

طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترلی علامت ناپارامتری میانگین متحرک موزون نمایی تعمیم یافته

مرجان شمسی پور مقدم

کارشناس ارشد آمار، گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران. ایران. marjanshamsipour@atu.ac.ir

آذر غیائی

نویسنده‌ی عهده‌دار مکاتبات، استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران. ایران. azarghyasi@atu.ac.ir

محمد بامنی مقدم

استاد، گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی دانشگاه علامه طباطبائی، تهران. ایران. bamenimoghadam@atu.ac.ir

چکیده: نمودارهای کنترلی از جمله کارآمدترین ابزار کنترل کیفیت برای پایش مشخصه‌های مختلف کیفیت در فرایند تولید محسوب می‌شوند که هدف کلی آن‌ها بهبود کیفیت محصول است. در نمودارهای کنترلی شوهارتی اغلب، پذیرهی نرمال بودن داده‌ها برقرار می‌شود، اما گاهی اطلاعات کافی در مورد توزیع آماری مشاهدات وجود ندارد، به همین دلیل در این شرایط از نمودارهای کنترلی ناپارامتری استفاده می‌شود. در این تحقیق، نمودار کنترلی علامت ناپارامتری برای شرایطی که مشاهدات از توزیع مشخصی پیروی نمی‌کنند، معرفی شده است. نمودار کنترلی علامت ناپارامتری میانگین متحرک موزون تعمیم یافته ابتدا با استفاده از روش طراحی آماری و متوسط طول اجرا، طراحی شده و عملکرد آن از نظر آماری بررسی شده است. اما تنها طراحی آماری برای کسب اطمینان از عملکرد یک نمودار کنترلی کافی نیست. بنابراین، پس از انجام طراحی آماری، به طراحی اقتصادی و طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترلی علامت ناپارامتری یاد شده با استفاده از مدل هزینه لورزن و ونس پرداخته شده است. نتایج حاصل از طراحی آماری و همچنین طراحی اقتصادی و آماری اقتصادی نشان می‌دهند که این نمودار کنترلی عملکرد خوبی برای کشف تغییرات کوچک در فرایند و در عین حال کاهش هزینه و زمان تولید داشته است.

واژگان کلیدی: طراحی اقتصادی، میانگین متحرک موزون تعمیم یافته، میانگین متحرک موزون نمایی، نمودار کنترلی علامت، نمودار کنترلی ناپارامتری

می‌شوند و خروجی فرایند با انتظارات مورد نظر انطباق نخواهد داشت. در واقع نمودار کنترلی ابزاری برای بررسی ایستایی فرایند و شناسایی عوامل دخیل در خروج احتمالی فرایند از حالت تحت کنترل است. متوسط طول اجرا به معنای متوسط تعداد نمونه‌های تولید شده توسط نمودار کنترلی قبل از اعلام اولین هشدار کشف نقطه خارج از کنترل و یک معیار رایج در پایش فرایند است. برای مقایسه عملکرد نمودارهای کنترلی از معیارهایی مانند متوسط طول اجرا استفاده می‌شود. در زمان تحت کنترل بودن فرایند، متوسط طول اجرا باید به اندازه کافی بزرگ باشد تا از هشدار

۱. مقدمه

نمودارهای کنترلی به عنوان یکی از ارزشمندترین ابزار کنترل آماری فرایند برای بهبود کیفیت فرایند در مرحله ساخت به شمار می‌روند. این نمودارها از طریق نمونه‌گیری‌های متناوب و مطالعه تغییرپذیری مشاهدات، تعیین می‌کنند که فرایند طبق انتظار عمل می‌کند یا اقدام‌های اصلاحی برای بازگرداندن فرایند به حالت تحت کنترل مورد نیاز است گاهی برخی عوامل در یک فرایند تحت کنترل، باعث تغییر فرایند به حالت خارج از کنترل

Corresponding author: azarghyasi@atu.ac.ir
<https://doi.org/10.48313/jqem.2023.192566>

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۰/۰۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۲/۲۶
دوره ۱۳/ شماره ۲
صفحات ۱۱۱-۱۳۰

متوسط طول اجرا یکی از رایج‌ترین شاخص‌های موجود برای ارزیابی عملکرد یک نمودار کنترلی در طراحی آماری محسوب می‌شود شینلی [۱] نمودارهای کنترلی پارامتری زمانی که فرایند تحت کنترل است، به فرض نرمال بودن داده‌ها حساس خواهند بود اما نمودارهای کنترلی ناپارامتری چنین محدودیتی ندارند. در طراحی آماری یک نمودار کنترلی ناپارامتری باید به این نکته دقت شود که، هشدارهای نادرست منجر به تنظیم غیر ضروری فرایند شده و در نتیجه میزان اطمینان پژوهشگر به نمودار کنترلی ناپارامتری کاهش می‌یابد. طراحی نمودار کنترلی ناپارامتری باید به گونه‌ای باشد که به‌عنوان یک ابزار پایش فرایند کارایی مناسب کافی داشته باشد.

هدف نهایی در کنترل کیفیت بحث در مورد هزینه‌های کیفیت و کمینه کردن هزینه‌های تولید است. توجه صرف به معیارهای آماری در طراحی آماری نمودارهای کنترلی باعث می‌شود که نمودار کنترلی طراحی شده از نظر اقتصادی بهینه نباشد و این عامل با هدف کنترل کیفیت و نمودارهای کنترلی، یعنی با افزایش کیفیت و ایجاد صرفه اقتصادی در فرایند تولید در تناقض است. از این رو برای دستیابی به ملاک‌های اقتصادی بهتر، طراحی اقتصادی و آماری-اقتصادی نمودارهای کنترلی نیز به کار برده شده است. در این پژوهش طراحی آماری و اقتصادی برای دو نمودارهای کنترلی علامت ناپارامتری در نظر گرفته شده است. نمودارهای کنترلی ناپارامتری از نظر فرضیه‌های مربوط به مشخص بودن توزیع مشاهدات موجود در یک فرایند بسیار انعطاف‌پذیر هستند و قابلیت کشف تغییرات کوچک را دارند شئو و لین [۲] در این حالت یک نمودار کنترلی ناپارامتری میانگین متحرک موزون نمایی (EWMA) را معرفی کردند و نشان دادند که این نمودار کنترلی ناپارامتری، عملکرد خوبی برای کشف تغییرات کوچک در فرایند دارد.

۲. پیشینه پژوهش

طبق استدلال شینلی [۱] هدف اصلی نمودارهای کنترلی پارامتری و ناپارامتری به طور کلی پایش و بهبود کیفیت یک فرایند در حوزه کنترل آماری فرایند است. نمودارهای کنترلی پارامتری همواره بر پایه این پذیره طراحی شده اند که مشاهدات موجود در فرایند از یک توزیع مشخص مانند توزیع نرمال پیروی

اشتباه جلوگیری شود اما در زمان خارج از کنترل بودن فرایند متوسط طول اجرا بایستی به اندازه کافی کوچک باشد تا نمودار کنترلی در کمترین زمان ممکن هشدار مبنی بر خارج از کنترل بودن فرایند را اعلام کند نمودارهای کنترلی در یک تقسیم بندی کلی به دو دسته شوهارتی و غیر شوهارتی تقسیم می‌شوند. در نمودارهای کنترلی شوهارتی فقط از اطلاعات آخرین نمونه برای پایش فرایند استفاده می‌شود بنابراین، این نمودارها برای شناسایی و نشان دادن انحراف‌های کوچک در مشخصه مورد نظر فرایند حساسیت لازم را نخواهند داشت.

در مقابل، آماره مربوط به نمودارهای کنترلی غیر شوهارتی نه تنها به آخرین زیرگروه منطقی بلکه به نمونه‌های زیر گروه‌های قبلی نیز وابسته است. این موضوع نمودارهای کنترلی غیر شوهارتی را قادر می‌سازد که انتقال‌های کوچک در فرایند تولید را به راحتی تشخیص دهند. برخی نمودارهای کنترلی غیر شوهارتی از جمله نمودارهای پارامتری هستند که مشاهدات به کار برده شده در آن‌ها از یک توزیع آماری مشخص پیروی می‌کند. اما در بسیاری از موارد، فرضیه مشخص بودن توزیع مشاهدات به دلیل ناکافی بودن اطلاعات پژوهشگر برای پذیرفتن آن رد می‌شود و به همین دلیل نمیتوان ادعا کرد که داده‌های پژوهش از توزیع مشخصی پیروی می‌کنند.

آن دسته از نمودارهای کنترلی که تغییرات موجود در فرایندی با داده‌های یاد شده (داده‌های با توزیع آماری نامشخص) را بررسی می‌کنند، نمودارهای کنترلی ناپارامتری نامیده می‌شوند، نمودارهای کنترلی علامت از جمله نمودارهای کنترلی ناپارامتری هستند که در این پژوهش مورد مطالعه قرار گرفته اند. نمودارهای کنترلی در شرایط مختلف اشکال مختلفی خواهند داشت. به عبارت دیگر مشخص بودن یا نبودن توزیع داده‌های مشاهدات مورد مطالعه پارامتری یا ناپارامتری بودن نمودار کنترلی را تعیین خواهد کرد. از این رو در این پژوهش نمودارهای کنترلی پارامتری کاربرد ندارند و از نمودارهای کنترلی ناپارامتری علامت برای کشف تغییرات موجود در فرایند استفاده شده است. دو نمودار کنترلی علامت ناپارامتری در این پژوهش معرفی شده اند: نمودار کنترلی علامت میانگین متحرک موزون نمایی و نمودار کنترلی علامت میانگین متحرک موزون تعمیم یافته، دو نمودار کنترلی ناپارامتری هستند که در ادامه این پژوهش معرفی شده و عملکرد این دو نمودار با هم مقایسه شده است.

کنند اما در بسیاری از موارد چنین پذیرهای برقرار نیست به همین دلیل نمودارهای کنترلی پارامتری کارایی خود را برای پایش فرایند از دست می‌دهند در این حالت نمودارهای کنترلی ناپارامتری که حساسیتی نسبت به مشخص بودن یا نبودن توزیع مشاهدات ندارد، مفید واقع می‌شوند.

