

# طراحی آماری-اقتصادی واقع بینانه نمودار کنترل $\bar{X}$ در حضور علت های اسنادپذیر مستقل: با نقدی بر مدل اقتصادی چن و یانگ (۲۰۰۲)

سید رحمت شجاعی علی آبادی

دانشجوی دکترا، گروه آموزشی آمار، دانشکده آمار، ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران.

محمد بامنی مقدم

(نویسنده مسؤل)، استاد تمام، گروه آموزشی آمار، دانشکده آمار، ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران.

فرزاد اسکندری

استاد تمام، گروه آموزشی آمار، دانشکده آمار، ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران.

**چکیده:** یکی از ابزارهای پرکاربرد در کشف سریع علت های اسنادپذیر، نمودارهای کنترل هستند. با توجه به اهمیت هزینه های اقتصادی، دانکن در جهت کاهش هزینه های اقتصادی چرخه ی کیفیت، اولین مدل اقتصادی در حضور علت های اسنادپذیر چندگانه را ارائه داد. در مدل او و مدل های برگرفته شده از آن فرض شده است که پس از وقوع یک علت اسنادپذیر، سایر علت های اسنادپذیر تا صدور هشدار درست رخ ندهند. در این مقاله پس از نقد مدل های پیشین در استفاده نادرست و غیرواقع بینانه از این فرض برای محاسبه متوسط هزینه در واحد زمان چرخه ی کیفیت، طرح آماری-اقتصادی واقع بینانه ای در حضور علت های اسنادپذیر چندگانه برای طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترل ارائه می شود. نتایج حاصل از مدل پیشنهادی نشان می دهد که در مدل چن و یانگ این فرض برقرار نیست و بنا بر این، پیشنهاد می شود برای رفع نواقص طراحی های انجام شده بر پایه ی مدل آن ها، در پژوهش های آتی به بازطراحی آن ها براساس مدل پیشنهادی ماکزیمم توجه شود. **کلمات کلیدی:** طراحی اقتصادی، نمودار کنترلی  $\bar{X}$  علت های اسنادپذیر چندگانه، مدل شوک وایبول

میانگین فرایند، با فرض آنکه انحراف معیار فرایند ( $\sigma$ ) در طول میانگین فرایند، با فرض آنکه انحراف معیار فرایند ( $\sigma$ ) در طول اسنادپذیر باعث انتقال میانگین فرایند از  $\mu_0$  به  $\mu_0 + \delta\sigma$  می شود که در آن،  $\delta$  پارامتر انتقال است. بنا بر این، برای پایش زمان ثابت است، هر بار نمونه ای به اندازه  $n$  از فرایند در فاصله زمانی معین ( $h$ ) اخذ شده و مقدار مشاهده شده آماره  $\bar{X}$  بر روی نمودار کنترلی رسم می شود، چنانچه نقطه ای خارج از حدود کنترلی قرار گیرد شاهد هشدار مبنی بر اینکه فرایند از کنترل آماری خارج شده است خواهیم بود. کارایی آماری هر نمودار کنترل مانند نمودار کنترل  $\bar{X}$  و هزینه های پایش کیفیت محصول های تولیدی هر فرایند با آن، به مقدار تعیین شده پارامترهای ( $n, L, h$ ) وابسته اند که به پارامترهای طراحی

## ۱- مقدمه

نمودارهای کنترلی، یکی از ابزارهای بسیار مفید کنترل فرایند آماری (SPC) برای بهبود کیفیت و صرفه جویی در هزینه های تولید هستند. نمودار کنترلی  $\bar{X}$  یکی از پرکاربردترین و مهم ترین نمودارهای کنترلی شوهرتی برای پایش میانگین فرایند است. حدود کنترلی در نمودار کنترلی  $\bar{X}$  بصورت  $\mu_0 \pm L \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  ارائه می شوند که  $\mu_0$  و  $\sigma$  به ترتیب میانگین و انحراف معیار مفروض فرایند،  $n$  و  $L$  نیز به ترتیب اندازه نمونه اخذ شده و ضریب حدود کنترلی هستند. وقوع یک علت

Corresponding author: bamenimoghada@aut.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۶/۲۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۱/۱۱

دوره ۱۱/ شماره ۳

صفحات ۲۰۳-۲۲۰

نمودار کنترلی معروفاند.

مفهوم طراحی اقتصادی اولین بار توسط گریشیک و روبین [۱] مطرح گردید. اگرچه محاسبات به کار رفته توسط آنها بسیار پیچیده بود ولی مطالعه آن‌ها به عنوان پایه برای کارهای بعدی قرار گرفت. دانکن [۲] از اولین نفراتی بود که طراحی اقتصادی برای نمودار کنترلی  $\bar{X}$  با در نظر گرفتن مدل شوک نمایی ارایه داد. در مقاله دانکن [۲] فرض شده است که تنها یک انحراف با دلیل فرایند را تحت تاثیر قرار می دهد. در صنعت شرایطی وجود دارد که مدل تحت تاثیر چند انحراف بادلایل قرار خواهد گرفت. بر این اساس مقاله دانکن [۳] در مقاله خود طراحی اقتصادی برای نمودار کنترلی  $\bar{X}$  را با در نظر گرفتن چند انحراف با دلیل ارایه کرده است. با توجه به اینکه در طراحی اقتصادی به ویژگی‌های بهینه آماری نمودارهای کنترلی توجه نمی‌شد، سانگا [۴] طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترل  $\bar{X} - R$  را ارائه داد و به بررسی مزایا و معایب هریک از طراحی‌های آماری، اقتصادی و آماری-اقتصادی پرداخت. برای مرور جامعی از پژوهش‌های پیشین بر مبنای مدل اقتصادی دانکن [۲] به مونت‌گمری [۵]، هو و کیس [۶] و وودال و مونت‌گمری [۷] مراجعه شود.

در عمل، بسیاری از فرآیندهای تولید تحت تاثیر چند انحراف با دلیل قرار می‌گیرند و فرایندهایی که تحت تاثیر یک انحراف با دلیل باشند، نادر هستند. بنا بر این بسیاری از محققین علاقه‌مند به ارایه مدل هزینه در این شرایط هستند. دانکن [۳] مدل تک انحراف با دلیل خود را به مدل تحت تاثیر چند انحراف با دلیل توسعه داد. یو و همکاران [۸] مدل آماری-اقتصادی را برای نمودار کنترلی  $\bar{X}$  تحت تاثیر چندین علت اسنادپذیر برای مدل دانکن ارایه کردند. چون محاسبه مقدار مورد انتظار زمان  $(E(T))$  و هزینه  $(E(C))$  هر چرخه کیفیت در حضور  $m$  علت اسنادپذیر از نظر تئوری و محاسبات پیچیده است، دانکن در جهت ساده‌سازی محاسبه  $E(C)$  و  $E(T)$ ، دو فرض اساسی زیر را در کنار سایر مفروضات پذیرفت:

(۱) زمان وقوع علت‌های اسنادپذیر مستقل از یکدیگر هستند (پذیره اول)،

(۲) پس از وقوع یک علت اسنادپذیر تا زمان شناسایی آن، علت اسنادپذیر دیگری رخ ندهد (پذیره دوم).

به‌وضوح، اگر پذیره‌های (۱) و (۲) در مواجهه با یک فرایند تولیدی یا خدماتی برقرار نباشند آن‌گاه مقدارهای بهینه‌ی به‌دست آمده از مدل دانکن [۳] و سایر پژوهش‌های بر پایه‌ی آن در عمل غیر بهینه خواهد بود. بر اساس دانکن [۳] و دو

پذیره‌ی اساسی او، چن و یانگ [۹] تعمیمی از مدل بنرجی و رحیم [۱۰] در حضور چندین علت اسنادپذیر تحت مدل شوک وایبول ارائه دادند. آن‌ها برخلاف مدل دانکن [۳] فرض نمودند که پس از وقوع هشدار نمودار کنترلی، فرایند تولید متوقف شود. آن‌ها پذیره دوم را این‌گونه بیان می‌کنند که پس از وقوع یک علت اسنادپذیر تا صدور هشدار صحیح، علت اسنادپذیر دیگری رخ ندهد. یو و همکاران [۱۱] برپایه‌ی مدل اقتصادی دانکن، به ترتیب به طراحی اقتصادی نمودار کنترل انطباقی  $\bar{X}$  در حضور علت‌های اسنادپذیر چندگانه که نسبت به نمودار کنترل  $\bar{X}$  دارای کارایی بالاتری است پرداختند. پاشا و همکاران [۱۲] مدل چن و یانگ [۹] را تحت مدل شوک دلخواه متعلق به خانواده نرخ خطر متناسب در حضور  $m$  علت اسنادپذیر تعمیم دادند. سعادت‌ملی و همکاران [۱۳] مطالعه‌ای بر طراحی اقتصادی و آماری-اقتصادی نمودار کنترلی  $\bar{X}$  در حضور علت‌های اسنادپذیر چندگانه تحت مدل شوک بر ۱۲ انجام دادند. در طراحی اقتصادی و آماری-اقتصادی انواع نمودارهای کنترلی شوهارتی و غیرشوهارتی در حضور چندین علت اسنادپذیر که به برخی از آن‌ها اشاره شد، همواره دو پذیره‌ی اول و دوم برای ساده‌سازی محاسبات استفاده شده‌اند.

نکته‌ی مهم در مورد این دو پذیره این است که اگر در فرایندی به‌طور ذاتی (فیزیکی)، پذیره دوم برقرار باشد، آن‌گاه وقوع یکی از علت‌های اسنادپذیر و عدم وقوع سایر علت‌های اسنادپذیر به معنی وابسته بودن علت‌های اسنادپذیر به یکدیگر و در نتیجه وابسته بودن زمان وقوع علت‌های اسنادپذیر خواهد بود که در تناقض با پذیره اول یعنی مستقل بودن زمان وقوع علت‌های اسنادپذیر از یکدیگر است. بنا بر این، اگر فرض شود که در یک فرایند، علت‌های اسنادپذیر مستقل از هم رخ دهند آن‌گاه پذیره دوم، یک پیشامد از همه‌ی حالت‌های ممکن در رخ داد سایر علت‌های اسنادپذیر پس از وقوع یک علت اسنادپذیر در چرخه کیفیت خواهد بود که باید شرایط وقوع آن و اثر پارامترهای طراحی بر آن مطالعه شود.

