طرح (RSS) توسط تاکاهاسی و واکیموتو [۴] به دست آمد. تاکاهاسی و واکیموتو، دل و کلاتر [۵]، استاکس [۶] و سینها و همکارانش [۷] ثابت کردند که میانگین نمونه به دست آمده از طرح نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای ( $\bar{X}_{RSS}$ ) یک برآوردگر ناریب برای میانگین جامعه است و واریانس  $\bar{X}_{RSS}$  ( $\sigma_{\bar{X}_{RSS}}^2$ ) کم تر از واریانس  $\bar{X}_{SRS}$  ( $\sigma_{\bar{X}_{SRS}}^2$ ) است که میانگین نمونه به دست آمده از طرح نمونه‌گیری تصادفی ساده می‌باشد. مطلق و ابودایه [۸] تحت طرح (RSS)، آزمون‌های جدیدی جهت آزمون پارامتر توزیع نرمال و نمایی ساخته‌اند که این آزمون‌ها در مقایسه با آزمون‌های (SRS) پرتوان تر می‌باشند. با توجه به این که یک نمودار کنترلی شوهارتی همانند اجرای شماتیک یک آزمون فرض آماری است و استفاده موثر از نمودار کنترلی تا حد زیادی به طرح نمونه‌گیری آن وابسته است، سالازار و سینها [۹] نخستین بار به منظور بهبود طراحی آماری نمودار کنترلی  $\bar{X}$  برای پایش میانگین فرایند، طرح نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای را در ادبیات کنترل کیفیت معرفی کردند و بعد از آن‌ها، محققان بسیاری هم‌چون مطلق و الصباح [۱۰]، ابوجیا و مطلق [۱۱] و لی [۱۲] طراحی آماری نمودار کنترلی  $\bar{X}$  تحت طرح (RSS) و گونه‌های مختلف (RSS) مورد بررسی قرار دادند و با

توجه به معیارهای آماری، هم‌چون میانگین طول اجرا<sup>۲</sup> (ARL) که یکی از رایج‌ترین معیارها برای ارزیابی توان نمودار کنترلی است، در حالت تحت کنترل و خارج از کنترل بودن فرایند، نشان دادند که طرح (RSS) و گونه‌های مختلف (RSS) نسبت به طرح (SRS) کارا تر است و نمودار کنترلی  $\bar{X}$  تحت این طرح‌ها نسبت به نمودار کنترلی  $\bar{X}_{SRS}$  توان بیش تری دارند. برای طراحی هر نمودار کنترلی ابتدا باید پارامترهای طراحی، اعم از اندازه نمونه (n)، فاصله نمونه‌گیری (h) و ضریب حدود کنترلی (L) تعیین شوند. طراحی نمودار کنترلی می‌تواند بر بعد آماری، اقتصادی و یا هر دو بعد، بسته به نوع طراحی تأثیر گذارد. به طور کلی، طراحی نمودار-های کنترلی به ۴ دسته (تجربی، آماری، اقتصادی و آماری-اقتصادی) تقسیم‌بندی می‌شوند. تاکنون مطالعه‌های فراوانی در رابطه با طراحی اقتصادی و طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترلی  $\bar{X}$  با طرح (SRS) انجام شده است. دانکن [۱۳] اولین بار، طراحی اقتصادی نمودار کنترلی شوهارتی  $\bar{X}$  برای پایش میانگین فرایند نرمال تحت مدل شوک نمایی را معرفی کرد. لورنزن و ونس [۱۴] مدل اقتصادی متفاوتی از دانکن با مدل شوک نمایی ارائه نمودند. با توجه به این که توزیع نمایی حالت خاصی از توزیع وایبول با تابع نرخ خطر ثابت است و چون اکثر فرایندهای صنعتی دارای نرخ خطر افزایشی هستند، بنرجی و رحیم [۱۵] مدل اقتصادی را که برگرفته از مدل اقتصادی دانکن است معرفی نمودند. در مدل اقتصادی ارائه شده‌ی آن‌ها، با توجه به این که توزیع وایبول می‌تواند دارای نرخ خطر صعودی، نزولی و ثابت باشد، فرض نموده‌اند که مدت زمان تحت کنترل بودن فرایند از توزیع وایبول پیروی کند و در حالتی که نرخ خطر توزیع وایبول صعودی باشد به طراحی اقتصادی نمودار کنترلی  $\bar{X}_{SRS}$  پرداختند. با توجه به این که در مباحث کنترل کیفیت بعد اقتصادی مسائل از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و هیچ مطالعه‌ای در رابطه با طراحی اقتصادی و طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترلی  $\bar{X}_{RSS}$  در ادبیات کنترل کیفیت صورت نگرفته است، در این مقاله به طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترلی  $\bar{X}_{RSS}$  تحت مدل اقتصادی بنرجی و رحیم در حالت نمونه‌گیری نایکنواخت می‌پردازیم و ساختار این مقاله به این صورت است که ابتدا در بخش دوم، طرح نمونه‌گیری RSS و نمودار کنترلی  $\bar{X}_{RSS}$  معرفی می‌شوند و سپس در بخش سوم، به ارائه‌ی مدل هزینه و طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترلی، تحت طرح نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای پرداخته می‌شود. در بخش چهارم، نتایج عددی حاصل از طراحی اقتصادی و

