

## ارتقاء کیفیت سیستم‌های صف‌بندی $M / M / m / K$ با استفاده از بهینه‌سازی تابع هزینه

### سیستم

ایمان مخدوم

(نویسنده مسئول)، استادیار، گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. makhdoom@pnu.ac.ir

شهرام یعقوب زاده شهرستانی

مریی، گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. yagoubzade@pnu.ac.ir

چکیده: در این مقاله سیستم صف‌بندی با ظرفیت متناهی  $M / M / m / K$  به ازاء  $m \geq 2$  در نظر گرفته شده که در آن  $K$  ظرفیت سامانه و  $m$  تعداد خدمت‌دهنده‌ها است. ابتدا تابعی به نام تابع هزینه سیستم بر حسب متوسط تعداد متقاضیان در صف و سیستم و تعداد خدمت‌دهنده‌ها پیشنهاد می‌شود. سپس هدف یافتن  $m$  ای است به نام  $m_{opt}$  که به ازای آن تابع هزینه مینیمم شود. در این مقاله سیستم  $M / M / m_{opt} / K$  سیستم بهینه نامیده می‌شود. در انتها با استفاده از یک مثال عددی به ازای  $K$ های مختلف، سیستم‌های بهینه تعیین شده و متوسط تعداد متقاضیان در صف و سیستم، متوسط مدت زمان انتظار در صف و سیستم متقاضیان و معیاری به نام متوسط درجه رضایت متقاضی در این نوع سیستم‌ها به دست آورده می‌شود.

**واژگان کلیدی:** سیستم صف‌بندی  $M / M / m / K$ ، سیستم بهینه، تابع هزینه، تعداد بهینه خدمت‌دهنده‌ها.

قیمت‌گذاری بهینه خدمات در سیستم‌های انستاد پیشنهاد کردند. چن [۹] یک برنامه‌ریزی غیر خطی برای سیستم‌های صف‌بندی معرفی نمود و با استفاده از آن یک نرخ خدمت‌دهی مناسب را پیشنهاد داد. پارودو و همکاران [۱۰] در مورد انتخاب بهینه تعداد خدمت‌دهنده‌ها در سیستم‌های صف‌بندی با ظرفیت متناهی، روشی معرفی کردند که بر اساس معیار متوسط درجه رضایت متقاضی، تعداد بهینه سرورها مشخص می‌شود. ژانگ [۱۱] یک مدل صف بانکی مبتنی بر چند عامل را معرفی نموده و سپس به بهینه‌سازی آن پرداخت.

در این مقاله با استفاده از متوسط تعداد متقاضیان در صف و سیستم و تعداد خدمت‌دهنده‌ها، تابعی به نام تابع هزینه معرفی می‌شود و هدف اصلی تعیین تعداد خدمت‌دهنده‌ها است، طوری که تابع هزینه مینیمم شود. بنابراین در بخش ۲ سیستم صف‌بندی  $M / M / m / K$  معرفی و برخی از ویژگی‌های مهم آن ارائه می‌شود. در بخش ۳ تابع هزینه معرفی شده و نحوه بهینه‌سازی سیستم  $M / M / m / K$  بر اساس تابع هزینه تشریح می‌شود. در بخش ۴ با استفاده از یک مثال عددی برای  $K$  های متفاوت سیستم بهینه یعنی سیستم

### ۱- مقدمه

سیستم‌های صف‌بندی با ظرفیت متناهی دارای اهمیت فراوان و کاربردهای عملی متعددی هستند. بررسی سیستم‌های شبکه‌ای صف برای تخمین عملکرد معماری‌های نرم‌افزاری توسط بالسامو و همکاران [۱] انجام شد. تکاجی و همکاران [۲] به محاسبات ظرفیت سیستم در سیستم‌های بی‌سیم پرداخته‌اند. همچنین یک سری تحقیقات کاربردی ([۳]، [۴]، [۵] و [۶]) در زمینه سیستم‌های صف‌بندی با ظرفیت متناهی صورت گرفته شد.

در زمینه بهینه‌سازی سیستم‌های صف‌بندی با ظرفیت متناهی نیز تحقیقات متعددی انجام شده است. ونگ و همکاران [۷] از روش بازگشتی برای مطالعه شرایط  $N$  Policy و کنترل بهینه سیستم  $M / G / 1$  با ظرفیت متناهی استفاده نمودند. شرط  $N$  Policy بدین معنی است که اگر در سیستم متقاضی باشد، آن‌گاه خدمت‌دهنده فعالیت خود را متوقف خواهد ساخت و تا زمانی که  $N$  متقاضی  $N \geq 1$  در سیستم حضور نیابند فعالیت خود را شروع نمی‌کند. زیا و همکاران [۸] یک کران پایین برای

Corresponding author: makhdoom@pnu.ac.ir

<https://doi.org/10.48313/jqem.2023.208474>

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۴/۳۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۷/۱۳

دوره ۱۳/ شماره ۳

صفحات ۲۶۷-۲۸۰

تا جمعیت سیستم به  $n + 1$  برسد، متغیر تصادفی دارای توزیع نمایی با پارامتر  $\lambda_n$  در نظر گرفته می‌شود. بنابر این آهنگ ورود به سیستم ( $\lambda_n$ ) به صورت

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & n < K \\ 0 & n \geq k \end{cases}$$

است.