بنا بر این، از نظر تئوری متوسط زمان خارج از کنترل و متوسط هزینه‌ی خارج از کنترل محاسبه شده توسط دانکن [۳] و کلیه‌ی مدل‌های دیگر بر مبنای آن مانند مدل چن و یانگ [۹]، پاشا و همکاران [۱۲] و نادری و همکاران [۱۴] و سعادت‌ملی و همکاران [۱۳] نیاز به بازبینی دارند. زیرا در طراحی‌های آن‌ها پذیره‌ی دوم به صورت پذیره‌ای که حتما رخ می‌دهد استفاده شده است. به‌عبارتی باید در محاسبات آن‌ها، احتمال وقوع پذیره دوم به مثابه یک پیشامد در نظر گرفته شود. بنا بر این،

(۳) زمان وقوع علت‌های اسنادپذیر مستقل از یکدیگرند.  
 (۴) با انتخاب نمونه‌ای تصادفی به اندازه  $n$  از فرایند تولید در زمان  $w_j = \sum_{l=1}^j h_l$  فرایند مورد بررسی قرار می‌گیرد.  $h_l$ ،  $l$ -امین فاصله نمونه‌گیری است که چنان تعیین می‌شود که احتمال خارج شدن فرایند از حالت تحت کنترل زمانی که ابتدای فاصله تحت کنترل بوده، برای تمام فواصل نمونه‌گیری مقدار ثابتی باشد چنان و یانگ [۹]. بنا بر این،  $h_l$  برابر است با:

$$h_l = [l^{1/k} - (l-1)^{1/k}]h_1. \quad (2)$$

بنا بر این، زمان نمونه‌گیری  $j$ -ام یعنی  $w_j$  برابر  $j^{1/k}h_1$  است که در ادامه بجای نماد  $h_1$  از نماد  $h$  استفاده می‌کنیم.

- (۵) فرایند خود اصلاح نیست. به عبارت دیگر وقتی فرایند از حالت کنترل خارج شود فقط با دخالت عامل انسانی امکان بازگشت به حالت تحت کنترل دارد.  
 (۶) فرایند در زمان جستجو و تعمیر علت اسنادپذیر متوقف می‌شود.  
 (۷) مدت زمان اخذ و تفسیر نمونه ناچیز است.  
 (۸) فرایند از حالت تحت کنترل شروع به کار می‌کند.

## ۲-۲-۲- نمادها

پارامترهای هزینه و زمان مشابه مقاله نادری و همکاران [۲۴] هستند:

- $Z_0$ : متوسط زمان برای جستجوی هشدار اشتباه،  
 $Z_1$ : متوسط زمان برای کشف علت اسنادپذیر  $i$ -ام زمانی که توسط نمودار تشخیص داده شده است،  
 $Z_{2i}$ : متوسط زمان برای تعمیر علت اسنادپذیر  $i$ -ام زمانی که علت اسنادپذیر  $i$ -ام ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) کشف شده است،  
 $D_0$ : متوسط هزینه کیفیت در واحد زمان برای حالت تحت کنترل،  
 $D_{1i}$ : متوسط هزینه کیفیت در واحد زمان برای حالت خارج از کنترل مرتبط با علت اسنادپذیر  $i$ -ام است،  
 $Y$ : متوسط هزینه بررسی هشدار اشتباه زمانی که فرایند تحت کنترل است،  
 $D_{2i}$ : هزینه مکان یابی و تعمیر علت اسنادپذیر  $i$ -ام،  
 $a$ : هزینه ثابت نمونه‌گیری،  
 $b$ : هزینه هر واحد نمونه.

در این مقاله باتوجه به اینکه وقوع پذیره دوم قطعی نیست، به بررسی و بیان نقاط ضعف طراحی‌های اقتصادی و آماری-اقتصادی پیشین و محاسبه‌ی احتمال وقوع پذیره‌ی دوم در نتایج حاصل از مقاله‌ی چن و یانگ [۹] می‌پردازیم. همچنین در جهت اصلاح مدل‌های اقتصادی در حضور چندین علت اسنادپذیر، مدلی را پیشنهاد می‌دهیم که در عمل کاربردی‌تر و واقع‌بینانه‌تر از مدل‌های پیشین است. ساختار این مقاله به این صورت است که در بخش ۲، تعاریف و پذیره‌های مورد استفاده ارائه می‌شود. در بخش ۳، احتمال وقوع یک علت اسنادپذیر و عدم وقوع سایر علت‌های اسنادپذیر تا صدور هشدار محاسبه شده و نقد و بررسی نتایج ارائه شده در چن و یانگ [۹] ارائه می‌شود. در بخش ۴، بازطراحی از مدل آماری-اقتصادی چن و یانگ [۹] در جهت طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترل  $\bar{X}$  ارائه می‌شود. در بخش ۵ نیز علاوه بر تعیین مقدار بهینه‌ی پارامترهای طراحی، مقایسه‌ای بین مدل پیشنهادی ما با چن و یانگ [۹] انجام می‌گیرد و در نهایت، نتیجه‌گیری در بخش ۶ ارائه می‌شود.

## ۲- پذیره‌ها و نمادها

### ۲-۱- پذیره‌ها

در این مقاله برای طراحی آماری-اقتصادی از پذیره‌های مدل اقتصادی چن و یانگ [۹] استفاده شده است.

- (۱) مشخصه کیفیت فرایند از توزیع نرمال با میانگین  $\mu$  و واریانس  $\sigma^2$  ( $\sigma^2$  در طول فرایند ثابت است) معلوم تبعیت می‌کند. در حالتی که  $\mu = \mu_0$  باشد فرایند تحت کنترل آماری است و وقتی علت اسنادپذیر  $i$  ام رخ می‌دهد میانگین فرایند از  $\mu_0$  به  $\mu_0 + \delta_i \sigma$  منتقل می‌شود که در این حالت فرایند خارج از کنترل آماری است.  
 (۲) مدت زمان سپری شده از ابتدای چرخه کیفیت تا رخداد علت اسنادپذیر  $i$ -ام ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) که آن را با نماد  $T_i$  نشان می‌دهیم، دارای توزیع وایبول با تابع چگالی زیر است:

$$f_i(t) = \lambda_i k t^{k-1} e^{-\lambda_i t^k} \quad (12)$$

$$(t > 0, \lambda_i > 0, k > 0),$$

که در آن  $k$  پارامتر شکل و  $\lambda_i$  پارامتر مقیاس است.

که در آن،  $\lambda_i = \lambda - \lambda_i$ ،  $\lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i$  و  $\beta_i = \Phi(L - \delta_i \sqrt{n}) - \Phi(-L - \delta_i \sqrt{n})$  اثبات در پیوست (الف) داده شده است.

با توجه به رابطه (۳)،  $P(I=1)$  تابعی از پارامترهای طراحی  $(n, h, L)$  و مدل شوک (توزیع زمان وقوع علت‌های اسنادپذیر) و پارامترهای آن است. بنا بر این، باید گفت که در دانکن [۱۴]، چن و یانگ [۱۵] و سایر مقاله‌های برپایه‌ی آن‌ها که فرض نموده‌اند پیشامد  $\{I=I\}$  بطور حتمی رخ دهد نه تنها با توجه به رابطه (۳) اینطور نیست، بلکه در صورت پذیرش چنین پذیرهای باید مقدار بهینه‌ی پارامترهای طراحی از بین مقادیری انتخاب شوند که احتمال وقوع این پیشامد، واقع‌بینانه (نزدیک به ۱) باشد. زیرا هر آن‌چه احتمال این پیشامد به صفر نزدیک باشد به معنی عدم برقراری پذیرهی دوم است.

در ادامه به بررسی این موضوع می‌پردازیم که آیا در محاسبه‌ی  $E(T)$  و  $E(C)$  در طراحی‌های ارائه شده، پیشامد  $\{I=I\}$  به درستی در محاسبات منظور شده است یا خیر؟ برای این منظور به بررسی طراحی اقتصادی ارائه شده توسط چن و یانگ [۱۵] که مبنای بسیاری از پژوهش‌ها قرار گرفته است پرداخته می‌شود.

چن و یانگ [۹] در رابطه (۱۱) مقاله خود، متوسط زمان طول یک چرخه‌ی کیفیت را به صورت رابطه (۴) ارائه نموده‌اند:

$$E(T) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{k}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) + \alpha Z_0 \frac{e^{-\lambda h_1^k}}{1 - e^{-\lambda h_1^k}} + \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\lambda} B_i, \quad (4)$$

که در آن  $B_i$ ها برابر متوسط زمان خارج از کنترل بودن فرایند تا انتهای چرخه‌ی کیفیت به علت وقوع علت اسنادپذیر  $I_i$ -ام و  $\alpha = 2\Phi(-L)$  هستند. با توجه به مقاله آن‌ها، متوسط زمان تحت کنترل بودن فرایند برابر،

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{k}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) + \alpha Z_0 \frac{e^{-\lambda h_1^k}}{1 - e^{-\lambda h_1^k}} \quad (5)$$

است که برای بررسی جزئیات و نحوه اثبات آن به روابط (۷) تا (۹) چن و یانگ [۹] مراجعه شود.

قابل ذکر است که  $\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\lambda} B_i$  برابر متوسط زمان سپری شده از لحظه وقوع یک علت اسنادپذیر تا پایان چرخه‌ی کیفیت بدون رخداد سایر علت‌های اسنادپذیر است. با توجه به چن و یانگ،  $B_i$  فقط تابعی از پارامترهای طراحی  $(n, h, L)$  و پارامترهای  $k$  و  $\lambda_i$  است. بنا بر این در محاسبه‌ی  $\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\lambda} B_i$ ، عدم وقوع سایر علت‌های اسنادپذیر تا صدور هشدار صحیح پس از وقوع علت اسنادپذیر  $I_i$ -ام در محاسبات منظور نشده است. زیرا در این

در این مقاله پس از رخداد علت اسنادپذیر  $I_i$ -ام میزان تغییری که در میانگین فرایند رخ می‌دهد برابر است با  $\delta_i \sigma$  که همانند مطالعات پیشین، سه توزیع یکنواخت (UN)، نیم-نرمال (HN)  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\delta_i}{\sigma})^2}$  و نمایی منفی (NE)  $\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\delta_i}$  به عنوان توزیع آغازین برای  $\delta_i$  در نظر گرفته شده است.