<sup>۲</sup> Simple Random Sampling

<sup>۳</sup> Average Run Length

بزرگ است. برای افزایش نمونه در این طرح، افزایش تعداد تکرارها را به جای افزایش  $m$  مورد نظر قرار می‌دهند. در حالت کلی، اگر نمونه مورد نظر به صورت  $n = rm$  باشد، می‌توان طرح (RSS) را برای  $m$  واحد به کار برد و این فرایند را  $r$  بار تکرار کرد. در این صورت احتیاج به انتخاب  $rm^2$  واحد از جامعه مورد نظر می‌باشد تا نمونه‌ای به اندازه  $n = rm$  استخراج شود. فرض کنید  $X_{(i:m)j}$ ،  $i$ -امین آماره‌ی ترتیبی در  $i$ -امین نمونه به اندازه  $m$  در  $j$ -امین تکرار باشد،  $\bar{X}_{RSS}$  طبق رابطه (۲) برآورده‌گر ناریب برای میانگین جامعه است و واریانس  $\bar{X}_{RSS}$  بدون خطای رتبه‌بندی [۱۶] به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} var(\bar{X}_{RSS}) &= \frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \frac{\sigma^2(i:m)}{m} \\ &= \frac{1}{mr} \left\{ \sigma^2 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\mu_{(i:m)} - \mu)^2 \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

$\mu_{(i:m)}$  میانگین  $i$ -امین آماره‌ی ترتیبی در  $i$ -امین نمونه به اندازه  $m$  در  $r$ -امین تکرار می‌باشد که فرمول آن به صورت:

$$\begin{aligned} \mu_{(i:m)} &= E[X_{(i:m)}] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{(i)}(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xm \binom{m-1}{i-1} F^{i-1}(x) [1-F(x)]^{m-i} f(x) dx \end{aligned} \quad (4)$$

با توجه به رابطه (۳) مشاهده می‌شود که واریانس  $\bar{X}_{RSS}$  نسبت به واریانس  $\bar{X}_{SRS}$  همواره کم‌تر است. با توجه به این ویژگی بهینه و با فرض این که فرایند از توزیع نرمال با میانگین و واریانس معلوم تبعیت می‌کند، به معرفی نمودار کنترلی  $\bar{X}_{RSS}$  می‌پردازیم که نخستین بار سالازار و سینها [۱۶]، برای  $L = 3$ ، حدود کنترلی براساس آماره‌ی کنترلی  $\bar{X}_{RSS}$  که مجانبا نرمال است را به صورت زیر پیشنهاد کردند:

$$\begin{cases} UCL = \mu + L\sigma_{\bar{X}_{RSS}} \\ CL = \mu \\ LCL = \mu - L\sigma_{\bar{X}_{RSS}} \end{cases} \quad (5)$$

با توجه به برتری نمودار کنترلی  $\bar{X}_{RSS}$  از نظر معیارهای آماری در اندازه‌ی نمونه برابر، نسبت به نمودار کنترلی  $\bar{X}$  [۹]، در بخش بعدی به طراحی آماری- اقتصادی نمودار کنترلی شوهارتی  $\bar{X}_{RSS}$  تحت مدل اقتصادی بنرجی و رحیم می‌پردازیم.

طراحی آماری- اقتصادی نمودار کنترلی  $\bar{X}_{RSS}$  و اثر تغییر پارامتر- های توزیع وایبول بر متوسط هزینه‌ی بهینه در واحد زمان بررسی می‌شود و در آخر، بخش پنجم نیز شامل نتیجه‌گیری است.

## ۲- طرح نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای

روش کلی طرح نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای به این صورت است که ابتدا  $m^2$  واحد از جامعه مورد مطالعه ( $m$  نمونه‌ی  $m$  تایی) به‌طور تصادفی انتخاب می‌شود. سپس واحدهای هر نمونه به‌طور جداگانه بر اساس نظر متخصص و قبل از اندازه‌گیری دقیق مشخصه‌ی کیفیت مورد نظر به صورت شهودی مرتب می‌شوند. در نهایت نمونه اصلی از آن‌ها به صورت زیر انتخاب می‌شود: ابتدا از نمونه اول کوچک‌ترین رتبه، از نمونه دوم دومین رتبه، ... و در نهایت از نمونه  $m$ ،  $m$ امین رتبه انتخاب می‌شود. بنا بر این، یک نمونه  $m$  تایی از جامعه مورد مطالعه به دست خواهد آمد. نکته قابل ملاحظه این است که در این روش  $m^2$  واحد از جامعه مورد مطالعه در نظر گرفته می‌شود ولی در نهایت فقط  $m$  تا از آن‌ها انتخاب و دقیقاً اندازه‌گیری می‌شود. به همین دلیل می‌توان این روش را با روش نمونه‌گیری تصادفی ساده با اندازه  $m$  مورد مقایسه قرار داد. با توجه به مرجع [۱۶]، نمادهای لازم برای به دست آوردن میانگین نمونه تحت طرح (RSS) برای یک تکرار و بدون خطای رتبه‌بندی در ادامه آورده شده‌اند. فرض کنید  $m^2$  واحد انتخاب شده از جامعه مورد مطالعه، که متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با هم از تابع توزیع  $F(x)$  از جامعه مورد مطالعه، باشند. حال فرض کنید  $X_{i(1)}, X_{i(2)}, \dots, X_{i(m)}$  آماره‌های ترتیبی نمونه‌ی  $i$  برای  $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{im}$  هستند. در نهایت  $X_{1(1)}, X_{2(2)}, \dots, X_{m(m)}$  نمونه‌ی به دست آمده‌ی  $m$  تایی از  $m^2$  واحد جامعه است که  $X_{i(i)}$  یا  $X_{(i:m)}$   $i$ -امین آماره‌ی ترتیبی در  $i$ -امین نمونه به اندازه‌ی  $m$  است. میانگین نمونه (RSS) عبارت است از:

$$\bar{X}_{RSS} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{(i:m)} \quad (1)$$

$$E[\bar{X}_{RSS}] = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m E[X_{(i:m)}] = \mu \quad (2)$$