پس از معرفی نمودارهای کنترلی توسط شوهارت در سال ۱۹۲۴ بست و نوهاسر [۳]، پژوهش‌های متعددی در این حوزه انجام شدند که اغلب بر مبنای پذیرهی نرمال بودن مشاهدات شکل گرفته بودند.

یوراستون و زمیر [۴] و امین و همکاران [۵] عنوان کردند که غیر نرمال بودن مشاهدات می‌تواند یک مشکل جدی برای طراحی نمودارهای کنترلی شوهارتی باشد البته در آن زمان هنوز نمودارهای کنترلی غیر شوهارتی معرفی نشده بودند کانی و همکاران [۶] پس از بررسی مشکلات مربوط به کنترل کیفیت فرایند و چالش‌های موجود در رابطه با غیر نرمال بودن مشاهدات به این نتیجه رسیدند که نمودار کنترلی میانگین متحرک موزون نمایی تحت توزیع‌های غیر نرمال استواری خود را حفظ می‌کند. بدین ترتیب نمودارهای کنترلی غیر شوهارتی معرفی شدند و بسیاری از پژوهشگرها برای رفع مشکل حساسیت نمودارهای کنترلی شوهارتی نسبت به توزیع غیر نرمال، مشاهدات از نمودارهای کنترلی غیر شوهارتی استفاده می‌کردند.

شو و لین [۲] نمودارهای کنترلی میانگین متحرک موزون نمایی را به نمودارهای کنترلی میانگین متحرک موزون تعمیم‌یافته تعمیم دادند و در واقع حالت کلی از نمودارهای کنترلی میانگین متحرک موزون را معرفی کردند. همچنین، شو و لین [۲] مجدداً در مورد نمودارهای کنترلی میانگین متحرک موزون تعمیم‌یافته بحث کرده و از این نمودارها برای کشف تغییرات کوچک در فرایند استفاده کردند و نشان دادند که این نمودارها عملکرد خوبی دارند پژوهش‌ها در زمینه نمودارهای کنترلی غیر شوهارتی ادامه یافته است تا زمانی که برای اولین بار نمودارهای کنترلی ناپارامتری معرفی شدند در ادامه بیشتر در مورد پژوهش‌های انجام شده در حوزه طراحی آماری و طراحی اقتصادی نمودارهای کنترلی ناپارامتری بحث شده است. امین و سیرسی [۷] نمودار کنترلی ناپارامتری میانگین متحرک موزون نمایی را بر مبنای آماره رتبه علامت ویلکاکسون معرفی کردند و پس از مقایسه این نمودار کنترلی با نمودار کنترلی پارامتری میانگین متحرک موزون

نمایی بر مبنای آماره میانگین (X) به این نتیجه رسیدند که زمانی که توزیع مشاهدات معلوم نیست نمودار کنترلی ناپارامتری میانگین متحرک موزون نمایی عملکرد بهتری نسبت به حالت پارامتری آن خواهد داشت. همچنین امین و همکاران [۵] باز هم با استفاده از آماره رتبه علامت ویلکاکسون به طوری که رتبه بندی در درون گروه‌ها انجام می‌شد یک نمودار کنترلی ناپارامتری را طراحی و با استفاده از روش مونت کارلو متوسط طول اجرا را برای ارزیابی عملکرد این نمودار کنترلی محاسبه کردند. در آن سال‌ها رندلز و ولفی [۸] کتابی را تحت عنوان مقدمه ای بر نظریه آمار ناپارامتری منتشر کردند که تمامی مباحث آماری مربوط به آماره‌های ناپارامتری را در بر داشت در ادامه روند رو به رشد تعداد پژوهش‌های منتشر شده در حوزه نمودارهای کنترلی ناپارامتری پارک و رینولدز [۹] نیز روش‌های ناپارامتری برای پایش پارامتر مکان را مورد بررسی قرار دادند با تاجاریا و فریرسون [۱۰] یک نمودار کنترلی ناپارامتری بر مبنای مجموع موزون از رتبه‌های متوالی با هدف کشف سریع تغییرات نامعلوم در فرایند و کاهش هشدارهای اشتباه فرایند معرفی کردند هر چند مبنای انجام این پژوهش همان روش‌های سنتی مانند نمودار کنترلی شوهارت بود اما نتایج به دست آمده در این پژوهش بسیار دقیق تر از نتایج قبلی بودند. آماره‌های آزمون نمودارهای کنترلی ناپارامتری با حالت پارامتری متفاوت هستند. به عنوان مثال، آماره میانگین برای آزمون پارامتری و آماره رتبه‌ای برای آزمون‌های ناپارامتری به کار برده می‌شوند. مطالعه بر روی نمودارهای کنترلی ناپارامتری ادامه داشته و تعداد پژوهش‌های انجام شده در این حوزه، روز به روز بیشتر شده است. هک و جانز [۱۱] با استفاده از آماره رتبه‌های متوالی به دست آمده از مشاهدات، یک نمودار کنترلی ناپارامتری میانگین متحرک موزون نمایی طراحی کردند که نسبت به داده‌های پرت حساسیت بسیار کمی داشت. باکر [۱۲] اشاره کرد که نمودارهای کنترلی یکی از رایج ترین و ابتدایی ترین ابزارهای آماری برای پایش فرایند هستند که اغلب توزیع مشاهدات به کار برده شده در فرایند معلوم در اکثر موارد نرمال است اما گاهی در کاربرد به مواردی برخورد می‌کنیم که توزیع نامعلوم است. به همین دلیل باکر یک نمودار کنترلی ناپارامتری بدون نیاز به توزیع آماری برای پایش مرکز فرایند معرفی کرد که از نوع نمودار شوهارت ناپارامتری بود و از آماره رتبه علامت ویلکاکسون در آن استفاده شده بود همان طور

کنترلی پارامتری (در حالتی که توزیع‌ها مشاهدات نامعلوم است) می‌باشد.

الویزاکوس و همکاران [۱۸]، نمودار کنترلی میانگین متحرک با وزن همگن دوگانه ناپارامتریک (DHWMA) بر اساس آماره علامت برای پیش‌پارامتر مکان یک توزیع مجهول و پیوسته پیشنهاد دادند. بطوری‌که عملکرد نمودار پیشنهادی از طریق توزیع طول اجرا و ویژگی‌های مرتبط با آن با انجام شبیه‌سازی مونت کارلو اندازه‌گیری می‌شود. نمودار علامت DHWMA با نمودارهای علامت ناپارامتریک دیگر، مانند میانگین متحرک وزنی همگن، میانگین متحرک وزنی (GWMA)، دو برابر GWMA و نمودارهای میانگین متحرک با وزن نمایی سه‌گانه و همچنین نمودار DHWMA سنتی مقایسه شد و نتایج این تحقیق نشان داد که، نمودار پیشنهادی به خصوص برای جابجایی‌های کوچک به همان اندازه و در برخی موارد بهتر از رقبای خود عمل می‌کند. لی‌زو و همکاران [۱۹] به منظور بهبود کارایی نظارت بر فرآیند خودهمبستگی چند متغیره و کاهش هزینه کنترل فرآیند، یک روش طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل میانگین متحرک وزنی نمایی چند متغیره باقیمانده (MEWMA) با اندازه نمونه متغیر و فواصل نمونه‌گیری (VSSIs) پیشنهاد دادند. که در اول، نمودارهای کنترل باقیمانده MEWMA با VSSI برای نظارت بر فرآیندهای همبستگی چند متغیره طراحی شدند. دوم، مدل اقتصادی نمودار کنترل MEWMA باقیمانده VSSI ایجاد گردید. سوم، با استفاده از طراحی آزمایشی متعامد و تحلیل رگرسیون، تحلیل حساسیت مدل اقتصادی برای بدست آوردن رابطه بین پارامترهای مدل و پارامترهای طراحی نمودار کنترل انجام شد. در نهایت، از طریق تحلیل بهینه، تأیید شد که مدل اقتصادی پیشنهادی هزینه مورد انتظار کمتری در واحد زمان دارد.

شین لی [۱] یک نمودار کنترلی ناپارامتری تحت عنوان نمودار کنترلی علامت ناپارامتری میانگین متحرک موزون نمایی را در نظر گرفته و حالت تعمیم‌یافته آن را با در نظر گرفتن قیدهای موجود تحت عنوان نمودار کنترلی علامت ناپارامتری میانگین متحرک موزون تعمیم‌یافته معرفی کرده است. در این پژوهش، شین لی به این نتیجه رسید که هر چند این نمودار کنترلی ناپارامتری در همه سناریوها عملکرد بهتری نسبت به جایگزین‌های دیگر ندارد، اما در اکثر حالت‌ها تغییرات موجود در

که در چند مطالعه می‌توان مشاهده کرد آماره‌های ناپارامتری در همه پژوهش‌هایی که در حوزه نمودارهای کنترلی ناپارامتری صورت گرفته‌اند به کار برده شده‌اند. چاکرابورتی و اریلماز [۱۳] نیز یک نمودار کنترلی رتبه علامت از نوع شوهارت ناپارامتری را معرفی و نتایج حاصل از پایش فرایند با استفاده از این نمودار کنترلی را با نمودارهای شوهارت پارامتری مقایسه کردند. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که نمودار کنترلی ناپارامتری در مواردی که اطلاعات کافی در مورد مشاهدات نداریم عملکرد بهتری در کشف سریع تغییرات به وجود آمده در فرایند دارند. خیلار و شیرکی [۱۴] یک نمودار کنترلی ناپارامتری جدید به نام نمودار کنترلی ناپارامتری ترکیبی معرفی کرده و برای پایش فرایند از یک آماره علامت استفاده کردند آن‌ها برای پایش میانه باز هم از متوسط طول اجرا استفاده کردند و به این نتیجه رسیدند که این نمودار کنترلی ناپارامتری علاوه به کشف سریع‌تر تغییرات بزرگ در فرایند نسبت به نمودارهای کنترلی، جایگزین مقاومت بسیار بالایی در برابر داده‌های پرت دارد.