بر اساس [۱۲] توزیع تعداد متقاضیان در سیستم با فرض  $r = \frac{\lambda}{\mu}$  به صورت رابطه (۱) است

$$P_n = \begin{cases} \frac{r^n}{n!} P_0 & 1 \leq n \leq m-1 \\ \frac{r^n}{m! m^{n-m}} P_0 & m \leq n \leq K \end{cases} \quad (1)$$

$$\rho = \frac{r}{m} \text{ که با فرض}$$

$$P_0 = \begin{cases} \left( \sum_{i=0}^{m-1} \frac{r^i}{i!} + \frac{r^m(1-\rho^{K-m+1})}{m!(1-\rho)} \right)^{-1} & \rho \neq 1 \\ \left( \sum_{i=0}^{m-1} \frac{r^i}{i!} + \frac{r^m(K-m+1)}{m!} \right)^{-1} & \rho = 1 \end{cases} \quad (2)$$

و متوسط تعداد متقاضیان در صف یعنی به صورت

$$L_q = \sum_{n=m}^K (n-m)P_n$$

$$L_q = \begin{cases} \frac{r^m(\rho + (K-m)\rho^{K-m+2} - (K-m+1)\rho^{K-m+1})}{m!(1-\rho)^2} P_0 & \rho \neq 1 \\ \frac{r^m(K-m)(K-m+1)}{2m!} P_0 & \rho = 1 \end{cases} \quad (3)$$

نباشد، در این مقاله آن متقاضی به عنوان متقاضی از دست‌رفته محسوب می‌شود.

### ۳- تابع هزینه

در هر سیستم صف‌بندی، هدف کاهش طول صف و زمان انتظار متقاضی و افزایش درجه رضایت آن است که از طریق افزایش تعداد خدمت‌دهنده‌ها امکان‌پذیر می‌شود و این کار مستلزم تقبل هزینه‌هایی است. به‌طور کلی در یک سیستم صف‌بندی امید ریاضی کل هزینه‌ها در واحد زمان معیاری برای ارزیابی سیستم است که هزینه‌ها بستگی به نوع و ماهیت آن دارد. در این مقاله با استفاده از [۱۳] تابع هزینه به صورت رابطه (۴) پیشنهاد می‌شود

$M/M/m_{Opt}/K$  تعیین شده و سپس با محاسبه معیارهایی، قابل قبول بودن عملکرد آن‌ها نشان داده می‌شود.

### ۲- سیستم صف‌بندی $M/M/m/K$

سیستم صف‌بندی  $M/M/m/K$  دارای  $m$  خدمت‌دهنده ( $m \geq 2$ ) است که نرخ خدمت‌دهی هر کدام از آن‌ها برابر  $\mu$  و مستقل از تعداد متقاضیان در سیستم و نرخ مراجعه متقاضیان به سیستم نیز برابر  $\lambda$  و مستقل از وضعیت سیستم و  $\mu$  است. همچنین توزیع زمان بین مراجعه‌ها و خدمت‌دهی‌ها، توزیع‌های نمایی به ترتیب با پارامترهای  $\lambda$  و  $\mu$  فرض می‌شود. در این مدل نرخ خروج از سیستم متفاوت با نرخ خدمت‌دهی است. اگر تعداد متقاضیان در سیستم کمتر از  $m$  باشد، نرخ خروج  $n\mu$  و در صورتیکه حداقل  $m$  باشد نرخ خروج  $m\mu$  است. بنابر این آهنگ خروج از سیستم ( $\mu_n$ ) به صورت

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & n < m \\ m\mu & m \leq n \leq K \\ 0 & n > k \end{cases}$$

تعریف می‌شود.

در هر سیستم صف‌بندی وقتی که در لحظه مشخصی تعداد متقاضیان در سیستم  $n$  است، مدت زمانی که طول می‌کشد

و متوسط تعداد متقاضیان در سیستم یعنی  $L = \sum_{n=0}^K nP_n$  به صورت

$$L = L_q + m - P_0 \sum_{n=0}^{m-1} \frac{r^n(m-n)}{n!} \quad (4)$$

و متوسط زمان‌های انتظار هر متقاضی در صف ( $W_q$ ) و در سیستم ( $W$ ) به صورت

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda(1-P_K)}, \quad W = \frac{L}{\lambda(1-P_K)} \quad (5)$$