که نشان می‌دهد  $\bar{X}_{RSS}$  برآورده‌گر ناریب برای  $\mu$  (میانگین جامعه) است. طرح نمونه‌گیری بیان شده برای مقدارهای بزرگ  $m$  با خطا همراه است و این خطا به علت رتبه‌بندی نادرست برای اندازه نمونه

## ۳- مدل هزینه

هزینه کل نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای به اندازه  $mr$  به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۸]:

$$C_{RSS} = C_{O(RSS)} + mr[mC_i + f(m)C_r + C_q] \quad (7)$$

که تابع  $f(m)$  ممکن است به صورت زیر تعریف شود:

$$f(m) = \begin{cases} m \\ m \log(m) \\ \binom{m}{r} \end{cases} \quad (8)$$

و نمادهای دیگر در فرمول‌بندی مدل بنرجی و رحیم [۱۵] تحت طرح نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای به صورت زیر می‌باشد:

$n = mr$ ، اندازه‌ی نمونه ( $m$ ) اندازه نمونه و  $r$  تکرار چرخه؛  $h_j$  طول  $j$ -امین فاصله‌ی نمونه‌گیری ( $j = 1, 2, \dots, r$ )؛  $L$ ، ضریب حدود کنترلی؛  $Z$ ، متوسط زمان جستجوی یک هشدار نادرست؛  $Z_1$ ، متوسط زمان جستجو برای یک هشدار درست؛  $Z_2$ ، متوسط زمان برای تعمیر فرایند؛  $Y$ ، هزینه‌ی هر هشدار نادرست؛  $W$ ، هزینه‌ی مکانیابی، تشخیص و تعمیر علت؛  $D$ ، هزینه‌ی چرخه‌ی کیفیت در هر ساعتی که فرایند تولید تحت کنترل است؛  $D_1$ ، هزینه‌ی چرخه‌ی کیفیت در هر ساعتی که فرایند تولید خارج از کنترل است و  $\delta$ ، اندازه‌ی انتقال در میانگین فرایند است.  $\alpha$ ، احتمال اعلام هشدار از سوی نمودار مبنی بر خارج از کنترل قرار گرفتن فرایند، در حالی که فرایند تحت کنترل است که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\alpha = \Pr(\bar{X}_{RSS} > UCL | \mu = \mu_0) + \Pr(\bar{X}_{RSS} < LCL | \mu = \mu_0) = 2(1 - \Phi(L)) \quad (9)$$

$\beta$ ، احتمال پی نبردن به وجود تغییر در فرایند، زمانی که فرایند خارج از کنترل است که به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\beta = \Pr(LCL < \bar{X}_{RSS} < UCL | \mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma) = \Phi\left(L - \frac{\delta\sigma}{\sigma_{\bar{X}_{RSS}}}\right) - \Phi\left(-L - \frac{\delta\sigma}{\sigma_{\bar{X}_{RSS}}}\right) \quad (10)$$

همچنین، متوسط زمان چرخه ( $E(T)$ ) و متوسط هزینه چرخه ( $E(C)$ ) تحت مدل هزینه‌ی نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای ( $C_{RSS}$ ) در مدل بنرجی و رحیم [۱۵] با توزیع شکست وایبول به صورت زیر محاسبه می‌شود:

در طرح (SRS) هزینه‌ی نمونه‌گیری معمولاً به صورت یک رابطه‌ی خطی بین هزینه‌های ثابت نمونه‌گیری و هزینه‌های متغیر نمونه‌گیری در نظر گرفته می‌شود. در طرح نمونه‌گیری تصادفی ساده هزینه‌ی نمونه‌گیری برابر با  $(a + bn)$  می‌باشد. که می‌توان این رابطه‌ی خطی را با نمادهای زیر بازنویسی کرد [۱۷] و [۱۸]:

$C_{SRS}$ : هزینه کلی اجرای طرح نمونه‌گیری تصادفی ساده.

$C_{O(SRS)}$ : کل هزینه‌ی ای که برای تنظیم و راه‌اندازی اولیه طرح نمونه‌گیری تصادفی ساده در نظر گرفته می‌شود که همان  $a$  در مدل بنرجی و رحیم می‌باشد.

$C_{q(SRS)}$ : هزینه اندازه‌گیری یک واحد نمونه‌گیری.

$C_{i(SRS)}$ : هزینه شناسایی یک واحد نمونه‌گیری.

