

# نمودارهای کنترلی ناپارامتری بر اساس گردش‌ها و آماره‌های مجموع رتبه‌های ویلکاکسون گونه

الهام چنگائی\*

(نویسنده مسؤل)، کارشناس ارشد آمار، دانشگاه البرز، قزوین، ایران. saghi1862@yahoo.com

محمد بامنی‌مقدم

استاد، گروه آمار، دانشکده‌ی علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه علامه طباطبایی، تهران، ایران. bamenimoghadam@atu.ac.ir

**چکیده:** در این مقاله، سه نوع جدید از نمودارهای کنترلی آزاد-توزیع شوهارتی که از گردش‌ها و آماره‌های مجموع-رتبه‌های ویلکاکسون گونه برای پی بردن به تغییرهای ممکن یک فرایند کنترل شده استفاده می‌کنند. معرفی می‌شوند. روابط دقیقی برای نرخ هشدار غلط (FAR)، توزیع طول اجرا و متوسط طول اجرا (ARL) بیان شده است. یک امتیاز مهم این نمودارها این است که به دلیل ناپارامتری بودن، نرخ هشدار غلط (FAR) و تحت کنترل بودن توزیع طول اجرا، شبیه فرایند توزیع‌های پیوسته هستند. جدول‌هایی برای نمودارهای کنترلی که به نرخ هشدار غلط (FAR) وابسته هستند، تهیه شده است. بنابر این، یک مطالعه‌ی عددی نشان می‌دهد که نمودارهای کنترلی جدید قابل تغییر و کارآمد هستند و برای آشکار ساختن تغییرهای خارج از کنترل نوع لهنم وضع شده‌اند.

**واژگان کلیدی:** کنترل آماری فرایند (SPC)، نمودارهای کنترلی، نمودارهای کنترلی پارامتری، نمودارهای کنترلی آزاد-توزیع، متوسط طول اجرا (ARL)، آماره‌های پیش‌رو.

## ۱. مقدمه

اغلب این سامانه‌ها تأثیرپذیر از عوامل تصادفی (اغتشاش) هستند و تغییرپذیری، جزء ماهیت عملکردی آن‌ها به شمار می‌آید که برای کنترل آن (تغییرپذیری)، روش‌های آماری تحت عنوان کنترل کیفیت آماری مطرح می‌شوند. برای کنترل تغییرپذیری یک فرایند و دستیابی به یک فرایند پایدار، مدل‌ها و نظریه‌های فراوانی ارائه شده و برای هر کدام از این مدل‌ها ابزارهای کنترلی مختلفی ابداع شده که به وسیله‌ی آن‌ها می‌توان کیفیت فرایند را پایش و یا بهبود بخشید. یکی از روش‌های کنترل فرایند در حین تولید برای جلوگیری از تولید تعداد زیادی محصول معیوب، استفاده از نمودارهای کنترلی<sup>۱</sup> است که نوعی نظارت و کنترل علمی را بر تغییرپذیری فرایند اعمال می‌کنند. چنانچه تغییرپذیری متغیر یا متغیرهای خروجی از حدود مورد انتظاری که در مرحله‌ی طراحی نمودار تعیین شده تجاوز نماید و روند یا چرخه‌ی غیرطبیعی از خود نشان دهد، نمودارهای کنترلی،

کیفیت در جهان رقابتی امروز، به‌عنوان مهم‌ترین عامل پیشبرد اهداف سازمان‌ها مطرح است. امروزه کیفیت به عنوان راهبرد تجاری شناخته می‌شود و عنوان غول صنعتی نه به کشوری با تولید انبوه، بلکه به کشوری با شاخص‌های رشد صنعتی (امکان ارائه محصول با کیفیت بالاتر، عرضه‌ی محصول به بازارهای بین‌المللی و توان ارائه‌ی محصول با قیمت پایین‌تر) اطلاق می‌شود [۱]. دستیابی به شاخص‌های رشد صنعتی، وابسته به استفاده از دانش نوین بشری و رشد فناوری بوده و کشورهای آگاه از وضعیت رقابت، بهینه‌سازی مستمر سامانه‌های (فرایندها و محصول‌ها) خود را به عنوان یک اصل اساسی پذیرفته‌اند و تمرکز بیش‌تر خود را بر بهینه‌سازی سامانه‌ها معطوف داشته‌اند [۲].

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۰/۱۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۲/۱۱

دوره ۱۲/ شماره ۳

صفحات ۳۰۱-۳۲۶

\*Corresponding author: saghi1862@yahoo.com

<sup>1</sup> Control charts

نمودارهای کنترلی شوهارت به دلیل دارا بودن ویژگی‌هایی نظیر سهولت در تهیه و تفسیر توانایی در شناسایی تغییرهای پایدار در پارامترهای فرایند، نقاط دور افتاده، خطاهای اندازه‌گیری و خطاهای ثبت یا ارسال داده‌ها از اثر بخشی بسیار بالایی برخوردار هستند [۴].

در اغلب نمودارهای کنترلی توزیع معمولاً نرمال فرض می‌شود و تقریباً تمام تحلیل‌های عملکردی موجود در ادبیات نیز فرض می‌کنند مشاهده‌ها از یک توزیع نرمال تهیه شده است. با این وجود، اغلب داده‌های فرایند فاقد توزیع نرمال است و بنابر این استواری و مقاومت نمودارهای کنترلی نسبت به این فرض همیشه یک موضوع اصلی فرایند آماری بوده است. یافته‌های پژوهش‌گران نشان می‌دهد که برخی از نمودارهای کنترلی، شدیداً تحت تأثیر مشاهده‌های غیر نرمال قرار می‌گیرند [۴].

از آن‌جا که مشاهده‌های غیرنرمال می‌تواند عملکرد نمودارهای کنترلی را تحت تأثیر قرار دهد. لذا برخی از مؤلفان به توسعه‌ی نمودارهای کنترلی ناپارامتری پرداخته‌اند. در اغلب روش‌های کنترل فرایند آماری ناپارامتری ( $NSPC$ )<sup>۴</sup> از رتبه استفاده می‌شود و روش‌های جای‌گزین برای اغلب نمودارهای کنترلی نظیر نمودارهای شوهارت، جمع تجمعی و EWMA<sup>۵</sup> تهیه شده است [۴]. که یکی از این روش‌ها، روش‌های نمودارهای کنترلی شوهارتی ناپارامتری (آزاد-توزیع) است. نمودارهای کنترلی آزاد-توزیع، کم‌تر معروف بوده و به ندرت در کتاب‌های تخصصی به آن‌ها ارجاع داده می‌شود. با این وجود، نمودارهای کنترلی بدون توزیع امتیازات زیادی دارند و در بعضی موارد حتی کارا تر از دیگر نمودارها هستند [۵].

این نمودارها دارای ویژگی‌های کنترلی پایدار هستند، در برابر نقاط پرت مقاوم می‌باشند و در مقایسه با نمودارهای پارامتری می‌توانند بسیار کارآمد باشند. چاکرابورتی و همکاران در سال ۲۰۱۹ به بررسی نمودارهای کنترلی ناپارامتری تک متغیره و چند متغیره پرداخته‌اند [۶]. پذیرش گسترده نمودارهای کنترلی بدون توزیع در بین پزشکان می‌تواند به عنوان انگیزه‌ای برای تحقیقات و توسعه آینده در این زمینه باشد [۷].

در این پژوهش سه نوع جدید از نمودارهای کنترلی ناپارامتری شوهارتی ( $R$ ،  $N$  و  $W$ ) که از گردش‌ها و آماره‌های مجموع رتبه‌های ویلکاکسون‌گونه<sup>۶</sup> برای پی بردن به تغییرهای ممکن یک فرایند استفاده می‌کنند، معرفی می‌شوند. سپس با مقایسه کردن

هشدارهای لازم را دال بر عدم پایداری فرایند به مخاطب ارائه می‌دهند. به عبارت دیگر، روش نمودارهای کنترل آماری فرایند ( $SPC$ )<sup>۲</sup> به منظور ارائه‌ی اطلاعاتی برای تشخیص این‌که چه وقت پراکندگی توزیع مشخصه (ها)ی کیفیت بیش از آن چیزی است که به تصادف نسبت داده می‌شود و در نتیجه نشان دادن این‌که آیا فرایند مورد نظر دارای وضعیت پایداری در رابطه با مشخصه (ها)ی کیفیت مورد بررسی هست یا نه مورد استفاده قرار می‌گیرند. در واقع، کنترل آماری فرایند ( $SPC$ )، روش موثری برای پایش محصول و صرفه جویی در هزینه‌ی تولید در فرایند است [۲].

اساس نمودارهای کنترلی کیفیت آماری در سال ۱۹۲۴ توسط شوهارت<sup>۳</sup> برای کنترل تغییرهای مهم در فرایند تولید بنیان‌گذاری شد و در سال ۱۹۲۵ به صورت مقاله‌ای انتشار یافت. این نمودار به عنوان ظهور کنترل آماری فرایند در نظر گرفته شده است. این روش یکی از اولین روش‌های تضمین کیفیت در فعالیت‌های حین ساخت بود که در صنعت مدرن معرفی شد. نمودارها و حدود کنترلی طوری طراحی می‌شوند که اگر عملکرد جاری از عملکرد طبیعی خیلی متفاوت نباشد، مقدار آماره‌ی حساب شده از داده‌های جاری، درون حدود کنترلی قرار گیرد. اگر عملکرد جاری تفاوت قابل توجهی با عملکرد طبیعی داشته باشد، آن‌گاه یافته‌ی آماره، خارج از حدود کنترلی قرار می‌گیرد که این وضعیت، به عنوان یک وضعیت خارج از کنترل تلقی می‌شود. در نظریه‌ی کنترل آماری فرایند، وضعیت خارج از کنترل، معمولاً توسط علل قابل تشخیص، یا انحراف با دلیل، مانند تغییر ناگهانی در مواد ورودی، خرابی یا بد عمل کردن دستگاه، تغییر کاربران و غیره ایجاد می‌شود. در این حالت معمولاً، تولید متوقف شده و تحقیق و بررسی برای پیدا کردن و بر طرف کردن علل قابل تشخیص شروع می‌شود [۳]. با توجه به اهمیت ضرورت استفاده از نمودارهای کنترلی، برای موارد یک‌متغیره، یعنی زمانی که تنها یک متغیر خروجی برای کنترل و پایش وجود دارد، نمودارهای کنترلی زیادی در دسترس است. برای متغیرهای کیفی (وصفی)، نمودارهای کنترلی متداول عبارت‌اند از: نمودار نسبت یا تعداد اقلام معیوب (نمودارهای  $P$  و  $np$ )، و نمودار تعداد یا میانگین نقص‌ها (نمودار  $C$  و  $U$ ). برای متغیرهای کمی (متغیر)، از متداول‌ترین آن‌ها می‌توان به نمودارهای  $\bar{X}$ ،  $R$  و  $S$  اشاره کرد. که این نمودارها به نمودارهای کنترلی شوهارتی معروف هستند.

5. Exponentially Weighted Moving Average (EWMA)

6. Wilcoxon-type

2. Statistical Process Control (SPC)

3. Shewhart

4. Nonparametric Statistical Process Control (NSPC)

این سه نمودار کنترلی به این نتیجه می‌رسیم که کارایی نمودار کنترلی متناظر با آماره‌ی  $W$  در مقایسه با دو نمودار کنترلی دیگر ( $N$  و  $R$ ) بیش‌تر است و در نهایت برتری نمودار کنترلی  $W$  را در پایش فرایند نشان داده می‌شود.

## ۲. روش پژوهش

در این پژوهش، سه نوع از نمودارهای کنترلی آزاد-توزیع جدید معرفی می‌شوند. از نمودارهای مذکور، برای ایجاد حدود کنترلی مناسب، متناظر با آماره‌های ترتیبی یک نمونه‌ی مرجع استفاده می‌شوند و سپس برای تحت کنترل بودن یا نبودن فرایند، تعداد گردش یا آماره‌های پایه‌ای-رتبه‌ای مشاهده‌های نمونه‌ی آزمون بین حدود کنترلی قرار می‌گیرند. برای ماکسیمم طول اجرای مشاهده‌های نمونه‌ی آزمون در نمونه‌ی توأم، از اولین نمودار کنترلی ( $R$ ) استفاده می‌شود. در حالی که دومین نمودار کنترلی ( $N$ )، تعداد گردش‌های مشاهده‌های نمونه‌ی آزمون که طولشان از یک مقدار معین از پیش تعیین شده‌ی  $k$  تخطی می‌کند، را به حساب می‌آورد. سرانجام نمودار کنترلی سوم ( $W$ )، مجموع رتبه‌های مشاهده‌های نمونه‌ی آزمون که بین حدود کنترلی قرار می‌گیرند را محاسبه می‌کند.

به‌طور معمول، حدود کنترلی نمودار کنترلی آزاد-توزیع، از یک نمونه‌ی مرجع فرایندی که تحت کنترل است، به دست می‌آیند. سپس اگر  $X_1, X_2, \dots, X_m$  را یک نمونه‌ی تصادفی با اندازه‌ی  $m$  از توزیع تجمعی تحت کنترل  $F_X(x) = F(x)$  تعریف کنیم و فرض کنیم که دو آماره‌ی ترتیبی معین  $X_{a:m}$  و  $X_{b:m}$  در حدود کنترلی مورد استفاده قرار می‌گیرند. آن‌گاه داریم:

$$LCL = X_{a:m} \text{ و } UCL = X_{b:m} \quad (1) \quad (1 \leq a < b \leq m)$$

که در آن  $a$  و  $b$  پارامترهای طرح روی نمودار هستند. یکی از الزامات یک نرخ هشدار غلط ( $FAR$ ) معین، زمانی است که مقدار متوسط طول اجرای تحت کنترل  $(ARL_{in})$ ،  $370$  تا  $500$  باشد. و این علامت خوبی است که متوسط طول اجرای تحت کنترل  $(ARL_{in})$  برای یک نمودار کنترلی آزاد-توزیع، مشابه فرایند توزیع‌های پیوسته است.

حال فرض کنید نمونه‌های انتخابی آزمون، مستقل از هم و هم‌چنین مستقل از نمونه‌های مرجع باشند و ما علاقه‌مند به دانستن این‌که آیا فرایند هنوز تحت کنترل هست یا نه، می‌باشیم. در اصطلاح آماری، اگر  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  را نمونه‌ی آزمون و

آماره‌های آزمون به کار برده شده در این مقاله به صورت زیر تعریف شده‌اند:

(a) گردش‌های روی مشاهده‌های  $Y$  که درون حدود کنترل  $LCL$  و  $UCL$  قرار می‌گیرند،

(b) رتبه‌های روی مشاهده‌های  $Y$  که درون حدود کنترل  $LCL$  و  $UCL$  قرار می‌گیرند.

تحت فرض صفر اگر هر دو نمونه‌ی آزمون دارای توزیع مشابهی باشند یعنی،  $H_0: F = G$ . آن‌گاه نمونه‌ی آزمون مشاهده‌های  $Y_j$  که به طور متوالی در میان مشاهده‌های  $X$  قرار می‌گیرند، نباید مقدار ماکسیمم آن‌ها از نسبت  $\frac{n}{m}$  بیش‌تر باشد. با این ذهنیت، آماره‌های زیر را برای تشخیص تحت کنترل بودن فرایند، می‌توان به کار برد:

- ماکسیمم طول گردش‌های مشاهده‌های  $Y$  که بین حدود کنترلی قرار می‌گیرند،
- تعداد گردش‌های مشاهده‌های  $Y$  (بین حدود کنترلی) که از یک مقدار معین از پیش تعیین شده‌ی  $k$  تخطی می‌کنند.
- سومین انتخاب: مجموع رتبه‌های (مشاهده‌های توأم نمونه‌های  $X$  و  $Y$ ) روی مشاهده‌های  $Y$  که بین حدود کنترلی قرار می‌گیرند (متناظر با آماره‌ی مجموع رتبه‌های ویلکاکسون‌گونه).