### ۳- نقدی بر مدل اقتصادی چن و یانگ

طبق آنچه در مقدمه بیان شد در همه‌ی مدل‌های اقتصادی و آماری-اقتصادی در حضور علت‌های اسنادپذیر چندگانه پس از مدل دانکن [۳] در جهت ساده‌سازی محاسبه  $E(T)$  و  $E(C)$  فرض نمودند که پس از وقوع یک علت اسنادپذیر، تا زمان صدور هشدار صحیح، علت اسنادپذیر دیگری رخ ندهند (پذیره دوم). به عبارتی، چنان‌چه متغیر تصادفی گسسته  $I$  نشان‌دهنده تعداد علت‌های اسنادپذیر رخ داده قبل از صدور هشدار صحیح باشد آنگاه پیشامد  $\{I=1\}$  معادل با وقوع فقط یک علت اسنادپذیر و عدم وقوع  $m-1$  علت اسنادپذیر دیگر تا صدور هشدار صحیح است. بنا بر این، اگر از مدلی اقتصادی و یا آماری-اقتصادی در حضور علت‌های اسنادپذیر چندگانه در طراحی نمودارهای کنترل استفاده می‌شود باید بررسی کرد که آیا پذیره‌های مدلی که استفاده می‌شوند در عمل برقرار است یا خیر. بنا بر این، در ادامه پس از محاسبه‌ی احتمال وقوع پیشامد

$\{I=1\}$  در مدل چن و یانگ [۹]، با استفاده از آن به بررسی برقرار بودن پذیره دوم در مقادیر بهینه‌ی به‌دست آمده از مدل چن و یانگ [۹] و ارائه مدل آماری-اقتصادی واقع‌بینانه برای برطرف نمودن کاستی‌های مدل آن‌ها می‌پردازیم.

برای محاسبه احتمال وقوع پیشامد  $\{I=1\}$  اگر  $I_i$  پیشامد وقوع  $I_i$ -امین علت اسنادپذیر و عدم وقوع سایر علت‌های اسنادپذیر تا صدور هشدار صحیح باشد، آنگاه با استفاده از قانون احتمال کل اثبات می‌شود:

$$P(I=1) = \sum_{i=1}^m P(I_i) = \sum_{i=1}^m \frac{(1-\beta_i) (1-e^{-\lambda_i h_i^k}) e^{-\lambda_i h_i^k}}{(1-e^{-\lambda h_i^k}) (1-\beta_i e^{-\lambda_i h_i^k})}, \quad (3)$$

متغیرهای تصادفی  $X_1$  تا  $X_4$  به ترتیب نشان‌دهنده مدت زمان تحت کنترل بودن فرایند (با احتساب مدت زمان سپری شده برای یافتن هشدار اشتباه)، مدت زمان خارج از کنترل بودن فرایند تا صدور هشدار صحیح، مدت زمان سپری شده پس از هشدار صحیح تا کشف علت اسنادپذیر و مدت زمان سپری شده برای تعمیر و اصلاح فرایند پس از کشف علت اسنادپذیر در نظر بگیریم آن‌گاه،

$$E(T) = E(X_1) + E(X_2 + X_3 + X_4). \quad (9)$$

باتوجه به دانکن [۳] و چن و یانگ [۹] برای محاسبه  $E(T)$ ، آن را به دو بخش جدا از هم افراز نموده و فرض می‌شود که پیشامد  $\{I = 1\}$  رخ دهد (پذیره دوم). در سمت راست معادله (۹)، بخش اول نشان‌دهنده متوسط زمان تحت کنترل بودن فرایند با احتساب مدت زمان سپری شده برای بررسی هشدارهای اشتباه و بخش دوم متوسط زمان خارج از کنترل بودن فرایند است. بنا بر این در جهت ساده‌سازی محاسبه  $E(T)$  با توجه به تعریف متغیر تصادفی  $I$ ،

$$\begin{aligned} E(T) &= \sum_{i=1}^m E(T|I=i)P(I=i) \quad (10) \\ &= E(T|I=1)P(I=1) \\ &+ E(T|I \neq 1)P(I \neq 1) \\ &= E(X_1) + E(X_2 + X_3 + X_4|I=1)P(I=1) \\ &+ E(X_2 + X_3 + X_4|I \neq 1)P(I \neq 1). \end{aligned}$$

با توجه به اینکه محاسبه  $E(T|I=i)P(I=i)$  برای  $i = 2, \dots, m$  دارای پیچیدگی است، چنانچه شرایطی ایجاد شود که  $E(X_2 + X_3 + X_4|I \neq 1)P(I \neq 1) \approx 0$  شود آن‌گاه با توجه به اینکه متوسط زمان خارج از کنترل بودن فرایند مقداری متناهی است، برای برقراری رابطه فوق کافی است که  $P(I=1)$  تقریباً برابر ۱ شود که در این صورت،

$$E(T) \approx E(X_1) + E\left(\sum_{l=2}^4 X_l | I=1\right)$$

خواهد شد. به‌وضوح  $P(I=1) \approx 1$  به این معنی است که در هر چرخه‌ی کیفیت احتمال وقوع بیش از یک علت اسنادپذیر تقریباً برابر صفر است و این همان فرض دوم دانکن [۳] در به‌دست آوردن متوسط زمان خارج از کنترل بودن فرایند است. تفاوت رویکرد ارائه‌شده در این مقاله با پژوهش‌های پیشین این است که ما پذیره‌ی دوم را یک پیشامد از تمام حالت‌های ممکن در نحوه‌ی رخداد علت‌های اسنادپذیر چندگانه مستقل در نظر گرفته‌ایم ولی در مدل‌های پیشین،

رابطه، ضریب  $\lambda_i/\lambda$  برابر احتمال وقوع علت اسنادپذیر  $i$ -ام قبل از وقوع سایر علت‌های اسنادپذیر است. به‌عبارتی،

$$P(\min_{1 \leq j \leq m} (T_j) = T_i) = \frac{\lambda_i}{\lambda} \quad (6)$$

است که به‌وضوح پیشامد  $\min_{1 \leq j \leq m} (T_j) = T_i$  به معنی عدم وقوع سایر علت‌های اسنادپذیر پس از وقوع علت اسنادپذیر  $i$ -ام نیست. این اشتباه محاسباتی عملاً در همه‌ی پژوهش‌های پیشین برگرفته شده از مدل دانکن [۳] و چن و یانگ [۹] نیز رخ داده است.

برای تبیین اثر این اشتباه بر مقدار محاسبه شده  $E(T)$ ، رابطه (۴) تحت دو سناریو بررسی می‌شود. اگر برای  $i = 2, \dots, m$  فرض شود که  $\delta_i = \delta_1$  و  $\lambda_i = \lambda_1, Z_{2i} = Z_{21}$  رابطه (۴) بصورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} E(T) &= \left(\frac{1}{m\lambda_1}\right)^{\frac{1}{k}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) \\ &+ \alpha Z_0 \frac{e^{-m\lambda_1 h_1^k}}{1 - e^{-m\lambda_1 h_1^k}} + B_1 \quad (7) \end{aligned}$$

حال اگر در رابطه (۴) فرض کنیم که  $m = 1$  باشد آن‌گاه،

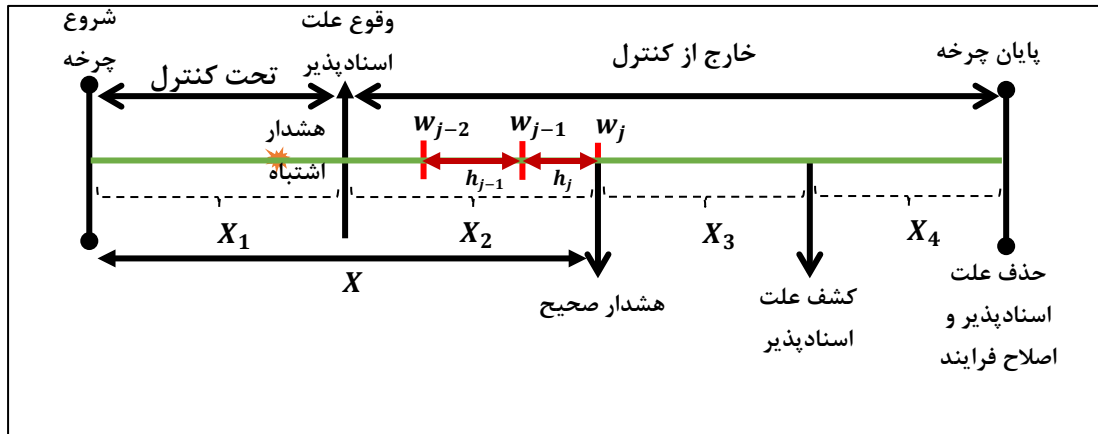
$$E(T) = \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{k}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) + \alpha Z_0 \frac{e^{-\lambda_1 h_1^k}}{1 - e^{-\lambda_1 h_1^k}} + B_1 \quad (8)$$

خواهد بود. با مقایسه روابط (۷) و (۸) مشاهده می‌شود که متوسط زمان خارج از کنترل بودن فرایند تا پایان چرخه کیفیت در دو سناریو با یکدیگر برابر می‌شوند. حال آن‌که به‌وضوح روابط (۷) و (۸) به‌ترتیب، متوسط زمان یک چرخه‌ی کیفیت در حضور  $m$  و یک علت اسنادپذیر هستند و از این‌رو باید متوسط زمان خارج از کنترل در دو سناریو همانند متوسط زمان تحت کنترل بودن فرایند برابر نباشند. این در حالی است که متوسط زمان خارج از کنترل بودن در این دو سناریو برابر شدند. بنا بر این، مشاهده می‌شود که عدم جاری شدن درست پذیره‌ی دوم که یک پیشامد است، باعث محاسبه نادرست  $E(T)$  شده است.

#### ۴- مدل آماری-اقتصادی واقع‌بینانه

با توجه به ایراد وارده بر مدل‌های اقتصادی و آماری-اقتصادی پیشین، در این بخش مدل آماری-اقتصادی جدیدی برپایه‌ی مدل اقتصادی چن و یانگ [۹] ارائه می‌شود. باتوجه به شکل ۱ مدت زمان هر چرخه‌ی کیفیت برابر مجموع مدت زمان تحت کنترل و مدت زمان خارج از کنترل بودن فرایند است. چنانچه

نشریه مهندسی و مدیریت کیفیت



شکل ۱: چرخه کنترل کیفیت در حالت تحت کنترل و خارج از کنترل

که در آن  $\Gamma(s,x) = \int_x^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$  است. اثبات در پیوست (ب) ارائه شده است.