که جمع  $C_{q(SRS)}$  و  $C_{i(SRS)}$  همان هزینه متغیر نمونه‌گیری است که با نماد  $b$  در مدل بنرجی و رحیم نشان داده شده است. حال با نمادهای تعریف شده، هزینه‌ی کل نمونه‌گیری تصادفی ساده با اندازه‌ی  $n = mr$  به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$C_{SRS} = C_{OR} + mr[C_q + C_i] \quad (6)$$

در طرح (RSS) وقتی که هزینه‌ی رتبه بندی حائز اهمیت باشد، در مدل هزینه‌ی نمونه‌گیری ما باید این هزینه را نیز علاوه بر هزینه‌های ثابت  $a$  و متغیر  $b$  در طرح نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای در نظر بگیریم. دل و کلاتر اولین افرادی بودند که مدل هزینه نمونه‌گیری را در (RSS) معرفی کردند. مدل هزینه نمونه‌گیری، ما را قادر می‌سازد تا تأثیر هزینه‌های مختلف که شامل هزینه نمونه‌گیری، هزینه رتبه‌بندی و هزینه اندازه‌گیری است را برای در نظر گرفتن اندازه نمونه مطلوب (RSS) ارزیابی کنیم. نمادهای مورد استفاده [۱۸] به صورت زیر می‌باشند:

$C_{RSS}$ : هزینه کلی طرح نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای

$C_{O(RSS)}$ : کل هزینه‌ای که برای راه‌اندازی و تنظیم اولیه طرح نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای در نظر گرفته می‌شود که همان  $a$  در مدل بنرجی و رحیم می‌باشد.

$C_i$ : هزینه شناسایی یک واحد نمونه‌گیری.

$C_q$ : هزینه اندازه‌گیری یک واحد نمونه‌گیری.

$C_r(RSS)$ : هزینه رتبه‌بندی یک واحد اندازه‌گیری.

$f(m)$ : تابعی از تعداد مقایسه‌های جفتی مورد انتظار که در رتبه‌بندی مجموعه‌ای به اندازه‌ی  $m$  الزامی است.

در اینجا ما فرض می‌کنیم هزینه شناسایی، اندازه‌گیری و رتبه‌بندی از یک واحد به واحد دیگر مشابه می‌باشد.

معمولاً هزینه شناسایی یک واحد نمونه‌گیری در مقایسه با هزینه اندازه‌گیری بسیار اندک می‌باشد.

مجموعه‌ی رتبه‌ای با استفاده از مقاله‌ی نه‌زاد و همکاران [۱۷] و بنرجی و رحیم [۱۵] در جدول ۱ نشان داده شده است. در جدول ۲ تأثیر مقادیر پارامترهای توزیع وایبول بر روی مدل هزینه اقتصادی تحت نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای بررسی شده است. وقتی  $k$  مقداری ثابت و مقادیر  $\lambda$  کاهش یابد، مانند ردیف ۱ تا ۴، ردیف ۵ تا ۷ و ردیف ۸ تا ۹ که در جدول ۲ مشاهده می‌شود، هزینه مورد انتظار بر واحد زمان ( $C_1$ ) نیز کاهش می‌یابد. در جدول ۳ تأثیر مقادیر پارامترهای توزیع وایبول بر روی مدل هزینه‌ی آماری - اقتصادی تحت نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای با اعمال محدودیت آماری بررسی شده است که حداکثر خطای نوع اول و خطای نوع دوم به ترتیب ۰,۰۵ و ۰,۱ در نظر گرفته شده است. عملکرد پارامترهای توزیع وایبول در جدول ۳ مانند جدول ۲ نمی‌باشد زیرا وقتی  $k$  مقداری ثابت و مقادیر  $\lambda$  کاهش می‌یابد مانند ردیف ۱ تا ۴، ردیف ۵ تا ۷ و ردیف ۸ تا ۹ در جدول ۳، روند افزایشی و یا کاهشی در ( $C_1$ ) مشاهده نمی‌شود که دلیل آن محدودیت‌هایی است که به لحاظ آماری در نظر گرفته شده است. اما این طراحی مشخصه‌ی کیفیت محصول را در سطح مطلوبی از خطای نوع اول و دوم کنترل می‌کند. همین امر موجب کاهش هشدار نادرست و کشف سریع علت اسنادپذیر در فرایند می‌شود که از مزایای بهینه مدل طراحی آماری - اقتصادی محسوب می‌شود و افزایش هزینه‌ی مدل آماری - اقتصادی منجر به افزایش توان نمودارهای کنترلی می‌شود که این مطلب از مقادیر کوچک خطای نوع دوم در جدول ۳ نسبت به مقادیر خطای نوع دوم در جدول ۲، آشکار است. جدول ۴ تأثیر هم‌زمان پارامترهای توزیع وایبول ( $k$  افزایش و  $\lambda$  کاهش) بر روی مدل اقتصادی را نشان می‌دهد و با تغییرات هم‌زمان این دو پارامتر به نحوی که متوسط زمان تحت کنترل بودن مقداری ثابت داشته باشد، مشاهده می‌شود که متوسط هزینه چرخه ( $E(C)$ ) در طراحی اقتصادی دچار تغییرات شدید نمی‌شود. بنا بر این، چون در عمل برای تعیین پارامترهای مدل شوک هیچ مشاهده‌ای در اختیار نیست و تنها از عقاید و آگاهی متخصصان برای تعیین این پارامترها استفاده می‌شود، نتایج جدول ۴ نشان می‌دهد که اگر این پارامترها با فرض ثابت ماندن متوسط زمان تحت کنترل به اشتباه تعیین شوند، تغییر چندانی در خروجی طراحی اقتصادی نخواهند داشت. با توجه به جداول ۴ و ۶ نتیجه می‌گیریم با افزایش هم‌زمان مقدار  $k$  و کاهش مقدار  $\lambda$ ، ( $E(C)$ ) در مدل اقتصادی افزایش می‌یابد زیرا مقدار خطای نوع اول در این جداول نسبت به جدول ۵ و ۷ بیش‌تر می‌باشد. پس نتیجه می‌گیریم تعداد هشدار نادرست افزایش یافته و برای اصلاح اقدامات لازم، نیازمند به هزینه بیش‌تری هستیم. در جدول ۵ و ۷ با افزایش هم‌زمان مقدار  $k$  و کاهش مقدار  $\lambda$  نمی‌توان رابطه‌ی صعودی یا نزولی بین مقادیر ( $E(C)$ )