لی و همکاران [۱۵] نمودار کنترلی میانگین متحرک موزون نمایی (EWMA) و نمودار کنترلی جمع تجمعی (CUSUM) را در حالت ناپارامتری برای کشف تغییرات به وجود آمده در میانگین فرایند مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که زمانی که مشاهدات از توزیع نامشخص یا غیر نرمال پیروی می‌کند، نمودارهای کنترلی ناپارامتری پیشنهادی عملکرد بهتری از نظر سرعت کشف تغییرات ایجاد شده در میانگین داشته‌اند. گراهام و همکاران [۱۶] نیز با بررسی دقیق نمودارهای کنترلی ناپارامتری، یک نمودار کنترلی علامت ناپارامتری میانگین متحرک موزون نمایی را برای پایش پارامتری مکان پیشنهاد کردند. ویژگی نوین موجود در آن مقاله این بود که از آماره علامت برای پایش فرایند استفاده شده است و همچنین متوسط طول اجرا با استفاده از روش مونت-کارلو محاسبه شده است. آن‌ها با استفاده از یک مطالعه شبیه‌سازی نشان دادند که نمودار کنترلی علامت ناپارامتری پیشنهادی عملکرد نسبتاً بهتری در مقایسه با نمودارهای کنترلی ناپارامتری و پارامتری دیگر در این حوزه دارد. همچنین، شیرکی و خیلار [۱۷] باز هم یک نمودار کنترلی ناپارامتری را برای پایش تغییرات فرایند به کار بردند و نشان دادند که این نمودار کنترلی یک جایگزین مناسب برای نمودارهای

$$Z_t = \sum_{j=0}^{t-1} \lambda(1-\lambda)^j X_{t-j} + (1-\lambda)^t \mu \quad (3)$$

با استفاده از سری هندسی مجموع وزن‌ها در آماره فوق برابر ۱ است. امید ریاضی و واریانس آماره میانگین متحرک موزون نمایی به صورت زیر می باشد.

$$E[Z_t] = \mu \quad (4)$$

$$Var[Z_t] = \frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1-\lambda)^{2t}] \sigma^2 \quad (5)$$

اگر t به اندازه کافی بزرگ باشد آنگاه عبارت $(1-\lambda)^{2t}$ برابر با یک می شود و واریانس مجانبی آماره میانگین متحرک موزون نمایی به صورت زیر بازنویسی خواهد شد:

$$Var[Z_t] = \frac{\lambda}{2-\lambda} \sigma^2 \quad (6)$$

حدود کنترلی نمودار کنترلی میانگین متحرک موزون نمایی به صورت زیر قابل محاسبه هستند:

$$UCL = \mu + L \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} \sigma^2} \quad (7)$$

$$CL = \mu \quad (8)$$

$$LCL = \mu - L \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} \sigma^2} \quad (9)$$

در حدود فوق، نماد L نشان دهنده ضریب حدود کنترلی است.

۲-۳ نمودارهای کنترلی میانگین متحرک موزون تعمیم یافته

نمودار کنترلی میانگین متحرک موزون تعمیم یافته اولین بار در سال ۲۰۰۳ معرفی شد. فرض کنید پیشامد A با احتمال q_i و در j -امین نمونه اتفاق بیفتد. اگر M تعداد نمونه‌ها تا اولین وقوع پیشامد A باشد؛ آنگاه متغیر تصادفی دارای توزیع هندسی است احتمال این که پیشامد A در j نمونه اول اتفاق نیفتد برابر $\bar{P}_j = P(M > j)$ است که در آن برابر $1 = \bar{P}_0 \geq \bar{P}_1 \geq \bar{P}_2 \geq \dots$ بنا بر این احتمال این که پیشامد A اولین بار در نمونه‌ی j -امین

فرایند را با سرعت بیشتری کشف خواهد کرد. این پژوهش بر مبنای پژوهش شینلی [۱] نوشته شده است. با توجه به این که در مقاله یاد شده مطالعه، بر روی نمودارهای کنترلی علامت صرف طراحی آماری انجام شده، در این پژوهش از طراحی اقتصادی و آماری اقتصادی نیز به منظور بهینه کردن نمودار کنترلی علامت از نظر اقتصادی استفاده شده است.

۳. تعاریف و مفاهیم

۳-۱ نمودارهای کنترلی میانگین متحرک موزون نمایی

نمودارهای کنترلی میانگین متحرک موزون نمایی اولین بار توسط رابرتز [۲۰] برای کنترل موجودی و پیش بینی در اقتصاد مورد استفاده قرار گرفته است.

بسیاری از پژوهشگران بر روی این نمودار کنترلی کار کرده‌اند به گونه ای که این نمودار کنترلی موزون، سهم چشم گیری از پژوهش های انجام شده در حوزه کنترل کیفیت آماری را به خود اختصاص داده است. این نمودار کنترلی در مقایسه با سایر نمودارهای کنترلی معرفی شده، عملکرد بسیار بهتری از نظر سرعت کشف تغییرات کوچک در فرایند دارد. نمودار کنترلی میانگین متحرک موزون نمایی یک حالت خاص از نمودار کنترلی میانگین متحرک موزون تعمیم یافته است.

بنابراین با استفاده از روابط تعریف شده فوق میتوان نمودار مورد نظر را نیز محاسبه کرد. اگر X_1, X_2, \dots یک نمونه تصادفی از جامعه‌ای با میانگین و واریانس σ^2 باشد، آماره میانگین متحرک موزون نمایی به صورت زیر تعریف می شود:

$$Z_t = \lambda X_t + (1-\lambda)Z_{t-1} \quad (1)$$

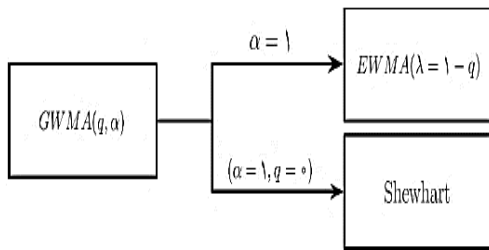
اگر مقدار میانگین جامعه (در صورت مشخص بودن میانگین جامعه) یا میانگین نمونه (در صورت نامعلوم بودن میانگین جامعه) به عنوان مقدار اولیه برای آماره Z_t در نظر گرفته شود، یعنی داشته باشیم:

$$Z_0 = \mu \quad (2)$$

آنگاه آماره میانگین متحرک موزون نمایی را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$G_t = \sum_{j=0}^{t-1} \lambda(1-\lambda)^j X_{t-j} + (1-\lambda)^t \mu \quad (14)$$

بنابراین در حالتی که $\alpha = 1$ و $q = 1 - \lambda$ و آماره کنترلی میانگین متحرک موزون تعمیم یافته (GWMA) با آماره کنترلی میانگین متحرک موزون نمایی EWMA برابر است. از این نظر می توان گفت که نمودار کنترلی EWMA یک حالت خاص از نمودار کنترلی GWMA است. ارتباط بین این دو نمودار کنترلی در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱- رابطه بین نمودارهای کنترلی، GWMA EW MA و Shewhart

امید ریاضی و واریانس نمودار کنترلی میانگین متحرک موزون تعمیم یافته به شرح زیر است:

$$E[G_t] = \mu \quad (15)$$

$$Var[G_t] = \sum_{i=1}^t (q^{(i-1)\alpha} - q^{i\alpha})^2 \sigma^2 = Q_t \sigma^2 \quad (16)$$

حدود کنترلی نمودار کنترلی میانگین متحرک موزون تعمیم یافته به صورت زیر به دست می آیند:

$$UCL = \mu + L\sqrt{Q_t \sigma^2} \quad (17)$$

$$CL = \mu \quad (18)$$

$$LCL = \mu - L\sqrt{Q_t \sigma^2} \quad (19)$$

۴. طراحی آماری نمودار کنترلی علامت ناپارامتری میانگین متحرک موزون تعمیم یافته

در این پژوهش، نمودار کنترلی علامت میانگین متحرک موزون تعمیم یافته ناپارامتری معرفی شده و عملکرد این نمودار کنترلی

اتفاق بیفتد برابر با $P(M = j) = \bar{P}_{j-1} - \bar{P}_j$ است همچنین داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} P(M = m) &= P(M = 1) \\ &+ P(M = 2) + \dots \\ &+ P(M = j) \\ &+ p(M > j) = (\bar{P}_0 \\ &- \bar{P}_1) + (\bar{P}_1 - \bar{P}_2) \\ &+ \dots + (\bar{P}_{j-1} - \bar{P}_j) \\ &- \bar{P}_j = 1 \end{aligned} \quad (10)$$

بنابراین از $P(M = j)$ می توان به عنوان وزن نمونه ها استفاده نمود. با توجه به خواص توزیع هندسی می دانیم:

$$(\bar{P}_0 - \bar{P}_1) > (\bar{P}_1 - \bar{P}_2) > \dots > (\bar{P}_{j-1} - \bar{P}_j) \quad (11)$$

در این حالت نمونه مشاهده کنونی بیشترین وزن را دارد و اولین نمونه موجود در مشاهدات، کمترین وزن را دارد فرض کنید نمونه مشاهدات X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه با اندازه n میانگین μ و واریانس σ^2 هستند. اگر آماره میانگین متحرک موزون تعمیم یافته را با نماد G نمایش دهیم، این آماره به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} G_t &= P(M = 1)X_t + P(M = 2)X_{t-1} \\ &+ \dots + P(M = t)X_1 \\ &+ P(M > t)G_0 \\ &= (\bar{P}_0 - \bar{P}_1)X_t \\ &+ (\bar{P}_1 - \bar{P}_2)X_{t-1} + \dots \\ &+ (\bar{P}_{t-1} - \bar{P}_t)X_1 \\ &+ \bar{P}_t G_0 \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن G_0 مقدار اولیه برای آماره G_t است و برابر با میانگین نمونه تصادفی μ در نظر گرفته می شود. برای سهولت در محاسبات، اگر فرض کنیم $t=0, 1, 2, \dots$ و برابر $\bar{P}_t = q^{t\alpha}$ که در آن q پارامتر طرح (یک مقدار ثابت بین صفر و یک) و α پارامتر تعدیل (تنظیمی) است که توسط پژوهشگر تعیین می شود، آن گاه با این تفاسیر آمار میانگین متحرک موزون تعمیم یافته را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$G_t = \sum_{i=1}^t [(q^{(i-1)\alpha} - q^{i\alpha})X_{t-i+1}] + q^{t\alpha} \mu \quad (13)$$

حال اگر در رابطه فوق قرار دهیم $\alpha = 1$ و $q = 1 - \lambda$ داریم:

مجانبی) استفاده شده است. بنابراین با استفاده از مقادیر میانگین و واریانس مجانبی مربوط به این نمودار علامت ناپارامتری داریم:

$$UCL = \frac{n}{2} + L \sqrt{\frac{nQ}{4}} \quad (23)$$

$$CL = \frac{n}{2} \quad (24)$$

$$LCL = \frac{n}{2} - L \sqrt{\frac{nQ}{4}} \quad (25)$$

۳-۴ الگوریتم محاسبه ARL (در حالت تحت کنترل)

طبق استدلال شینلی [۱]، در این پژوهش به منظور برآورد مقادیر متوسط طول اجرا در نمودارهای علامت ناپارامتری GWMA از روش شبیه‌سازی عددی استفاده شده است. در این شبیه‌سازی، مقادیر مربوط به متوسط طول اجرا در حالت تحت کنترل با نماد ARL_0 و مقادیر متوسط طول اجرا در حالت خارج از کنترل با نماد ARL_1 نشان داده شده‌اند. روش کار به این صورت است که ابتدا مقدار آماره نمودار علامت ناپارامتری میانگین متحرک موزون نمایی و میانگین متحرک موزون تعمیم‌یافته در حالت تحت کنترل محاسبه شده‌اند تا به این طریق مقادیر بهینه به منظور دریافت کمترین میزان هشدار اشتباه مشخص شوند. در مرحله بعد یک تغییر یا در اصطلاح نمودارهای کنترلی، یک انتقال با مقادیر مختلف در فرایند ایجاد شده تا مشخص شود که کدام نمودار کنترلی ناپارامتری پیشنهادی در این پژوهش زودتر این تغییرات را در فرایند کشف خواهد کرد. اما پیش از شروع تحلیل و تفسیر نتایج، دو الگوریتم مربوط به محاسبه متوسط طول اجرا در حالت تحت کنترل و در حالت خارج از کنترل، برای آماره مربوط به نمودارهای علامت ناپارامتری یاد شده تشریح شده‌اند. در الگوریتم مربوط به محاسبه متوسط طول اجرا در حالت تحت کنترل تنها کاری که انجام شده این است که با استفاده از مقادیر اولیه مناسب، آماره مورد نظر محاسبه شده است. سپس مقادیر مربوط به حدود کنترلی محاسبه شده و با استفاده از یک شرط و تعدادی، تکرار متوسط طول اجرا محاسبه شده است. اما در الگوریتم محاسبه متوسط طول اجرا در حالت خارج از کنترل، پس از ایجاد یک انتقال، فرایند مورد نظر خارج از کنترل شده است. سپس نقاط خارج از کنترل در تکرار بالا شناسایی و اندیس

ناپارامتری در کشف تغییرات کوچک در فرایند سنجیده شده است.

۱-۴ نمودار کنترلی ناپارامتری علامت میانگین متحرک موزون نمایی

نمودار کنترلی علامت میانگین متحرک موزون نمایی (EWMA-Sign) که یک نمودار کنترلی ناپارامتری محسوب می‌شود در مطالعات بسیاری از جمله ریاض و همکاران [21] و مونتگومری [22] با جزئیات تشریح شده است. آماره مربوط به این نمودار کنترلی به صورت زیر تعریف شده است:

$$EWMA_{N_t} = \lambda N_t + (1 - \lambda) EWMA_{N_{t-1}} \quad (20)$$

به طوری که $0 < \lambda \leq 1$ است.

۲-۴ نمودار کنترلی ناپارامتری علامت میانگین متحرک موزون تعمیم‌یافته

آماره نمودار کنترلی علامت میانگین متحرک موزون تعمیم‌یافته (GWMA-Sign) در زمان t در مطالعه شینلی [۱] به صورت زیر تعریف شده است:

$$GWMA_t = \sum_{j=1}^t (q^{(j-1)\alpha} - q^{j\alpha}) N_{t-j+1} + q^{t\alpha} T \quad (21)$$

در این آماره قیده‌های زیر باید به صورت همزمان برقرار باشند:

$$0 \leq q < 1 \\ 0 < \alpha \leq 1$$

$$\sum_{j=1}^t (q^{(j-1)\alpha} - q^{j\alpha}) + q^{t\alpha} = 1 \quad (22)$$

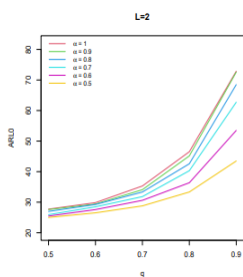
در این پژوهش دو حالت برای به دست آوردن حدود کنترل نمودار علامت ناپارامتری GWMA وجود دارد. حالت اول استفاده از حدود کنترلی مجانبی و حالت دوم استفاده از حدود کنترلی دقیق است. در حدود کنترلی دقیق مقادیر با زمان تغییر می‌کنند و در اصطلاح متغیر با زمان هستند و در حدود کنترلی مجانبی، مقادیر حالت دائمی دارند در این پژوهش از حدود کنترلی حالت دائم

که با افزایش مقادیر مربوط به طول حدود کنترلی (L)، مقادیر مربوط به ARL_0 برای این نمودار علامت ناپارامتری تحت ترکیب های مختلف از دو پارامتر α و q افزایش پیدا خواهد کرد. همچنین با افزایش مقادیر و سرعت افزایش ARL_0 بیشتر شده است اما اختلاف میان مقادیر مختلف ARL_0 در این چهار نمودار به ازای مقادیر کوچک از q و L کاهش پیدا کرده است. به طور کلی هر چه مقادیر q و L کوچکتر باشند، مقادیر متوسط طول اجرا در حالت تحت کنترل برای نمودار علامت ناپارامتری $GWMA$ به هم نزدیکتر خواهند شد و هر چه مقدار L افزایش پیدا کند، مقادیر متوسط طول اجرا در حالت تحت کنترل نیز افزایش پیدا خواهند کرد.

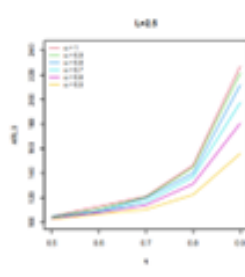
مربوط به آنها در یک متغیر به نام طول اجرا ذخیره شده است. در نهایت با میانگین گرفتن از متغیر طول اجرا، متوسط طول اجرا به دست آمده است.

۴-۴ مقایسه کارایی نمودارهای علامت $GWMA$ و $EWMA$

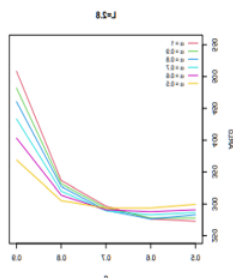
نمودارهای موجود در شکل ۲ نشان دهنده مقادیر متوسط طول اجرا در حالت تحت کنترل به ازای مقادیر مختلف از پارامترهای دخیل در فرایند می باشد. این کار به منظور پیدا کردن مقادیر بهینه این پارامترها در فرایند انجام شده است طبق نتایج به دست آمده برای ARL_0 در نمودارهای شکل ۲ می توان به این نتیجه رسید



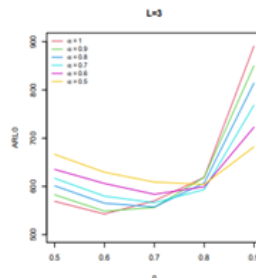
الف



ب



پ



ت

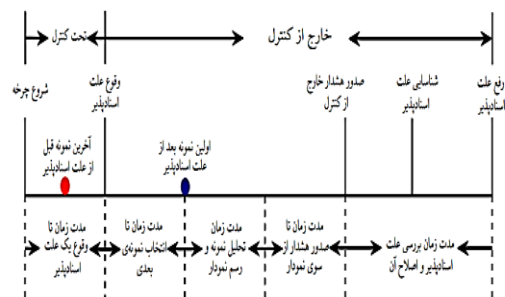
شکل ۲. متوسط طول اجرا در حالت تحت کنترل ARL برای نمودار علامت ناپارامتری $GWMA$: الف) $L=2$ ، ب) $L=5/2$ ، پ) $L=5/2$ ، ت) $L=3$

مقادیر بهینه برای پارامترهای دخیل در فرایند، با هم مقایسه شده اند.

در ادامه نتایج مربوط به متوسط طول اجرا در حالت خارج از کنترل برای دو نمودار علامت ناپارامتری یاد شده پس از محاسبه

n	$\Delta = p_1 - p_0 $	روش	طرح بهینه				ARL ₁	
			q^*	α^*	λ^*	L^*		
۱۰	۰/۰۵	GWMA	۰/۹۶	۰/۸۲	-	۲/۴۲۴	۴۹/۹۵	
		EWMA	-	-	۰/۰۴	۲/۴۱۲	۵۰/۱۹۱	
	۰/۱	GWMA	۰/۹۲	۰/۹	-	۲/۶۳۱	۱۸/۹۷۲	
		EWMA	-	-	۰/۰۵	۲/۴۸۳	۱۹/۱۴۵	
	۰/۲	GWMA	۰/۸	۰/۹	-	۲/۸۳۰	۶/۶۶۴	
		EWMA	-	-	۰/۲	۲/۸۳۴	۶/۵۶۶	
	۰/۳	GWMA	۰/۹۵	۰/۹	-	۲/۸۸۱	۳/۴۲۹	
		EWMA	-	-	۰/۴	۲/۸۸۰	۳/۴۰۷	
	۲۰	۰/۰۵	GWMA	۰/۹۵	۰/۹	-	۲/۴۹۲	۳۱/۰۳۸
			EWMA	-	-	۰/۰۵	۲/۴۸۳	۳۱/۶۳۵
		۰/۱	GWMA	۰/۸۷	۰/۹	-	۲/۷۷۵	۱۱/۴۰۸
			EWMA	-	-	۰/۱۱	۲/۷۲۴	۱۱/۲۷۲
۰/۲		GWMA	۰/۶	۰/۹	-	۲/۹۲۳	۳/۹۰۳	
		EWMA	-	-	۰/۳۱	۲/۹۰۱	۳/۸۷۴	
۰/۳		GWMA	۰/۴	۰/۶	-	۲/۹۲۲	۱/۹۲۲	
		EWMA	-	-	۰/۷	۲/۹۲۷	۱/۹۱۸	

نمودارهای کنترلی محسوب می‌شود. چرخه کیفیت در مدل هزینه لورنزن و، ونس در شکل 3 نمایش داده شده است. با توجه به این شکل واضح است که چرخه کیفیت تا زمان تعمیر فرایند ادامه پیدا می‌کند و از آن پس، شاهد شروع چرخه جدید هستیم. یکی از ویژگی‌های مفید مربوط به چرخه کیفیت در مدل هزینه لورنزن و ونس این است که این چرخه کیفیت برای همه نمودارهای کنترلی قابل استفاده است.