و  $\bar{\lambda}$  میانگین نرخ متقاضیانی است که عملاً در سامانه‌اند که در آن  $\bar{\lambda} = \lambda(1-P_K)$  به دست آورده می‌شود. همچنین اگر امکان ورود متقاضی به سیستم به علت تکمیل ظرفیت میسر

$$C_m(\lambda, \mu) = C_1(L - L_q) + C_2(m - L + L_q) + C_3m + C_4(\lambda - \bar{\lambda}) + C_5L_q + C_6(L - L_q) \\ = (C_1 + C_6 - C_2)(L - L_q) + (C_2 + C_3)m + C_4(\lambda - \bar{\lambda}) + C_5L_q \quad (۶)$$

که در آن:  $C_4$  در نظر گرفته شود، متوسط کل خسارتی که سیستم بابت از

دست رفتن متقاضیان در واحد زمان متحمل می‌شود  $C_4(\lambda - \bar{\lambda})$  است.

(۵)  $C_5L_q$ ، هزینه اتلاف وقت متقاضیان در صف تعریف می‌شود که میانگین کل این هزینه برابر با هزینه اتلاف وقت هر متقاضی در صف ( $C_5$ ) در متوسط تعداد متقاضیان در صف یعنی  $L_q$  است.

(۶)  $C_6(L - L_q)$ ، هزینه اتلاف وقت متقاضیان در هنگام دریافت خدمت تعریف می‌شود که میانگین کل این هزینه برابر با هزینه اتلاف وقت هر متقاضی در حال دریافت خدمت ( $C_6$ ) در متوسط تعداد متقاضیان در حال دریافت خدمت یعنی  $(L - L_q)$  است.

همچنین در این مقاله تابع هزینه در حالت  $\rho \neq 1$  در نظر گرفته می‌شود. بنابر این با توجه به روابط (۱) تا (۴) و رابطه

$$\lambda - \bar{\lambda} = \frac{\lambda r^K}{m!m^{K-m}} P_0$$

رابطه (۶) به صورت

$$C_m(\lambda, \mu) = (C_1 + C_6 - C_2)(m - P_0) \sum_{n=0}^{m-1} \frac{r^n(m-n)}{n!} + (C_2 + C_3)m + \frac{C_4\lambda r^K}{m!m^{K-m}} P_0 \\ + \frac{C_5r^m[\rho + (K-m)\rho^{K-m+2} - (K-m+1)\rho^{K-m+1}]}{m!(1-\rho)^2} P_0 \quad (۷)$$

تبدیل می‌شود. عوامل تصمیم‌گیری به شمار می‌آید، انتخاب تعداد بهینه خدمت‌دهنده‌ها با در نظر گرفتن معیار تابع هزینه نقش مهمی دارد. در ادامه نحوه یافتن تعداد خدمت‌دهنده‌های بهینه توضیح داده می‌شود.

ابتدا به ازای  $K$  معین و  $m$  های مشخص ( $m = 2, 3, \dots, K$ )، زوج  $(\lambda, \mu)$  طوری تعیین می‌شوند که به ازای آن‌ها تابع هزینه یعنی تابع  $C_m(\lambda, \mu)$  مینیمم شود که زوج  $(\lambda, \mu)$  مطلوب به کمک معادلات  $\frac{\partial C_m(\lambda, \mu)}{\partial \mu} = 0$  و  $\frac{\partial C_m(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} = 0$  با استفاده از بسته  $BB$  در نرم‌افزار  $R$  به دست آورده می‌شوند. بنابر این از رابطه  $\frac{\partial C_m(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} = 0$ ، رابطه (۸)

$$\frac{(C_1 + C_6 - C_2)}{\mu} [m\phi_m(\lambda, \mu) + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(m-n)r^{n-1}}{(n-1)!} (r\phi_m(\lambda, \mu) - P_0)] + \frac{C_4r^K}{m!m^{K-m}} [(k+1)P_0 - r\phi_m(\lambda, \mu)] + \\ \frac{C_5r^{m-1}}{\mu} [m\phi_m(\lambda, \mu)P_0 - r\phi_m(\lambda, \mu)\phi_m(\lambda, \mu) + \frac{r}{m}\xi_m(\lambda, \mu)P_0] = 0 \quad (۸)$$

و از رابطه  $\frac{\partial C_m(\lambda, \mu)}{\partial \mu} = 0$ ، رابطه

$$\frac{(C_2 - C_1 - C_6)}{\mu} \left[ m\phi_m^*(\lambda, \mu) - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{r^n(m-n)}{(n-1)!} \left( P_0 - \frac{\phi_m^*(\lambda, \mu)}{n} \right) \right] + \frac{C_4r^{K+1}}{m!m^{K-m}} (\phi_m^*(\lambda, \mu) - KP_0) - \\ \frac{C_5r^m}{\mu} (\xi_m^*(\lambda, \mu)P_0 + m\phi_m(\lambda, \mu)P_0 - \phi_m^*(\lambda, \mu)\phi_m(\lambda, \mu)) = 0 \quad (۹)$$