اگر  $E(X_3+X_4|I=1)$  متوسط زمان کشف، اصلاح و تعمیر علت اسنادپذیر  $I=1$  ام به شرط وقوع فقط یک علت اسنادپذیر تا صدور هشدار صحیح باشد آن گاه چون با توجه به رابطه (۳)،  $P(I_i)$  برابر احتمال وقوع فقط علت اسنادپذیر  $i$  تا صدور هشدار صحیح است پس داریم:

$$E(X_3+X_4|I=1) = \sum_{i=1}^m \left[ (Z_1+Z_{2i}) \frac{P(I_i)}{P(I)} \right]. \quad (14)$$

بنا بر این، از روابط (۹) تا (۱۴) متوسط زمان یک چرخه‌ی کیفیت به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$E(T) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{k}} \Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right) + \alpha Z_0 \frac{e^{-\lambda h_1^k}}{1-e^{-\lambda h_1^k}} \quad (15)$$

$$+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{w_j (1-\beta_i) e^{-\lambda_i j h_i^k} (1-e^{-\lambda_i h_i^k})}{P(I=1) \times \frac{e^{-\lambda_i j h_i^k} - \beta_i^j}{e^{-\lambda_i h_i^k} - \beta_i}} \right\}$$

$$- \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{1-\beta_i}{P(I=1)} \times \frac{e^{-\lambda_i j h_i^k}}{1-\beta_i e^{-\lambda_i h_i^k}} \right\}$$

$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{k}, \lambda_i (j-1) h_i^k\right) - \Gamma\left(\frac{k+1}{k}, \lambda_i j h_i^k\right)}{\lambda_i^{1/k}}$$

$$+ \sum_{i=1}^m \left\{ (Z_{2i}+Z_1) \frac{P(I_i)}{P(I=1)} \right\}$$

فرض شده است که این پذیره به طور حتم رخ می‌دهد که با توجه به مطالب بیان شده در بخش ۳ چنین پذیره‌ای نادرست است.

#### ۱-۴- متوسط زمان یک چرخه‌ی کیفیت

با توجه به چن و یانگ [۹] متوسط زمان تحت کنترل  $E(X_1)$  در هر چرخه کیفیت عبارت است از:

$$E(X_1) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{k}} \Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right) + \alpha Z_0 \frac{e^{-\lambda h_1^k}}{1-e^{-\lambda h_1^k}}, \quad (11)$$

حال با فرض وقوع پیشامد  $\{I=1\}$  به محاسبه  $E(X_2+X_3+X_4|I=1)$  پرداخته می‌شود. به شرط وقوع پیشامد  $\{I=1\}$ ، متوسط زمان خارج از کنترل تا صدور هشدار درست عبارت است از:

$$E(X - X_1 | I = 1) \quad (13)$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ w_j \frac{(1-\beta_i)(1-e^{-\lambda_i h_i^k}) (e^{-\lambda_i h_i^k})^j - (\beta_i e^{-\lambda_i h_i^k})^j}{P(I=1) e^{-\lambda_i h_i^k} - \beta_i} \right\}$$

$$- \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{1-\beta_i}{P(I=1)} \times \frac{e^{-\lambda_i j h_i^k}}{1-\beta_i e^{-\lambda_i h_i^k}} \right\}$$

$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{k}, \lambda_i (j-1) h_i^k\right) - \Gamma\left(\frac{k+1}{k}, \lambda_i j h_i^k\right)}{\lambda_i^{1/k}}$$

## ۴-۲- متوسط هزینه‌ی یک چرخه‌ی کیفیت

$$\begin{cases} \text{minimize } E(A) \\ \text{subject to :} \\ \beta \leq \beta_u \\ \alpha \leq \alpha_u \\ P(I = 1) \geq p_0 \end{cases} \quad (20)$$

در رابطه (۲۰)، برابر کران پایین مورد قبول برای  $P(I = 1)$ ،  $\beta_u$  کران بالای مورد قبول برای متوسط زمان خارج از کنترل بودن فرایند تا صدور هشدار صحیح و  $\alpha_u$  برابر کران بالای مورد قبول برای متوسط تعداد هشدار اشتباه در یافتن مقدار بهینه‌ی پارامترهای طراحی است. قابل ذکر است که در حالتی که فرایند متأثر از چندین علت اسنادپذیر است،  $\beta = \sum_{i=1}^m \frac{P(I_i)}{P(I)} \beta_i$  است.

## ۵- نتایج عددی

در این بخش ابتدا به صورت عددی به بررسی رابطه بین فرض عدم وقوع سایر علت‌های اسنادپذیر پس از وقوع یک علت اسنادپذیر در چرخه کیفیت و پارامترهای  $(n, h_1, L)$  پرداخته و سپس با استفاده از نرم‌افزار R و استفاده از پکیج DEoptim، مقادیر بهینه پارامترهای طراحی در طراحی آماری-اقتصادی واقع‌بینانه محاسبه می‌شود. پارامترهای ورودی مدل را می‌توان به پارامترهای هزینه  $(Y, D_0, D_{1i}, D_{2i}, a, b)$ ، پارامترهای زمان  $(Z_0, Z_1, Z_{2i})$ ، پارامترهای انتقال  $(\delta_i)$  و پارامترهای توزیع وایبول  $(\lambda_i, k)$  طبقه‌بندی نمود. پارامترهای ورودی مدل براساس مقادیر چن و یانگ [۹] مقداردهی شده‌اند. بر اساس چن و یانگ [۹]، برای همه‌ی علت‌های اسنادپذیر، مقادیر  $b = \$20$ ،  $a = \$20$ ،  $D_0 = \$210$ ،  $Y = \$2000$ ،  $Z_1 = 1.25$  و  $Z_0 = 1.25h$  یکسان فرض می‌شود. پارامترهای  $\lambda_i$ ،  $Z_{2i}$ ،  $D_{1i}$  و  $D_{2i}$  نیز مطابق با جدول ۱ مقاله چن و یانگ در جدول ۱ بخش بعدی آمده است. برای بررسی جزئیات قواعد تعیین این پارامترها به بخش ۴ چن و یانگ [۹] مراجعه شود. فرض می‌شود در طراحی آماری-اقتصادی واقع‌بینانه،  $p_0$  مقادیر  $0.95$ ،  $0.90$ ،  $0.85$  و صفر را اختیار می‌کند.

متوسط هزینه چرخه کیفیت شامل ۱. متوسط هزینه در زمان تحت کنترل، ۲. متوسط هزینه جستجوی هشدارهای اشتباه، ۳. متوسط هزینه در زمان خارج از کنترل و ۴. متوسط هزینه نمونه‌گیری می‌شود. بنا بر این، باتوجه به مراحل محاسبه  $E(T)$  داریم:

(۱) متوسط هزینه‌ی در زمان تحت کنترل بدون احتساب هزینه‌ی نمونه‌گیری برابر است با:

$$E(C_1) = D_0 \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{k}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) + \alpha Y \frac{e^{-\lambda h_1^k}}{1 - e^{-\lambda h_1^k}} \quad (16)$$

(۲) متوسط هزینه‌ی خارج از کنترل بودن فرایند برابر است با:

$$\begin{aligned} E(C_2) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\infty} D_{1i} \left\{ \frac{w_j (1 - \beta_i) e^{-\lambda_i j h_1^k} (1 - e^{-\lambda_i h_1^k})}{P(I=1)} \right\} \\ &+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\infty} D_{2i} \left\{ \frac{\frac{1 - \beta_i}{P(I=1)} \times \frac{e^{-\lambda_i j h_1^k}}{1 - \beta_i e^{-\lambda_i h_1^k}} \times \Gamma\left(\frac{k+1}{k}, \lambda_i (j-1) h_1^k\right) - \Gamma\left(\frac{k+1}{k}, \lambda_i j h_1^k\right)}{\lambda_i^{1/k}} \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

(۳) و در آخر، متوسط هزینه‌ی نمونه‌گیری برابر است با:

$$E(C_3) = \sum_{i=1}^m (a + bn) \left[ \frac{P(I_i)}{P(I)} \left[ \frac{e^{-\lambda_i h_1^k}}{1 - e^{-\lambda_i h_1^k}} + \frac{1}{1 - \beta_i e^{-\lambda_i h_1^k}} \right] \right] \quad (18)$$

اثبات در پیوست (پ) داده شده است.

بنا بر این، با توجه به روابط (۱۶) تا (۱۸)، اصلاح شده‌ی متوسط هزینه‌ی چرخه‌ی کیفیت در مدل چن و یانگ [۹] عبارت‌است از:

$$E(C) = E(C_1) + E(C_2) + E(C_3) \quad (19)$$

با توجه به این که هدف ما یافتن مقادیر بهینه پارامترهای طراحی نمودار کنترلی  $\bar{X}$  برای کمینه نمودن  $E(A) = \frac{E(C)}{E(T)}$  در شرایطی است که پیشامد  $\{I = 1\}$  با احتمال نزدیک به یک رخ دهد، طراحی آماری-اقتصادی واقع‌بینانه که اصلاح شده مدل اقتصادی چن و یانگ [۹] است را می‌توان به صورت رابطه (۲۰) فرمول‌بندی نمود.

۱-۵- احتمال پیشامد  $\{I=1\}$  در مدل چن و یانگ

در این بخش به بررسی احتمال وقوع پیشامد  $\{I = 1\}$  در نتایج به‌دست آمده برای پارامترهای طراحی در مقاله چن و یانگ [۹] پرداخته می‌شود. با توجه به مقادیر پارامترهای طراحی در مدل اقتصادی جدول ۳ مقاله چن و یانگ [۹] که در جدول ۲ ارائه شده است با افزایش پارامتر  $k$  در مدل شوک وایبول تحت هر سه توزیع آغازین، احتمال پیشامد  $\{I = 1\}$  (پذیره دوم) به شدت کاهش پیدا می‌کند. به عبارتی، با این‌که چن و یانگ [۹] متوسط هزینه در واحد زمان چرخه‌ی کیفیت را با فرض وقوع پیشامد  $\{I = 1\}$  محاسبه نموده‌اند، ولی با افزایش پارامتر  $k$  به علت محاسبه نادرست  $E(T)$ ،  $E(C)$ ،  $E(A)$  و همچنین عدم در نظر گرفتن کران پایین برای  $P(I = 1)$ ، نتایج به‌دست آمده برای پارامترهای طراحی از مدل آن‌ها غیربهبوده است. از طرفی با توجه به این‌که در طراحی اقتصادی به ویژگی‌های آماری توجه نمی‌شود در ادامه به تعیین پارامترهای طراحی در طراحی آماری-اقتصادی ارائه‌شده در رابطه (۲۰) پرداخته می‌شود.

## ۲-۵- تعیین پارامترهای طراحی در مدل آماری-اقتصادی واقع‌بینانه

در اجرای طراحی آماری-اقتصادی واقع‌بینانه، با توجه به مقدار حداکثر احتمال ارتکاب خطای نوع اول و دوم مورد قبول به کمینه نمودن  $E(A)$  برای تعیین پارامترهای طراحی پرداخته می‌شود. برای این منظور  $\alpha_{iu}$  و  $\beta_{iu}$  به ترتیب برابر ۰.۰۵ و ۰.۱ در نظر گرفته می‌شود.