همه‌ی آماره‌های مذکور، آماره‌های پیش‌رو نامیده می‌شوند. اگر نمونه‌ی آزمون مشاهده‌های  $Y_j$  آماره‌های ترتیبی نمونه‌ی  $X$  ( $X(0) = -\infty$ )، بین  $i$  امین و  $(i-1)$  امین آماره‌های ترتیبی قرار گیرند و  $M_i, i = 1, 2, \dots, m$  را طول گردش‌های  $Y$  بین مشاهده‌های  $X$  متوالی تعریف کنیم، آن‌گاه با توجه به سه آماره‌ی ذکر شده می‌توان نوشت:

$$R = \max(M_{a+1}, M_{a+2}, \dots, M_b),$$

$$N_k = |\{M_i: a+1 \leq i \leq b, M_i \geq k\}|, \quad W = \sum_{i=a+1}^b W_i \quad (2)$$

که در آن،  $k$  یک مقدار صحیح پارامتر طرح و  $W_i$  مجموع رتبه‌های مشاهده‌های  $Y$  که بین  $X(i)$  و  $X(i-1)$  قرار می‌گیرد، که عبارت است از:

$$W_i = \sum_{j=1}^{M_i} \left( (i-1) + \sum_{r=1}^{i-1} M_r + j \right) = M_i \left( (i-1) + \sum_{r=1}^{i-1} M_r \right) + \frac{M_i(M_i+1)}{2} \quad (۳)$$

جدول ۱. پارامترهای طرح سه نمودار با  $FAR \leq 0.10$ .

نمودار R					نمودار N					نمودار W					
a	b	r <sub>0</sub>	r	FAR	a	b	r <sub>0</sub>	r <sub>1</sub>	k	FAR	a	b	r <sub>0</sub>	w	FAR
1	4	1	2	۰/۰۹۸۹	۳	۶	۲	۰	۲	۰/۰۹۷۹	۱	۴	۴	۱۰	۰/۰۹۱۹

جدول ۲. منابع و نمونه‌های آزمون

۰/۵۸۷۲۴۲۰	۰/۳۲۹۸۵۷۰	۰/۱۹۲۵۰۲۰	۰/۰۹۱۵۶۲۷	۰/۰۵۴۷۴۹۴	نمونه مرجع
۰/۹۶۸۳۷۹۰	۰/۸۷۹۶۷۹۰	۰/۷۳۱۹۴۹۰	۰/۷۲۵۰۱۹۰	۰/۶۴۶۴۵۴۰	
۰/۶۷۸۷۰۶۰	۰/۶۰۳۸۴۸۰	۰/۳۴۹۴۹۷۰	۰/۱۴۹۲۳۰۰	۰/۱۴۹۲۳۰۰	نمونه آزمون تحت کنترل
۰/۱۹۳۱۰۳۲	۰/۱۶۹۸۸۸۷۰	۰/۰۴۷۵۵۴۶	۰/۰۰۴۱۳۹۱	۰/۰۰۴۱۳۹۱	نمونه آزمون خارج از کنترل

با انجام دادن بعضی عملیات جبری عبارت زیر حاصل می‌شود:

با انجام دادن بعضی عملیات جبری عبارت زیر حاصل می‌شود:

با انجام دادن بعضی عملیات جبری عبارت زیر حاصل می‌شود:

با انجام دادن بعضی عملیات جبری عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$n(b-1) + \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+2b-1)}{2} \quad (۸)$$

به طور واضح، مینیمم مقدار ممکن W صفر است (زمانی که هیچ مشاهده‌ای از Y بین LCL و UCL قرار نمی‌گیرد)، و در نتیجه به پیروی از آن تکیه‌گاه توزیع مرتبط با توزیع W عبارت است از:

$$R_W = \left\{ 0, 1, \dots, \frac{n(n+2b-1)}{2} \right\} \quad (۹)$$

بل از خاتمه دادن این بخش، یک مثال برای نشان دادن اصول اساسی این نمودارهای کنترلی ناپارامتری ارائه می‌دهیم. فرض کنید می‌خواهیم نمودارهای کنترلی آزاد-توزیع بر پایه نمونه‌ی مرجع با اندازه‌ی  $m = 10$  و نمونه‌های آزمون با اندازه‌ی  $n = 4$  را تولید کنیم. در جدول ۱، نشان دادیم با انتخاب مقادیری برای پارامترهای طرح سه نمودار کنترلی ذکر شده، نرخ هشدار غلط  $0.10$  تضمین می‌شود ( $FAR \leq 0.10$ ).

به منظور نشان دادن چگونگی اجرای نمودارهای کنترلی، فرض می‌کنیم که مشاهده‌های تحت کنترل دارای توزیع یکنواخت  $(0, 1)$  باشند (به عبارت دیگر،  $F(x) = x, 0 < x < 1$ ). دو

با انجام دادن بعضی عملیات جبری عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$W = \frac{1}{2} (\sum_{i=a+1}^b M_i)^2 + \sum_{i=a+1}^b i M_i + (M_0 + a - \frac{3}{2}) \sum_{i=a+1}^b M_i \quad (4)$$

که در آن  $M_0 = \sum_{i=1}^a M_i$  تعداد نمونه مشاهده‌های Y قبل از LCL است.

هرگاه آماره‌ی R در دو شرط زیر صدق کند، آن‌گاه فرایند اعلام شده تحت کنترل خواهد بود.

$$R \leq r \quad \text{و} \quad M_0 \leq r_0 \quad (۵)$$

که در آن r و  $r_0$  پارامترهای طرح روی نمودار کنترلی هستند. به همین ترتیب در مورد آماره‌ی آزمون  $N_k$ : هرگاه آماره‌ی  $N_k$  در دو شرط زیر صدق کند، آن‌گاه فرایند اعلام شده تحت کنترل خواهد بود.

$$N_k \leq r_1 \quad \text{و} \quad M_0 \leq r_0 \quad (۶)$$

سرانجام، برای آماره‌ی مجموع رتبه‌های ویلکاکسون‌گونه داریم: هرگاه آماره‌ی W در دو شرط زیر صدق کند، آن‌گاه فرایند اعلام شده تحت کنترل خواهد بود.

$$W \leq w \quad \text{و} \quad M_0 \leq r_0 \quad (۷)$$

که در آن w و  $r_0$  پارامترهای طرح روی این نمودار هستند. در رابطه با این نمودار (W)، این مقدار ذکر شده که ماکسیمم مقدار ممکن W می‌باشد، زمانی است که همه‌ی مشاهده‌های Y در فاصله‌ی  $(X_{b-1:m}, X_{b:m})$  قرار می‌گیرند، با استفاده از رابطه

Y Y X X Y Y X X X X X X X X

نتایجی که در آماره‌های پیش‌رو  $M_i$ ها به دست می‌آیند عبارت‌اند از:

$$M_1 = 2, M_2 = 0, M_3 = 2, M_4 = 0, M_5 = 0, M_6 = 0, M_7 = 0, M_8 = 0, M_9 = 0, M_{10} = 0$$

مقادیر به دست آمده سه آماره در این مورد عبارت‌اند از:

$$R = 2, \quad N_2 = 1, \quad W = 11,$$

و از این نتایج به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که هیچ‌کدام از این نمودارها تحت کنترل نمی‌باشند. (زیرا در نمودار  $R: M_0 = 2 > R$ ،  $1 = r_0$  در نمودار  $N: N_2 = 1 > 0 = r_1$  و در نمودار  $W: W = 11 > 10 = w$ ). بنابر این، سه نمودار کنترلی به طور موفقیت‌آمیز قادر خواهند بود انحراف فرایند را نشان دهند.

در دو بخش بعدی، توزیع‌های آماری تحت کنترل و خارج از کنترل در سه نمودار کنترلی ناپارامتری پیش‌نهاد شده را به دست می‌آوریم.

### ۴. توزیع‌های آماره‌های تحت کنترل

فرض کنید  $m$  نمونه  $X_1, X_2, \dots, X_m$  از توزیع تحت کنترل  $F_X(x) = F(x)$  و  $n$  نمونه‌ی جدید  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  از توزیع  $F_Y(x) = G(x)$  باشند.

از بحث پیشین، واضح است که توزیع دقیق آماره‌های  $R$  و  $N_k$  از توزیع توأم  $(M_{a+1}, M_{a+2}, \dots, M_b)$ ، و توزیع آماره‌ی  $W$  از توزیع توأم  $(M_0, M_{a+1}, M_{a+2}, \dots, M_b)$  حاصل شده‌اند. آماره  $M$  از نمونه  $M$  به کار برده شده، ماکسیمم رخ دادن تعداد مشاهده‌های  $Y$ ، بین مشاهده‌های نمونه‌ی  $X$   $(r - 1)$  امین و  $r$  امین را نشان می‌دهد. بنابراین،  $M = \max(M_1, M_2, \dots, M_r)$  و توزیع آن، تحت فرض صفر  $H_0: F_X = F_Y$  برای توزیع توأم  $(M_1, M_2, \dots, M_r)$  در لم زیر نشان داده شده است.

لم ۱- تابع جرم احتمال توأم  $(M_1, M_2, \dots, M_r)$ ،  $r \geq 1$ .

تحت فرض  $H_0: F_X = F_Y$  به صورت زیر است:

$$P(M_1 = m_1, M_2 = m_2, \dots, M_r = m_r | H_0) = \frac{(m + n - \sum_{i=1}^r m_i - r)}{m - r} = \frac{(m + n)}{n} \quad (10)$$

می‌توان از توزیع‌های توأم  $(M_0, M_{a+1}, \dots, M_b)$  و  $(M_{a+1}, \dots, M_b)$  که قبلاً اشاره شده است، برای به دست آوردن توزیع‌های آماره‌های تحت کنترل  $R$  و  $N_k$  و  $W$  استفاده کرد.

سطر اول جدول ۲، نمونه‌ی مرجع را نشان می‌دهند. در نتیجه حدود کنترلی زیر به دست می‌آیند:

$$R \text{ نمودار: } LCL = X_{1:10}, \quad UCL = X_{4:10},$$

$$N \text{ نمودار: } LCL = X_{3:10}, \quad UCL = X_{6:10},$$

$$W \text{ نمودار: } LCL = X_{1:10}, \quad UCL = X_{4:10}.$$

بعد از گردآوری نمونه‌ی مرجع، اگر فرایند تحت کنترل باقی بماند، نمونه‌های آزمون با اندازه‌ی  $n = 4$  از توزیع یکنواخت در بازه  $(0, 1)$  هستند. یکی از این نمونه‌های تولید شده در سطر سوم جدول ۲، نشان داده شده است. مشاهده‌های  $m + n = 14$  ترکیب نمونه‌ی  $(X, Y)$  مرتب شده زیر را تولید می‌کنند

X X Y X X Y X Y X Y X X X X

نتایجی که در آماره‌های پیش‌رو  $M_i$ ها به دست می‌آیند، عبارت‌اند از

$$M_1 = 0, M_2 = 0, M_3 = 1, M_4 = 0, M_5 = 1, M_6 = 1, M_7 = 1, M_8 = 0, M_9 = 0, M_{10} = 0.$$

اگر از نمودار  $R$  استفاده کنیم، داریم:

$$R = \max(M_2, M_3, M_4) = 1,$$

و

$$R \leq 2 = 1 \quad \text{و} \quad M_0 = M_1 = 0 \leq 1 = r_0,$$

نتیجه می‌گیریم که فرایند تحت کنترل می‌باشد. هم‌چنین اگر از نمودار  $N$  استفاده کنیم، داریم:

$$N_2 = \left| \left\{ M_i: 4 \leq i \leq 6 \text{ و } M_i \geq 2 \right\} \right| = 0,$$

زیرا

$$N_2 \leq 0 = r_1 \quad \text{و} \quad M_0 = \sum_{i=1}^3 M_i = 1 \leq 2 = r_0,$$

پس نتیجه می‌گیریم که این فرایند هم تحت کنترل می‌باشد. سرانجام، آماره مجموع-رتبه‌های ویلکاکسون-گونه را می‌توان با استفاده از فرمول (۴) به دست آورد. (برای  $a = 1$  و  $b = 4$ ) داریم:

$$W = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=2}^4 M_i \right)^2 + \sum_{i=2}^4 i M_i + \left( M_0 + a - \frac{3}{2} \right) \sum_{i=2}^4 M_i = 3,$$

و

$$W \leq 10 = w \quad \text{و} \quad M_0 = M_1 = 0 \leq 4 = r_0,$$

پس نتیجه می‌گیریم که هنوز فرایند تحت کنترل می‌باشد.

اگر فرایند را به صورت خارج از کنترل با تابع توزیع  $G(x) = \frac{1}{4} x^4$ ،  $0 < x < 1$  (توزیع توان)، مانند نمونه‌ی تولید شده و نشان داده شده در سطر چهارم جدول ۲، تغییر دهیم آن‌گاه ترکیب نمونه‌ی  $(X, Y)$  به صورت زیر است:

(b) نتایج زیر با در نظر گرفتن توزیع حاشیه‌ای  $(M_{a+1}, \dots, M_b)$  از تابع جرم احتمال  $(M_0, M_{a+1}, \dots, M_b)$  در قسمت (a) به دست آمده‌اند.

از قضیه ۱، تابع توزیع تجمعی  $R = \max(M_{a+1}, M_{a+2}, \dots, M_b)$  به صورت زیر بیان شده است.

$$P(R \leq r) = P(M_{a+1} \leq r, M_{a+2} \leq r, \dots, M_b \leq r) = \sum_{m_0=0}^n \sum_{m_{a+1}, \dots, m_b} p_{a,b}(m_0, m_{a+1}, \dots, m_b), \quad (11)$$

که در آن جمع داخلی از همه‌ی  $m_i$ هایی که در شرایط زیر صدق می‌کند بیش‌تر است.  $(i = a + 1, \dots, b)$

$$0 \leq m_i \leq r, i = a + 1, \dots, b \quad \text{و} \quad \sum_{i=a+1}^b m_i \leq n - m_0$$

به‌طور مشابه می‌توان  $P(N_k = r)$  را محاسبه کرد. سرانجام، توزیع آماره‌ی مجموع رتبه‌های ویلکاکسون در (4) از فرمول زیر به دست می‌آید

$$P(W = w) = \sum_{m_0, m_{a+1}, \dots, m_b} p_{a,b}(m_0, m_{a+1}, \dots, m_b), \quad (12)$$

که  $w \in R_w$  [به (۹) مراجعه کنید] و مجموع شامل اعداد صحیح نامنفی  $m_0, m_{a+1}, \dots, m_b$  است که در شرایط زیر صدق می‌کند.

$$m_0 + \sum_{i=a+1}^b m_i \leq n \quad \text{و} \quad \frac{1}{2} \left( \sum_{i=a+1}^b m_i \right)^2 + \sum_{i=a+1}^b i m_i + \left( m_0 + a - \frac{3}{2} \right) \sum_{i=a+1}^b m_i = w. \quad (13)$$

در یک روش مستقیم می‌توان از توزیع توأم  $(M_0, M_{a+1}, \dots, M_b)$  (تحت فرض  $H_0: F_Y = F_X$ ) نرخ هشدار غلط (FAR) نمودارهای کنترلی  $N, R, W$  را محاسبه کرد. به عنوان مثال: در نمودار  $R$ ، احتمال یک سیگنال تحت کنترل برابر است با:

$$= \sum_{m_0, m_{a+1}, \dots, m_b} p_{a,b}(m_0, m_{a+1}, m_{a+2}, \dots, m_b),$$

که در آن مجموع تمام اعداد صحیح نامنفی  $m_0, m_{a+1}, m_{a+2}, \dots, m_b$  در شرایط زیر صدق می‌کند

$$m_0 \leq r, m_{a+1} \leq r, m_{a+2} \leq r, \dots, m_b \leq r.$$

در نتیجه،

قضیه ۱. فرض کنید احتمال  $p_{a,b}(m_0, m_{a+1}, m_{a+2}, \dots, m_b)$  به صورت زیر باشد.

$$p_{a,b}(m_0, m_{a+1}, m_{a+2}, \dots, m_b) = \frac{\binom{m_0 + a - 1}{a - 1} \binom{m + n - m_0 - \sum_{i=a+1}^b m_i - b}{m - r}}{\binom{m + n}{n}}$$

برای هر مجموعه‌ی صحیح نامنفی  $m_0, m_{a+1}, \dots, m_b$  طوری که  $m_0 + \sum_{i=a+1}^b m_i \leq n$  (به عبارت دیگر،  $p_{a,b}(m_0, m_{a+1}, m_{a+2}, \dots, m_b) = 0$  داریم:

(a) تابع جرم احتمال توأم  $(M_0, M_{a+1}, \dots, M_b)$  زمانی که فرایند تحت کنترل است، به صورت زیر می‌باشد.

$$(M_0 = m_0, M_{a+1} = m_{a+1}, \dots, M_b = m_b) = p_{a,b}(m_0, m_{a+1}, m_{a+2}, \dots, m_b).$$

(b) تابع جرم احتمال توأم  $(M_{a+1}, \dots, M_b)$  زمانی که فرایند تحت کنترل می‌باشد، به صورت زیر است.

$$P(M_{a+1} = m_{a+1}, \dots, M_b = m_b) = \sum_{m_0=0}^n p_{a,b}(m_0, m_{a+1}, m_{a+2}, \dots, m_b).$$

برهان. (a) زمانی که فرایند تحت کنترل است، نمونه‌های  $X$  و  $Y$  از توزیعی مشابه یعنی،  $F_X = F_Y$  هستند.