شکل ۳. چرخه کیفیت در مدل هزینه لورنزن و ونس

در مدل هزینه لورنزن و ونس: زمان چرخه در مرحله اول به دو دوره زمانی کلی تقسیم شده است. این دو دوره زمانی عبارت است از دوره‌های زمانی تحت کنترل و دوره‌های زمانی خارج از کنترل. بنا بر این به منظور محاسبه متوسط زمان چرخه کیفیت و محاسبه میانگین هر دوره، ابتدا این دو دوره زمانی را معرفی می‌کنیم.

نماد $\Delta = |p_1 - p_0|$ در جدول ۱ معرف نسبت انتقال ایجاد شده در فرایند به منظور خارج کردن فرایند از حالت تحت کنترل می‌باشد در این جدول به ازای دو اندازه نمونه و مقادیر مختلف برای نسبت انتقال، عملکرد دو نمودار علامت ناپارامتری GWMA و EWMA یک بار دیگر در یک طرح بهینه مقایسه شده است. نسبت انتقال دارای سه حالت انتقال کوچک ($\Delta = 0/10$), انتقال متوسط ($\Delta = 0/10$) و انتقال بزرگ ($\Delta = 0/30, \Delta = 0/20$) می‌باشد که برای هر یک از حالت‌ها عملکرد این دو نمودار نیز مقدار متوسط طول اجرا در حالت خارج از کنترل محاسبه شده است. با توجه به این که در این جدول مقدار ARL_1 به ازای اکثر مقادیر نسبت انتقال برای نمودار علامت ناپارامتری GWMA کوچکتر از مقدار مربوط به نمودار علامت ناپارامتری EWMA است بنابراین عملکرد نمودار علامت ناپارامتری GWMA در کشف تغییرات کوچک در فرایند بهتر می‌باشد.

۵- طراحی آماری - اقتصادی نمودار کنترلی

۵-۱ طراحی اقتصادی نمودار کنترلی

مدل هزینه لورنزن و ونس یکی از رایج‌ترین جایگزین‌های مدل هزینه دانکن برای طراحی اقتصادی و آماری - اقتصادی

نشریه مهندسی و مدیریت کیفیت

هزینه مورد انتظار در هر واحد زمان در هر چرخه:

$$E(A) = E(C)/E(T) \quad (29)$$

۵-۲ طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترلی

در طراحی آماری-اقتصادی همه گام‌های به کار برده شده برای طراحی اقتصادی یک نمودار کنترلی به کار برده می‌شود با این تفاوت که حال قیدهایی نیز برای معیارهای آماری در طراحی در نظر گرفته می‌شود. همان طور که از نام آن پیداست، طراحی آماری-اقتصادی ترکیبی از طراحی آماری و طراحی اقتصادی است و در مفهوم به معنای بهینه کردن یک فرایند از نظر آماری با رعایت کردن قیدهایی اقتصادی (کمینه سازی هزینه) می باشد. اگر متوسط زمان در چرخه کیفیت را با نماد $E(T)$ و متوسط هزینه در چرخه کیفیت را با نماد $E(C)$ نمایش دهیم، شکل کلی طراحی آماری-اقتصادی نمودارهای کنترلی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \min E(C)/E(T) \\ ARL_U > ARL_L \\ ARL_I < ARL_U \end{aligned} \quad (30)$$

به طوری که ARL_L مقدار کران پایین برای متوسط طول اجرا در حالت تحت کنترل و ARL_U مقدار کران بالا برای متوسط طول اجرا در حالت خارج از کنترل است.

۵-۳ نتایج عددی

نتایج عددی مربوط به طراحی اقتصادی و آماری-اقتصادی نمودار کنترلی علامت میانگین متحرک موزون تعمیم یافته در این بخش به دو قسمت طراحی اقتصادی نمودار کنترلی و طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترلی تفکیک و تفسیر شده است. مقادیر اولیه برای طراحی اقتصادی و آماری-اقتصادی نمودار کنترلی علامت یاد شده در این پژوهش از مطالعه مونته‌گومری و همکاران [23] اتخاذ شده است و در جدول 2 خلاصه شده‌اند.

جدول ۲. مقادیر اولیه برای طراحی اقتصادی و آماری-اقتصادی با استفاده از مدل هزینه لورنزن و ونس

γ_1	γ_2	T_0	T_1	T_2	E	a	b	C_0	C_1	Y	W
۱	۱	۰	۲	۲	۰/۰۵	۰/۵	۰/۱	۱۰	۱۰۰	۵۰	۲۵

در دوره زمانی تحت کنترل فرض کنید متوسط زمان مورد انتظار برای بررسی یک هشدار اشتباه در فرایند را با نماد T_0 و متوسط طول اجرا در زمان تحت کنترل بودن فرایند را با نماد ARL_0 نمایش دهیم. در این صورت متوسط تعداد نمونه‌های تولید شده در زمان تحت کنترل بودن فرایند را با نماد s نمایش داده و با استفاده از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$$s = \sum_{i=0}^{\infty} i [e^{-\lambda_e h i} - e^{-\lambda_e h (i+1)}] = \frac{e^{-\lambda_e h}}{1 - e^{-\lambda_e h}} \quad (25)$$

در این صورت زمان صرف شده در حین بررسی هشدارهای اشتباه برابر است با حاصلضرب متوسط زمان مورد نیاز برای بررسی یک هشدار اشتباه در تعداد مورد انتظار هشدارهای اشتباه. لذا متوسط زمان دوره تحت کنترل برابر است با:

$$\frac{1}{\lambda} + (1 - \gamma_1) \frac{s T_0}{ARL_0} \quad (26)$$

که در این فرمول γ_1 تابع نشانگر برای تعیین کردن ادامه با توقف فرایند تولید، در حین جستجو برای انحراف، بادلایل ARL_0 متوسط طول اجرا در حالت تحت کنترل که برابر با $\frac{1}{\alpha}$ است و T_0 زمان مورد نیاز برای نمونه‌گیری تفسیر نتایج مربوط به آن و ترسیم نمودارها می باشد.

همچنین در مدل هزینه لورنزن و ونس، متوسط زمان خارج از کنترل به صورت مجموع پنج دوره زمانی در نظر گرفته شده است.

متوسط هزینه در یک چرخه کیفیت:

$$\begin{aligned} EC = \frac{C_0}{\lambda} + C_1 [h ARL_1 - \tau + nE + \gamma_1 T_1 \\ + \gamma_2 T_2] + \frac{s \times Y}{ARL_0} + W \\ + (\alpha + bn) \frac{E(T)}{h} \end{aligned} \quad (27)$$

متوسط زمان در چرخه کیفیت:

$$\begin{aligned} E(T) = \frac{1}{\lambda} + (1 - \gamma_1) \frac{s T_0}{ARL_0} - \tau + nE \\ + h \times ARL_1 + T_1 + T_2 \end{aligned} \quad (28)$$

حال، با استفاده از این پارامترهای اولیه نتایج مربوط به طراحی آماری و طراحی آماری-اقتصادی را محاسبه می‌کنیم:

جدول ۳. نتایج عددی طراحی اقتصادی نمودار کنترلی میانگین متحرک موزون تعمیم‌یافته با مدل هزینه لورنزن و ونس

θ	p	n	L	α	q	h	ARL_0	ARL_1	E(A)	E(C)	E(T)
۰/۰۰۱	۰/۶	۱۲	۲/۶۴۲	۰/۸۴۲۸	۰/۹۴۱۳	۲/۲۹۸۱	۳۲/۱۷۳۵	۷/۶۲۱۱	۱۳/۲۷۴	۱۳۵۵۲/۲۶	۱۰۲۰/۹۶۶
	۰/۷	۱۱	۲/۸۷۲	۰/۴۸۲۹	۰/۸۶۱۶	۳/۷۴۱۹	۳۶/۹۵۰۵	۳/۱۵۲۵	۱۲/۱۸۵۶	۱۲۳۶۳/۸۷	۱۰۱۴/۶۲۶
	۰/۸	۱۱	۲/۸۸۱۴	۰/۲۷۵۸	۰/۵۷۹۵	۵/۷۵۰۵	۲۶/۸۵۳۵	۱/۴۳۴۵	۱۱/۵۵۸۴	۱۱۶۸۵/۶۸	۱۰۱۱/۰۱۲
	۰/۹	۱۰	۲/۹۸۵	۰/۳۲۲۴	۰/۴۳۷۹	۶/۱۸۰۷	۶۲/۴۰۶۱	۱/۱۸۲۱	۱۱/۱۹۳۱	۱۱۲۹۲/۹۲	۱۰۰۸/۹۱۹
۰/۰۰۹	۰/۶	۱۳	۲/۴۵۷۵	۰/۷۳۱۷	۰/۹۵۲۱	۰/۹۳۲۳	۲۹/۱۶۷۵	۶/۶۳۵۸	۲۱/۷۸۶۲	۲۶۰/۱۴۵۸	۱۱۹/۸۲۱۹
	۰/۷	۱۳	۲/۴۸۹۳	۰/۳۷۳۴	۰/۹۳۴۲	۰/۳۳۱۹	۳۲/۶۱۳۸	۳/۱۲۶۲	۱۸/۷۷۶۸	۲۲۳۹/۳۳۲	۱۱۹/۲۶۰۴
	۰/۸	۱۳	۲/۵۱۵۸	۰/۹۸۴۹	۰/۴۰۹۵	۱/۸۲۱۶	۴۳/۴۳۹	۱/۷۱۸۷	۱۷/۰۳۲۶	۳۰۰۹/۱۵۷۸۲۱	۱۱۷/۹۸۳۵
	۰/۹	۱۲	۲/۷۹۶۵	۰/۳۷۷۶	۰/۱۶۰۳	۲/۴۸۴۷	۴۲/۹۹۸۲	۱/۱۲۵۲	۱۶/۰۶۱۹	۱۸۸۳/۵۶۶	۱۱۷/۲۶۹۱
۰/۰۱	۰/۶	۱۴	۱/۹۲۹۴	۰/۹۶۹۱	۰/۸۶۱۲	۰/۹۰۴۵	۲۶/۹۶۶۵	۶/۵۶۰۷	۲۲/۴۹۷	۲۴۷۸/۷۶۷	۱۱۰/۱۸۲۳
	۰/۷	۱۴	۲/۴۰۴۷	۰/۸۱	۰/۸۲۱۶	۱/۰۲۳	۷۴/۷۵۴	۳/۶۴۵۳	۱۹/۲۹۵۴	۲۰۸۲/۳۳۴	۱۰۷/۹۱۸۶
	۰/۸	۱۳	۲/۶۴۹۲	۰/۲۲۳۵	۰/۶۷۴۴	۲/۲۶۵۶	۶۶/۱۲۶۸	۱/۴۱۸۷	۱۷/۵۷۳۹	۱۱۸۷۶/۶۴۲	۱۰۶/۷۸۵۷
	۰/۹	۱۰	۲/۶۸۲۱	۰/۹۷۱۶	۰/۲۸۸۲	۲/۷۶۲۴	۷۸/۳۷۳۸	۱/۳۴۷۵	۱۶/۵۱۶۸	۱۷۵۰/۷۲۴	۱۰۵/۹۹۶۳

زمان برای هر چرخه مربوط به حالت $\theta = 0/001$ و $p=0/9$ یعنی نمودار کنترلی مربوطه با در نظر گرفتن مقادیر اولیه جدول ۲، در این حالت بهترین عملکرد را از نظر اقتصادی داشته است.