با توجه به نتایج آمده در جدول ۳، مشاهده می‌شود که با افزایش  $p_0$ ، متوسط هزینه در واحد زمان افزایش می‌یابد. زیرا افزایش  $p_0$ ، به این معنی است که اگر یکی از علت‌های اسنادپذیر رخ داد آن‌گاه باید پارامترهای طراحی طوری تعیین شوند که نمودار کنترلی سریع‌تر هشدار دهد. از این‌رو با توجه به جدول ۳ مشاهده می‌شود که با افزایش  $p_0$ ، فاصله نمونه‌گیری و ضریب حدود کنترلی در هر سه توزیع آغازین کاهش می‌یابد و همین امر باعث افزایش  $E(A)$  شده است.

جدول ۱: مجموعه مقادیر پارامترهای ورودی مدل (برگرفته از جدول ۱ چن و یانگ [۹])

$i$	$\delta_i$	$D_{1i}$	$D_{2i}$			$Z_{2i}$			$\lambda_i (\times 10^{-3})$		
			$NE_i$	$Un_i$	$HN_i$	$NE_i$	$Un_i$	$HN_i$	$NE_i$	$Un_i$	$HN_i$
۱	۱	۵۷۵	۱۶۴۷	۱۰۰۰	۱۴۵۴	۳.۲۹۳	۲	۲.۹۰۹	۴.۵۶۶	۲.۲۹۴	۴.۲۲۰
۲	۱.۵	۱۶۸۴	۱۲۸۳	۱۰۰۰	۱۲۴۴	۲.۵۶۵	۲	۲.۴۸۸	۳.۵۵۷	۲.۲۹۴	۳.۶۰۸
۳	۱.۸	۲۹۰۱	۱۱۰۳	۱۰۰۰	۱۰۹۹	۱.۱۰۳	۲	۲.۱۹۸	۳.۰۵۹	۲.۲۹۴	۳.۱۹۰
۴	۲	۴۰۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰	۲	۲	۲	۲.۷۷۲	۲.۲۹۴	۲.۹۰۱
۵	۲.۲	۵۳۴۱	۹۰۲	۱۰۰۰	۹۰۱	۱.۸۰۴	۲	۱.۸۰۲	۲.۵۰۲	۲.۲۹۴	۲.۶۱۲
۶	۲.۵	۷۷۷۶	۷۷۷	۱۰۰۰	۷۵۶	۱.۵۵۴	۲	۱.۵۱۲	۲.۱۵۵	۲.۲۹۴	۲.۱۹۴
۷	۳	۱۲۶۰۲	۶۰۹	۱۰۰۰	۵۳۷	۱.۲۱۷	۲	۱.۰۷۴	۱.۶۸۹	۲.۲۹۴	۱.۵۵۷

NE: نمایی منفی، Un: یکنواخت، HN: نیم-نرمال

## ۶- نتیجه گیری

اقتصادی آن‌ها غیر واقع‌بینانه است. در جهت برطرف نمودن نقاط ضعف بیان شده، مدل جدیدی برای طراحی آماری-اقتصادی انواع نمودارهای کنترلی ارائه شد. تحت مدل پیشنهادی به طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترل  $\bar{X}$  در حضور علت‌های اسنادپذیر چندگانه مستقل پرداخته شد. از موضوعات جالب برای پژوهش‌های آینده می‌توان به بررسی اثرات استفاده از مدل پیشنهادی ما در طراحی اقتصادی و آماری-اقتصادی انواع نمودارهای کنترلی، بخصوص نمودارهای کنترلی غیر شوهارتی و چندمتغیره که پیش از این تحت مدل‌های اقتصادی و آماری-اقتصادی پیشنهادی بررسی شده‌اند اشاره کرد.

با توجه به این‌که در بسیاری از مواقع مدل شوک فرایند غیرنمایی است در این مقاله نقاط ضعف و مشکلات طراحی‌های اقتصادی و آماری-اقتصادی پیشین در حضور علت‌های اسنادپذیر چندگانه ارائه و به بررسی مدل اقتصادی چن و یانگ [۹] که تحت مدل شوک وایبول است پرداخته شد. در همه‌ی مدل‌های اقتصادی و آماری-اقتصادی پیشین در حضور علت‌های اسنادپذیر چندگانه فرض بر این است ارائه شده در جدول ۳ چن و یانگ [۹] که پس از وقوع یک علت اسنادپذیر سایر علت‌های اسنادپذیر تا صدور هشدار درست رخ ندهند. نشان داده شد که این پذیره یک پیشامد است و به محاسبه و بررسی احتمال وقوع این پیشامد در نتایج به‌دست آمده در چن و یانگ [۹] پرداخته شد. نتایج به‌دست آمده نشان داد که مدل

جدول ۲: محاسبه $P(I = 1)$ برای بهینه‌ی پارامترهای طراحی						
$K$	توزیع آغازین	$n$	$h_1$	$L$	$P(I = 1)$	$E(A)$
۱	NE	۳	۱.۳۹	۲.۵۱	۰.۹۶۶	۳۵۳.۵۰۰
	HN	۳	۱.۳۹	۲.۵۱	۰.۹۶۷	۳۵۲.۱۱۴
	Un	۳	۱.۳۹	۲.۵۹	۰.۹۷۵	۳۴۶.۳۵۶
۱.۵	NE	۳	۲.۶۲	۲.۴۴	۰.۹۱۲	۳۹۹.۰۰۲
	HN	۳	۲.۶۱	۲.۴۵	۰.۹۱۴	۳۹۴.۴۶۶
	Un	۳	۲.۶	۲.۵۶	۰.۹۳۳	۳۹۸.۱۳۴
۱.۸	NE	۳	۲.۷۶	۲.۴۱	۰.۸۸۱	۴۰۸.۲۱۷
	HN	۳	۲.۷۵	۲.۴۲	۰.۸۸۳	۴۰۱.۸۱۱
	Un	۳	۲.۷۴	۲.۵۴	۰.۹۰۹	۴۰۹.۰۰۹
۲	NE	۳	۲.۷۵	۲.۴	۰.۸۶۱	۴۱۰.۵۹۸
	HN	۳	۲.۷۴	۲.۴	۰.۸۶۵	۴۰۳.۱۰۴
	Un	۳	۲.۷۳	۲.۵۳	۰.۸۹۳	۴۱۱.۸۸۵
۲.۵	NE	۳	۲.۶۲	۲.۳۶	۰.۸۱۶	۴۱۰.۲۸۳
	HN	۳	۲.۶۱	۲.۳۶	۰.۸۲	۴۰۰.۶۴
	Un	۳	۲.۵۹	۲.۵	۰.۸۵۷	۴۱۱.۱۱۱
۳	NE	۳	۲.۴۵	۲.۳۲	۰.۷۷۶	۴۰۶.۴۶۳
	HN	۳	۲.۴۴	۲.۳۲	۰.۷۸۲	۳۹۵.۳۱۷
	Un	۳	۲.۴۲	۲.۴۷	۰.۸۲۶	۴۰۵.۹۳
۴	NE	۳	۲.۱۶	۲.۲۵	۰.۷۱۱	۳۹۷.۴۳۷
	HN	۳	۲.۱۵	۲.۲۶	۰.۷۱۸	۳۸۴.۴۳۵
	Un	۳	۲.۱۳	۲.۴۱	۰.۷۷۵	۳۹۲.۹۲۵

جدول ۳: تعیین مقدار بهینه‌ی پارامترهای طراحی در مدل آماری- اقتصادی واقع بینانه تحت علت‌های اسنادپذیر مستقل