با در نظر گرفتن این‌که  $M_0 = \sum_{i=1}^a M_i$ ، احتمال

$$p = P(M_0 = m_0, M_{a+1} = m_{a+1}, \dots, M_b = m_b) = P\left(\sum_{i=1}^a M_i = m_0, M_{a+1} = m_{a+1}, \dots, M_b = m_b\right)$$

می‌باشد. از لم 1 با قرار دادن  $r = b$  توسط مجموع همه‌ی  $m_1, m_2, \dots, m_a$  به طوری که  $\sum_{i=1}^a m_i = m_0$  است. داریم:

$$p = \binom{m+n}{n}^{-1} \sum_{\substack{m_1, m_2, \dots, m_a \\ \sum_{i=1}^a m_i = m_0}} \binom{m+n - \sum_{i=1}^r m_i - b}{m-b}.$$

حال با نوشتن  $p$  به صورت زیر

$$p = \binom{m+n}{n}^{-1} \sum_{\substack{m_1, m_2, \dots, m_a \\ \sum_{i=1}^a m_i = m_0}} \binom{m+n - m_0 - \sum_{i=a+1}^b m_i - b}{m-b},$$

واضح است که

$$p = c \binom{m+n}{n}^{-1} \binom{m+n - m_0 - \sum_{i=a+1}^b m_i - b}{m-b}$$

که  $c$  نشانه‌ای از اعداد صحیح نامنفی جواب‌های معادله‌ی خطی  $\sum_{i=1}^a m_i = m_0$  است. در نتیجه برهان به سادگی کامل می‌شود

$$c = \binom{m_0 + a - 1}{a - 1}.$$

$$FAR = 1 - P(R \leq r \text{ و } M_0 \leq r_0). \quad (۱۴)$$

به همین ترتیب می توان موارد ذکر شده ی نمودار  $R$  را برای نمودار  $N$  و نمودار  $W$  پیش بینی کرد.

#### ۴. توزیع های آماره های خارج از کنترل

فرض کنید که نمونه ی آمون مشاهده های  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  از توزیع پیوسته  $G(x)$  باشند. برای نشان دادن فرمول ها در شکل کلی، احتمال این که سیگنال نشان داده شده یک هشدار نباشد را بیان می کنیم. مانند:

$$p(m, n, a, b; c; F, G) = \sum_{(m_0, m_{a+1}, \dots, m_b) \in A} P(M_0 = m_0, M_j = m_j \quad a + 1 \leq j \leq b). \quad (15)$$

که برداری از ثابت هاست و  $A$  فضایی است که در آن مقادیر بردار تصادفی  $(M_0, M_{a+1}, M_{a+2}, \dots, M_b)$ ، برای نمودار کنترلی نتیجه ی یک هشدار نیست. اگر در  $G = F$  قرار دهیم آن گاه نرخ هشدار غلط ( $FAR$ ) عبارت است از:

$$FAR = 1 - p(m, n, a, b; c; F; F) \quad (۱۶)$$

حال در حالت کلی فرض کنید زمانی که مشاهده های  $X$  و  $Y$  از توزیع مشابهی نباشند، با در نظر گرفتن فرمول (۱۵)، به یک فرمول دقیقی برای جمع وندهای طرف راست فرمول (۱۵) نیاز داریم. به طور خلاصه فرض کنید اگر بردار تصادفی  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  را  $Y$  و نمونه ی  $X$  مرتب شده ی از  $a$  امین تا  $b$  امین آماره های ترتیبی را  $X_{a:b}$  تعریف کنیم. به عبارت دیگر،  $X_{a:b} = (X_{a:m}, X_{a+1:m}, \dots, X_{b:m})$  تناظر یکنواخت

آماره های ترتیبی  $m$  نمونه ی تصادفی باشند. سپس داریم:

$$p = P(M_0(Y; X_{a:b}) = m_0 \text{ و } M_j(Y; X_{a:b}) = m_j \quad a + 1 \leq j \leq b) \quad (۱۷)$$

که با استفاده از این نکته که:

$$F(X_{a:b}) = (F(X_{a:m}), F(X_{a+1:m}), \dots, F(X_{b:m})) = (U_{a:m}, U_{a+1:m}, \dots, U_{b:m}) = U_{a:b}$$

عبارت زیر حاصل می شود:

$$p = P(M_0(F(Y); U_{a:b}) = m_0 \text{ و } M_j(F(Y); U_{a:b}) = m_j, \quad a + 1 \leq j \leq b). \quad (۱۸)$$

در نتیجه تابع چگالی توأم  $U_{a:b}$  عبارت است از:

$$f_{a:b}(u_a, u_{a+1}, \dots, u_b) = f_{a:b}(U_{a:b}) = \frac{m!}{(a-1)!(m-b)!} (u_a)^{a-1} (1 - u_b)^{m-b}, \quad 0 \leq u_a \leq u_{a+1} \leq \dots \leq u_b \leq 1 \quad (۱۹)$$

می توانیم احتمال (۱۸) را به شکل انتگرال بیان کنیم:

$$p = \iint \dots \int_{0 \leq u_a \leq u_{a+1} \leq \dots \leq u_b \leq 1} P(M_0(F(Y); u_{a:b}) = m_0 \text{ و } M_j(F(Y); u_{a:b}) = m_j, \quad a + 1 \leq j \leq b) \times f_{U_{a:b}}(u_{a:b}) du_a du_{a+1} \dots du_b. \quad (۲۰)$$

با بررسی کردن درونی ترین انتگرال هنگامی که

$$P(M_0(Y; F^{-1}(u_{a:b})) = m_0 \text{ و } M_j(Y; F^{-1}(u_{a:b})) = m_j, \quad a + 1 \leq j \leq b) = P(M_0(G(Y); GF^{-1}(u_{a:b})) = m_0 \text{ و } M_j(G(Y); GF^{-1}(u_{a:b})) = m_j, \quad a + 1 \leq j \leq b),$$

و نظر به این که:

$$G(Y) = (G(Y_1), G(Y_2), \dots, G(Y_n)) = (U_1, U_2, \dots, U_n) = U$$

مطابق با یک نمونه ی تصادفی از توزیع یکنواخت (۰ و ۱) است.

عبارت زیر حاصل می شود

$$P(M_0(U; GF^{-1}(u_{a:b})) = m_0 \text{ و } M_j(U; GF^{-1}(u_{a:b})) = m_j, \quad a + 1 \leq j \leq b).$$

اگر فرض کنیم که  $U_1, U_2, \dots, U_n$  یک نمونه ی تصادفی از توزیع یکنواخت (۰ و ۱) باشد، آن گاه  $m_0$  قبل از  $GF^{-1}(u_a)$  بین  $m_j$  بین  $GF^{-1}(u_{j-1})$  و  $GF^{-1}(u_j)$  برای  $j = a + 1, a + 2, \dots, b$  و  $n - m_0 - \sum_{j=a+1}^b m_j$  باقی مانده، بعد از  $GF^{-1}(u_b)$  قرار می گیرد. به عبارت دیگر،

$$q(GF^{-1}(u_a), GF^{-1}(u_{a+1}), \dots, GF^{-1}(u_b))$$

$$q(v_a, v_{a+1}, \dots, v_b) = \frac{n!}{m_0! (\prod_{j=a+1}^b m_j!) (n - m_0 - \sum_{j=a+1}^b m_j)!} v_a^{m_0} \prod_{j=a+1}^b (v_j - v_{j-1})^{m_j} (1 - v_b)^{n - m_0 - \sum_{j=a+1}^b m_j} \quad (۲۱)$$

احتمال چند جمله ای با  $0 \leq v_a \leq v_{a+1} \leq \dots \leq v_b \leq 1$  است. با ترکیب فرمول های (۱۹) - (۲۱) قضیه ی زیر را داریم.

**قضیه ۲.** تابع جرم احتمال توأم تجمعی  $(M_0, M_{a+1}, \dots, M_b)$ ، زمانی که مشاهده های  $X$  از تابع توزیع تجمعی  $F(x)$  و مشاهده های  $Y$  از توزیع  $G(x)$  هستند عبارت است از:

$$P(M_0 = m_0 \text{ و } M_j = m_j, \quad a + 1 \leq j \leq b) = \iint \dots \int_{0 \leq u_a \leq u_{a+1} \leq \dots \leq u_b \leq 1} q(GF^{-1}(u_a), GF^{-1}(u_{a+1}), \dots, GF^{-1}(u_b)) f_{a:b}(u_{a:b}) du_a du_{a+1} \dots du_b, \quad (۲۲)$$

$$P(M_0 = m_0 \text{ و } M_j = m_j, a + 1 \leq j \leq b)$$

$$= \iint \dots \int_{0 \leq u_a \leq u_{a+1} \leq \dots \leq u_b \leq 1} q(u_a, u_{a+1}, \dots, u_b) f_{a:b}(u_a, u_{a+1}, \dots, u_b) du_a du_{a+1} \dots du_b,$$

می‌رسد که تحت فرض‌های مقابل لهن، فرمول‌های دقیقی برای نرخ هشدار خارج از کنترل به دست می‌آید. تحت فرض مقابل نوع - لهن (برای اطلاعات بیشتر به کتاب‌های لهن (۱۹۵۳)، گیبونس و چاکرابارتی (۲۰۰۳)، وان در لان و چاکرابارتی (۲۰۰۱)، هولندر و ولف (۱۹۹۹) و بالاکریشنن و نگ (۲۰۰۶) مراجعه شود)، تابع توزیع خارج از کنترل  $G(x) = (F(x))^\gamma$  برای اعداد مثبت  $\gamma > 0$ ، فرض شده است. اگر  $\gamma$  یک عدد صحیح مثبت باشد، فرض مقابل لهن بیان می‌کند که متغیرهای تصادفی  $Y$  به صورت دقیق مانند بزرگ‌ترین مقدار  $\gamma$  متغیرهای مستقل  $X$  توزیع می‌شوند. به‌طور مشابه، ممکن است تابع توزیع خارج از کنترل به شکل  $G(x) = 1 - (1 - F(x))^\gamma$  انتخاب شود. در این حالت، برای عدد صحیح مثبت  $\gamma$ ، متناظر با حالتی است که در آن متغیرهای  $Y$  به صورت دقیق مانند کوچکترین مقدار  $\gamma$  متغیرهای مستقل  $X$  توزیع می‌شوند.

**قضیه ۳.** تابع جرم احتمال توأم  $(M_0, M_{a+1}, \dots, M_b)$  تحت

$$P(M_0 = m_0 \text{ و } M_j = m_j, a + 1 \leq j \leq b) = c_1 c_2 \gamma^{-(b-a+1)} \prod_{j=a}^{b-1} B\left(\frac{j}{\gamma} + m_0 + \sum_{i=a+1}^j m_i, m_{j+1} + 1\right) \times \sum_{l=0}^{m-b} (-1)^l \binom{m-b}{j} B\left(\frac{b+l}{\gamma} + m_0 + \sum_{i=a+1}^b m_i, n - m_0 - \sum_{i=a+1}^b m_i + 1\right),$$

که

$$c_1 = \frac{m!}{(a-1)!(m-b)!}, \quad c_2 = \frac{n!}{m_0! (\prod_{j=a+1}^b m_j!) (n - m_0 - \sum_{j=a+1}^b m_j)!},$$

و  $B(a, b)$  تابع بتا تعریف شده است.

**برهان.** تحت فرض مقابل لهن  $G(x) = (F(x))^\gamma$  که

$$G(F^{-1}(x)) = x^\gamma GF^{-1}(x) \text{ و با جای گذاری در (۲۲) داریم:}$$

$$P(M_0 = m_0 \text{ و } M_j = m_j, a + 1 \leq j \leq b)$$

$$= \iint \dots \int_{0 \leq u_a \leq u_{a+1} \leq \dots \leq u_b \leq 1} q(u_a^\gamma, u_{a+1}^\gamma, \dots, u_b^\gamma) f_{a:b}(u_a, u_{a+1}, \dots, u_b) du_a du_{a+1} \dots du_b,$$

$$P(M_0 = m_0 \text{ و } M_j = m_j, a + 1 \leq j \leq b)$$

که  $f_{a:b}$  و  $q$  به ترتیب در (۱۹) و (۲۱) تعریف شده‌اند اگر در (۲۲)  $F=G$  باشد، عبارت زیر حاصل می‌شود

بعد از انجام دادن بعضی عملیات جبری، به نتایج نشان داده شده در قضیه ۱ دست می‌یابیم. بنابر این، توزیع توأم تحت کنترل  $(M_0, M_{a+1}, \dots, M_b)$ ، حالت خاصی از نتایج کلی در قضیه‌ی ۲ است.

حال با استفاده از تابع جرم احتمال توأم قضیه ۲، در مورد خاصی از خانواده‌ای از توزیع‌هایی که در زمینه‌ی ناپارامتری رایج هستند، به عبارت دیگر، فرض‌های مقابل لهن را بررسی خواهیم کرد. همان‌طور که در قضیه ۲ ملاحظه شد، اگر تغییرهای فرایند خارج از کنترل باشند، آن‌گاه این احتمال وجود دارد که نمودار، سیگنال یک هشدار وابسته‌ی توزیع‌های تحت کنترل و هم‌چنین خارج از کنترل (به ترتیب،  $F(x)$  و  $G(x)$ )، نباشد. به نظر می‌رسد که تحت فرض‌های مقابل لهن، فرمول‌های دقیقی برای نرخ هشدار خارج از کنترل به دست می‌آید. تحت فرض مقابل نوع - لهن (برای اطلاعات بیشتر به کتاب‌های لهن (۱۹۵۳)، گیبونس و چاکرابارتی (۲۰۰۳)، وان در لان و چاکرابارتی (۲۰۰۱)، هولندر و ولف (۱۹۹۹) و بالاکریشنن و نگ (۲۰۰۶) مراجعه شود)، تابع توزیع خارج از کنترل  $G(x) = (F(x))^\gamma$  برای اعداد مثبت  $\gamma > 0$ ، فرض شده است. اگر  $\gamma$  یک عدد صحیح مثبت باشد، فرض مقابل لهن بیان می‌کند که متغیرهای تصادفی  $Y$  به صورت دقیق مانند بزرگ‌ترین مقدار  $\gamma$  متغیرهای مستقل  $X$  توزیع می‌شوند. به‌طور مشابه، ممکن است تابع توزیع خارج از کنترل به شکل  $G(x) = 1 - (1 - F(x))^\gamma$  انتخاب شود. در این حالت، برای عدد صحیح مثبت  $\gamma$ ، متناظر با حالتی است که در آن متغیرهای  $Y$  به صورت دقیق مانند کوچکترین مقدار  $\gamma$  متغیرهای مستقل  $X$  توزیع می‌شوند.

سیگنال یک هشدار وابسته‌ی توزیع‌های تحت کنترل و هم‌چنین خارج از کنترل (به ترتیب،  $F(x)$  و  $G(x)$ )، نباشد. به نظر

که با توجه به (۱۹) و (۲۱) نتایج زیر به‌دست می‌آیند

<sup>9</sup>. van der Lann and Chakraborti

<sup>10</sup>. Hollander and Wolfe

<sup>11</sup>. Balakrishnan and Ng

<sup>7</sup>. Lehmann

<sup>8</sup>. Gibbons and Chakraborti



یک هشدار خارج از کنترل، نتیجه‌ی یک توزیع هندسی با احتمال موفقیت زیر

$$p(x_{a:b}) = \sum_{(m_0, m_{a+1}, \dots, m_b) \in A} P(M_0(Y; x_{a:b}) = m_0, M_j(Y; x_{a:b}) = m_j, a+1 \leq j \leq b)$$

و تابع جرم احتمال زیر  
 $(1 - p(x_{a:b}))(p(x_{a:b}))^{k-1} = (p(x_{a:b}))^{k-1} - (p(x_{a:b}))^k, k = 1, 2, \dots$   
 باشد، را تعریف می‌کند.