در طراحی آماری-اقتصادی قیدهای آماری و اقتصادی به صورت همزمان بر روی نمودار کنترلی اعمال می‌شوند تا یک حالت بهینه میان این دو قید به دست آید. در این پژوهش مقادیر اولیه برای کران بالای متوسط طول اجرا در حالت خارج از کنترل و کران پایین برای متوسط طول اجرا در حالت تحت کنترل به صورت زیر تعیین شده اند:

$$\begin{aligned} ARL_L &\geq 370 \\ ARL_U &\leq 20 \end{aligned} \quad (31)$$

بدیهی است که در طراحی آماری-اقتصادی باید قیدها به نسبت سخنگیرانه تر از طراحی اقتصادی باشند.

همان گونه که در نتایج جدول ۳ می‌توان دید، به ازای هر مقدار θ ، مقدار متوسط هزینه در یک چرخه کیفیت (نماد $E(C)$) روند نزولی دارد و با افزایش مقدار تغییر، به وضوح کاهش پیدا کرده است. مقدار متوسط زمان در هر چرخه کیفیت که با نماد $E(T)$ نمایش داده شده، به ازای هر مقدار θ ، روند نزولی دارد یعنی با افزایش مقدار تغییر در مشخصه کیفیت در استفاده از نمودار کنترلی علامت میانگین متحرک موزون تعمیم‌یافته، زمان مورد نیاز برای اجرا شدن یک چرخه کیفیت کاهش پیدا کرده است. همچنین هزینه مورد انتظار در هر واحد زمان در هر چرخه که آن را با نماد $E(A)$ نمایش می‌دهند، در اکثر موارد و به ازای مقادیر مختلف θ ، باز هم روند کاهشی داشته است. اگر به هر یک از مقادیر نماد θ نگاه کنیم، می‌توان به این نتیجه رسید که عملکرد نمودار کنترلی علامت ناپارامتری میانگین متحرک موزون تعمیم‌یافته از نظر اقتصادی به صرفه می‌باشد زیرا با افزایش مقدار تغییر در مشخصه کیفیت، هزینه مورد انتظار در واحد زمان برای هر چرخه کیفیت با کاهش چشم‌گیری مواجه شده است.

در طراحی اقتصادی نمودار کنترلی علامت ناپارامتری میانگین متحرک موزون تعمیم‌یافته که نتایج آن در جدول ۳ ارائه شده است، بهینه ترین حالت از نظر هزینه مورد انتظار در هر واحد

جدول ۴. نتایج عددی طراحی آماری اقتصادی نمودار کنترلی میانگین متحرک موزون تعمیم یافته با مدل هزینه لورنزن و ونس

θ	p	n	L	α	q	h	ARL_0	ARL_1	E(A)	E(C)	E(T)
/۰۰۱	۰/۶	۱۵	۲/۸۷۴	۰/۸۹۱	۰/۸۲۷	۱/۲۲۸	۴۳۲/۹۲	۱۶/۹۷۶	۱۳/۷۵۱	۱۴۰۸۵/۶۶	۱۰۲۳/۹۶۶
	۰/۷	۱۴	۲/۹۳۲	۰/۹۹۴	۰/۷۷۵	۲/۱۷۹	۴۷۲/۵۰۱	۵/۳۳۸	۱۲/۲۹۶	۱۲۴۸۲/۹۷	۱۰۱۴/۸۲۱
	۰/۸	۱۳	۲/۹۴۸	۰/۹۷۱	۰/۶۷۷	۲/۲۴۴	۴۶۷/۰۸۶	۳/۹۰۷	۱۱/۷۷۱	۱۱۹۱۳/۵۵	۱۰۱۵/۲۴۲
	۰/۹	۱۳	۳/۰۶۳	۰/۷۶۶	۰/۲۲	۵/۷۶۸	۴۵۲/۱۹	۱/۲۷۴	۱۱/۲۵	۱۱۳۵۴/۸	۱۰۱۲/۰۹۴
/۰۰۹	۰/۶	۱۷	۲/۸۴۳	۰/۶۱۶	۰/۹۰۲	۰/۴۸۸	۴۹۸/۱۵۹	۱۵/۱۶۶	۲۳/۶۷۴	۲۹۱۴/۵۴۹	۱۰۰۹/۳۱۶
	۰/۷	۱۶	۲/۸۹۴	۰/۸۸	۰/۶۶۶۶	۰/۷۹۵	۴۱۵/۰۲	۵/۴۶۷	۱۹/۵۱۴	۲۳۳۸/۹۵۸	۱۲۳/۱۱۴
	۰/۸	۱۶	۲/۹۵۲	۰/۸۱	۰/۲۴۸	۱/۳۳	۴۳۰/۴۶۲	۲/۳۳۳	۱۷/۴۸۸	۲۰۷۰/۵۵۵	۱۱۹/۸۵۸
	۰/۹	۱۵	۲/۹۶۸	۰/۶۷۶	۰/۱۶۱	۲/۰۲۷	۴۴۴/۲۴۹	۱/۲۷۵	۱۶/۲۶۹	۱۹۱۲/۲۲۵	۱۱۸/۴۰۱
۰/۰۱	۰/۶	۱۷	۱/۹۵۱	۰/۸۷۷	۰/۷۹۶	۰/۴۷۵	۴۹۷/۶۲۸	۱۴/۵۹۵	۲۴/۳۶	۲۷۱۷/۳۳۳	۱۱۱/۴۱۵
	۰/۷	۱۵	۲/۹۶۹	۰/۷۸۶	۰/۶۵۶	۰/۷۴۴	۵۸۳/۶۶۷	۵/۴۲۸	۲۰/۰۱۲	۲۱۶۹/۵۶۹	۱۰۸/۴۱۵
	۰/۸	۱۳	۲/۹۵۳	۰/۹۲۹	۰/۴۹۱	۱/۰۰۱	۴۶۷/۴۱	۲/۹۲۵	۱۸/۰۸	۱۹۳۶/۰۰۱	۱۰۷/۰۷۸
	۰/۹	۱۳	۳/۰۴۴	۰/۵۶۶	۰/۳۱۵	۱/۵۱۳	۴۷۵/۳۶۵	۱/۵۴۱	۱۶/۷۶۶	۱۷۸۱۰/۳۶	۱۰۶/۲۲۸

هستیم که مقدار مربوط به هزینه مورد انتظار در واحد زمان ، افزایش پیدا کرده است. باز هم با یک بررسی اجمالی نتایج حاصل از طراحی آماری اقتصادی نمودار کنترلی علامت ناپارامتری میانگین متحرک موزون تعمیم یافته می توان به این نتیجه رسید که بهینه ترین حالت از نظر هزینه مورد انتظار در هر چرخه، متوسط هزینه در یک چرخه و متوسط زمان مورد نیاز در هر چرخه به صورت همزمان مربوط به مقدار $\theta = 0/001$ و $p=0/9$ است و بدترین حالت نیز مربوط به مقادیر $\theta = 0/01$ و $p=0/60$ است که مقدار E(A) در آن برابر با ۲۴/۳۶ بوده است. مقادیر مربوط به طراحی اقتصادی و طراحی آماری -اقتصادی این نمودار کنترلی ناپارامتری تقریباً به هم نزدیک هستند.

۶. نتیجه گیری

در استفاده از نمودارهای کنترلی باید به یک نکته خیلی مهم توجه داشته باشیم که عملکرد یک نمودار کنترلی در عمل زمانی مناسب است که علاوه بر رعایت کردن قیدهای آماری قیدهای مهم اقتصادی مانند هزینه، زمان و ... را نیز در خود داشته باشد در این پژوهش ابتدا تعدادی از نمودارهای کنترلی پارامتری (شوهارتی و غیر شوهارتی) معرفی شده و سپس با اعمال قید نامعلوم بودن توزیع آماری مشاهدات به کار برده شده در مطالعه، نمودارهای ناپارامتری را به صورت کلی تعریف کردیم. سپس یک

در طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترلی علامت ناپارامتری میانگین متحرک موزون تعمیم یافته که نتایج مربوط به آن در جدول ۴ ارائه شده است، چارچوبی مشابه جدول ۳ ارائه شده است. تنها تفاوت میان این دو طراحی در این دو جدول این است که مقادیر کران پایین متوسط طول اجرا در حالت تحت کنترل و کران بالای متوسط طول اجرا در حالت خارج از کنترل در دو نمودار طراحی اقتصادی و طراحی آماری-اقتصادی متفاوت هستند قیدهای موجود در طراحی آماری -اقتصادی با توجه به ویژگی های آماری نمودار کنترلی علامت مورد نظر کمی سختگیرانه تر از طراحی اقتصادی تعیین شده اند تا عملکرد این نمودار کنترلی را در این حالت نیز بسنجیم.