$$E(T) = Z_1 + Z_r + \frac{\alpha(1-p)}{p} Z_c + h_1 p A(1-p) + \frac{h_1 p \beta (p A(1-p) - (1-\beta) A(\beta))}{1-\beta-p} \quad (11)$$

$$E(C) = (C_{O(RSS)} + m r [m C_i + f(m) C_r + C_q]) \left( \frac{\beta}{1-\beta} + \frac{1}{p} \right) + (D_c - D_1) \left( \frac{1}{\lambda} \right)^k \Gamma \left( 1 + \frac{1}{k} \right) + \frac{\alpha Y(1-p)}{p} + \frac{D_1 h_1 p \beta (p A(1-p) - (1-\beta) A(\beta))}{1-\beta-p} + D_1 h_1 p (1-p) A(1-p) + D_1 h_1 p^r A(1-p) + W \quad (12)$$

که نمادهای  $A(x)$  و  $p$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A(x) = \sum_{v=0}^{\infty} (1+v)^{\frac{1}{k}} x^v$$

$$p = 1 - \exp(-\lambda h_1^k)$$

اگر متوسط زمان چرخه ( $E(T)$ ) و متوسط هزینه چرخه ( $E(C)$ ) باشد، در این صورت با توجه به رابطه‌ی (۱۱) و (۱۲)، هزینه مورد انتظار بر واحد زمان تحت نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E(A) = \frac{E(C)}{E(T)} \quad (13)$$

که با انتخاب پارامترهای طراحی بهینه و پارامترهای هزینه بهینه می‌توانیم متوسط هزینه مورد انتظار در واحد زمان  $E(A)$  را تحت نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای کمینه کنیم که از اهداف اصلی طراحی اقتصادی است. قابل توجه است که برای طراحی آماری - اقتصادی، پارامترهای طراحی نمودار کنترلی چنان تعیین می‌شوند که رابطه‌ی (۱۳) تحت قیود  $\alpha \leq \alpha_U$  و  $\beta \leq \beta_U$  که مقادیری معلوم هستند، کمینه شود.

#### ۴- نتایج عددی

در این بخش، به ارائه مثال عددی برای طراحی اقتصادی و آماری - اقتصادی نمودار کنترلی  $\bar{X}_{RSS}$  تحت توزیع وایبول می‌پردازیم. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد که میانگین و واریانس فرآیند به ترتیب ۰ و ۱ است. پارامترهای هزینه، زمان و اندازه‌ی تغییر و پارامترهای هزینه مربوط به هزینه‌ی نمونه‌گیری

کنترلی شد. به طور کل با توجه به مقادیر در جداول، در طراحی آماری- اقتصادی ما با اندازه نمونه کوچک توانستیم نمودارهای کنترلی را در سطح مطلوبی از خواص آماری با توجه به هزینه بهینه طراحی کنیم.

بیان کرد. با این که مقادیر  $E(C)$  در جدول ۵ و ۷ نسبت به جداول ۴ و ۶ بیش تر است، اما خطای نوع اول و دوم در سطح مطلوبی قرار گرفته اند. یعنی با یک اندک هزینه اضافی می توان باعث کاهش هشدارهای نادرست و افزایش توان نمودارهای

جدول ۱: مقدار پارامترهای هزینه، زمان و اندازه، پارامترهای هزینه مربوط به هزینه نمونه گیری مجموعه ی رتبه ای

Z.	Z <sub>1</sub>	Z <sub>2</sub>	C <sub>i</sub>	C <sub>O(RSS)</sub>	C <sub>q</sub>	C <sub>r</sub>	D.	D <sub>1</sub>	Y	W	δ
۰/۲۵	۰/۲۵	۰/۷۵	۰/۵	۲۰	۴/۲۲	۲/۱۱	۵۰	۹۵۰	۵۰۰	۱۱۰۰	۰/۵
	ساعت	ساعت	دلار	دلار	دلار	دلار	دلار	دلار	دلار	دلار	