بنابر این، توزیع غیرشرطی  $N$  به صورت زیر است:

$$P(N = k) = D(k - 1) - D(k), \quad (23)$$

که  $D(0) = 1$  و

$$D(k) = E_{x_{a:b}} \{ (p(x_{a:b}))^k \}, \quad k = 1, 2, \dots$$

با تغییر متغیرهای تصادفی  $X_{a:b}$  با استفاده از فرمول (۱۸) داریم

$$D(k) = E_{u_{a:b}} \{ (p(u_{a:b}))^k \} = \iint \dots \int_{0 \leq u_a \leq u_{a+1} \leq \dots \leq u_b \leq 1} (p(u_{a:b}))^k f_{a:b}(u_{a:b}) du_a du_{a+1} \dots du_b,$$

که  $f_{a:b}$  تابع چگالی توأم آماره‌های ترتیبی  $(U_a, U_{a+1}, \dots, U_b)$  در (۱۹) است، و

$$p(u_{a:b}) = \sum_{(m_0, m_{a+1}, \dots, m_b) \in A} P(M_0(Y; u_{a:b}) = m_0, M_j(Y; u_{a:b}) = m_j, a+1 \leq j \leq b).$$

با توجه به برهان قضیه ۲، عبارت زیر حاصل شده است

$$p(u_{a:b}) = \sum_{(m_0, m_{a+1}, \dots, m_b) \in A} q(GF^{-1}(u_a), GF^{-1}(u_{a+1}), \dots, GF^{-1}(u_b)),$$

که  $q$  در (۲۱) تعریف شده است.

از بحث قبلی، نتایج کلی زیر، توزیع طول اجرا و میانگین نمودار کنترلی حاصل می‌شود.

**قضیه ۴.** فرض کنید  $N$  زمان مورد انتظار طول اجرای یک نمودار کنترلی که سیگنال‌های آن، هشدار به هنگام بردار تصادفی  $(M_0, M_{a+1}, \dots, M_b)$  با مقادیر خارج از مجموعه  $A \subseteq \{0, 1, 2, \dots\}^{b-a}$  باشد. آن‌گاه اگر

$$Q(v_a, v_{a+1}, \dots, v_b) = \sum_{(m_0, m_{a+1}, \dots, m_b) \in A} q(v_a, v_{a+1}, \dots, v_b),$$

سپس:

(a) تابع جرم احتمال روی  $N$  عبارت است از

$$P(N = k) = D(k - 1) - D(k), \quad k = 1, 2, \dots$$

$$D(0) = 1$$

$$D(k) = \iint \dots \int_{0 \leq u_a \leq u_{a+1} \leq \dots \leq u_b \leq 1} (Q^k(GF^{-1}(u_a), GF^{-1}(u_{a+1}), \dots, GF^{-1}(u_b))) f_{a:b}(u_a, u_{a+1}, \dots, u_b) du_a du_{a+1} \dots du_b;$$

$$= c_1 c_2 \sum_{l=0}^{m-b} \binom{m-b}{l} (-1)^l \iint \dots \int_{0 \leq u_a \leq u_{a+1} \leq \dots \leq u_b \leq 1} u_a^{a+m_0 \gamma - 1} \times \prod_{j=a+1}^b (u_j^\gamma - u_{j-1}^\gamma)^{m_j} u_b^l (1 - u_b^\gamma)^{n-m_0 - \sum_{i=a+1}^b m_i} du_a du_{a+1} \dots du_b.$$

اکنون با استفاده از تبدیل  $t = (u_a/u_{a+1})^\gamma$  در درونی‌ترین انتگرال، داریم:

$$P(M_0 = m_0, M_j = m_j, a+1 \leq j \leq b) = c_1 c_2 \sum_{l=0}^{m-b} \binom{m-b}{l} (-1)^l \iint \dots \int_{0 \leq u_a \leq u_{a+1} \leq \dots \leq u_b \leq 1} \gamma^{-1} B\left(\frac{a}{\gamma} + m_0, m_{a+1} + 1\right) \times \prod_{j=a+2}^b (u_j^\gamma - u_{j-1}^\gamma)^{m_j} (1 - u_b^\gamma)^{n-m_0 - \sum_{i=a+1}^b m_i} du_{a+1} \dots du_b.$$

به طور مشابه، با استفاده مکرر از تبدیل:  $t = (u_a/u_{a+1})^\gamma, j = a+1, a+2, \dots, b-1$  می‌شود:

$$P(M_0 = m_0, M_j = m_j, a+1 \leq j \leq b) = \frac{m! n!}{(a-1)! (m-b)! m_0! (\prod_{j=a+1}^b m_j!) (n-m_0 - \sum_{j=a+1}^b m_j)!} \gamma^{-(b-a+1)} \times \prod_{j=a}^{b-1} B\left(\frac{j}{\gamma} + m_0 + \sum_{i=a+1}^j m_i, m_{j+1} + 1\right) \times \sum_{l=0}^{m-b} (-1)^l \binom{m-b}{l} B\left(\frac{b+l}{\gamma} + m_0 + \sum_{i=a+1}^b m_i, n-m_0 - \sum_{i=a+1}^b m_i + 1\right)$$

در نتیجه برهان قضیه کامل می‌شود.

### ۵. توزیع طول اجرا

یکی از ضعف‌های اساسی نمودارهای کنترلی ناپارامتری این است که هشدارهایی که برای رخدادها می‌دهند، مستقل نیستند. و بنابر این، متوسط طول اجرای  $(ARL)$  نمودار نمی‌تواند مانند معکوسی از احتمال هشدارها محاسبه شود. اگرچه، می‌توان با استفاده از یک شناسه‌ی شرطی، یک فرمول دقیق برای توزیع طول اجرا و میانگین آن‌ها به‌دست آورد.

در بررسی فرمول‌های (۱۵) و (۱۷) واضح است که، تحت شرط  $X_{a:b} = (x_a, x_{a+1}, \dots, x_b) = x_{a:b} \in \mathfrak{R}^{b-a+1}$  انتظار متغیر تصادفی  $N$ ، تعدادی از نمونه‌های  $Y$  را تا زمانی که

توزیع متوسط طول اجرای کنترل  $(ARL_{in})$  را با قرار دادن  $G = F$  می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$ARL_{in} = \int \dots \int_{0 \leq u_a \leq u_{a+1} \leq \dots \leq u_b \leq 1} \frac{1}{1 - Q(u_a, u_{a+1}, \dots, u_b)} f_{a,b}(u_a, u_{a+1}, \dots, u_b) du_a du_{a+1} \dots du_b \quad (26)$$

به طور مشابه، می‌توان متوسط طول اجرای خارج از کنترل  $(ARL_{out})$ ، هم‌چنین توزیع تحت کنترل  $F$  و توزیع خارج از کنترل  $G$  را پیش‌بینی کرد. زمانی که توزیع خارج از کنترل، یک فرض مقابل لهنم از توزیع تحت کنترل  $F$ ، به شکل  $G(x) = (F(x))^Y$  است، آن‌گاه داریم:

$$ARL_{out} = \int \dots \int_{0 \leq u_a \leq u_{a+1} \leq \dots \leq u_b \leq 1} \frac{1}{1 - Q(u_a^Y, u_{a+1}^Y, \dots, u_b^Y)} f_{a,b}(u_a, u_{a+1}, \dots, u_b) du_a du_{a+1} \dots du_b \quad (27)$$

خارج از کنترل، نشان می‌دهیم. در جدول ۳، نرخ هشدار  $(AR)$  سه نمودار کنترلی با  $m$  و  $n$ های مختلف، نشان داده شده است. پارامترهای طرح  $a, b, r_0, k, w$  برای زمانی که نرخ هشدار غلط  $0.05$  است  $(FAR = 0.05)$ ، انتخاب شده‌اند. سپس مقادیر نرخ هشدار  $(AR)$  برای  $1/8$  و  $1/4$  و  $1/2$   $\gamma$  همه با استفاده از قضیه ۳ در بخش قبلی به‌دست آمده‌اند.

در جدول ۳، نمودار کنترلی آزاد- توزیع نشان داده شده (برای پارامترهای انتخابی مناسب) مشابه عملکرد نرخ هشدار  $(AR)$  یک نرخ هشدار غلط  $(FAR)$  مشترک به میزان  $0.05$ ، را مشاهده کردیم. به همین دلیل از این پس، توجه‌مان را فقط به یکی از آن‌ها (نمودارها) محدود می‌کنیم. به عبارت دیگر، نمودار مجموع رتبه‌ای ویلکاکسون‌گونه، زیرا در دو نمودار کنترلی دیگر، تحت انتخاب‌های پارامترهای طرح مناسب، تقریباً نتایج به دست آمده با هم برابرند. در جدول ۴، نرخ هشدار غلط  $(FAR)$  نمودار  $W$  برای چندین طرح و با انتخاب مختلف پارامترهای  $m, n, a, b, w, r_0$  که محاسبه‌ی آن‌ها توسط قضیه ۱ انجام شده است، نشان داده شده است.

(b) متوسط طول اجرا  $ARL = E(N)$  به صورت زیر بیان می‌شود:

$$ARL = \sum_{k=0}^{\infty} D(k) = \int \dots \int_{0 \leq u_a \leq u_{a+1} \leq \dots \leq u_b \leq 1} \frac{1}{1 - Q(GF^{-1}(u_a), GF^{-1}(u_{a+1}), \dots, GF^{-1}(u_b))} f_{a,b}(u_a, u_{a+1}, \dots, u_b) du_a du_{a+1} \dots du_b \quad (25)$$

برهان. قسمت (a) قبلاً اثبات شده است. قسمت (b) به آسانی از فرمول شناخته شده زیر نتیجه می‌شود:

$$E(N) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N > k) = E_{U_{a,b}} \left( \sum_{k=0}^{\infty} p^k (U_{a,b}) \right) = E_{U_{a,b}} \left( \frac{1}{1 - p(U_{a,b})} \right).$$

## ۶. یافته‌های پژوهش

در بخش قبلی نمودارهای کنترلی جدید شوهارتی یک‌متغیره معرفی شدند، حال ما در این بخش قصد داریم با استفاده از، جدول‌ها و مثال‌های عددی عملکرد نمودارهای کنترلی  $(N, R)$  و  $W$  را با هم مقایسه کنیم و نشان دهیم که عملکرد نمودار کنترلی  $W$  در مقایسه با دو نمودار کنترلی  $(N)$  و  $(R)$  و دیگر نمودارها بهتر است. از آن‌جا که یک روش مقایسه‌ی نمودارهای کنترلی استفاده از نرخ هشدار غلط  $(FAR)$  مشترک یا متوسط طول اجرای تحت کنترل  $(ARL_{in})$  مشترک و سپس آزمودن نرخ‌های هشدار  $(AR)$  آن‌ها است. بنابر این، در بخش اول، با استفاده از مثال‌های عددی، به مقایسه‌ی نمودارهای کنترلی پرداخته می‌شود، سپس در دو بخش بعدی به نتیجه‌گیری و ارائه‌ی پیشنهاد می‌پردازیم.

## ۷. مثال‌های عددی

در این بخش با آزمودن عددی، اثر نمودارهای کنترلی جدید و ویژگی‌های استواری آن‌ها، را در هر دو موقعیت تحت کنترل و

جدول ۳. مقایسه AR سه نمودار کنترلی با  $(\gamma = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8})$  و  $FAR = 0.05$

m	n	نمودار R				نمودار $N_r$				نمودار W						
		(LCL,UCL)	r	r	Exact FAR	AR	(LCL,UCL)	r	k	Exact FAR	AR	(LCL,UCL)	w	r	Exact FAR	AR
۱۰۰	۵	(۷ <sub>۱۰</sub> )	۲	۲	-/۰۰۴۳	-/۱۲۰۱ -/۵۱۳۰ -/۸۴۸۶	(۷ <sub>۱۰</sub> )	۲	۱	-/۰۰۴۱	-/۱۱۹۳ -/۵۱۲۳ -/۸۴۸۳	(۷ <sub>۱۰</sub> )	۷۰	۲	-/۰۰۴۱	-/۱۱۹۳ -/۵۱۲۳ -/۸۴۸۳
	۱۱	(۱۰ <sub>۱۳</sub> )	۴	۳	-/۰۰۴۹	-/۲۴۶۱ -/۸۲۷۹ -/۹۹۰۱	(۱۰ <sub>۱۳</sub> )	۴	۱	-/۰۰۴۷	-/۲۴۵۷ -/۸۲۷۷ -/۹۹۰۱	(۱۰ <sub>۱۳</sub> )	۹۵	۴	-/۰۰۴۸	-/۲۴۷۵ -/۸۲۸۸ -/۹۹۰۲
	۲۵	(۹ <sub>۱۲</sub> )	۷	۴	-/۰۰۴۵	-/۴۶۶۸ -/۹۸۷۲ -/۹۹۹۹	(۹ <sub>۱۲</sub> )	۷	۱	-/۰۰۵۰	-/۴۶۸۰ -/۹۸۷۲ -/۹۹۹۹	(۹ <sub>۱۲</sub> )	۱۲۳	۷	-/۰۰۴۹	-/۴۷۵۳ -/۹۸۷۹ -/۹۹۹۹
۲۰۰	۵	(۱۶ <sub>۱۹</sub> )	۲	۲	-/۰۰۵۰	-/۱۴۰۹ -/۵۵۲۶ -/۸۶۸۹	(۱۶ <sub>۱۹</sub> )	۲	۱	-/۰۰۵۰	-/۱۴۰۸ -/۵۵۲۶ -/۸۶۸۹	(۱۵ <sub>۱۸</sub> )	۶۵	۲	-/۰۰۴۶	-/۱۳۲۶ -/۵۳۹۹ -/۸۶۳۱
	۱۱	(۲۱ <sub>۲۴</sub> )	۴	۳	-/۰۰۴۵	-/۲۶۴۷ -/۸۴۸۸ -/۹۹۲۲	(۲۱ <sub>۲۴</sub> )	۴	۲	-/۰۰۴۴	-/۲۶۴۶ -/۸۴۸۸ -/۹۹۲۲	(۲۱ <sub>۲۴</sub> )	۱۳۵	۴	-/۰۰۴۸	-/۲۶۶۹ -/۸۴۹۷ -/۹۹۲۳
	۲۵	(۱۶ <sub>۱۹</sub> )	۶	۵	-/۰۰۴۹	-/۵۶۷۸ -/۹۹۵۲ -/۹۹۹۹	(۱۶ <sub>۱۹</sub> )	۶	۲	-/۰۰۴۹	-/۵۶۷۷ -/۹۹۵۲ -/۹۹۹۹	(۱۶ <sub>۱۹</sub> )	۱۹۰	۶	-/۰۰۵۰	-/۵۶۸۸ -/۹۹۵۳ -/۹۹۹۹
۵۰۰	۵	(۳۹ <sub>۴۲</sub> )	۲	۱	-/۰۰۴۷	-/۱۳۷۴ -/۵۵۱۰ -/۸۶۹۰	(۳۹ <sub>۴۲</sub> )	۲	۲	-/۰۰۴۴	-/۱۳۶۷ -/۵۵۰۴ -/۸۶۸۹	(۳۹ <sub>۴۲</sub> )	۱۰۰	۲	-/۰۰۴۹	-/۱۳۸۱ -/۵۵۱۵ -/۸۶۹۲
	۱۱	(۳۳ <sub>۳۶</sub> )	۳	۲	-/۰۰۴۸	-/۳۰۴۲ -/۸۹۱۱ -/۹۹۶۵	(۳۳ <sub>۳۶</sub> )	۳	۲	-/۰۰۴۸	-/۳۰۴۱ -/۸۹۱۱ -/۹۹۶۵	(۳۳ <sub>۳۶</sub> )	۳	۲	-/۰۰۴۹	-/۳۰۴۵ -/۸۹۱۲ -/۹۹۶۵
	۲۵	(۲۱ <sub>۲۴</sub> )	۴	۴	-/۰۰۴۵	-/۵۹۰۷ -/۹۹۷۱ -/۹۹۹۹	(۲۱ <sub>۲۴</sub> )	۴	۲	-/۰۰۴۵	-/۵۹۰۷ -/۰۰۷۱ -/۹۹۹۹	(۲۱ <sub>۲۴</sub> )	۱۵۰	۴	-/۰۰۴۶	-/۵۹۱۵ -/۹۹۷۱ -/۹۹۹۹