به دست آورده می‌شوند که در آن‌ها

$$\begin{aligned} \varphi_m(\lambda, \mu) &= \left( \sum_{n=1}^{m-1} \frac{r^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{m^{m-1}}{m!} \sum_{n=m}^K n \rho^{n-1} \right) P_0^2 \\ \phi_m(\lambda, \mu) &= \frac{\rho + (K-m)\rho^{K-m+2} - (K-m+1)\rho^{K-m+1}}{m!(1-\rho)^2} \\ \xi_m(\lambda, \mu) &= \frac{1 + \rho - (K-m+1)^2 \rho^{K-m} - (K-m)^2 \rho^{K-m+2}}{m!(1-\rho)^3} \\ &\quad + \frac{[(K-m)(K-m+2) + (K-m+1)(k-m-1)]\rho^{K-m+1}}{m!(1-\rho)^3} \\ \xi_m^*(\lambda, \mu) &= \frac{1 + \rho - (K-m+1)^2 \rho^{K-m} - (K-m)^2 \rho^{K-m+2}}{m!(1-\rho)^3} \\ &\quad + \frac{[(K-m)(K-m+2) + (K-m+1)(k-m-1)]\rho^{K-m+1}}{m!(1-\rho)^3} \\ \varphi_m^*(\lambda, \mu) &= \left( \sum_{n=1}^{m-1} \frac{r^n}{(n-1)!} + \frac{m^{m-1}}{m!} \sum_{n=m}^K n \rho^n \right) P_0^2 \\ \xi_m^*(\lambda, \mu) &= \frac{\rho + \rho^2 - (K-m)\rho^{K-m+3} - (K-m+1)^2 \rho^{K-m+1}}{m!(1-\rho)^3} \\ &\quad + \frac{[(K-m)(K-m+2) + (K-m+1)(k-m-1)]\rho^{K-m+2}}{m!(1-\rho)^3} \end{aligned}$$

اگر  $(\Omega, F, P)$  یک فضای احتمال باشد به طوریکه  $\Omega$  فضای نمونه،  $F$  یک سیگما جبر روی  $\Omega$  و  $P$  نیز یک اندازه احتمال در نظر گرفته شوند، آن‌گاه مجموعه فازی  $\tilde{A}$  در  $\Omega$  یک پیشامد فازی نامیده می‌شود.

**تعریف ۱:** [۱۵] اگر به ازای هر  $\omega \in \Omega$ ،  $\mu_{\tilde{A}}(\omega)$  تابع عضویت پیشامد فازی  $\tilde{A}$  باشد، آن‌گاه تابع احتمال  $\tilde{A}$  به صورت

$$P(\tilde{A}) = \sum_{\omega \in \Omega} \mu_{\tilde{A}}(\omega) P_\omega, \quad \mu_{\tilde{A}}(\omega): \Omega \rightarrow [0,1]$$

تعریف می‌شود.

بنابر این با توجه به تعریف ۱، احتمال روبرو شدن یک متقاضی در حال وارد شدن به سیستم با صف به طول‌های کوتاه، متوسط و بلند به صورت

$$\begin{aligned} \pi(\tilde{A}) &= \sum_{n=0}^K \mu_{\tilde{A}}(n) P_n \\ \pi(\tilde{B}) &= \sum_{n=0}^K \mu_{\tilde{B}}(n) P_n \\ \pi(\tilde{C}) &= \sum_{n=0}^K \mu_{\tilde{C}}(n) P_n \end{aligned} \quad (10)$$

هستند. بنابر این متوسط درجه رضایت متقاضی<sup>۱</sup> به صورت

$$ADCS = a_1 \pi(\tilde{A}) + a_2 \pi(\tilde{B}) + a_3 \pi(\tilde{C}) \quad (11)$$

تعریف می‌شود.

هستند.

از آن جایی که افزایش رضایت متقاضی مهم است، در این مقاله میزان رضایت متقاضی (درجه رضایت متقاضی) برای مدل بهینه  $M/M/m_{opt}/K$  محاسبه می‌شود. روشی توسط [۱۰] برای محاسبه درجه رضایت متقاضی با مشاهده طول صف در لحظه ورود به سیستم ارائه شد. اگر متقاضی در لحظه ورودش با صف با طول‌های کوتاه، متوسط و بلند روبرو شود، درجه رضایت آن به ترتیب بالا  $(a_1)$ ، متوسط  $(a_2)$  و پایین  $(a_3)$  خواهد بود که  $(a_1 \geq a_2 \geq a_3)$ .