جدول ۲. تأثیر پارامترهای توزیع وایبول بر روی طراحی اقتصادی  $\bar{X}_{RSS}$

ردیف	پارامترهای توزیع وایبول			پارامترهای طراحی							
	$\lambda$	$k$		$m$	$r$	$n = mr$	$h_1$	$L$	$\alpha$	$\beta$	$C_1 = \frac{E(C)}{E(T)}$
۱	۰,۰۵	۲		۵	۱	۵	۳,۰۹	۱,۰۹	۰,۲۷	۰,۲۱	۴۵۹,۱۹
۲	۰,۰۱	۲		۴	۲	۸	۵,۳۱	۱,۳۱	۰,۱۸	۰,۱۹	۳۲۸,۲۱
۳	۰,۰۰۲	۲		۵	۱	۵	۸	۱,۳۹	۰,۱۶	۰,۳۲	۲۳۵,۵۵
۴	۰,۰۰۰۲	۲		۲	۱	۲	۸	۱,۸۸	۰,۰۶	۰,۸۴	۱۹۴,۹۷
۵	۰,۰۱	۳		۵	۱	۵	۳,۸۵	۱,۰۸	۰,۲۷	۰,۲۲	۴۲۵,۷۷
۶	۰,۰۰۲	۳		۵	۱	۵	۵,۶۸	۱,۱۹	۰,۲۳	۰,۲۵	۳۳۸,۸۷
۷	۰,۰۰۰۲	۳		۴	۱	۴	۸	۲,۱۹	۰,۱۱	۰,۵۱	۲۵۶,۲۲
۸	۰,۰۱	۴		۵	۱	۵	۳,۰۱	۱	۰,۳۲	۰,۲۹	۴۲۵,۷۷
۹	۰,۰۰۲	۴		۳	۲	۶	۴,۲۴	۱	۰,۳۲	۰,۲۴	۴۰۱,۲۰

جدول ۳. تأثیر پارامترهای توزیع وایبول بر روی طراحی آماری - اقتصادی  $\bar{X}_{RSS}$ 

ردیف	پارامترهای توزیع وایبول		پارامترهای طراحی						$\alpha$	$\beta$	$C_r = \frac{E(C)}{E(T)}$	$C_r - C_1$
	$\lambda$	$k$	$m$	$r$	$n = mr$	$h_1$	$L$					
۱	۰,۰۵	۲	۳	۸	۲۴	۳,۶۹	۱,۹۵۹	۰,۰۵	۰,۰۷۶	۵۰۰,۰۸	۴۰,۸۹	
۲	۰,۰۱	۲	۳	۸	۲۴	۶,۲۵	۱,۹۵۹	۰,۰۵	۰,۰۷۶	۳۵۳,۹۰۱	۲۵,۶۹۱	
۳	۰,۰۰۲	۲	۲	۱۵	۳۰	۷,۹۹	۲,۰۳۴	۰,۰۴۱	۰,۰۹۹	۲۷۱,۸۰۶	۳۶,۲۵۶	
۴	۰,۰۰۰۲	۲	۷	۲	۱۴	۸	۲,۲۶۵	۰,۰۲۳	۰,۰۹۹	۴۹۴,۶۸۳	۲۹۹,۷۱۳	
۵	۰,۰۱	۳	۴	۵	۲۰	۴,۳۲	۱,۹۵۹	۰,۰۵	۰,۰۷۱	۴۶۵,۴۱۶	۳۹,۶۴۶	
۶	۰,۰۰۲	۳	۳	۸	۲۴	۶,۴۷	۱,۹۵۹	۰,۰۵	۰,۰۷۶	۳۶۷,۰۱۸	۲۸,۱۴۸	
۷	۰,۰۰۰۲	۳	۳	۸	۲۴	۷,۹۹	۲,۱۰۶	۰,۰۳۵	۰,۰۹۹	۳۴۴,۹۵۲	۸۸,۷۳۲	
۸	۰,۰۱	۴	۳	۸	۲۴	۳,۳۳	۱,۹۵۹	۰,۰۵	۰,۰۷۶	۵۲۴,۶۲	۹۸,۸۵	
۹	۰,۰۰۲	۴	۳	۸	۲۴	۴,۶۰	۱,۹۵۹	۰,۰۵	۰,۰۷۶	۴۳۹,۱۷	۳۷,۹۷	

جدول ۴. تأثیر هم‌زمان پارامترهای توزیع وایبول بر روی طراحی اقتصادی  $\bar{X}_{RSS}$ 

ردیف	پارامترهای توزیع وایبول		پارامترهای طراحی						$\alpha$	$\beta$	$E(C)$	$C_1 = \frac{E(C)}{E(T)}$
	$\lambda$	$k$	$m$	$r$	$n = mr$	$h_1$	$L$					
۱	۰,۰۰۰۱	۳,۲۴۸	۴	۱	۴	۸	۱,۶۹	۰,۰۹	۰,۵۶	۴۷۶۵,۶۶	۲۵۹,۱۴	
۲	۰,۰۰۰۲	۳	۴	۱	۴	۸	۱,۵۷	۰,۱۱	۰,۵۱۷	۴۵۸۶,۴۸	۲۵۶,۲۲	
۳	۰,۰۰۰۳	۲,۸۵۵	۳	۲	۶	۸	۱,۵۷	۰,۱۱	۰,۴۵۱	۴۵۶۲,۹۶	۲۵۵,۴۶	
۴	۰,۰۰۱	۲,۴۲۷	۵	۱	۵	۸	۱,۴۱	۰,۱۵	۰,۳۲۶	۴۶۰۳,۱۹	۲۵۴,۸۴	
۵	۰,۰۵	۱,۰۸۶	۶	۱	۶	۳,۰۵۷	۱,۳۳	۰,۱۸	۰,۱۹	۵۱۱۱,۷۳	۲۷۷,۰۹۸	

جدول ۵. تأثیر هم‌زمان پارامترهای توزیع وایبول بر روی طراحی آماری-اقتصادی  $\bar{X}_{RSS}$ 