در جدول ۴، با استفاده از شش پارامتر  $(m, n, a, b, w, \Gamma_0)$  در این نمودار انعطاف پذیر (نمودار کنترلی W)، با ثابت نگه داشتن بعضی از پارامترها و سپس پیش بینی کردن بهینه ترین انتخاب آن‌ها، یا جستجوی فرض مقابل، یک ترکیب قابل قبولی از آن‌ها که مناسب نیازهای ما می باشد، را می توان به دست آورد. به عنوان مثال، اگر از نمونه‌ی مرجع با اندازه‌ی  $m = 200$ ، نمونه‌های آزمون با اندازه‌ی  $n = 25$ ، را انتخاب کنیم و نرخ هشدار غلط

در جدول ۴، با استفاده از شش پارامتر  $(m, n, a, b, w, \Gamma_0)$  در این نمودار انعطاف پذیر (نمودار کنترلی W)، با ثابت نگه داشتن بعضی از پارامترها و سپس پیش بینی کردن بهینه ترین انتخاب آن‌ها، یا جستجوی فرض مقابل، یک ترکیب قابل قبولی از آن‌ها که مناسب نیازهای ما می باشد، را می توان به دست آورد. به عنوان مثال، اگر از نمونه‌ی مرجع با اندازه‌ی  $m = 200$ ، نمونه‌های آزمون با اندازه‌ی  $n = 25$ ، را انتخاب کنیم و نرخ هشدار غلط

- اگر در نمونه‌ی آزمون انتخابی مشاهده‌ها،  $b=22, a=19, w=81$  و  $w = 81$  و  $r_0 = 8$  را در نظر بگیریم، آن‌گاه نرخ هشدار غلط (FAR) برابر است با  $(FAR = 0.0464)$ ، یا

جدول ۴. نرخ‌های هشدار غلط برای طرح داده شده.

n	r <sub>0</sub>	III نمونه‌ی مرجع											
		40			60			100			200		
		(a,b)	w	FAR	(a,b)	w	FAR	(a,b)	w	FAR	(a,b)	w	FAR
5	2	(V <sub>2</sub> 11)	200	0.271	(10 <sub>2</sub> 13)	35	0.266	(15 <sub>2</sub> 19)	50	0.292	(20 <sub>2</sub> 23)	80	0.130
			20	0.597		20	0.669		50	0.322		22	0.252
			22	0.900		22			22	0.696		20	0.890
3	(13 <sub>2</sub> 17)		90	0.299	(20 <sub>2</sub> 23)	150	0.292	(15 <sub>2</sub> 19)	50	0.201	(20 <sub>2</sub> 23)	22	0.122
			62	0.601		80	0.761		22	0.351		22	0.269
			58	0.922		22	0.822		22	0.857		27	0.952
2	(16 <sub>2</sub> 20)		100	0.229	(25 <sub>2</sub> 28)	55	0.229	(25 <sub>2</sub> 29)	60	0.185	(30 <sub>2</sub> 33)	62	0.185
			72	0.220		52	0.581		52	0.222		62	0.210
			65	0.987		52	0.922		52	0.602		27	0.928
11	2	(V <sub>2</sub> 12)	170	0.222	(11 <sub>2</sub> 15)	120	0.269	(15 <sub>2</sub> 19)	78	0.221	(20 <sub>2</sub> 23)	85	0.162
			100	0.506		90	0.556		68	0.299		22	0.216
			66	0.978		55	0.987		52	0.960		22	0.692
6	(10 <sub>2</sub> 15)		170	0.152	(11 <sub>2</sub> 15)	100	0.102	(18 <sub>2</sub> 22)	90	0.122	(25 <sub>2</sub> 29)	55	0.201
			1022	0.271		58	0.286		79	0.227		52	0.258
			79	0.929		52	0.912		22	0.872		52	0.770
8	(15 <sub>2</sub> 20)		122	0.272	(17 <sub>2</sub> 21)	120	0.101	(21 <sub>2</sub> 25)	100	0.120	(26 <sub>2</sub> 30)	70	0.227
			115	0.729		82	0.277		91	0.257		56	0.271
			111	0.961		78	0.906		28	0.916		55	0.789
25	8	(5 <sub>2</sub> 8)	85	0.296	(10 <sub>2</sub> 13)	250	0.227	(15 <sub>2</sub> 18)	155	0.198	(19 <sub>2</sub> 22)	120	0.102
			70	0.822		120	0.281		105	0.298		81	0.262
			66	0.966		85	0.998		72	0.906		22	0.877
12	(8 <sub>2</sub> 12)		150	0.228	(15 <sub>2</sub> 18)	200	0.115	(28 <sub>2</sub> 31)	220	0.166	(30 <sub>2</sub> 33)	120	0.220
			120	0.567		126	0.286		187	0.271		127	0.270
			120	0.972		112	0.962		120	0.960		67	0.821
16	(12 <sub>2</sub> 16)		210	0.222	(19 <sub>2</sub> 22)	210	0.222	(22 <sub>2</sub> 25)	220	0.155	(23 <sub>2</sub> 26)	160	0.105
			190	0.665		185	0.269		215	0.221		120	0.268
			170	0.998		122	0.961		128	0.926		72	0.902

شده‌ی جدول ۴ برای قابلیت پی بردن به تغییرهای توزیع تحت کنترل، آزمایش شده‌اند. بنابر این، از مقادیر گزارش شده در جدول ۵، برای حالتی که m = 200، n = 25 و با انتخاب پارامترهای طرح متناظر با a = 19، b = 22، w = 81 و r<sub>0</sub> = 8، نرخ هشدار (AR) بهینه برای پی بردن به تغییر در فرض‌های مقابل لهنم زمانی که  $\gamma = \frac{1}{3}$ ، برابر با 0.8868 (AR=0.8868) و زمانی که  $\gamma = \frac{1}{5}$ ، برابر با 0.9977 (AR=0.9977) است.

- اگر در نمونه‌ی آزمون انتخابی مشاهده‌ها،  $r_0 = 16$  و  $w = 14$ ،  $b = 36$ ،  $a = 33$  را در نظر بگیریم، آن‌گاه نرخ هشدار غلط (FAR) برابر است با (FAR = 0.468).
- اطلاعات مفیدی درباره‌ی کارایی نمودارهای کنترلی ناپارامتری از جدول ۵ برای حالت فرض‌های مقابل لهنم به دست می‌آید. در این جدول، نرخ هشدار (AR) برای چندین انتخاب پارامترهای طرح m, n, r<sub>0</sub>, w, b, a و پارامتر تغییر  $\gamma > 0$ ، محاسبه و نشان داده شده است. در واقع همه‌ی طرح‌های نشان داده

کارایی نمودار کنترلی آزاد- توزیع پیش‌نهاد شده را مقایسه کرد. در جدول ۶، سه سطح نرخ هشدار غلط ( $FAR$ ) مختلف و چندین مقدار پارامترهای  $m$  و  $n$  بررسی شده است.

یک روش مقایسه دو نمودار کنترلی مختلف، استفاده از نرخ هشدار غلط ( $FAR$ ) مشترک یا متوسط طول اجرای تحت کنترل ( $ARL_{in}$ ) و سپس آزمودن نرخ‌های هشدار ( $AR$ ) آن‌ها است. در نتیجه می‌توان،

جدول ۵. نرخ‌های هشدار ( $AR$ ) برای طرح داده شده.

n	r	m نمونه‌ی مرجع																
		۴۰				۶۰				۱۰۰				۲۰۰				
		(a, b)		w	AR	(a, b)		w	AR	(a, b)		w	AR	(a, b)		w	AR	
۵	۲	(۷,۱۱)		۲۰۰	۰/۵۸۵۸	(۱۰,۱۳)		۴۵	۰/۵۹۱۰	(۱۵,۱۹)		۱۵۰	۰/۵۴۴۸	(۲۰,۲۴)		۸۰	۰/۴۳۶۷	
					۰/۸۲۵۱				۰/۸۲۹۶				۰/۸۹۶۷				۰/۷۳۳۳	
				۴۰	۰/۵۹۶۷			۳۰	۰/۶۰۱۱			۵۰	۰/۵۶۶۱			۴۲	۰/۴۹۰۷	
					۰/۸۳۰۰				۰/۸۳۳۳				۰/۸۱۵۲				۰/۷۶۴۳	
			۳۳	۰/۶۳۴۰			۲۳	۰/۶۲۲۸			۳۳	۰/۶۰۵۴			۴۰	۰/۵۲۵۹		
				۰/۸۴۹۱				۰/۸۴۵۲				۰/۸۳۵۴				۰/۷۸۰۴		
			(۱۳,۱۷)		۹۰	۰/۴۸۸۶	(۲۰,۲۳)		۱۵۰	۰/۵۰۳۷	(۱۵,۱۹)		۵۰	۰/۲۴۷۴	(۲۰,۲۴)		۴۳	۰/۲۰۷۱
						۰/۷۱۸۹				۰/۷۳۲۰				۰/۵۰۱۲				۰/۴۴۳۳
					۶۳	۰/۴۹۳۷			۸۰	۰/۵۱۶۸			۳۳	۰/۳۲۵۳			۴۲	۰/۲۳۷۳
						۰/۷۲۱۷				۰/۷۳۸۶				۰/۵۶۴۱				۰/۴۶۵۸
					۵۸	۰/۵۲۱۱			۴۴	۰/۵۳۵۲			۳۲	۰/۳۶۶۰			۲۷	۰/۲۷۵۲
						۰/۷۳۷۳				۰/۷۵۱۵				۰/۵۹۲۱				۰/۴۸۲۴
۱۱	۲۰	(۱۶,۲۰)		۱۰۰	۰/۲۱۵۶	(۲۵,۲۸)		۵۵	۰/۲۵۲۹	(۲۵,۲۹)		۶۰	۰/۱۱۰۸	(۳۰,۳۴)		۶۳	۰/۱۰۲۸	
					۰/۳۹۱۲				۰/۴۲۹۵				۰/۲۵۳۷				۰/۲۰۷۹	
				۷۲	۰/۲۳۱۹			۵۴	۰/۲۸۳۷			۵۴	۰/۱۶۴۳			۶۲	۰/۱۲۶۲	
					۰/۴۰۰۷				۰/۴۵۵۲				۰/۳۰۶۲				۰/۲۲۳۶	
					۶۵	۰/۲۴۶۸			۵۳	۰/۳۲۳۳			۵۳	۰/۱۹۸۱			۲۷	۰/۱۵۰۳
						۰/۴۰۶۷				۰/۴۸۴۴				۰/۳۳۳۳				۰/۲۳۳۱
			(۷,۱۲)		۱۷۰	۰/۸۰۱۸	(۱۱,۱۵)		۱۴۰	۰/۸۳۰۹	(۱۵,۱۹)		۷۸	۰/۷۸۲۰	(۲۰,۲۴)		۸۵	۰/۶۵۳۹
						۰/۹۶۹۰				۰/۹۷۶۴				۰/۹۶۷۰				۰/۹۳۴۱
					۱۰۰	۰/۸۰۸۸			۹۰	۰/۸۳۰۹			۶۸	۰/۸۰۵۹			۴۴	۰/۷۱۰۷
						۰/۹۷۰۶				۰/۹۷۶۴				۰/۹۷۱۶				۰/۹۴۷۷
					۶۶	۰/۸۳۰۱			۵۵	۰/۹۷۷۱			۵۳	۰/۸۱۰۱			۴۳	۰/۷۳۶۲
						۰/۹۷۴۵				۰/۹۸۱۸				۰/۹۷۲۱				۰/۹۵۳۲
۱۵	۲۰	(۱۰,۱۵)		۱۷۰	۰/۵۸۳۸	(۱۱,۱۵)		۱۰۰	۰/۴۳۷۴	(۱۸,۲۲)		۹۰	۰/۴۳۹۴	(۲۵,۲۹)		۵۵	۰/۴۰۹۷	
					۰/۸۷۳۹				۰/۷۹۶۷				۰/۸۰۲۱				۰/۷۶۰۵	
				۱۰۲	۰/۶۰۴۹			۵۸	۰/۴۹۹۸			۷۹	۰/۴۸۶۴			۵۴	۰/۴۴۰۳	
					۰/۸۸۰۳				۰/۸۲۶۰				۰/۸۱۹۸				۰/۷۶۹۸	
					۷۹	۰/۶۴۷۷			۵۲	۰/۵۵۱۴			۴۲	۰/۵۷۱۷			۵۳	۰/۴۵۸۹
						۰/۸۹۵۵				۰/۸۴۱۶				۰/۸۵۸۴				۰/۷۷۳۲
			(۱۵,۲۰)		۱۴۳	۰/۳۶۸۶	(۱۷,۲۱)		۱۳۰	۰/۳۱۸۷	(۲۱,۲۵)		۱۰۰	۰/۱۴۱۱	(۲۶,۳۰)		۷۰	۰/۰۷۱۵
						۰/۶۶۸۷				۰/۵۳۰۷				۰/۴۱۶۷				۰/۲۵۰۴
					۱۱۵	۰/۳۹۵۹			۸۴	۰/۳۷۱۲			۹۱	۰/۱۷۶۲			۵۶	۰/۲۴۱۹

			۰/۶۸۳۰		۰/۵۶۶۰		۰/۴۲۹۱		۰/۳۹۵۴
	۱۱۱		۰/۴۰۵۷		۰/۳۱۰۹	۷۸	۰/۳۴۳۳	۴۸	۰/۲۵۹۵
			۰/۶۸۵۵		۰/۵۷۸۹		۰/۵۶۸۹		۰/۳۹۸۵
۲۵	(۵و۸)	۸۵	۰/۹۱۸۱	(۱۰و۱۳)	۲۵۰	۰/۹۶۳۶	(۱۵و۱۸)	۱۵۵	۰/۹۶۰۲
			۰/۹۹۷۸		۰/۹۹۹۵		۰/۹۹۹۵		۰/۹۹۷۲
		۷۰	۰/۹۳۳۶		۱۳۰	۰/۹۶۷۲		۱۰۵	۰/۹۶۴۹
			۰/۹۹۸۴		۰/۹۹۹۶		۰/۹۹۹۶		۰/۹۹۷۷
		۶۶	۰/۹۳۴۷		۸۵	۰/۹۷۵۶		۷۳	۰/۹۷۳۰
			۰/۹۹۸۴		۰/۹۹۹۷		۰/۹۹۹۷		۰/۹۹۸۷
	(۸و۱۲)	۱۵۰	۰/۵۵۴۳	(۱۵و۱۸)	۲۰۰	۰/۶۶۹۶	(۲۸و۳۱)	۲۴۰	۰/۷۶۲۷
			۰/۹۲۱۲		۰/۹۶۳۰		۰/۹۸۱۰		۰/۸۷۰۳
		۱۴۰	۰/۵۶۳۶		۱۴۶	۰/۶۸۴۸		۱۸۷	۰/۷۷۳۶
			۰/۹۲۱۹		۰/۹۶۵۰		۰/۹۸۲۰		۰/۸۷۰۳
		۱۲۰	۰/۶۱۳۵		۱۱۴	۰/۷۲۰۰		۱۳۰	۰/۸۰۶۶
			۰/۹۳۴۷		۰/۹۶۹۳		۰/۹۸۴۸		۰/۹۱۱۰
۱	(۱۲و۱۶)	۲۱۰	۰/۳۹۷۵	(۱۹و۲۲)	۲۱۰	۰/۵۸۶۶	(۳۲و۳۵)	۲۴۰	۰/۶۰۲۸
			۰/۸۱۸۷		۰/۹۲۸۳		۰/۹۳۸۵		۰/۶۷۷۵
		۱۹۰	۰/۴۱۳۰		۱۸۵	۰/۵۸۹۰		۲۱۵	۰/۶۰۹۰
			۰/۸۲۱۰		۰/۹۲۸۴		۰/۹۳۸۵		۰/۶۸۰۳
		۱۷۰	۰/۴۳۲۶		۱۴۳	۰/۶۲۴۰		۱۴۸	۰/۶۵۶۲
			۰/۸۳۱۱		۰/۹۳۴۸		۰/۹۴۶۶		۰/۷۶۹۲