همان گونه که در جدول ۴ مشاهده می کنیم به ازای هر یک از مقادیر θ ، مقادیر مربوط به متوسط زمان در هر چرخه کیفیت و متوسط هزینه در یک چرخه کیفیت روند نزولی را نشان می دهند. یعنی با افزایش مقدار مربوط به اندازه تغییر در نمودار کنترلی، متوسط زمان و همچنین متوسط هزینه برای اجرای این فرایند کاهش پیدا کرده است، همچنین با افزایش مقادیر اندازه تغییر، مقدار هزینه مورد انتظار در واحد زمان برای هر چرخه ($E(A)$) کاهش چشمگیری داشته و به طور کلی، این مقادیر نیز به ازای هر مقدار θ روند نزولی دارند. با افزایش مقدار θ شاهد این اتفاق

- Communications in Statistics-Theory and Methods, 24, 1597-1623.
- [6]. Connie, M. B., Douglas, Montgomery, D. C. and Runger G. C. (1999), "Robustness of the EWMA Control Chart to Non-normality", Journal of Quality Technology, 31, 309-316.
- [7]. Amin, R. and Searcy, A. J. (1991), "A Nonparametric Exponentially Weighted Moving Average Control Scheme", Communications in Statistics-Simulation and Computation, 20, 1049-1072.
- [8]. Randles, R. H. and Wolfe, D. A. (1991), Introduction to the Theory of Nonparametric Statistics, Krieger.
- [9]. Park, C. and Reynolds Jr, M. R. (1987), "Nonparametric Procedures for Monitoring a Location Parameter Based on Linear Placement Statistics", Sequential Analysis, 6(4), 303- 323.
- [10]. Bhattacharyya, P. K. and Frierson, D. (1981), "A Nonparametric Control Chart for Detecting Small Disorders", Annals of Statistics , 9, 544-554.
- [11]. Hack, P. and Johannes L. (1992), "A New Nonparametric Quality Control Technique", Communications in Statistics-Simulation and Computation, 21.2, 423-443.
- [12]. Bakir S. T. (2006), 'Distribution Free Quality Control Charts Based on Signed Rank Linke Statistics' Communications in Statistics-Theory and Method, 35, 743-757.
- [13]. Chakraborti S. and Eryilmaz S. (2007), "A Nonparametric Shewhart Type Signed Rank Control Chart Based on Runs", Communications in Statistics-Simulation and Computation, 36, 335-356.
- [14]. khilare S. K. and Shirke D. T. (2010), 'A Nonparametric Synthetic Control Chart using Singnststistic'. Communications in Statistics-Theory and Method, 39, 3282-3293.
- [15]. Li S., Tang L. and Ng S. (2010), 'Nonparametric CUSUM and EWMA control Charts for Detecting Mean Shifts', Journal of Quality Technology, 42, 209-226.
- [16]. Graham M. A. , Chakraborti S, Human S. W. (2011), "A Nonparametric EWMA Sign Chart for Location Based on Individual Measurements", Quality Engineering, 23, 227-241.
- [17]. Shirke D. T. and Khilare S.K. (2012), "Nonparametric Synthetic Control Charts for

نمودار کنترلی ناپارامتری که بر مبنای آماره علامت طراحی شده بود معرفی شد و تمامی خواص آماری آن در بخش طراحی آماری نمودار کنترلی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج مربوط به عملکرد نمودار کنترلی علامت ناپارامتری میانگین متحرک موزون تعمیم یافته را در حالت های مختلف با نمودار کنترلی علامت میانگین متحرک موزون نمایی مقایسه کرده و نتایج مربوط به آن را در قالب یک طراحی آماری نمودار کنترلی بررسی کردیم. با این که عملکرد این نمودار کنترلی در بخش طراحی آماری بسیار مناسب بود، سپس تعدادی قید اقتصادی اعمال کرده و با استفاده از مدل هزینه لورنزن و ونس، یک طراحی اقتصادی و سپس یک طراحی آماری-اقتصادی برای نمودار کنترلی یاد شده انجام شد. در مدل های طراحی اقتصادی و طراحی آماری اقتصادی مشخص شد که با افزایش اندازه تغییر (شیفت) در مشخصه کیفیت، هزینه مورد انتظار در واحد زمان برای هر چرخه کیفیت کاهش پیدا کرده است و این واقعیت نشان می دهد که نمودار کنترلی مورد نظر، عملکرد خوبی هم از نظر رعایت کردن قیدهای آماری و هم از نظر بهینه بودن نسبت به قیدهای اقتصادی (هزینه و زمان) داشته است. به طور کلی، نمودارهای کنترلی ناپارامتری در بسیاری از شرایط که توزیع مشاهدات مورد مطالعه نامعلوم هستند و از توزیع مشخصی پیروی نمی کنند، کاربرد دارند و عملکرد خوبی را از نظر آماری و اقتصادی از خود نشان داده اند.

۷- منابع

- [1]. Shin-li lu (2014), An Extended Nonparametric Exponentially Weighted Moving Average Sign Control Chart, John Wiley, New York, 1, 3-13.
- [2]. Sheu, S. H. and Lin, T. C. (2003), "The Generally Weighted Moving Average Control Chart for Detecting Small Shifts in the Process Mean", Quality Engineering, 16, 209-231.
- [3]. Best, M. and Neuhauser, D. (2006), "Walter A Shewhart, 1924, and the Hawthorne factory", BMJ Quality & Safety, 15(2), 142-143.
- [4]. Yourstone, S. and Zimmer, W. (1992), "Non-Normality and the Design of Control Charts for Averages", Decision Sciences, 32, 1099-1113
- [5]. Amin, R. W., Reynolds, M. R. Jr. and Bakir, S. T. (1995), "Nonparametric Quality Control Charts Based on the Sign Statistic",

- [21]. Riaz, M., Abid, M., Nazir, H. Z., and Abbasi, S. A. (2019), "An Enhanced Nonparametric EWMA Sign Control Chart Using Sequential Mechanism", *PloS one*, 14.11, 225-330
- [22]. Montgomery, D. C. (2019), "Introduction to statistical quality control", John Wiley & sons.
- [23]. Montgomery, D. C., Torng, J. C. C., Cochran, J. K., and Lawrence, F. P. (1995), "Statistically Constrained Economic Design of the EWMA Control Chart", *Journal of Quality Technology*, 27.3, 250-256.
- Process Variation", *Quality and Reliability Engineering International*, 28, 193-202.
- [18]. Alevizakos, V., V., Chatterjee, K., & Koukouvinos, C. (2021), "An extended nonparametric homogeneously weighted moving average sign control chart", *Quality and Reliability Engineering International*, 37(8), 3395-3416.
- [19]. Xue, L., Wang, Q., Li, C., & An, L. (2023), "Economic design of residuals MEWMA control chart with variable sampling intervals and sample size", *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 1-22.
- [20]. Roberts, S. W. (1959), "Control Chart Tests Based on Geometric Moving Averages", *Technometrics*, 42(1), 97-102.

Title Economic-Statistical Design of Nonparametric GWMA Control Chart for Monitoring Location Parameter

Marjan Shamsipour Moghadam

Master of Statistics, Department of Statistics, Faculty of Mathematical Sciences,
Allameh Tabatabai University, Tehran. Iran. marjanshamsipour@atu.ac.ir

Azar ghyasi

(Corresponding author) Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of
Mathematical Sciences, Allameh Tabatabai University, Tehran.
Iran.azarghyasi@atu.ac.ir

Mohammad Bamanimoghadam

Professor, Department of Statistics, Department of Statistics, Faculty of
Mathematical Sciences, Allameh Tabatabai University, Tehran. Iran.
bamenimoghadam@atu.ac.ir

Abstract : Control charts are one of the most effective tools used in quality control to monitor various quality characteristics in a process with the aim to improve quality of the product. Usually, in Shewhart control charts, the normality assumption met for the data, but sometimes there is lack of information regarding the statistical distribution of the observations. For this reason, non-parametric control charts are used in this situation. In this research, non-parametric sign charts are introduced to deal with the lack of information regarding observations' statistical distribution. Nonparametric Generalized Weighted Moving Average Sign Control Chart (NS GWMA) designed using statistical design and average run length (ARL) and its statistical performance was studied. But statistical design is not enough to ensure the performance of a control chart, so in the next steps, economic design (ED) and economic-statistical design (ESD) were applied using cost model of Lorenzen and Vance, in order to optimize both statistical and economical characteristics of the control chart. The results show that the non-parametric sign-generalized weighted moving average sign control chart performed well in detecting small shifts in the process and also had optimized cost and time to perform.

Keywords: Economic Design, Generalized Weighted Moving Average, Exponentially Weighted Moving Average, Sign Control Chart, Nonparametric Control Chart

1- Introduction

Control charts are one of the most valuable tools for statistical control of the process to improve the quality of the process in the construction stage, as well as a tool for checking the stability of the process and identifying the factors involved in the possible departure of the process from the controlled state. . To compare the performance of control charts, criteria such as average execution length are used. When the process is under control, the average length of execution should be large enough to avoid false alarms, but when the process is out of control, the average length

of execution should be small enough so that the control chart gives an out-of-control warning in the shortest possible time. Declare the control of the process. In a general classification, control charts are divided into two categories: Shewhart and non-Shewhart. In Shewhart's control charts, only the information of the last sample is used to monitor the process, therefore, these charts will not have the necessary sensitivity to identify and show small deviations in the desired characteristic of the process. On the contrary, the statistic for non-Shewhart control charts depends not only on the last logical subgroup but also on the samples of previous subgroups. This enables non-Schawhart control charts to easily detect small transitions in the production process. Also, control charts will have different shapes in different situations. In other words, whether or not the distribution of the studied observation data is clear will determine whether the control chart is parametric or non-parametric.

According to Shinley's argument [1], the main purpose of parametric and non-parametric control charts is generally to monitor and improve the quality of a process in the field of statistical process control. Parametric control charts are always designed based on the assumption that the observations in the process follow a specific distribution such as the normal distribution, but in many cases such an assumption is not established, for this reason parametric control charts lose their effectiveness for monitoring the process. In this case, non-parametric control charts, which are not sensitive to whether or not the distribution of observations is specific, are useful.

After the introduction of control charts by Schuhart in 1924, Best and Neuhauser [3], several researches were conducted in this field, which were often based on the assumption of normality of observations.