صف‌های اشاره شده به دلیل نسبی بودن اصطلاحات کوتاه، متوسط و بلند توسط آن‌ها به صورت مجموعه‌های فازی  $\tilde{A}$  (صف کوتاه)،  $\tilde{B}$  (صف متوسط) و  $\tilde{C}$  (صف بلند) به صورت‌های

$$\tilde{A} = \{(0, \mu_{\tilde{A}}(0)), (1, \mu_{\tilde{A}}(1)), \dots, (K, \mu_{\tilde{A}}(K))\}$$

$$\tilde{B} = \{(0, \mu_{\tilde{B}}(0)), (1, \mu_{\tilde{B}}(1)), \dots, (K, \mu_{\tilde{B}}(K))\}$$

$$\tilde{C} = \{(0, \mu_{\tilde{C}}(0)), (1, \mu_{\tilde{C}}(1)), \dots, (K, \mu_{\tilde{C}}(K))\}$$

در نظر گرفته شدند که  $\mu_{\tilde{A}}$ ،  $\mu_{\tilde{B}}$  و  $\mu_{\tilde{C}}$  به ترتیب تابع عضویت مجموعه‌های فازی  $\tilde{A}$ ،  $\tilde{B}$  و  $\tilde{C}$  هستند. با توجه به [۱۴]

$$\mu_{\tilde{A}}(i) + \mu_{\tilde{B}}(i) + \mu_{\tilde{C}}(i) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, K.$$

همچنین  $\mu_{\tilde{A}}(i)$  درجه عضویت مجموعه فازی  $\tilde{A}$  وقتی که  $i$  متقاضی در صف است را نشان می‌دهد.

<sup>1</sup> Average degree of customers satisfaction

## ۴- مثال عددی

شده و در نهایت  $m$  مطلوب انتخاب می‌شود. نتایج محاسبات در جدول‌های ۱ و ۲ آورده شده که نشان‌دهنده آن است، برای  $K = 7, 8$  و  $K = 9, 10$  تعداد بهینه خدمت‌دهنده‌ها به ترتیب  $m = 3$  و  $m = 4$  هستند و به نظر می‌رسد، مقدار بهینه  $m$  برای گروه  $K$ ‌های اشاره شده به مقدار  $\hat{r}$  بستگی دارد، چون وقتی  $2 < \hat{r} < 3$  است این مقادیر  $m$  حاصل شدند. البته نمودار تابع هزینه  $(C)$  بر حسب  $m$  به ازای  $r = 2.5$  برای گروه  $K = 9, 10, 11, 12$  و گروه  $K = 5, 6, 7, 8$  در شکل ۱ رسم شده که نشان دهنده آن است، مقدار بهینه  $m$  برای  $K$ ‌های متفاوت رسم شده در قسمت‌های (الف) و (ب) شکل ۱ به ترتیب  $m = 4$  و  $m = 3$  است.

در این بخش، سیستم صف‌بندی  $M/M/m/K$  در نظر گرفته می‌شود. تمام محاسبات مربوط به این بخش با نرم‌افزار RStudio انجام شده است. با فرض

$$C_1 = 400, C_2 = 300, C_3 = 1000, \\ C_4 = 250, C_5 = 200, C_6 = 150,$$

هدف یافتن  $m$  یا تعداد خدمت‌دهنده‌های بهینه به ازای  $K = 7, 8, 9, 10$  است، طوری که تابع هزینه مینیمم شود. ابتدا به ازای  $(K, m)$  معین  $(m = 2, 3, \dots, K)$ ،  $(\lambda, \mu)$  بهینه که با نماد  $(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$  نشان داده می‌شود، طوری محاسبه می‌گردد که تابع هزینه  $C_m(\lambda, \mu)$  مینیمم شود. سپس در بین

جدول ۱: مقادیر بهینه  $\lambda, \mu$  و تابع هزینه  $C_m(\lambda, \mu)$  برای  $K=7, 8$

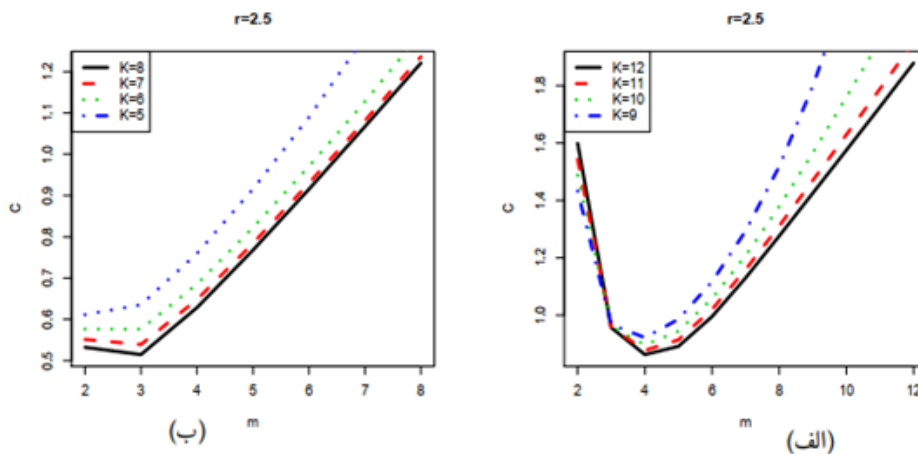
$C_m(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$	K=8			K=7				
	$\hat{r}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\lambda}$	$C_m(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$	$\hat{r}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\lambda}$	$m$
5322	2.37	15.11	35.78	5514	2.27	11.73	26.65	2
4937	2.49	19.70	49.07	5120	2.39	25.04	59.78	3
5956	2.76	12.44	34.42	6060	2.54	30.34	77.07	4
7214	2.56	14.74	37.76	7281	2.64	13.18	34.85	5
8519	2.53	10.44	26.51	8573	2.62	15.80	41.40	6
9839	2.41	15.79	38.06	9889	2.68	25.31	67.88	7
11164	2.40	32.78	78.82					8