جدول ۶. مقایسه  $AR$  نمودارهای کنترلی با نرخ هشدار غلط ( $FAR$ ) مشترک ( $\gamma = 0.4$  و  $0.2$ )

$FAR$	$m$	$n$	NEW				B-T-K				
			(LCL,UCL)	$w$	$r_0$	Exact FAR	AR	(LCL,UCL)	$r$	Exact FAR	AR
۰/۰۱	۵۰	۵	(۴و۷)	۳۱	۲	۰/۰۰۸۲	۰/۲۵۳۸	(۳و۴۸)	۱	۰/۰۰۷۲	۰/۱۸۸۸
							۰/۶۶۶۰				۰/۵۹۵۶
		۱۱	۴۱	۴	۰/۰۰۹۷	۰/۳۸۴۸	(۷و۴۴)	۱	۰/۰۰۹۳	۰/۳۶۵۱	
		۲۵	۹۰	۷	۰/۰۰۹۶	۰/۷۰۱۸	(۶و۴۵)	۱۳	۰/۰۰۹۷	۰/۳۸۸۶	
						۰/۹۹۷۴				۰/۹۳۸۸	
۱۰۰	۵	(۱۰و۱۳)	۶۵	۲	۰/۰۱۰۰	۰/۳۰۸۹	(۷و۹۴)	۱	۰/۰۰۸۶	۰/۲۳۳۰	
							۰/۹۹۵۷			۰/۶۴۵۵	
		۱۱	۶۶	۴	۰/۰۰۹۵	۰/۴۶۲۰	(۶و۹۵)	۷	۰/۰۰۹۱	۰/۳۱۷۹	
		۲۵	۱۱۵	۷	۰/۰۰۹۶	۰/۸۱۱۳	(۸و۹۳)	۱۶	۰/۰۰۸۲	۰/۵۲۹۴	
						۰/۹۹۹۰				۰/۹۸۴۸	
۵۰۰	۵	(۵۰و۵۳)	۱۲۰	۲	۰/۰۰۹۴	۰/۳۱۳۹	(۳۸و۴۳)	۲	۰/۰۰۹۱	۰/۲۴۷۲	
							۰/۷۳۲۷			۰/۶۷۶۰	
		۱۱	۱۰۴	۴	۰/۰۰۷۳	۰/۴۸۴۷	(۳۳و۶۸)	۷	۰/۰۰۹۹	۰/۳۶۶۳	
		۲۵	۲۰۷	۷	۰/۰۰۹۱	۰/۸۴۰۱	(۱۲۰و۸۱)	۷	۰/۰۰۹۵	۰/۷۴۲۱	
						۰/۹۹۹۵				۰/۹۹۶۵	

۱۰۰۰	۵	(۱۰۰ و ۱۰۳)	۲۰۳	۲	-/۰۰۰۹۱	-/۳۱۶۴ -/۷۳۵۴	(۷۹ و ۹۲)	۲	-/۰۰۰۹۹	-/۲۵۶۸ -/۶۸۵۶
	۱۱		۲۰۳	۴	-/۰۰۰۷۲	-/۴۸۲۸ -/۹۳۶۹	(۹۶ و ۹۵)	۶	-/۰۰۰۹۸	-/۳۱۸۸ -/۸۴۲۳
	۲۵		۲۰۶	۷	-/۰۰۰۸۶	-/۸۵۴۲ -/۹۹۹۶	(۲۴۳ و ۷۸)	۷	-/۰۰۰۹۹	-/۷۵۴۵ -/۹۹۹۹
-/۰۰۰۵	۵۰	(۳ و ۶)	۴۵	۲	-/۰۰۰۳۶	-/۱۸۸۵ -/۵۹۵۶	(۲ و ۴۹)	۱	-/۰۰۰۳۰	-/۱۲۲۳ -/۵۰۵۳
	۱۱		۳۹	۴	-/۰۰۰۳۶	-/۲۸۷۸ -/۸۲۸۷	(۵ و ۴۶)	۲	-/۰۰۰۲۵	-/۲۳۷۷ -/۷۸۰۴
	۲۵		۸۰	۷	-/۰۰۰۴۹	-/۵۸۶۸ -/۹۸۹۶	(۷ و ۴۴)	۱۱	-/۰۰۰۴۸	-/۲۵۴۷ -/۹۴۱۰
۱۰۰	۵	(۷ و ۱۰)	۴۰	۲	-/۰۰۰۴۶	-/۲۲۵۴ -/۶۴۷۱	(۵ و ۹۶)	۱	-/۰۰۰۳۵	-/۱۶۱۸ -/۵۷۳۰
	۱۱		۴۹	۴	-/۰۰۰۴۸	-/۳۲۴۸ -/۸۷۲۹	(۵ و ۹۶)	۷	-/۰۰۰۴۶	-/۲۵۳۸ -/۸۱۴۱
	۲۵		۸۳	۷	-/۰۰۰۴۹	-/۶۶۶۱ -/۹۹۶۲	(۱۵ و ۸۶)	۱۱	-/۰۰۰۴۵	-/۴۱۱۲ -/۹۶۵۰
۵۰۰	۵	(۴۰ و ۴۳)	۱۶۵	۲	-/۰۰۰۴۸	-/۲۵۶۹ -/۶۸۶۱	(۲۰ و ۴۸۱)	۳	-/۰۰۰۴۸	-/۱۱۹۷ -/۵۵۸۱
	۱۱		۸۴	۴	-/۰۰۰۴۶	-/۳۹۷۳ -/۹۱۰۰	(۵۶ و ۴۵۴)	۵	-/۰۰۰۴۹	-/۳۰۴۴ -/۸۴۶۲
	۲۵		۱۶۸	۷	-/۰۰۰۴۸	-/۷۴۶۰ -/۹۹۸۸	(۹۰ و ۴۱۱)	۱۰	-/۰۰۰۵۰	-/۵۳۹۱ -/۹۸۶۵
۱۰۰۰	۵	(۸۲ و ۸۵)	۳۵۰	۲	-/۰۰۰۵۰	-/۲۶۲۷ -/۶۹۲۳	(۶۲ و ۹۹)	۲	-/۰۰۰۴۹	-/۲۰۴۳ -/۶۳۴۷
	۱۱		۱۶۷	۴	-/۰۰۰۴۴	-/۴۰۴۰ -/۹۱۳۱	(۱۳۶ و ۸۶۵)	۴	-/۰۰۰۴۹	-/۳۷۱۵ -/۸۸۳۹
	۲۵		۱۷۱	۷	-/۰۰۰۴۴	-/۷۶۶۵ -/۹۹۹۰	(۱۲۹ و ۸۷۲)	۱۳	-/۰۰۰۵۰	-/۴۷۶۰ -/۹۷۶۶
-/۰۰۰۲۷	۵۰	(۲ و ۵)	۱۹	۲	-/۰۰۰۲۶	-/۱۴۰۴ -/۵۲۰۷	(۱ و ۵۰)	۱	-/۰۰۰۰۸	-/۰۶۳۴ -/۳۶۱۷
	۱۱	(۳ و ۶)	۴۳	۴	-/۰۰۰۲۷	-/۲۷۸۸ -/۸۲۶۴	(۵ و ۴۶)	۲	-/۰۰۰۲۵	-/۲۳۷۷ -/۷۸۰۴
	۲۵		۱۰۰	۷	-/۰۰۰۲۵	-/۵۵۱۴ -/۹۸۷۳	(۷ و ۴۴)	۱۰	-/۰۰۰۲۱	-/۳۳۰۹ -/۹۳۸۱
۱۰۰	۵	(۵ و ۸)	۲۶	۲	-/۰۰۰۲۶	-/۱۷۳۰ -/۵۸۵۴	(۴ و ۹۷)	۲	-/۰۰۰۲۱	-/۱۳۰۴ -/۵۲۶۲
	۱۱		۳۹	۳	-/۰۰۰۲۷	-/۲۴۲۷ -/۸۱۳۴	(۹ و ۹۲)	۵	-/۰۰۰۲۳	-/۲۱۸۵ -/۷۷۵۶
	۲۵		۷۳	۶	-/۰۰۰۲۶	-/۶۴۶۱ -/۹۹۶۰	(۱۲ و ۸۹)	۱۲	-/۰۰۰۱۹	-/۳۰۲۸ -/۹۳۶۴

۵۰۰	۵	(۳۲و۳۵)	۱۳۴	۲	-/۰۰۲۶	-/۲۰۸۹ -/۶۳۹۵	(۱۶و۴۸۵)	۳	-/۰۰۲۶	-/۱۱۹۷ -/۵۱۱۶
	۱۱	(۳۸و۴۱)	۱۵۵	۴	-/۰۰۲۵	-/۳۵۳۴ -/۸۹۵۲	(۶۴و۴۳۷)	۲	-/۰۰۲۶	-/۳۳۸۶ -/۸۶۹۳
	۲۵		۱۶۲	۷	-/۰۰۲۶	-/۷۲۱۶ -/۹۹۸۵	(۱۰۱و۴۰۰)	۸	-/۰۰۲۶	-/۶۰۷۸ -/۹۹۱۵
۱۰۰۰	۵	(۶۶و۶۹)	۳۳۰	۲	-/۰۰۲۷	-/۳۱۵۱ -/۶۴۷۰	(۴۹و۹۵۲)	۲	-/۰۰۲۵	-/۱۶۲۶ -/۵۸۶۲
	۱۱	(۶۴و۶۷)	۱۳۱	۴	-/۰۰۲۷	-/۳۱۸۶ -/۸۷۷۸	(۴۹و۹۵۲)	۷	-/۰۰۲۷	-/۳۵۳۶ -/۸۳۵۵
	۲۵	(۶۶و۶۹)	۲۶۸	۷	-/۰۰۲۶	-/۶۴۵۶ -/۹۹۷۵	(۱۸۹و۸۱۲)	۹	-/۰۰۲۷	-/۵۶۲۶ -/۹۸۹۱

جدول ۷. مقایسه نرخ هشدار (AR) نمودارهای کنترلی با متوسط طول اجرای تحت کنترل ( $ARL_{in}$ ) مشترک.

$ARL_{in}$	$m$	$n$	NEW				B-T-K					
			(LCL,UCL)	w	$r_0$	Exact $ARL_{in}$	AR	(LCL,UCL)	r	Exact $ARL_{in}$	AR	
۳۷۰	۱۰۰	۵	(۸و۱۱)	۵۱	۲	۳۷۰/۳۰	-/۱۲۲۸ -/۶۷۵۷	(۶و۹۵)	۱	۳۵۹/۶۴	-/۰۹۹۰ -/۶۱۲۱	
		۷	(۶و۹)	۴۴	۲	۳۷۹/۰۴	-/۳۳۲۵ -/۸۵۷۸	(۹و۹۲)	۲	۳۶۹/۳۵	-/۱۲۷۹ -/۷۲۸۳	
		۱۱	(۱۱و۱۴)	۷۵	۴	۳۵۸/۸۲	-/۲۹۳۷ -/۹۳۶۴	(۱۴و۸۷)	۳	۳۶۰/۰۴	-/۱۹۵۲ -/۸۷۷۰	
	۲۰۰	۵	(۱۴و۱۷)	۶۰	۲	۳۶۷/۳۱	-/۱۲۴۰ -/۶۵۷۵	(۱۱و۱۹۰)	۲	۳۶۳/۶۰	-/۰۸۹۵ -/۶۰۲۸	
		۷	(۹و۱۲)	۴۰	۲	۳۷۹/۴۴	-/۱۸۲۳ -/۸۲۸۸	(۱۶و۱۸۵)	۳	۳۷۲/۸۶	-/۱۱۰۵ -/۷۱۰۳	
		۱۱	(۷و۱۰)	۵۰	۲	۳۷۶/۵۸	-/۳۳۵۹ -/۹۶۷۳	(۲۲و۱۷۹)	۵	۳۶۷/۸۰	-/۱۴۱۰ -/۸۳۷۰	
	۵۰۰	۱۰۰	۵	(۸و۱۱)	۸۸	۲	۴۹۹/۴۶	-/۱۴۰۴ -/۶۷۴۴	(۴و۹۷)	۳	۴۹۹/۸۸	-/۰۷۵۲ -/۵۴۰۷
			۷	(۶و۹)	۷۴	۲	۵۰۰/۶۲	-/۲۲۸۰ -/۸۵۴۵	(۸و۹۳)	۳	۴۹۰/۹۲	-/۱۱۱۶ -/۷۰۱۹
			۱۱	(۱۱و۱۴)	۸۰	۴	۴۹۴/۶۵	-/۲۸۸۳ -/۹۳۶۰	(۱۳و۸۸)	۴	۴۶۲/۹۸	-/۱۷۴۹ -/۸۶۲۱
۲۰۰		۵	(۱۴و۱۷)	۹۳	۲	۴۹۸/۲۹	-/۱۱۹۵ -/۶۵۳۲	(۷و۱۹۴)	۳	۵۰۰/۲۰	-/۰۶۲۱ -/۵۲۲۹	
		۷	(۹و۱۲)	۴۱	۲	۵۰۵/۳۶	-/۱۷۷۲ -/۸۲۶۶	(۱۶و۱۸۵)	۲	۴۹۰/۷۶	-/۱۰۶۲ -/۷۰۸۳	
		۱۱	(۱۸و۲۱)	۵۹	۴	۵۰۴/۵۰	-/۲۴۰۵ -/۹۱۹۲	(۲۱و۱۸۰)	۵	۴۹۶/۸۰	-/۱۲۷۴ -/۸۲۵۵	

هر خانه‌ی نرخ هشدار ( $AR$ ) شامل مقادیر به دست آمده به ترتیب برای  $\gamma = ۰/۵$  و  $\gamma = ۰/۲$  می‌باشد.



جدول ۸. مقایسه متوسط طول اجرای خارج از کنترل ( $ARL_{out}$ ) نمودارهای کنترلی با متوسط طول اجرای تحت کنترل ( $ARL_{in}$ ) مشترک.

$ARL_{in}$	$m$	$n$	نمودار $W$					$B-T-K$			
			$(LCL, UCL)$	$w$	$r_0$	$Exact ARL_{in}$	$ARL_{out}$	$(LCL, UCL)$	$r$	$Exact ARL_{in}$	$ARL_{out}$
۳۷۰	۱۰۰	۵	(۱۵۳۱۷)	۵۵	۲	۳۵۴/۹	۱۳۸/۵	(۶۳۹۵)	۲	۳۴۱/۴	۲۳۰/۲
		۱۱	(۱۱۳۱۳)	۱۲۵	۲	۳۷۶/۶	۱۲۷/۲	(۳۲۳۱۷۹)	۵	۳۶۷/۸	۱۳۶/۶
۵۰۰	۵۰۰	۵	(۲۰۴۳۰۶)	۲۰	۲	۳۷۰/۴	۳۰۵/۸	(۱۸۳۴۸۳)	۳	۳۵۰/۴	۴۰۷/۱
		۱۱	(۱۴۰۳۱۴۲)	۱۴۰	۲	۳۷۴/۷	۳۵۹/۸	(۳۹۳۴۶۲)	۶	۳۷۳/۸	۴۴۲/۷
۵۰۰	۱۰۰	۵	(۱۸۳۲۰)	۷۸	۲	۵۱۲/۴	۱۵۵/۵	(۴۳۹۷)	۳	۴۹۹/۹	۱۳۹۰/۶
		۱۱	(۱۰۳۱۲)	۱۲۰	۲	۵۰۷/۰	۱۴۵/۳	(۲۱۳۱۸۰)	۵	۴۹۶/۸	۱۷۹/۹
۵۰۰	۵	۵	(۱۴۵۳۱۴۷)	۲۵	۲	۵۰۲/۹	۳۸۶/۶	(۱۶۳۴۸۵)	۳	۵۰۳/۸	۶۰۰/۳
		۱۱	(۷۵۳۷۷)	۱۵۱	۲	۴۹۸/۸	۴۳۴/۸	(۳۷۳۴۶۴)	۶	۵۰۰/۷	۶۰۲/۵

توزیع‌های اساسی: به ترتیب، نمایی با میانگین برابر ۲ (تحت کنترل) و ۱ (خارج از کنترل).