$k$	توزیع آغازین	$p_0$	$n$	$h_1$	$L$	$P(I = 1)$	$E(A)$	$\alpha$	$1 - \beta$
۱	NE	۰	۶	۲.۲۳۷	۲.۱۶۶	۰.۹۷۶	۳۷۴.۶۰۱	۰.۰۳۰	۰.۹۰۰
		۰.۸۵	۶	۲.۲۳۷	۲.۱۶۶	۰.۹۷۶	۳۷۴.۶۰۱	۰.۰۳۰	۰.۹۰۰
		۰.۹	۶	۲.۲۳۷	۲.۱۶۶	۰.۹۷۶	۳۷۴.۶۰۱	۰.۰۳۰	۰.۹۰۰
		۰.۹۵	۶	۲.۲۳۷	۲.۱۶۶	۰.۹۷۶	۳۷۴.۶۰۱	۰.۰۳۰	۰.۹۰۰
	UN	۰	۵	۲.۰۶۹	۲.۲۷۲	۰.۹۸۱	۳۵۹.۳۲۷	۰.۰۲۳	۰.۹۰۰
		۰.۸۵	۵	۲.۰۶۹	۲.۲۷۲	۰.۹۸۱	۳۵۹.۳۲۷	۰.۰۲۳	۰.۹۰۰
		۰.۹	۵	۲.۰۶۹	۲.۲۷۲	۰.۹۸۱	۳۵۹.۳۲۷	۰.۰۲۳	۰.۹۰۰
		۰.۹۵	۵	۲.۰۶۹	۲.۲۷۲	۰.۹۸۱	۳۵۹.۳۲۷	۰.۰۲۳	۰.۹۰۰
	HE	۰	۶	۲.۲۸۵	۲.۲۲۴	۰.۹۷۵	۳۶۶.۱۱۰	۰.۰۲۶	۰.۹۰۰
		۰.۸۵	۶	۲.۲۸۵	۲.۲۲۴	۰.۹۷۵	۳۶۶.۱۱۰	۰.۰۲۶	۰.۹۰۰
		۰.۹	۶	۲.۲۸۵	۲.۲۲۴	۰.۹۷۵	۳۶۶.۱۱۰	۰.۰۲۶	۰.۹۰۰
		۰.۹۵	۶	۲.۲۸۵	۲.۲۲۴	۰.۹۷۵	۳۶۶.۱۱۰	۰.۰۲۶	۰.۹۰۰
۱.۵	NE	۰	۶	۲.۸۲۷	۲.۱۷۷	۰.۹۴۹	۴۸۴.۶۷۴	۰.۰۲۹	۰.۹۰۰
		۰.۸۵	۶	۲.۸۲۷	۲.۱۷۷	۰.۹۴۹	۴۸۴.۶۷۴	۰.۰۲۹	۰.۹۰۰
		۰.۹	۶	۲.۸۲۷	۲.۱۷۷	۰.۹۴۹	۴۸۴.۶۷۴	۰.۰۲۹	۰.۹۰۰
		۰.۹۵	۶	۲.۷۸۸	۲.۱۷۷	۰.۹۵۰	۴۸۴.۷۲۱	۰.۰۲۹	۰.۹۰۰
	UN	۰	۵	۲.۷۳۳	۲.۲۹۰	۰.۹۵۹	۴۷۵.۳۲۴	۰.۰۲۲	۰.۹۰۰
		۰.۸۵	۵	۲.۷۳۳	۲.۲۹۰	۰.۹۵۹	۴۷۵.۳۲۴	۰.۰۲۲	۰.۹۰۰
		۰.۹	۵	۲.۷۳۱	۲.۲۹۰	۰.۹۵۹	۴۷۵.۳۲۴	۰.۰۲۲	۰.۹۰۰
		۰.۹۵	۵	۲.۷۳۳	۲.۲۹۰	۰.۹۵۹	۴۷۵.۳۲۴	۰.۰۲۲	۰.۹۰۰
	HE	۰	۶	۲.۸۷۲	۲.۲۳۸	۰.۹۴۷	۴۷۱.۸۳۵	۰.۰۲۵	۰.۹۰۰
		۰.۸۵	۶	۲.۸۷۲	۲.۲۳۸	۰.۹۴۷	۴۷۱.۸۳۵	۰.۰۲۵	۰.۹۰۰
		۰.۹	۶	۲.۸۷۲	۲.۲۳۸	۰.۹۴۷	۴۷۱.۸۳۵	۰.۰۲۵	۰.۹۰۰
		۰.۹۵	۶	۲.۷۶۸	۲.۲۳۷	۰.۹۵۰	۴۷۲.۱۵۸	۰.۰۲۵	۰.۹۰۰
۱.۸	NE	۰	۶	۲.۷۶۵	۲.۱۸۴	۰.۹۳۴	۵۱۲.۳۴۰	۰.۰۲۹	۰.۹۰۰
		۰.۸۵	۶	۲.۷۶۵	۲.۱۸۴	۰.۹۳۴	۵۱۲.۳۴۰	۰.۰۲۹	۰.۹۰۰
		۰.۹	۶	۲.۷۶۵	۲.۱۸۴	۰.۹۳۴	۵۱۲.۳۴۰	۰.۰۲۹	۰.۹۰۰
		۰.۹۵	۶	۲.۳۵۰	۲.۱۷۷	۰.۹۵۰	۵۲۲.۲۸۲	۰.۰۲۹	۰.۹۰۰
	UN	۰	۵	۲.۶۹۷	۲.۳۰۱	۰.۹۴۶	۵۰۸.۵۶۵	۰.۰۲۱	۰.۹۰۰
		۰.۸۵	۵	۲.۶۹۷	۲.۳۰۱	۰.۹۴۶	۵۰۸.۵۶۵	۰.۰۲۱	۰.۹۰۰
		۰.۹	۵	۲.۶۹۷	۲.۳۰۱	۰.۹۴۶	۵۰۸.۵۶۵	۰.۰۲۱	۰.۹۰۰
		۰.۹۵	۵	۲.۵۷۸	۲.۲۹۸	۰.۹۵۰	۵۰۹.۳۶۷	۰.۰۲۲	۰.۹۰۰
	HE	۰	۶	۲.۸۰۳	۲.۲۴۶	۰.۹۳۱	۴۹۸.۸۹۶	۰.۰۲۵	۰.۹۰۰
		۰.۸۵	۶	۲.۸۰۳	۲.۲۴۶	۰.۹۳۱	۴۹۸.۸۹۶	۰.۰۲۵	۰.۹۰۰
		۰.۹	۶	۲.۸۰۳	۲.۲۴۶	۰.۹۳۱	۴۹۸.۸۹۶	۰.۰۲۵	۰.۹۰۰
		۰.۹۵	۶	۲.۳۳۶	۲.۲۳۷	۰.۹۵۰	۵۱۰.۹۵۹	۰.۰۲۵	۰.۹۰۰

ادامه جدول ۳: تعیین مقدار بهینه‌ی پارامترهای طراحی در مدل آماری-اقتصادی واقع‌بینانه تحت علت‌های اسنادپذیر مستقل

$k$	توزیع آغازین	$p_0$	$n$	$h_1$	$L$	$P(I=1)$	$E(A)$	$\alpha$	$1-\beta$
۲	NE	۰	۶	۲.۶۸۵	۲.۱۸۹	۰.۹۲۴	۵۲۱.۰۱۴	۰.۰۲۹	۰.۹۰۰
		۰.۸۵	۶	۲.۶۸۵	۲.۱۸۹	۰.۹۲۴	۵۲۱.۰۱۴	۰.۰۲۹	۰.۹۰۰
		۰.۹	۶	۲.۶۸۵	۲.۱۸۹	۰.۹۲۴	۵۲۱.۰۱۴	۰.۰۲۹	۰.۹۰۰
		۰.۹۵	۶	۲.۱۵۸	۲.۱۷۷	۰.۹۵۰	۵۴۳.۲۶۹	۰.۰۲۹	۰.۹۰۰
	UN	۰	۵	۲.۶۲۸	۲.۳۰۸	۰.۹۳۸	۵۲۰.۳۹۴	۰.۰۲۱	۰.۹۰۰
		۰.۸۵	۵	۲.۶۲۸	۲.۳۰۸	۰.۹۳۸	۵۲۰.۳۹۴	۰.۰۲۱	۰.۹۰۰
		۰.۹	۵	۲.۶۲۸	۲.۳۰۸	۰.۹۳۸	۵۲۰.۳۹۴	۰.۰۲۱	۰.۹۰۰
		۰.۹۵	۵	۲.۳۴۵	۲.۲۹۸	۰.۹۵۰	۵۲۶.۶۸۰	۰.۰۲۲	۰.۹۰۰
	HE	۰	۶	۲.۷۱۹	۲.۲۵۲	۰.۹۲۱	۵۰۷.۵۵۱	۰.۰۲۴	۰.۹۰۰
		۰.۸۵	۶	۲.۷۱۹	۲.۲۵۲	۰.۹۲۱	۵۰۷.۵۵۱	۰.۰۲۴	۰.۹۰۰
		۰.۹	۶	۲.۷۱۹	۲.۲۵۲	۰.۹۲۱	۵۰۷.۵۵۱	۰.۰۲۴	۰.۹۰۰
		۰.۹۵	۶	۲.۱۴۶	۲.۲۳۷	۰.۹۵۰	۵۳۲.۷۷۸	۰.۰۲۵	۰.۹۰۰
۲.۵	NE	۰	۶	۲.۴۷۰	۲.۱۹۹	۰.۹۰۰	۵۲۴.۷۷۷	۰.۰۲۸	۰.۹۰۰
		۰.۸۵	۶	۲.۴۷۰	۲.۱۹۹	۰.۹۰۰	۵۲۴.۷۷۷	۰.۰۲۸	۰.۹۰۰
		۰.۹	۶	۲.۴۶۷	۲.۱۹۹	۰.۹۰۰	۵۲۴.۷۷۸	۰.۰۲۸	۰.۹۰۰
		۰.۹۵	۶	۱.۸۵۰	۲.۱۷۷	۰.۹۵۰	۵۸۳.۰۶۶	۰.۰۲۹	۰.۹۰۰
	UN	۰	۵	۲.۴۲۹	۲.۳۲۵	۰.۹۱۸	۵۲۹.۰۱۳	۰.۰۲۰	۰.۹۰۰
		۰.۸۵	۵	۲.۴۲۹	۲.۳۲۵	۰.۹۱۸	۵۲۹.۰۱۳	۰.۰۲۰	۰.۹۰۰
		۰.۹	۵	۲.۴۲۹	۲.۳۲۵	۰.۹۱۸	۵۲۹.۰۱۳	۰.۰۲۰	۰.۹۰۰
		۰.۹۵	۵	۱.۹۷۷	۲.۲۹۸	۰.۹۵۰	۵۶۰.۸۰۸	۰.۰۲۲	۰.۹۰۰
	HE	۰	۶	۲.۴۹۵	۲.۲۶۴	۰.۸۹۶	۵۱۱.۷۸۳	۰.۰۲۴	۰.۹۰۰
		۰.۸۵	۶	۲.۴۹۵	۲.۲۶۴	۰.۸۹۶	۵۱۱.۷۸۳	۰.۰۲۴	۰.۹۰۰
		۰.۹	۶	۲.۴۵۷	۲.۲۶۲	۰.۹۰۰	۵۱۱.۹۳۴	۰.۰۲۴	۰.۹۰۰
		۰.۹۵	۶	۱.۸۴۲	۲.۲۳۷	۰.۹۵۰	۵۷۴.۴۲۳	۰.۰۲۵	۰.۹۰۰
۳	NE	۰	۶	۲.۲۸۳	۲.۲۰۹	۰.۸۷۷	۵۱۷.۳۳۵	۰.۰۲۷	۰.۹۰۰
		۰.۸۵	۶	۲.۲۸۳	۲.۲۰۹	۰.۸۷۷	۵۱۷.۳۳۵	۰.۰۲۷	۰.۹۰۰
		۰.۹	۶	۲.۱۲۲	۲.۱۹۹	۰.۹۰۰	۵۲۱.۸۹۷	۰.۰۲۸	۰.۹۰۰
		۰.۹۵	۶	۱.۶۷۰	۲.۱۷۷	۰.۹۵۰	۶۰۹.۷۸۹	۰.۰۲۹	۰.۹۰۰
	UN	۰	۵	۲.۲۵۱	۲.۳۴۱	۰.۸۹۹	۵۲۳.۸۳۵	۰.۰۱۹	۰.۹۰۰
		۰.۸۵	۵	۲.۲۵۱	۲.۳۴۱	۰.۸۹۹	۵۲۳.۸۳۵	۰.۰۱۹	۰.۹۰۰
		۰.۹	۵	۲.۲۴۴	۲.۳۴۰	۰.۹۰۰	۵۲۳.۸۴۳	۰.۰۱۹	۰.۹۰۰
		۰.۹۵	۵	۱.۷۶۵	۲.۲۹۸	۰.۹۵۰	۵۸۴.۵۹۸	۰.۰۲۲	۰.۹۰۰
	HE	۰	۶	۲.۳۰۲	۲.۲۷۶	۰.۸۷۳	۵۰۵.۰۰۰	۰.۰۲۳	۰.۹۰۰
		۰.۸۵	۶	۲.۳۰۲	۲.۲۷۶	۰.۸۷۳	۵۰۵.۰۰۰	۰.۰۲۳	۰.۹۰۰
		۰.۹	۶	۲.۱۱۵	۲.۲۶۲	۰.۹۰۰	۵۱۱.۰۲۳	۰.۰۲۴	۰.۹۰۰
		۰.۹۵	۶	۱.۶۶۴	۲.۲۳۷	۰.۹۵۰	۶۰۲.۵۹۵	۰.۰۲۵	۰.۹۰۰
۳.۵	NE	۰	۶	۲.۱۳۳	۲.۲۱۹	۰.۸۵۵	۵۰۶.۶۴۴	۰.۰۲۷	۰.۹۰۰
		۰.۸۵	۶	۲.۱۳۳	۲.۲۱۹	۰.۸۵۵	۵۰۶.۶۴۴	۰.۰۲۷	۰.۹۰۰
		۰.۹	۶	۱.۹۰۶	۲.۱۹۹	۰.۹۰۰	۵۲۰.۱۷۵	۰.۰۲۸	۰.۹۰۰
		۰.۹۵	۶	۱.۵۵۲	۲.۱۷۷	۰.۹۵۰	۶۲۸.۳۷۳	۰.۰۲۹	۰.۹۰۰
	UN	۰	۵	۲.۱۰۵	۲.۳۵۶	۰.۸۸۲	۵۱۳.۹۸۵	۰.۰۱۸	۰.۹۰۰
		۰.۸۵	۵	۲.۱۰۵	۲.۳۵۶	۰.۸۸۲	۵۱۳.۹۸۵	۰.۰۱۸	۰.۹۰۰
		۰.۹	۵	۱.۹۹۹	۲.۳۴۰	۰.۹۰۰	۵۱۷.۱۶۶	۰.۰۱۹	۰.۹۰۰
		۰.۹۵	۵	۱.۶۲۷	۲.۲۹۸	۰.۹۵۰	۶۰۱.۵۱۶	۰.۰۲۲	۰.۹۰۰
	HE	۰	۶	۲.۱۴۹	۲.۲۸۸	۰.۸۵۰	۴۹۴.۹۳۴	۰.۰۲۲	۰.۹۰۰
		۰.۸۵	۶	۲.۱۴۹	۲.۲۸۸	۰.۸۵۰	۴۹۴.۹۳۴	۰.۰۲۲	۰.۹۰۰
		۰.۹	۶	۱.۹۰۰	۲.۲۶۲	۰.۹۰۰	۵۱۰.۶۵۵	۰.۰۲۴	۰.۹۰۰
		۰.۹۵	۶	۱.۵۴۷	۲.۲۳۷	۰.۹۵۰	۶۲۲.۲۷۸	۰.۰۲۵	۰.۹۰۰