(۳)، (۴)، (۵) و (۱۱) به دست آورده می‌شوند. اما ابتدا برای هر کدام از مدل‌های اشاره شده باید به کمک رابطه (۲)، احتمالات حدى محاسبه شود که نتایج محاسبات در جدول ۳ آورده شده است.

اکنون برای سیستم‌های بهینه  $M/M/3/7$ ،  $M/M/3/8$ ،  $M/M/4/9$  و  $M/M/4/10$  مقادیر متوسط تعداد متقاضیان در صف، سیستم، متوسط مدت زمان انتظار متقاضی در صف و سیستم و متوسط درجه رضایت متقاضی به ترتیب به کمک روابط

جدول ۲: مقادیر بهینه  $\lambda, \mu$  و تابع هزینه  $C_m(\lambda, \mu)$  برای  $K=9, 10$

$C_m(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$	K=10			K=9				
	$\hat{r}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\lambda}$	$C_m(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$	$\hat{r}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\lambda}$	$m$
68725	2.56	25.54	65.27	60913	2.48	13.97	34.64	2
13604	2.73	29.54	80.75	12976	2.51	31.22	78.30	3
10270	2.54	15.78	40.10	10224	2.41	22.21	51.19	4
10396	2.57	16.02	41.14	10448	2.36	27.41	64.79	5
10994	2.64	13.84	36.56	11109	2.45	35.14	85.97	6
11310	2.61	15.77	41.23	12450	2.41	19.16	46.08	7
12892	2.44	24.66	60.05	13098	2.57	18.25	46.85	8
14059	2.72	21.47	58.44	14306	2.50	16.07	40.12	9
15303	2.66	14.30	38.12					10



شکل ۱: نمودار تابع هزینه  $(C_m(\lambda, \mu))$  بر حسب  $m$  برای  $K$  های مختلف

جدول ۳: احتمال‌های حدی سیستم‌های بهینه

$P_{10}$	$P_9$	$P_8$	$P_7$	$P_6$	$P_5$	$P_4$	$P_3$	$P_2$	$P_1$	$P_0$	$K$
			0.0695	0.0828	0.1041	0.1307	0.1644	0.2065	0.1730	0.0725	7
		0.0605	0.0729	0.0878	0.1057	0.1273	0.1533	0.1847	0.1483	0.0595	8
	0.0069	0.0121	0.0211	0.0366	0.0635	0.1102	0.1912	0.2488	0.2159	0.0937	9
0.0081	0.0128	0.0201	0.0317	0.0498	0.0785	0.1235	0.1944	0.2295	0.1806	0.0711	10

جدول ۴: احتمال‌های مجموعه‌های فازی و معیارهای ویژه سیستم‌های بهینه

K=10	K=9	K=8	K=7	
0.6099	0.3676	0.3057	0.3337	$\pi(\tilde{A})$
0.2715	0.3938	0.2983	0.3075	$\pi(\tilde{B})$
0.1188	0.2387	0.3960	0.3623	$\pi(\tilde{C})$
0.8144	0.6874	0.6233	0.6450	$ADCS$
0.0082	0.0091	0.0009	0.0014	$L_q$
2.529	2.298	2.341	2.231	$L$
0.00021	0.00018	0.00022	0.00026	$W_q$
0.0636	0.0452	0.0508	0.0399	$W$

همچنین با فرض  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0.6$  و  $a_3 = 0.35$  و با در نظر

گرفتن مجموعه‌های فازی  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  و  $\tilde{C}$  به صورت‌های

$$\tilde{A} = \{(0, 0.3), (1, 0.4), (2, 0.2), (3, 0.1), (4, 0.7), (5, 0.1), (6, 0.5), (7, 0.6)\}$$

$$\tilde{B} = \{(0, 0.2), (1, 0.4), (2, 0.4), (3, 0.3), (4, 0.2), (5, 0.1), (6, 0.5), (7, 0.2)\}$$

$$\tilde{C} = \{(0, 0.5), (1, 0.2), (2, 0.4), (3, 0.6), (4, 0.1), (5, 0.8), (6, 0), (7, 0.2)\}$$