حال کارایی نمودارهای کنترلی را با ثابت نگه داشتن متوسط طول اجرای تحت کنترل ( $ARL_{in}$ ) مشترک و سپس ارزیابی نرخ هشدار ( $AR$ ) مربوطه برای فرض‌های مقابل نوع Lehman خارج از کنترل را مقایسه می‌کنیم. در جدول ۷، مقادیر نرخ هشدار ( $AR$ ) نمودار B-T-K و نمودار کنترلی ناپارامتری پیش‌نهاده شده با  $\gamma = 0.2$  و  $\gamma = 0.4$  و  $n = 5$  و  $n = 11$  و  $m = 100$  و  $m = 500$  و  $m = 1000$  متوسط طول اجرای تحت کنترل ( $ARL_{in}$ )، نشان داده شده است. پارامترهای طرح  $LCL = X_{a:m}, UCL = X_{b:m}, w, r_0$ ، با توجه به فرمول (26)، تعیین شده‌اند، تا آنجایی که متوسط طول اجرای تحت کنترل ( $ARL_{in}$ ) در صورت امکان به مقدار هدف نزدیک شود، هم‌چنین مقادیر جدول ۷، برتری نمودار کنترلی  $W$  تحت این شرح مختصر را نشان می‌دهند.

به عنوان یک تحلیل نهایی، کارایی نمودارهای کنترلی پیش‌نهاده شده را در حالت استاندارد یک خانواده‌ی پارامتری از توزیع‌ها، بررسی می‌کنیم. برای این منظور، فرض می‌کنیم که فرایند تحت کنترل یک توزیع نمایی با میانگین ۲ می‌باشد، هنگامی که توزیع خارج از کنترل دارای توزیع نمایی با میانگین ۱ است. در جدول ۸، مقادیر متوسط طول اجرای خارج از کنترل ( $ARL_{out}$ ) نمودار B-T-K و نمودار  $W$  آزاد-توزیع برای  $m = 100$  و  $m = 500$  و  $n = 5$  و دو مقدار ویژه (مشترک)  $ARL_{in} = 370$  و  $ARL_{in} = 500$ ، نشان داده شده است. پارامترهای طرح  $LCL = X_{a:m}, UCL = X_{b:m}, w, r_0$ ، همه با توجه به فرمول (۲۶) به دست آمده‌اند. تا آنجایی که متوسط طول اجرای تحت کنترل ( $ARL_{in}$ ) در صورت امکان به مقدار هدف نزدیک شود.

برای هر انتخاب، با توجه به قضیه ۱ پارامترهای طرح نمودار کنترلی جدید که عبارت‌اند از:

$LCL = X_{a:m}, UCL = X_{b:m}, w$  و  $r_0$  حاصل شده‌اند. تا آنجایی که نرخ هشدار غلط ( $FAR$ ) دقیق نمودار نتیجه‌گیری شده در صورت امکان به نرخ هشدار غلط ( $FAR$ ) خواسته شده نزدیک شود. سپس از قضیه ۳، برای برآورد عددی مقادیر نرخ هشدار ( $AR$ )، تحت دو مورد خاص فرض مقابل Lehman متناظر با  $\gamma = 0.2$  و  $\gamma = 0.4$  استفاده شده است. این نتایج در جدول ۶ تحت عنوان جدید ( $NEW$ )، جمع‌بندی شده‌اند. تحت عنوان B-T-K، نتایج متناظر نمودار بالا‌کریشنان و همکاران<sup>۱۲</sup> را نشان دادیم [8]. تاکنون انتخاب‌های پارامتر مشابه برای  $n, m$  و نرخ هشدار غلط ( $FAR$ ) همان‌طور که به کار برده شده است، را مورد بررسی قرار دادیم، که این قسمت از جدول به وضوح دوباره از جدول ۴ ایجاد شده است. جدول ۶ نشان می‌دهد که تحت نرخ هشدار غلط ( $FAR$ ) مشترک، عملکرد نمودار کنترلی جدید بهتر از نمودار B-T-K است. به عبارت دیگر، مقادیر نرخ هشدار ( $AR$ ) در همه‌ی موارد بررسی شده است. به عنوان مثال، با استفاده از یک نمونه‌ی مرجع با اندازه  $m = 500$ ، نمونه‌های آزمون با اندازه  $n = 5$  و برای یک نرخ هشدار غلط  $0.027 (FAR = 0.027)$ ، نرخ‌های هشدار ( $AR$ ) به دست آمده‌ی نمودار B-T-K، برای  $\gamma = 0.2$  ( $\gamma = 0.4$ ) عبارت‌اند از:  $0.1197 (0.5116)$ ، در حالی که نرخ‌های هشدار ( $AR$ ) متناظر نمودار کنترلی  $W$  به ترتیب برابر است با  $0.2089 (0.6395)$ .

<sup>17</sup> Balakrishnan et al

## ۱۰. مراجع

[1] Saif, A. (2009). Statistical-economic design of Hotelling's  $T^2$  control chart with variable sample size and control limits. PhD Thesis, Islamic Azad university, science and researches section.

[2] Bamni Moghadam, M. (2004). statistical quality control. First edition, PayameNoor University Press. pp. 95-107, 190, 197, 218-222 and 227-228, Tehran.

[3] Najmei Saroqi, N., (2010). Statistical-economic design of  $T^2$  Hotelling multivariate control chart with variable sample size. master thesis, Allameh Tabatabai University, School of Economics.

[4] Montgomery Douglas C., (2013). Statistical quality control, translated by Rasool Noor al-Sana, (2017) Tehran, Iran University of Science and Technology, Publishing Center. pp. 237-242, 251-252, 254-255, 258 and 736-737.

[5] Hollander, M., & Wolfe, D. A. (1999). A distribution free test for ordered alternatives (Jonckheere, Terpstra). In Nonparametric statistical methods (pp. 202-12). New York: Wiley

[6] Chakraborti, S., & Graham, M. A. (2019). Nonparametric (distribution-free) control charts: An updated overview and some results. Quality Engineering, 31(4), 523-544.

[7] Chakraborti, S., Van der Laan, P., & Bakir, S. T. (2001). Nonparametric control charts: an overview and some results. Journal of quality technology, 33(3), 304-315.

از آنجا که مهم‌ترین معیار کارایی نمودارهای کنترلی و همچنین مهم‌ترین معیار برای مقایسه‌ی آن‌ها با یکدیگر متوسط طول اجرا (ARL) است. متوسط طول اجرا در حالت کنترل عبارت از تعداد نمونه‌های گرفته شده از فرایند تا مشاهده‌ی اولین حالت خارج از کنترل است. به همین دلیل مقادیرهای بزرگ ARL برای حالت تحت کنترل مطلوب است، و برعکس برای حالت خارج از کنترل مقادیر کوچک ARL مطلوب است تا حالت‌های خارج از کنترل به سرعت کشف و اعلام شود. بنابر این، با توجه به مقادیر متوسط طول اجرای خارج از کنترل ( $ARL_{out}$ ) نشان داده شده در جدول ۸، به وضوح برتری نمودار کنترلی W ثابت می‌شود.

## ۸. بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، نمودارهای کنترلی شوهارتی یک‌متغیره ناپارامتری معرفی شدند. با استفاده از جدول‌ها و مثال‌های عددی عملکرد نمودارهای کنترلی توسط نرخ هشدار غلط (FAR) مشترک و سپس آزمون کردن نرخ هشدار (AR) آن‌ها، به این نتیجه رسیدیم که در نمودار کنترلی با نرخ هشدار غلط (FAR) مشترک، با افزایش نرخ هشدار (AR) کارایی نمودار کنترلی بیش‌تر می‌شود و همچنین با مقایسه مقادیر متوسط طول اجرای خارج از کنترل ( $ARL_{out}$ ) نمودارهای کنترلی با متوسط طول اجرای تحت کنترل ( $ARL_{in}$ ) مشترک، با معلوم بودن توزیع (نمایی)، به این نتیجه رسیدیم که با توجه به مقادیر کوچک خارج از کنترل متوسط طول اجرا (ARL) نمودار کنترلی W (برای حالت خارج از کنترل مقادیر کوچک متوسط طول اجرا (ARL) مطلوب است تا حالت‌های خارج از کنترل به سرعت کشف و اعلام شود) در مقایسه با دیگر نمودارها (B-T-K)، آشکار می‌گردد که نمودار کنترلی W دارای مزیت و برتری است.

## ۹. سپاس‌گزاری

این پژوهش با حمایت معنوی و مالی معاونت محترم پژوهشی دانشگاه علامه طباطبایی از هسته پژوهشی کیفیت انجام پذیرفته است.

# Nonparametric Control Charts Based On Runs And Wilcoxon-Type Rank-Sum Statistics

**Elham Changaei**

Master's degree in statistics from Alborz Qazvin University, Qazvin, Iran.  
saghi1862@yahoo.com

**Mohamad Bameni Moghadam**

Full Professor, Allameh Tabataba'i University, Tehran, Iran. bamenimoghadam@atu.ac.ir

**Abstract:** In this article, we introduce three new distribution-free Shewhart-type control charts that exploit run and Wilcoxon-type rank-sum statistics to detect possible shifts of a monitored process is introduced. Exact formulae for the alarm rate, the run length distribution, and the average run length (ARL) are all derived. A key advantage of these charts is that, due to their nonparametric nature, the false alarm rate (FAR) and in-control run length distribution is the same for all continuous process distributions. Tables are provided for the implementation of the charts for some typical FAR values. Furthermore, a numerical study carried out reveals that the new charts are quite flexible and efficient in detecting shifts to Lehmann-type out-of-control situations.

**Keywords:** Statistical Process Control (SPC), Control Charts, Parametric Control Charts, Distribution-Free Control Charts, Average Run Length (ARL), Exceedance Statistics.

## 1- Introduction

In today's competitive world, quality is the most important factor in advancing the goals of organizations. Today, quality is known as a business strategy, and the title of industrial giant is not for countries with mass production, but for countries with industrial growth indicators (possibility of offering higher quality products, supply of products to international markets, and the ability to offer products at a lower price). is applied [7]. Achieving industrial growth indicators is dependent on the use of modern human knowledge and technological growth, and countries that are aware of the competitive situation have accepted continuous optimization of their systems (processes and products) as a basic principle and focus more have focused on optimizing systems [1].

The basis of statistical quality control charts was established by Shewhart in 1924 to control important changes in the production process and was published in the form of an article in 1925. This diagram is considered as the emergence of statistical process control. This method was one of the first methods of quality assurance in construction activities that was introduced in modern industry. Charts and control limits are designed so that if the current performance is not very different from the normal performance, the value of the statistic calculated from the current data is within the control limits. If the current performance is significantly different from the normal performance, then the statistical finding is outside the control limits, and this situation is considered as an out-of-control situation. In statistical process control theory, an out-of-control condition is usually caused by identifiable causes, or reasoned deviations, such as sudden changes in input materials, equipment failure or malfunction, change of users, etc. In this case, production is usually stopped and research is

started to find and eliminate identifiable causes [6]. Due to the importance of using control charts, there are many control charts available for univariate cases, i.e. when there is only one output variable to control and monitor. In most control charts, the distribution is usually assumed to be normal, and almost all functional analysis in the literature also assumes that the observations are drawn from a normal distribution. However, most of the process data does not have a normal distribution, and therefore the stability and resistance of control charts to this assumption has always been a main issue of the statistical process. Researchers' findings show that some control charts are strongly affected by abnormal observations [5]. One of these methods is the non-parametric (free-distribution) Shohart control chart methods. Free-distribution control charts are less well-known and rarely referred to in specialized books. Nevertheless, control charts without distribution have many advantages and in some cases are even more efficient than other charts [4].

In this research, three new types of Shewhart's non-parametric control charts (R, N and W) are introduced, which use Wilcoxon-type total rank statistics and rotations to find out the possible changes of a process. Then, by comparing these three control charts, we come to the conclusion that the efficiency of the control chart corresponding to the W statistic is higher compared to the other two control charts (R and N), and finally, the superiority of the W control chart in process monitoring is shown.

## 2- Research Method

In this research, three types of new free-distribution control charts are introduced. The mentioned charts are used to create suitable control limits, corresponding to the ordinal statistics of a reference sample, and then to determine whether the process is under control or not, the number of circulations or the basic-rank statistics of the test sample observations are placed between the control limits. they take. The first control chart (R) is used for the maximum length of the observations of the test sample in the combined sample. While the second control chart (N) counts the number of cycles of observations of the test sample whose length exceeds a certain predetermined value of k. Finally, the third control chart (W) calculates the sum of the ranks of the test sample observations that fall between the control limits.

## 3- Three new distribution-free control charts

Traditionally, the control limits of a distribution-free control chart are established from a reference sample drawn from a process which is in-control. Let us then denote by  $X_1, X_2, \dots, X_m$  a random sample of size m from the in-control(cumulative) distribution  $F_X(x) = F(x)$  and assume that two specific order statistics, say  $X_{a:m}, X_{b:m}$  are used as control limits, viz.,

$$LCL = X_{a:m}, \quad UCL = X_{b:m} \quad (1 \leq a < b \leq m) \quad | \quad (1)$$

The parameters  $a, b$  are design parameters of the chart and their determination is traditionally achieved through two different approaches. The first one requires a specific FAR to be achieved while the second maintains a pre-specified in-control average run length (ARL) value ( $ARL_{in}$ ), such as 370 or 500. It is good to note here that their in-control ARL for a distribution-free control chart is the same for all (in-control) continuous distributions.

The test statistics used in this article are defined as follows:

(a) runs of the Y-observations that fall with in the control limits  $LCL, UCL$ ,  
 (b) the ranks of the Y-observations that fall with in the control limits  $LCL, UCL$ .  
 Under the null hypothesis  $H_0: F = G$ . the number of test sample observations  $Y_j$  that fall between successive X-observations should not attain “extreme” values, with extremes being determined based on the proportion  $n/m$ . With this in mind, two plausible test statistics that could be used for deciding whether the process is in-control are as follows:  
 the maximum run length of Y-observations that occur between the control limits,  
 the number of runs of Y-observations (between the control limits) whose length exceeds a pre-specified level  $k$ .  
 let us denote by  $M_i, i = 1, 2, \dots, m$ . If the test sample observations  $Y_j$  that fall between the  $(i - 1)$ -th and  $i$ -th order statistics of the X-sample (with the convention that  $X(0) = -\infty$ ). Clearly,  $M_i$ . provide the lengths of runs of Y-observations between successive X-observations. Then, according to the three mentioned statistics, it can be written:

$$R = \max(M_{a+1}, M_{a+2}, \dots, M_b),$$

$$N_k = |\{M_i: a + 1 \leq i \leq b, M_i \geq k\}|, \tag{۲}$$

$$W = \sum_{i=a+1}^b W_i.$$

( $k$  is an additional integer-valued design parameter) where  $W_i$  denotes the sum of the ranks of the Y-observations falling between  $X(i-1)$  and  $X(i)$ .

**Table 1-Design parameters for the three charts with FAR = 0.10.**

R - chart					N - chart						W - chart				
a	b	r <sub>0</sub>	r	FAR	a	b	r <sub>0</sub>	r <sub>1</sub>	k	FAR	a	b	r <sub>0</sub>	w	FAR
1	4	1	2	0.0989	3	6	2	0	2	0.0979	1	4	4	10	0.0919

**Table 2- Reference and test samples**

Reference test sample	0.0547494	0.0915627	0.1925020	0.3298570	0.5872420
	0.6464540	0.7250190	0.7319490	0.8796790	0.9683790
In-control test sample	0.1492300	0.3494970	0.6038480	0.6787060	
Out-of-control test sample	0.0041391	0.0475546	0.1698870	0.1921032	

and performing some algebraic manipulations, we obtain the expression

$$W = \frac{1}{2} (\sum_{i=a+1}^b M_i)^2 + \sum_{i=a+1}^b i M_i + (M_0 + a - \frac{3}{2}) \sum_{i=a+1}^b M_i. \tag{3}$$

Where  $M_0 = \sum_{i=1}^a M_i$ , denotes the number of observations of the Y-sample before LCL. When the statistic  $R$  is being used, the process will be declared to be in-control if the following two conditions hold true:

$$R \leq r, \quad M_0 \leq r_0 \tag{4}$$

With  $r, r_0$  being the design parameters of the control chart. In a similar vein, when the test statistic  $N_k$  is being used, the process will be declared to be in-control, if the following two conditions hold true:

$$N_k \leq r_1, \quad M_0 \leq r_0 \tag{5}$$

Finally, if the Wilcoxon-type rank-sum statistic  $W$  is used to monitor the process, the process will be declared to be in-control if the following two conditions hold true:

$$W \leq w, \quad M_0 \leq r_0 \tag{6}$$

With  $w, r_0$  being the design parameters of this chart. With respect to this chart, it is worth mentioning that the largest possible value of  $W$  occurs when all the  $Y$ -observations fall in the interval  $(X_{b-1:m}, X_{b:m})$ ; in this case, their ranks are  $(b - 1) + j, j = 1, 2, \dots, n$  with the corresponding rank-sum statistic becoming.

$$n(b - 1) + \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n + 2b - 1)}{2}. \tag{7}$$

Obviously, the smallest possible value of  $W$  is zero (attained when no  $Y$ -observation falls between LCL and UCL), and consequently the support of the distribution of  $W$  is

$$R_W = \left\{ 0, 1, \dots, \frac{n(n + 2b - 1)}{2} \right\} \tag{8}$$

Before closing this section, we shall present an example to illustrate the basic principles of the proposed nonparametric control charts. Suppose we wish to establish distribution-free control charts based on a reference sample of size  $m=10$  and test samples of size  $n=4$ . In Table 1, we have presented a choice for the design parameters for each of the three control charts described earlier that guarantees an  $FAR$  of 10% ( $FAR \leq 0.10$ ).