ردیف	پارامترهای توزیع وایبول		پارامترهای طراحی								$E(C)$	$C_r = \frac{E(C)}{E(T)}$	$C_r - C_1$
	$\lambda$	$k$	$m$	$r$	$n = mr$	$h_1$	$L$	$\alpha$	$\beta$				
۱	۰,۰۰۱	۳,۲۴۸	۳	۸	۲۴	۷,۹۹	۲,۱۰۶	۰,۰۳۵	۰,۰۹	۳۷۸۶,۶۱	۳۷۶,۷۹	۱۱۷,۶۵	
۲	۰,۰۰۰۲	۳	۳	۸	۲۴	۷,۹۹	۲,۱۰۷	۰,۰۳۵	۰,۰۹۹	۵۸۷۹,۶۹	۳۴۴,۹۵	۸۸,۷۳	
۳	۰,۰۰۰۳	۲,۸۵۵	۳	۸	۲۴	۷,۹۹	۲,۱۰۷	۰,۰۳۵	۰,۰۹۹	۵۶۴۳,۶۹	۳۲۹,۶۷	۷۴,۲۱	
۴	۰,۰۰۱	۲,۴۲۷	۳	۸	۲۴	۸	۲,۰۶۵	۰,۰۳۸	۰,۰۹۲	۵۱۷۵,۶۴	۲۹۷,۴۴	۴۲,۶	
۵	۰,۰۵	۱,۰۸۶	۳	۸	۲۴	۴,۱۳۸	۱,۹۵۹	۰,۰۵	۰,۰۷۶	۵۴۷۴,۸۷	۲۹۶,۷۸	۱۹,۶۸۲	

جدول ۶. تأثیر هم‌زمان پارامترهای توزیع وایبول بر روی طراحی اقتصادی  $\bar{X}_{RSS}$ 

ردیف	پارامترهای توزیع وایبول		پارامترهای طراحی								$E(C)$	$C_1 = \frac{E(C)}{E(T)}$
	$\lambda$	$k$	$m$	$r$	$n = mr$	$h_1$	$L$	$\alpha$	$\beta$			
۱	۰,۰۶۵۴۹	۱	۶	۱	۶	۲,۵۳۹	۱,۳۲۶	۰,۱۸	۰,۱۹	۵۴۷۴,۸۷	۲۷۸,۶۷	
۲	۰,۰۰۳۳۷	۲	۶	۱	۶	۷,۶۵	۱,۳۶۳	۰,۱۷	۰,۲	۴۷۴۱,۰۳	۲۶۰,۲۱۹	
۳	۰,۰۰۰۲	۳	۴	۱	۴	۸	۱,۵۷۷	۰,۱۱	۰,۵۱۷	۴۵۸۷,۴۹	۲۵۶,۲۲	
۴	۰,۰۰۰۰۱۲۴	۴	۳	۱	۳	۸	۱,۸۷۳	۰,۰۶	۰,۷۴	۴۸۵۵,۶۹	۲۷۳,۸۶	

جدول ۷. تأثیر هم‌زمان پارامترهای توزیع وایبول بر روی طراحی آماری-اقتصادی  $\bar{X}_{RSS}$ 

ردیف	پارامترهای توزیع وایبول		پارامترهای طراحی								$E(C)$	$C_r = \frac{E(C)}{E(T)}$	$C_r - C_1$
	$\lambda$	$k$	$m$	$r$	$n = mr$	$h_1$	$L$	$\alpha$	$\beta$				
۱	۰,۰۶۵۴۹	۱	۳	۸	۲۴	۳,۵۲۲	۱,۹۵	۰,۰۴۹	۰,۰۷۶	۵۴۹۷,۳۱	۲۹۸,۳۵	۱۹,۶۸	
۲	۰,۰۰۳۳۷	۲	۳	۸	۲۴	۸	۱,۹۵	۰,۰۴۹	۰,۰۷۶	۱۰۹۱۶,۸۲	۲۸۳,۲۳	۲۶۸,۳۳۱	
۳	۰,۰۰۰۲	۳	۳	۸	۲۴	۷,۹۹	۲,۱۰۷	۰,۰۳۵	۰,۰۹۹	۵۸۷۹,۹۶	۳۴۴,۹۵	۸۸,۷۳	
۴	۰,۰۰۰۰۱۲۴	۴	۳	۸	۲۴	۷,۹۹	۲,۱۰۶	۰,۰۳۵	۰,۰۹۹	۸۸۰۰,۱۴	۵۲۳,۵۷	۲۴۹,۷۱	



## ۷- نتیجه‌گیری

[۳] Halls, L. K., & Dell, T. R. (۱۹۶۶). Trial of ranked-set sampling for forage yields. *Forest Science*, 12(۱), ۲۲-۲۶.

[۴] Takahasi, K., & Wakimoto, K. (۱۹۶۸). On unbiased estimates of the population mean based on the sample stratified by means of ordering. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 20(۱), ۱-۳۱.

[۵] Dell, T. R., & Clutter, J. L. (۱۹۷۲). Ranked set sampling theory with order statistics background. *Biometrics*, ۵۴۵-۵۵۵.

[۶] Lynne Stokes, S. (۱۹۷۷). Ranked set sampling with concomitant variables. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 6(۱۲), ۱۲۰۷-۱۲۱۱.

[۷] Sinha, B. K., Sinha, B. K., & Purkayastha, S. (۱۹۹۶). On some aspects of ranked set sampling for estimation of normal and exponential parameters. *Statistics & Risk Modeling*, 14(۳), ۲۲۳-۲۴۰.