برای سیستم  $M/M/3/7$  و

$$\tilde{A} = \{(0, 0.4), (1, 0.2), (2, 0.7), (3, 0.5), (4, 0), (5, 0.3), (6, 0), (7, 0.2), (8, 0)\}$$

$$\bar{B} = \{(0, 0.5), (1, 0.4), (2, 0.1), (3, 0), (4, 0), (5, 0.4), (6, 1), (7, 0.5), (8, 0.4)\}$$

$$\bar{C} = \{(0, 0.1), (1, 0.4), (2, 0.2), (3, 0.5), (4, 1), (5, 0.3), (6, 0), (7, 0.3), (8, 0.6)\}$$

برای سیستم  $M/M/3/8$  و

$$\bar{A} = \{(0, 0.7), (1, 0), (2, 0.6), (3, 0.2), (4, 0.5), (5, 0.4), (6, 0.1), (7, 0.7), (8, 1), (9, 0.5)\}$$

$$\bar{B} = \{(0, 0.1), (1, 0.7), (2, 0.3), (3, 0.6), (4, 0.2), (5, 0.3), (6, 0), (7, 0.1), (8, 0), (9, 0.1)\}$$

$$\bar{C} = \{(0, 0.2), (1, 0.3), (2, 0.1), (3, 0.2), (4, 0.3), (5, 0.3), (6, 0.9), (7, 0.2), (8, 0), (9, 0.4)\}$$

برای سیستم  $M/M/4/9$  و

$$\bar{A} = \{(0, 0.6), (1, 0.5), (2, 0.7), (3, 0.8), (4, 0.9), (5, 0.2), (6, 0), (7, 0.4),$$

$$\bar{B} = \{(0, 0.3), (1, 0.3), (2, 0.2), (3, 0.1), (4, 0), (5, 0.7), (6, 1), (7, 0.5), (8, 0.1), (9, 0.5), (10, 0.2)\}$$

$$\bar{C} = \{(0, 0.1), (1, 0.2), (2, 0.1), (3, 0.1), (4, 0.1), (5, 0.1), (6, 0), (7, 0.1), (8, 0.1), (9, 0.1), (10, 0.8)\}$$

در نظر گرفته شده که زمان‌های بین مراجعه متقاضیان دارای توزیع نمایی با پارامتر  $\lambda$  و زمان‌های سرویس دارای توزیع نمایی با پارامتر  $\mu$  است. هدف اصلی مقاله پیدا کردن  $m$  است،  $(m = 2, \dots, K)$  به طوری که تابع هزینه سیستم مینیمم شود. بنابر این ابتدا تابع هزینه سیستم پیشنهاد شد و سپس با استفاده از مثال عددی و رسم نمودار، برای گروه  $K = 5, 6, 7, 8$  و گروه  $K = 9, 10, 11, 12$  مقدار  $m$  بهینه  $(m_{opt})$  به ترتیب ۳ و ۴ به دست آورده شد. با محاسبه متوسط تعداد متقاضیان در صف و سیستم، متوسط مدت زمان انتظار در صف و سیستم متقاضیان و متوسط تعداد متقاضیان از دست‌رفته برای سیستم‌های بهینه  $M/M/4/9$ ،  $M/M/3/8$ ،  $M/M/3/7$  و  $M/M/4/10$ ، عملکرد این سیستم‌ها قابل قبول تشخیص داده شد. همچنین با یافتن معیاری به نام متوسط درجه رضایت متقاضی، مشخص شد که متقاضیان رضایت بالای ۶۰ درصدی از عملکرد سیستم‌های بهینه و بویژه از سیستم  $M/M/4/10$  رضایت بالای ۸۰ درصدی دارند.

## ۶- تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از سردبیر و داوران محترم مجله در ارزیابی مقاله قدردانی و تشکر می‌کند.

برای سیستم  $M/M/4/10$ ، احتمال‌های مجموعه‌های فازی  $\bar{A}$  و  $\bar{B}$  و  $\bar{C}$  و معیارهایی مانند متوسط درجه رضایت متقاضی، متوسط تعداد متقاضیان در صف و سیستم و متوسط مدت زمان انتظار متقاضیان در صف و سیستم که در این مقاله معیارهای ویژه نامیده می‌شود به دست آورده شده که در جدول ۴ گزارش شده است. نتایج این جدول نشان دهنده آن است که در سیستم‌های بهینه بطور متوسط صف خالی بوده و متوسط تعداد متقاضیان در سیستم ۲ یا حداکثر ۳ نفر بودند و متوسط زمان انتظار متقاضی در صف تقریباً صفر و مدت زمان کوتاهی هم در سیستم تا اخذ سرویس منتظر مانده است. به نظر می‌رسد سیستم‌های بهینه توانسته رضایت متقاضیان را جلب کند، چون متوسط درجه رضایت متقاضی در سیستم‌های  $M/M/3/7$ ،  $M/M/3/8$  و  $M/M/4/9$  بالای ۶۰ درصد و بویژه در سیستم  $M/M/4/10$  بالای ۸۰ درصد شده است. همچنین متوسط تعداد متقاضیان از دست‌رفته به کمک رابطه  $\lambda - \bar{\lambda}$  برای سیستم‌های بهینه به ترتیب  $۰/۳۵۸۱$ ،  $۲/۹۶۸$ ،  $۳/۹۴۰$  و  $۰/۳۲۵۶$  به دست آورده می‌شود که اعدادی رضایت‌بخش بویژه برای دو سیستم آخر هستند.