In order to demonstrate how these control charts perform, let us consider the case in which the in-control observations come from a uniform distribution on  $(0, 1)$ ; (i.e.,  $F(x) = x, 0 < x < 1$ .) The first two rows of Table 2 present the simulated reference sample (in ascending order), using which we obtain the control limits as

- R-chart:  $LCL = X_{1:10}, \quad UCL = X_{4:10}$ ,
- N-chart:  $LCL = X_{3:10}, \quad UCL = X_{6:10}$
- W-chart:  $LCL = X_{1:10}, \quad UCL = X_{4:10}$ .

After the collection of the reference sample, if the process continues to remain in-control, the test samples of size  $n = 4$  will also come from a uniform distribution in the interval  $(0,1)$ . One such sample has been generated and is presented in the third row of Table 2. The  $m + n = 14$  observations of the combined ordered  $(X, Y)$  sample yields the sequence.

$X X Y X X Y X Y X X X X$

resulting in the exceedance statistics  $M_i$ s to be

$$M_1 = 0, M_2 = 0, M_3 = 1, M_4 = 0, M_5 = 1, M_6 = 1, M_7 = 1, M_8 = 0, M_9 = 0, M_{10} = 0.$$

If the  $R$ -chart is used, we find.

$$R = \max(M_2, M_3, M_4) = 1,$$

$$\text{and since } R \leq 2 = 1 \quad \text{و} \quad M_0 = M_1 = 0 \leq 1 = r_0,$$

we conclude that the process is in-control. Likewise, if the  $N$ -chart is used, we find

$$N_2 = |\{M_i: 4 \leq i \leq 6 \text{ و } M_i \geq 2\}| = 0,$$

and since

$$N_2 \leq 0 = r_1 \quad \text{و} \quad M_0 = \sum_{i=1}^3 M_i = 1 \leq 2 = r_0,$$

### 3. Exact in-control distributions of the statistics

Suppose  $m$  is a sample,  $X_1, X_2, \dots, X_m$  came from the in-control distribution  $F_X(x) = F(x)$  and  $n$  a new test sample  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  came from distribution  $F_Y(x) = G(x)$ . It is evident that the exact distribution of the statistics  $R$  and  $N_k$  can be sampled. Thus,  $M = \max(M_1, M_2, \dots, M_r)$  and its distribution, under the null hypothesis

**4- Out-of-control distributions of the statistics**

Let us now assume that the observations  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  of the test sample come from a continuous distribution  $G(x)$ . In order to state our formulas in a general form, we express the probability that the rule does not signal an alarm as

$$p(m, n, a, b; \mathbf{c}; F, G) = \sum_{(m_0, m_{a+1}, \dots, m_b) \in A} P(M_0 = m_0 \text{ \& } M_j = m_j \quad a + 1 \leq j \leq b), \quad (9)$$

where  $\mathbf{c}$  is a vector of constants that should be determined so that the rule meets some requirements (e.g., a pre-specified FAR or in-control ARL) and  $A$  is the space where the values of the random vector  $(M_0, M_{a+1}, M_{a+2}, \dots, M_b)$ , should be in order for the control chart not to issue an alarm It is clear that the FAR is the complement of  $p(m, n, a, b; \mathbf{c}; F, G)$  for the special case when  $G = F$ , i.e.,

$$FAR = 1 - p(m, n, a, b; \mathbf{c}; F; F) \quad (10)$$

Let us now consider the general case when the  $X$ - and  $Y$ -observations do not follow the same distribution. In view of (10) all we need is an exact formula for the summands on the RHS of (10). For notational convenience, let us denote the random vector  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  by  $\mathbf{Y}$ , the ordered  $X$ -sample extending from the  $a$ -th to  $b$ -th order statistics by  $X_{a:b}$ , i.e.,  $X_{a:b} = (X_{a:m}, X_{a+1:m}, \dots, X_{b:m})$  and  $U_{a:b}$  for the corresponding uniform order statistics from a random sample of size  $m$ . Then:

$$p = (M_0(Y; X_{a:b}) = m_0 \text{ \& } M_j(Y; X_{a:b}) = m_j \quad a + 1 \leq j \leq b) \quad (11)$$

which, upon using the fact that

$$F(X_{a:b}) = (F(X_{a:m}), F(X_{a+1:m}), \dots, F(X_{b:m})) = (U_{a:m}, U_{a+1:m}, \dots, U_{b:m}) = U_{a:b}$$

leads to the equivalent expression

$$p = P(M_0(F(Y); U_{a:b}) = m_0 \text{ \& } M_j(F(Y); U_{a:b}) = m_j, \quad a + 1 \leq j \leq b) \quad (12)$$

Since the joint density function of  $U_{a:b}$  is

$$\begin{aligned} f_{a:b}(u_a, u_{a+1}, \dots, u_b) &= f_{a:b}(U_{a:b}) \\ &= \frac{m!}{(a-1)!(m-b)!} (u_a)^{a-1} (1 - u_b)^{m-b}, \quad 0 \leq u_a \leq u_{a+1} \leq \dots \leq u_b \leq 1 \end{aligned} \quad (13)$$

**5. Run length distribution**

One inherent weakness of the nonparametric control charts is that the signaling events are not independent and therefore the ARL of the chart cannot be calculated as the reciprocal of the signaling probability. However, one can make use of an appropriate conditioning argument to establish a formula for the exact run length distribution and its mean.

In view of (9) and (11) it is clear that, under the condition  $X_{a:b} = (x_a, x_{a+1}, \dots, x_b) = x_{a:b} \in \mathfrak{R}^{b-a+1}$  the waiting time random variable  $N$  which describes the number of  $Y$ -samples until an out-of-control alarm issued follows a geometric distribution with success probability

$$p(x_{a:b}) = \sum_{(m_0, m_{a+1}, \dots, m_b) \in A} P(M_0(Y; x_{a:b}) = m_0 \text{ \& } M_j(Y; x_{a:b}) = m_j, \quad a + 1 \leq j \leq b)$$

and probability mass function

$$(1 - p(x_{a:b})) (p(x_{a:b}))^{k-1} = (p(x_{a:b}))^{k-1} - (p(x_{a:b}))^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Consequently, the unconditional distribution of  $N$  may be expressed as

$$P(N = k) = D(k - 1) - D(k) \tag{14}$$

where  $D(0) = 1$  and

$$D(k) = E_{x_{a:b}} \left\{ (p(x_{a:b}))^k \right\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

**6. Research findings**

In this section, we are going to compare the performance of control charts (R, N and W) using tables and numerical examples. and show that the performance of control chart W is better compared to two control charts (R and N) and other charts. Since one method of comparing control charts is to use the joint false alarm rate (FAR) or average run length under ( $ARL_{in}$ ) joint control and then test their alarm rates (AR).

**7- Numerical results**

In this section, by numerical testing, we show the effect of new control charts and their stability characteristics in both under-control and out-of-control situations. In Table 3, we present the AR of the three control charts for different choices of  $m, n$ . The design parameters  $a, b, r_0, r, k$  and  $w$  For when the false alarm rate is 0.05 (FAR=0.05). Then, the AR values for  $\gamma = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$  were all determined with the use of Theorem 3.

**Table 3:** Comparison of the AR of the three control charts with FAR = 0.05 ( $\gamma = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ ).

m	n	R - chart				N - chart				W - chart						
		(LCL,UCL)	$r_0$	r	Exact FAR	AR	(LCL,UCL)	$r_0$	k	Exact FAR	AR	(LCL,UCL)	w	$r_0$	Exact FAR	AR
200	11	(21,24)	6	5	0.0045	0.2647 0.8488 0.9922	(21,24)	4	2	0.0044	0.2646 0.8488 0.9922	(21,24)	135	4	0.0048	0.2669 0.8497 0.9923
	25	(16,19)	6	5	0.0049	0.5678 0.9952 0.9999	(16,19)	6	2	0.0049	0.5677 0.9952 0.9999	(16,19)	190	6	0.0050	0.5688 0.9953 0.9999
500	11	(33,36)	3	2	0.0048	0.3042 0.8911 0.9965	(33,36)	3	2	0.0048	0.3041 0.8911 0.9965	(33,36)	3	2	0.0049	0.3045 0.8912 0.9965
	25	(21,24)	4	4	0.0045	0.5907 0.9971 0.9999	(21,24)	4	2	0.0045	0.5907 0.9971 0.9999	(21,24)	150	4	0.0046	0.5915 0.9971 0.9999

In Table 3, we observe that the three distribution-free control charts exhibit (for appropriately chosen parameters) similar performance in terms of AR for a common FAR rate of 0.05.

**Table 4:** Comparison of the AR of control charts with the same  $ARL_{in}$

$ARL_{in}$	m	n	NEW				B-T-K				
			(LCL,UCL)	w	$r_0$	Exact $ARL_{in}$	AR	(LCL,UCL)	r	Exact $ARL_{in}$	AR
370	100	7	(6,9)	44	2	379/04	0.2325 0.8578	(9,92)	2	369.35	0.1279 0.7283
		11	(11,14)	75	4	358/82	0.2937 0.9364	(14,87)	3	360.04	0.1952 0.8770
	200	7	(9,12)	40	2	379.44	0.1823 0.8388	(16,185)	3	372.86	0.1105 0.7103
		11	(7,10)	50	2	376.58	0.3359 0.9673	(22,179)	5	367.80	0.1410 0.8370
500	100	7	(6,9)	74	2	500.62	0.2280 0.8545	(8,93)	3	490.92	0.1116 0.7019
		11	(11,14)	80	4	494/65	0.2883 0.9360	(13,88)	4	462.98	0.1749 0.8621
	200	7	(9,12)	41	2	505.36	0.1772 0.8266	(16,185)	2	490.76	0.1062 0.7083
		11	(18,21)	59	4	504.50	0.2405 0.9192	(21,180)	5	496.80	0.1274 0.8255

Each AR cell contains the values attained for  $\gamma = 0.5$  and 0.2, respectively.



One way to compare two different control charts is to use the common false alarm rate (FAR) or average run length under control ( $ARL_{in}$ ) and then test their alarm rates (AR). As a result, it is possible to compare the efficiency of the free control chart-preset distribution.

**Table 5:** Comparison of the  $ARL_{out}$  of control charts with the same  $ARL_{in}$ .

$ARL_{in}$	$m$	$n$	$W - chart$					$B - T - K$			
			$(LCL, UCL)$	$w$	$r_0$	Exact $ARL_{in}$	$ARL_{out}$	$(LCL, UCL)$	$r$	Exact $ARL_{in}$	$ARL_{out}$
370	100	5	(15,17)	55	2	354.9	138.5	(6,95)	2	431.4	230.2
		11	(11,13)	125	2	376.6	127.2	(22,179)	5	367.8	136.6
	500	5	(204,206)	20	2	370.4	305.8	(18,483)	3	350.4	407.1
		11	(140,142)	140	2	374.7	359.8	(39,462)	6	373.8	442.7
500	100	5	(18,20)	78	2	512.4	155.5	(4,97)	3	499.9	1390.6
		11	(10,12)	120	2	507.0	145.3	(21,180)	5	496.8	179.9
	500	5	(145,147)	25	2	502.9	386.6	(16,485)	3	503.8	600.3
		11	(75,77)	151	2	498.8	434.8	(37,464)	6	500.7	602.5

We now compare the performance of control charts by keeping the average run length under joint control ( $ARL_{in}$ ) constant and then evaluating the corresponding alarm rate (AR) for out-of-control Lehman-type opposite assumptions. In Table 4, the alarm rate (AR) values of the B-T-K chart and the non-parametric control chart proposed with  $\gamma = 0.2$  and  $0.5$ ,  $n = 7$  and  $11$ ,  $m = 100$  and  $200$ ; average execution length under control ( $ARL_{in} = 370$  and  $500$ ) are shown. given. The design parameters  $LCL = X_{a:m}, UCL = X_{b:m}, w, r_0$ , have been determined, as long as the average length of execution under control is close to the target value if possible, also the values of Table 4 show the superiority of control chart W under this brief description.

In Table 5, the average values of the out-of-control( $ARL_{out}$ ) execution length, the B-T-K diagram and the W free-distribution diagram for  $m = 100$  and  $500$ ,  $n = 5$  and  $11$ , and two eigenvalues (common)  $ARL_{in} = 500$  and  $370$  are shown.

Because the most important criterion for the efficiency of control charts and also the most important criterion for comparing them with each other is the average execution length (ARL). Average run length in control mode is the first out of control mode. For this reason, large ARL values are desirable for the under-control state, and conversely, for the out-of-control state, small ARL values are desirable so that the out-of-control states are quickly discovered and announced. Therefore, according to the average values of the out-of-control ( $ARL_{out}$ ) execution length shown in Table 5, the superiority of the W control chart is clearly proven.

**8. Discussion and conclusion**

In this article, non-parametric one-variable Shewhart control charts were introduced. By using tables and numerical examples of the performance of control charts by common false alarm rate (FAR) and then testing their alarm rate (AR), we came to the conclusion that in the control chart with common false alarm rate (FAR), with increasing rate Warning (AR) increases the efficiency of the control chart and also by comparing the average values of the out-of-control execution length of the control charts with the average execution length under common control, with the known distribution (exponential), we came to the conclusion that due to the small out-of-control values Average control run length (ARL) control chart W (for

the out-of-control state, small values of average run length (ARL) are desirable so that out-of-control states can be discovered and announced quickly) compared to other charts (B-T-K), it is revealed that Control chart W has advantages and superiority.

### 9- Acknowledgments

This research has been carried out with the spiritual and financial support of the Honorable Research Vice-Chancellor of Allameh Tabatabai University from the quality research core

### 10- References

- [1] Bamni Moghadam, M. (2004). statistical quality control. First edition, PayameNoor University Press. pp. 95-107, 190, 197, 218-222 and 227-228, Tehran.
- [2] Chakraborti, S., Van der Laan, P., & Bakir, S. T. (2001). Nonparametric control charts: an overview and some results. *Journal of quality technology*, 33(3), 304-315.
- [3] Chakraborti, S., & Graham, M. A. (2019). Nonparametric (distribution-free) control charts: An updated overview and some results. *Quality Engineering*, 31(4), 523-544.
- [4] Hollander, M., & Wolfe, D. A. (1999). A distribution free test for ordered alternatives (Jonckheere, Terpstra). In *Nonparametric statistical methods* (pp. 202-12). New York: Wiley
- [5] Montgomery Douglas C., (2013). *Statistical quality control*, translated by Rasool Noor al-Sana,(2017) Tehran, Iran University of Science and Technology, Publishing Center. pp. 237-242, 251-252, 254-255, 258 and 736-737.
- [6] Najmei Saroqi, N., (2010). Statistical-economic design of  $T^2$  Hotelling multivariate control chart with variable sample size. master thesis, Allameh Tabatabai University, School of Economics.
- [7] Saif, A. (2009). Statistical-economic design of Hotelling's  $T^2$  control chart with variable sample size and control limits. PhD Thesis, Islamic Azad university, science and researches section.