[۸] Muttlak, H. A., & Abu-Dayyeh, W. (۱۹۹۸). Testing some hypotheses about the normal distribution using ranked set sample: a more powerful test. *Journal of Information and Optimization Sciences*, 19(۱), ۱-۱۱.

[۹] Salazar, R. D., & Sinha, A. K. (۱۹۹۷). Control chart  $\bar{X}$  based on ranked set sampling. *Comunicacion Tecnica*, 1, ۱-۹۷.

[۱۰] Muttlak, H., & Al-Sabah, W. (۲۰۰۳). Statistical quality control based on ranked set sampling. *Journal of Applied Statistics*, 30(۹), ۱۰۵۵-۱۰۷۸.

[۱۱] Abujiya, M. A., & Muttlak, H. (۲۰۰۴). Quality control chart for the mean using double ranked set sampling. *Journal of Applied Statistics*, 31(۱۰), ۱۱۸۵-۱۲۰۱.

[۱۲] Lee, M. H. (۲۰۱۳, April). The three statistical control charts using ranked set sampling. In *2013 5th International Conference on Modeling, Simulation and Applied Optimization (ICMSAO)* (pp. ۱-۶). IEEE.

[۱۳] Duncan, A. J. (۱۹۵۶). The economic design of  $\bar{X}$  charts used to maintain current control of a process. *Journal of the American Statistical Association*, 51(۲۷۴), ۲۲۸-۲۴۲.

در این مقاله، طراحی اقتصادی و آماری- اقتصادی نمودار کنترلی  $\bar{X}_{RSS}$  تحت مدل شوک وایبول ارائه شد. در طراحی اقتصادی به علت بی‌توجهی به معیارهای آماری، خطای نوع اول و دوم در سطح نامطلوبی قرار گرفته‌اند که همین موضوع باعث افزایش هزینه برای اصلاح هشدارهای نادرست فرایند می‌شود. نتایج حاکی از آن بود که در طراحی آماری- اقتصادی نمی‌توان رابطه‌ای بین پارامترهای توزیع وایبول و متوسط هزینه چرخه  $(E(C))$  و متوسط هزینه در واحد زمان  $(C_T)$  برقرار نمود. زیرا تغییرات هم- زمان پارامترهای توزیع وایبول به نحوی که متوسط زمان تحت کنترل بودن مقداری ثابت داشته باشد، دریافتیم که متوسط هزینه چرخه  $(E(C))$  در طراحی اقتصادی دچار تغییرات شدید نمی‌شود چرا که در عمل برای تعیین پارامترهای مدل شوک هیچ مشاهده‌ای در اختیار نیست و تنها از عقاید و آگاهی متخصصان برای تعیین این پارامترها استفاده می‌شود و دریافتیم که وقتی خطای نوع اول و دوم در محدودیت خود قرار گیرند این امر نشان‌دهنده پایین بودن خواص آماری در نمودار کنترلی است که منجر به افزایش توان نمودارهای کنترلی می‌شود. در نهایت دریافتیم که طراحی آماری- اقتصادی  $\bar{X}_{RSS}$  با اندازه نمونه کوچک، می‌تواند نمودار کنترلی را در سطح مطلوبی از خواص آماری طراحی کند. بنا بر این، با توجه به نتایج حاصل از این مقاله و این که نمودار کنترلی  $\bar{X}_{RSS}$  دارای خواص آماری بسیار مطلوبی نسبت به نمودار کنترلی  $\bar{X}_{SRS}$  است، پیشنهاد می‌شود که از نمودار کنترلی  $\bar{X}_{RSS}$  با طراحی آماری- اقتصادی، در کنترل میانگین فرایندهای صنعتی و خدماتی استفاده شود.

## سپاس

این پژوهش با حمایت معنوی و مالی معاونت محترم پژوهشی دانشگاه علامه طباطبائی از هسته‌ی پژوهشی کیفیت انجام پذیرفته است.

## مراجع

[۱] Montgomery, D. C. (۲۰۰۹). Introduction to statistical quality control. *New York: John*.

[۲] McIntyre, G. A. (۱۹۵۲). A method for unbiased selective sampling, using ranked sets. *Australian Journal of Agricultural Research*, 3(۴), ۳۸۵-۳۹۰.

[۱۴] Lorenzen, T. J., & Vance, L. C. (۱۹۸۶). The economic design of control charts: a unified approach. *Technometrics*, 28(۱), ۳-۱۰.

[۱۵] Banerjee, P. K., & Rahim, M. A. (۱۹۸۸). Economic Design of  $\bar{X}$ -Control Charts Under Weibull Shock Models. *Technometrics*, 30(۴), ۴۰۷-۴۱۴.

[۱۶] Patil, G. P., Sinha, A. K., & Taillie, C. (۱۹۹۴). Ranked set sampling. *Handbook of statistics*, 12, ۱۶۷-۲۰۰.

[۱۷] Nahhas, R. W., Wolfe, D. A., & Chen, H. (۲۰۰۲). Ranked set sampling: cost and optimal set size. *Biometrics*, 58(۴), ۹۶۴-۹۷۱.

[۱۸] Kaur, A., Patil, G. P., Shirk, S. J., & Taillie, C. (۱۹۹۶). Environmental sampling with a concomitant variable: a comparison between ranked set sampling and stratified simple random sampling. *Journal of Applied Statistics*, 23(۲-۳), ۲۳۱-۲۵۶.