## ۷- مراجع

- [11] Yu, F. J., Rahim, M. A., & Chin, H. (2007). Economic design of VSI control charts. *International Journal of Production Research*, 45(23), 5639-5648.
- [12] Pasha, M. A., Bameni Moghadam, M., Nematollahi, N., & Fani, S. (2018). A generalized model for multiplicity-cause economic and economic statistical design of  $\bar{X}$ -control charts with proportional hazards shock model. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 47(6), 1866-1878.
- [13] Saadatmelli, A., Moghadam, M. B., Seif, A., & Faraz, A. (2019). Economic design of  $\bar{X}$  control charts with multiple assignable causes under Burr XII shock model. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 48(3), 500-522.
- [14] Naderi, M. H., Seif, A., & Moghadam, M. B. (2019). Constrained optimal design of  $\bar{X}$  control chart for correlated data under Weibull Shock Model with multiple assignable causes. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 1-32.
- [1] Girshick, M. A., & Rubin, H. (1952). A Bayes approach to a quality control model. *The Annals of mathematical statistics*, 114-125.
- [2] Duncan, A. J. (1956). The economic design of  $\bar{X}$  charts used to maintain current control of a process. *Journal of the American Statistical Association*, 51(274), 228-242.
- [3] Duncan, A. J. (1971). The economic design of  $\bar{X}$ -Charts when there is a multiplicity of assignable causes. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 66, No. 4, 107-121.
- [4] Saniga, E. M. (1989). Economic statistical control-chart designs with an application to and R charts. *Technometrics*, 31(3), 313-320.
- [5] Montgomery, D. C. (1980). The economic design of control charts: a review and literature survey. *Journal of Quality Technology*, 12(2), 75-87.
- [6] Ho, C., & Case, K. E. (1994). Economic design of control charts: a literature review for 1981-1991. *Journal of Quality Technology*, 26(1), 39-53.
- [7] Woodall, W. H., & Montgomery, D. C. (1999). Research issues and ideas in statistical process control. *Journal of Quality Technology*, 31(4), 376-386.
- [8] Yu, F. J., Tsou, C. S., Huang, K. I. and Wu, Z. (2010). An economic-statistical design of  $\bar{x}$  control charts with multiple assignable causes. *Journal of Quality*, 17(4), 327-338.
- [9] Chen, Y. S., & Yang, Y. M. (2002). Economic design of  $\bar{X}$ -control charts with Weibull in-control times when there are multiple assignable causes. *International Journal of Production Economics*, 77(1), 17-23.
- [10] Banerjee, P. K., & Rahim, M. A. (1988). Economic design of  $\bar{X}$  control charts under weibull shock models. *Technometrics*, 30(4), 407-414.

به وضوح اگر  $T = \min(T_1, \dots, T_m)$  آنگاه  $X_1 = T$  است و داریم:

$$E(X_1|I=1) = \int_0^{\infty} tf(t|I=1)dt$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{w_{j-1}}^{w_j} tf(t|I=1)dx$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{1-\beta_i}{P(I=1)} \times \frac{e^{-\lambda_i h^k}}{1-\beta_i e^{-\lambda_i h^k}} \times \int_{w_{j-1}}^{w_j} t k \lambda_i t^{k-1} e^{-\lambda_i t^k} dt \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{1-\beta_i}{P(I=1)} \times \frac{e^{-\lambda_i h^k}}{1-\beta_i e^{-\lambda_i h^k}} \times \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{k}, \lambda_i (j-1) h^k\right) - \Gamma\left(\frac{k+1}{k}, \lambda_i j h^k\right)}{\lambda_i^{1/k}} \right\}$$

**پیوست پ: محاسبه  $E(C_3)$**

فرض کنید  $N$  برابر تعداد نمونه‌های اخذ شده از فرایند تا صدور هشدار صحیح است، بنا بر این داریم:

$$E(N|I=1) = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \frac{P(N=j, I=1)}{P(I=1)}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \frac{P(X=w_j, I=1)}{P(I=1)}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \frac{P(\cup_{i=1}^m \{T_i \leq w_j, T_{-i} > w_j, X=w_j\})}{P(I=1)}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^m j \cdot \frac{P(T_i \leq w_j, T_{-i} > w_j, X=w_j)}{P(I=1)}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^m j \left[ \frac{(1-\beta_i)(1-e^{-\lambda_i h^k})}{P(I=1)} \times \frac{(e^{-\lambda h^k})^j - (\beta_i e^{-\lambda_i h^k})^j}{e^{-\lambda_i h^k} - \beta_i} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^m \left[ \frac{(1-\beta_i)(1-e^{-\lambda_i h^k})}{P(I=1)} \times \frac{e^{-\lambda h^k}}{(1-e^{-\lambda h^k})^2} - \frac{\beta_i e^{-\lambda_i h^k}}{(1-\beta_i e^{-\lambda_i h^k})^2} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^m \left[ \frac{P(I_i)}{P(I)} \left[ \frac{e^{-\lambda h^k}}{1-e^{-\lambda h^k}} + \frac{1}{1-\beta_i e^{-\lambda_i h^k}} \right] \right],$$

و در نتیجه،

$$E(C_3) = (a + bn) \times E(N|I=1)$$

است.

**پیوست الف: محاسبه  $P(I=1)$**

با توجه به شکل ۱، متغیر تصادفی  $X$  نشان دهنده مدت زمان سپری شده از ابتدای چرخه کیفیت تا صدور هشدار صحیح است. در جهت خلاصه‌نویسی مراحل اثبات روابط زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i, \lambda_{-i} = \lambda - \lambda_i \tag{۲۱}$$

$$\{T_{-i} > X\} = \{T_1 > X, \dots, T_{i-1} > X, T_{i+1} > X, \dots, T_m > X\} \tag{۲۲}$$

به‌وضوح با توجه به رابطه (۲۲) پیشامد وقوع علت اسنادپذیر  $I=i$  ام قبل از صدور هشدار صحیح و عدم وقوع سایر علت‌های اسنادپذیر تا صدور هشدار صحیح (یعنی پیشامد  $\{I_i\}$ ) با پیشامد  $\{T_i \leq X, T_{-i} > X\}$  معادل است، بنا بر این، با استفاده از قانون احتمال کل داریم:

$$P(I_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^j P(w_{l-1} < T_i \leq w_l, T_{-i} > w_l, X=w_l)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^j \beta_i^{j-l} (1-\beta_i) (1-e^{-\lambda_i h^k}) \cdot e^{-\lambda_i (l-1) h^k} e^{-\lambda_{-i} j h^k}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} (1-\beta_i) (1-e^{-\lambda_i h^k}) \frac{(e^{-\lambda_i h^k})^j - (\beta_i e^{-\lambda_i h^k})^j}{e^{-\lambda_i h^k} - \beta_i}$$

$$= \frac{(1-\beta_i) (1-e^{-\lambda_i h^k}) e^{-\lambda_i h^k}}{(1-e^{-\lambda_i h^k})(1-\beta_i e^{-\lambda_i h^k})} \tag{۲۳}$$

بوضوح  $\{I=1\} = \cup_{i=1}^m I_i$  است و چون برای هر  $i \neq j$  داریم  $I_i \cap I_j = \emptyset$  بنا بر این،  $P(I=1) = \sum_{i=1}^m P(I_i)$  است.