Yoraston and Zimmer [4] and Amin et al. [5] stated that the non-normality of observations can be a serious problem for the design of Shewhart control charts, although at that time non-Shewhart control charts had not yet been introduced, Kani et al. [6] so From examining the problems related to the quality control of the process and the challenges related to the non-normality of the observations, they concluded that the exponentially weighted moving average control chart maintains its stability under non-normal distributions. In this way, non-Shewhart control charts were introduced, and many researchers used non-Shewhart control charts to solve the problem of the sensitivity of the Shewhart control charts to the non-normal distribution of observations.

2- Methodology

In this research, two non-parametric signal control charts have been introduced as methods for monitoring the considered process, and the performance of each has been compared using the average execution length (ARL) to determine which control chart is faster than the other in which state , detects changes: exponential weighted moving average sign control chart and generalized weighted moving average sign control chart .Non-parametric control chart of exponentially weighted moving average sign Exponentially weighted moving average sign (EWMA-Sign) control chart, which is a non-parametric control chart has been described in detail in many studies, including Riyad et al. [7] and Montgomery [8] The statistics related to this control chart are defined as follows:

$$EWMA_{N_t} = \lambda N_t + (1 - \lambda) EWMA_{N_{t-1}} \quad (۱)$$

so that $0 < \lambda < 1$

. Nonparametric control chart of generalized weighted moving average sign

The control chart statistic of the generalized weighted moving average sign (GWMA-Sign) at time t is defined as follows:

$$GWMA_t = \sum_{j=1}^t (q^{(j-1)\alpha} - q^{j\alpha}) N_{t-j+1} + q^{t\alpha} T \quad (۲)$$

In this statistic, the following conditions must be met at the same time:

$$\begin{aligned} &0 \leq q < 1 \\ &0 < \alpha \leq 1 \\ &\sum_{j=1}^t (q^{(j-1)\alpha} - q^{j\alpha}) + q^{t\alpha} = 1 \end{aligned}$$

There are two modes for obtaining the control limits of the GWMA nonparametric sign chart. The first mode is the use of asymptotic control limits and the second mode is the use of exact control limits. In precise control limits, the values change with time, and in the term, they are time-varying, and in asymptotic control limits, they have constant state values. In this research, constant state (asymptotic) control limits have been used. Therefore, by using the mean values and the asymptotic variance of this graph, we have a non-parametric sign:

$$UCL = \frac{n}{2} + L \sqrt{\frac{nQ}{4}} \quad (۳)$$

$$CL = \frac{n}{2} \quad (۴)$$

$$LCL = \frac{n}{2} - L \sqrt{\frac{nQ}{4}} \quad (۵)$$

In this research, in order to estimate the average values of execution length in GWMA non-parametric sign charts, numerical simulation method has been used. In this simulation, the values related to the average execution length in the controlled mode are shown with the symbol ARL0 and the average values of the execution length in the out-of-control mode are shown with the symbol ARL1.

After the introduction of the mentioned models, the numerical simulation method has been used to estimate the average values of the execution length. In this simulation, the values related to the average execution length in the controlled mode are shown with the symbol ARL0 and the average values of the execution length in the out-of-control mode are shown with the symbol ARL1. The method of work is that first, the statistical value of the non-parametric sign graph, the exponential weighted moving average and the generalized weighted moving average are calculated in the controlled state, so that the optimal values are determined in order to receive the lowest amount of false alarms. In the next step, a change or in the term of control charts, a transition with different values is created in the process in order to determine which non-

parametric control chart proposed in this research will discover these changes in the process sooner. of the control for the two desired non-parametric sign charts, after calculating the optimal values for the parameters involved in the process, they have been compared.

Table1:Optimal non-parametric sign diagram under transfer ratios and different sample sizes per $ARL \approx 370$

n	$\Delta = p_1 - p_0 $	Method	Optimized design				ARL_1
			q^*	α^*	λ^*	L^*	
10	۰/۰.۵	GWMA	۰/۹۶	۰/۸۲	-	۲/۴۲۴	۴۹/۹۵
		EWMA	-	-	۰/۰.۴	۲/۴۱۲	۵۰/۱۹۱
	۰/۱	GWMA	۰/۹۲	۰/۹	-	۲/۶۳۱	۱۸/۹۷۲
		EWMA	-	-	۰/۰.۵	۲/۴۸۳	۱۹/۱۴۵
	۰/۲	GWMA	۰/۸	۰/۹	-	۲/۸۳۰	۶/۶۶۴
		EWMA	-	-	۰/۲	۲/۸۳۴	۶/۵۶۶
	۰/۳	GWMA	۰/۹۵	۰/۹	-	۲/۸۸۱	۳/۴۲۹
		EWMA	-	-	۰/۴	۲/۸۸۰	۳/۴۰۷
۲۰	۰/۰.۵	GWMA	۰/۹۵	۰/۹	-	۲/۴۹۲	۳۱/۰.۳۸
		EWMA	-	-	۰/۰.۵	۲/۴۸۳	۳۱/۶۳۵
	۰/۱	GWMA	۰/۸۷	۰/۹	-	۲/۷۷۵	۱۱/۴۰.۸
		EWMA	-	-	۰/۱۱	۲/۷۲۴	۱۱/۲۷۲
	۰/۲	GWMA	۰/۶	۰/۹	-	۲/۹۲۳	۳/۹.۳
		EWMA	-	-	۰/۳۱	۲/۹۰۱	۳/۸۷۴
	۰/۳	GWMA	۰/۴	۰/۶	-	۲/۹۲۲	۱/۹۲۲
		EWMA	-	-	۰/۷	۲/۹۲۷	۱/۹۱۸

In using control charts, we must pay attention to a very important point, that the performance of a control chart is appropriate when, in addition to complying with statistical requirements, it also includes important economic requirements such as cost, time, etc. For this reason, in the advanced stage, a number of economic constraints are applied and an economic design and then a statistical-economic design are performed for the mentioned control chart using Lorenzen and Vance's cost model.

The general form of statistical-economic design of control charts will be as follows:

$$\begin{aligned} \min E(C)/E(T) \\ ARL_L > ARL_L \\ ARL_U < ARL_U \end{aligned} \quad (۶)$$

So that ARL_L is the lower bound value for the average run length in the controlled state and ARL_U is the upper bound value for the average run length in the out of control state.

So that ARL_L is the lower bound value for the average run length in the under control state and ARL_U is the upper limit value for the average run length in the out of control state. In this research, the initial values for the upper limit of the average run length in the out of control state and the lower limit for the average The length of execution in controlled mode is determined as follows:

$$\begin{aligned} ARL_L \geq 370 \\ ARL_U \leq 20 \end{aligned} \quad (۷)$$

Table 2: Numerical results of economic statistical design of generalized weighted moving average control chart with Lorenzen and Vance cost model

θ	p	n	L	α	q	h	ARL_0	ARL_1	E(A)	E(C)	E(T)
0.01	0.6	15	2/1874	-/1891	-/1827	1/228	432/92	16/976	13/751	14.85/66	1.23/966
	0.7	14	2/932	-/994	-/775	2/179	472/501	5/338	12/296	1248/97	1.014/821
	0.8	13	2/948	-/971	-/677	2/244	467/86	3/907	11/771	11913/55	1.015/342
0.09	0.6	17	2/1843	-/1616	-/902	-/488	498/159	15/166	23/744	2914/549	1.009/316
	0.7	16	2/1944	-/188	-/6666	-/195	415/02	5/467	19/514	2338/958	123/114
	0.8	16	2/952	-/181	-/248	1/33	430/462	2/333	17/488	2070/555	119/858
0.1	0.6	15	2/968	-/1676	-/161	2/027	444/249	1/275	16/269	1912/225	118/401
	0.7	17	1/951	-/1877	-/196	-/475	497/28	14/595	24/36	2717/333	111/415
	0.8	15	2/969	-/1786	-/656	-/144	583/67	5/428	20/012	2169/569	108/415
0.1	0.8	13	2/953	-/929	-/491	1/001	467/41	2/925	18/08	1936/01	107/078
	0.9	13	3/044	-/566	-/315	1/513	475/365	1/541	16/166	1781/036	106/28

As we can see in Table 2, for each value of θ , the values related to the average time in each quality cycle and the average cost in a quality cycle show a downward trend. That is, by increasing the value of the change size in the control chart, the average time and also the average cost to execute this process has decreased, also by increasing the value of the change size, the amount of the expected cost per time unit for each cycle (E(A)) has a significant decrease, and in general, these values also have a downward trend for each value of θ . With the increase of the value of θ , we see that the value related to the expected cost per unit of time has increased.

3- Discussion and Conclusion

In the models of economic design and economic statistical design, it was found that with the increase in the size of the change (shift) in the quality characteristic, the expected cost per unit of time for each quality cycle has decreased, and this fact shows that the desired control chart has a good performance. Both in terms of complying with statistical constraints and in terms of being optimal compared to economic constraints (cost and time).

4- Reference

- [1]. Shin-li lu (2014), An Extended Nonparametric Exponentially Weighted Moving Average Sign Control Chart, John Wiley, New York, 1, 3-13.
- [2]. Sheu, S. H. and Lin, T. C. (2003), "The Generally Weighted Moving Average Control Chart for Detecting Small Shifts in the Process Mean", Quality Engineering, 16, 209-231.
- [3]. Best, M. and Neuhauser, D. (2006), "Walter A Shewhart, 1924, and the Hawthorne factory", BMJ Quality & Safety, 15(2), 142-143.
- [4]. Yourstone, S. and Zimmer, W. (1992), "Non-Normality and the Design of Control Charts or Averages", Decision Sciences, 32, 1099-1113
- [5]. Amin, R. W., Reynolds, M. R. Jr. and Bakir, S. T. (1995), "Nonparametric Quality Control Charts Based on the Sign Statistic", Communications in Statistics-Theory and Methods, 24, 1597-1623.
- [6]. Connie, M. B., Douglas, Montgomery, D. C. and Runger G. C. (1999), "Robustness of the EWMA Control Chart to Non-normality", Journal of Quality Technology, 31, 309-316.

- [7]. Riaz, M., Abid, M., Nazir, H. Z., and Abbasi, S. A. (2019), “An Enhanced Nonparametric EWMA Sign Control Chart Using Sequential Mechanism”, PloS one, 14.11, 225-330
- [8]. Montgomery, D. C. (2019), “*Introduction to statistical quality control*”, John wiley & sons.