**پیوست ب: محاسبه  $E(X - X_1|I=1)$**

با توجه به این که فرض بر این است که مدت زمان اخذ و تفسیر نمونه قابل اغماض است پس هشدار صحیح در یکی از زمان‌های نمونه‌گیری یعنی  $W_1, W_2$  و ... رخ خواهد داد. بنا بر این، داریم:

$$E(X|I=1) = \sum_{j=1}^{\infty} w_j P(X=w_j|I=1)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^m w_j \frac{P(T_i \leq w_j, T_{-i} > w_j, X=w_j)}{P(I=1)} \tag{۲۴}$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ w_j \times \frac{(1-\beta_i)(1-e^{-\lambda_i h^k})}{P(I=1)} \times \frac{(e^{-\lambda h^k})^j - (\beta_i e^{-\lambda_i h^k})^j}{e^{-\lambda_i h^k} - \beta_i} \right\}$$

# Realistic economic-statistical design of $\bar{X}$ control chart in the presence of independent assignable causes: A critique of Chen and Yang (2002) economic model

**Sayed Rahmat Shojaei**

(Corresponding Author): Ph.D. Student, Department of statistics, Allameh Tabataba'i University, Tehran, Iran  
[R\\_shojaei@atu.ac.ir](mailto:R_shojaei@atu.ac.ir)

**Mohammad Bameni Moghadam**

Full Professor and Head, Department of statistics, Allameh Tabataba'i University, Tehran, Iran  
[bamenimoghadam@atu.ac.ir](mailto:bamenimoghadam@atu.ac.ir)

**Farzad Eskandari**

Full Professor, Department of statistics, Allameh Tabataba'i University, Tehran, Iran

**Abstract:** One of the most widely used tools in the rapid detection of assignable causes is control charts. Given the importance of economic costs, Duncan proposed the first economic model in the presence of multiple assignable causes in order to reduce the economic costs of the quality cycle. In his model and all the economic designs derived from that, assumed that after the occurrence of an assignable cause, process is free from the occurrence of other assignable causes. In this paper, after criticizing previous models for incorrect and unrealistic use of this assumption to calculate the average cost per unit of quality cycle time, a realistic economic-statistical design in the presence of multiple assignable causes for economic-statistical design of  $\bar{X}$  control chart is presented. The numerical results of our model show well that in the previous models; the average cost per unit time of the quality cycle is severely underestimated compared to the actual value and with increasing the Weibull distribution shape parameter, the probability of this assumption is greatly reduced. Therefore, it is suggested that in order to eliminate the shortcomings of the economic design of various types of control charts with multiple assignable causes in future research, they should be redesigned based on our model.

**Keywords:** Economic-Statistical Design,  $\bar{X}$  Control Chart, Multiple Assignable causes, Weibull Shock Model.

## 1. Introduction

Control charts are one of the most useful tools for statistical process control (SPC) to improve quality and save on production costs. Control chart  $\bar{X}$  is one of the most widely used and important skill control charts for monitoring the average process. The control limits in the control diagram  $\bar{X}$  are  $\mu_0 \pm L \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  where  $\mu_0$  and  $\sigma$  are the mean and standard deviation of the process, respectively,  $n$  and  $L$  are the sample size obtained and the

coefficient of the control limits, respectively. Occurrence of an assignable cause the change of the mean of the process from  $\mu_0$  to  $\mu_0 + \delta\sigma$ , where  $\delta$  is the shift parameter. Therefore, to monitor the mean of the process, assuming that the standard deviation of the process ( $\sigma$ ) is constant over time, each time  $n$  samples of the process are taken at a given time interval ( $h$ ) and the observed value of the statistic  $\bar{X}$  on control chart is drawn, if a point is outside the control range we will see a true alarm that the process is out of statistical control. The statistical efficiency of any control chart, such as the control chart  $\bar{X}$  and the costs of monitoring the quality of the products produced by each process with it, depend on the specified value of the parameters ( $n, L, h$ ), which are known as the control chart design parameters.

The concept of economic design was first proposed by Grishick and Rubin [1]. Although the calculations used by them were very complex, their study became the basis for later work. Duncan [2] was one of the first to design an economic design for the  $\bar{X}$  control chart using the shock model. In Duncan's paper [2], it is assumed that only one assignable cause affects the process. There are conditions in the industry where the model will be affected by several assignable causes. Accordingly, Duncan [3] in his paper proposed an economic design for the  $\bar{X}$  control chart with taking into account multiple assignable causes. Considering that the economic design did not pay attention to the optimal statistical features of control charts, Saniga [4] proposed the economic-statistical design of the  $\bar{X} - R$  control chart and examined the advantages and disadvantages of each statistical, economic and economic-statistical design. For a comprehensive review of previous research based on Duncan's economic model [2], see Montgomery [5], Ho and Case [6], and Woodall and Montgomery [7].

In practice, many production processes are affected by multiple assignable causes, and processes that are affected by one assignable cause are rare. Therefore, many researchers are interested in presenting a cost model in this context. Duncan [3] developed his single assignable cause model into a model under the influence of multiple assignable causes. Yu et al. [8] presented an economic-statistical model for the  $\bar{X}$  control chart under the influence of multiple assignable causes for the Duncan model. Because calculating the expected amount of time ( $E(T)$ ) and cost ( $E(C)$ ) of each quality cycle in the presence of  $m$  is a theoretically and computationally complex reason, Duncan seeks to simplify the calculation of  $E(C)$  and  $E(T)$ . , Accepted the following two basic assumptions along with other assumptions:

1. The time of occurrence of the assignable causes are independent of each other (first assumption),
2. Once an assignable cause occurs, no other assignable cause occurs until it is identified (second assumption).

Clearly, if the assumptions (1) and (2) are not established in the face of a manufacturing or service process, then the optimal values obtained from Duncan's model [3] and other research based on it will be non-optimal in practice. According to Duncan [3] and his two main assumptions, Chen and Yang [9] provided a generalization of the Banerjee and Rahim [10] model in the presence of multiple assignable causes under the Weibull shock model. Contrary to Duncan's model [3], they assumed that the production process would stop after the control chart alert occurred. They express the second premise in such a way that after the occurrence of an assignable cause until the issuance of the true alarm, no other assignable cause occurs.

Based on Duncan's economic model, Yu et al. [11] developed the economic design of the  $\bar{X}$  adaptive control chart in the presence of multiple assignable causes, which is

more efficient than the  $\bar{X}$  control chart. Pasha et al. [12] generalized the Chen and Yang model [9] under the arbitrary shock model belonging to the proportional hazard rate family in the presence of  $m$  of assignable cause. Saadatmelli et al. [13] conducted a study on the economic and economic-statistical design of the  $\bar{X}$  control chart in the presence of multiple assignable causes under the Shock Burr XII model. In economic and economic-statistical design, various types of control charts in the presence of multiple assignable causes, some of which were mentioned, the first and second assumptions have always been used to simplify the calculations.

The important point about these two assumptions is that if the second assumption is inherent in a process (physically), then the occurrence of one of the assignable causes and the absence of other assignable causes will mean that the assignable causes are dependent. However, in the first assumption, it is stated that the assignable causes are independent of each other. Therefore, if it is assumed that in a process, independent assignable causes occur, then the second assumption is that an event of all possible states occurred. Other assignable causes after the occurrence will be an assignable cause in the quality cycle. Study it and the effect of design parameters on it.

Thus, in theory, the average time out of control and the average cost out of control calculated by Duncan [3] and all other models based on it such as Chen and Yang [9], Pasha et al. [12] and Naderi et al. [14] and Saadatmelli et al. [13] need to be reviewed. Because in their designs, the second assumption is used as the assumption that must happen. In other words, in their calculations, the probability of the second assumption occurring as an event must be considered. Therefore, in this paper, considering that the occurrence of the second assumption is not definite, we examine and express the weaknesses of previous economic and statistical-economic designs and calculate the probability of the occurrence of the second assumption in the results of Chen and Yang [9]. We also propose a model that is more practical and realistic in practice than previous models in order to modify economic models in the presence of multiple assignable causes.

The structure of this paper is as follows: In Section 2, the definitions and assumptions used are presented. In Section 3, the probability of the occurrence of a assignable cause and the absence of other assignable causes until the issuance of the alarm is calculated and a review of the results presented in Chen and Yang [9] is presented. In Section 4, a redesign of the Chen and Yang economic-statistical model [9] for the economic-statistical design of the  $X$  کنترل control chart is presented. In Section 5, in addition to determining the optimal value of the design parameters, a comparison is made between our proposed model and Chen and Yang [9], and finally, the conclusion is presented in Section 6.

## Reference

- [1] Girshick, M. A., & Rubin, H. (1952). A Bayes approach to a quality control model. *The Annals of mathematical statistics*, 114-125.
- [2] Duncan, A. J. (1956). The economic design of  $\bar{X}$  charts used to maintain current control of a process. *Journal of the American Statistical Association*, 51(274), 228-242.
- [3] Duncan, A. J. (1971). The economic design of  $\bar{X}$ -Charts when there is a multiplicity of assignable causes. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 66, No. 4, 107-121.
- [4] Saniga, E. M. (1989). Economic statistical control-chart designs with an application to and R charts. *Technometrics*, 31(3), 313-320.

- [5] Montgomery, D. C. (1980). The economic design of control charts: a review and literature survey. *Journal of Quality Technology*, 12(2), 75-87.
- [6] Ho, C., & Case, K. E. (1994). Economic design of control charts: a literature review for 1981–1991. *Journal of Quality Technology*, 26(1), 39-53.
- [7] Woodall, W. H., & Montgomery, D. C. (1999). Research issues and ideas in statistical process control. *Journal of Quality Technology*, 31(4), 376-386.
- [8] Yu, F. J., Tsou, C. S., Huang, K. I. and Wu, Z. (2010). An economic-statistical design of  $\bar{x}$  control charts with multiple assignable causes. *Journal of Quality*, 17(4), 327-338.
- [9] Chen, Y. S., & Yang, Y. M. (2002). Economic design of  $\bar{X}$ -control charts with Weibull in-control times when there are multiple assignable causes. *International Journal of Production Economics*, 77(1), 17-23.
- [10] Banerjee, P. K., & Rahim, M. A. (1988). Economic design of  $\bar{X}$  control charts under weibull shock models. *Technometrics*, 30(4), 407-414.
- [11] Yu, F. J., Rahim, M. A., & Chin, H. (2007). Economic design of VSI control charts. *International Journal of Production Research*, 45(23), 5639-5648.
- [12] Pasha, M. A., Bameni Moghadam, M., Nematollahi, N., & Fani, S. (2018). A generalized model for multiplicity-cause economic and economic statistical design of  $\bar{X}$ -control charts with proportional hazards shock model. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 47(6), 1866-1878.
- [13] Saadatmelli, A., Moghadam, M. B., Seif, A., & Faraz, A. (2019). Economic design of  $\bar{X}$  control charts with multiple assignable causes under Burr XII shock model. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 48(3), 500-522.
- [14] Naderi, M. H., Seif, A., & Moghadam, M. B. (2019). Constrained optimal design of  $\bar{X}$  control chart for correlated data under Weibull Shock Model with multiple assignable causes. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 1-32.