## ۵- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله سیستم صف بندی  $M/M/m/K$  که  $K$  ظرفیت سیستم و  $m$  تعداد خدمت‌دهنده‌ها ( $m \geq 2$ ) است،

source fuzzy queuing system. *Fuzzy Sets and Systems*, 159(3), 325-342.

۷- مراجع

[11] Zhang, Q. (2012). Multi-agent based bank queuing model and optimization. In *Advances in electronic engineering, communication and management* (Lecture Notes in Electrical Engineering, Vol. 142, pp. 121-121). Springer.

[12] Taha, H. A. (2003). *Operations research: An introduction* (7th ed.). Prentice-Hall.

[13] Modarres, M., & Teymouri, A. (2015). *Queueing theory* (6th ed.). Center for Scientific Publications, University of Science and Technology, Tehran.

[14] Dubois, D., & Prade, H. (1980). *Fuzzy sets and systems: Theory and applications*. Academic Press.

[15] Zadeh, L. A. (1968). Probability measures of fuzzy events. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 23, 421-427.

[1] Balsamo, S., Di Persone, V., & Inverardi, P. (2003). A review on queuing network models with finite capacity queues for software architectures performance prediction. *Performance Evaluation*, 51, 269-288.

[2] Takagi, H., Yoshino, H., Matoba, N., Azuma, M., & Shirakabe, M. (2005). System capacity calculation for packet-switched traffic in the next generation wireless systems, Part II: Batch arrival M/G/1 nonpreemptive priority queuing model for transmission over a radio channel. *Performance Challenges for Efficient Next Generation Networks*, 6A-6C, 21-30.

[3] Bocharov, P. P., & Viskova, E. V. (2005). A single-server finite-capacity queuing system with Markov flow and discrete-time service. *Automat. Remote Control*, 66(2), 233-248.

[4] Gupta, U. C., & Sikdar, K. (2006). Computing queue length distributions in MAP/G/1/N queue under single and multiple vacation. *Applied Mathematics and Computation*, 17(2), 1498-1525.

[5] Jain, M. (2005). Finite capacity M/M/r queuing system with queue-dependent servers. *Computational Mathematics Applications*, 50, 187-199.

[6] Thomas, N. (2006). Approximation in non-product form finite capacity queue systems. *Future Generation Computer Systems*, 22(7), 820-827.

[7] Wang, K. H., & Ke, J. C. (2000). A recursive method to the optimal control of an M/G/1 queuing system with finite capacity and infinite capacity. *Applied Mathematical Modelling*, 24, 899-914.

[8] Ziya, S., Ayhan, H., & Foley, R. D. (2006). Optimal prices for finite capacity queuing systems. *Operations Research Letters*, 34, 214-218.

[9] Chen, S. P. (2007). Solving fuzzy queuing decision problems via a parametric mixed-integer nonlinear programming method. *European Journal of Operational Research*, 177, 445-457.

[10] Pardo, M. J., & De la Fuente, D. (2008). Optimal selection of the service rate for a finite input

# Improving the Quality of M/M/m/K Queuing Systems Using System Cost Function Optimization

Iman Makhdoom<sup>2</sup>,

Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran, Iran.

Shahram Yaghoobzadeh Shahrastani

Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran, Iran.

**Abstract:** In this article, a queuing system with finite capacity, referred to as  $M / M / m / k$ , is analyzed for  $m \geq 2$ , where  $K$  represents the system's capacity and  $m$  indicates the number of servers. Initially, a function known as the system cost function is introduced. This function is based on the number of customers present in the queue and the number of servers available. The main objective is to identify the optimal number of servers, termed  $m_{opt}$ , that minimizes the system cost function. This optimal configuration, denoted as  $M / M / m_{opt} / K$ , is termed the optimal system. To illustrate the concept, a numerical example is provided, showcasing various values of  $K$  to determine the optimal systems. The analysis covers key performance metrics such as the average number of customers in the queue and the entire system, the average waiting time of the customers both in the queue and the system, and a metric referred to as the average degree of customer satisfaction within these queuing systems. Through this comprehensive approach, the study aims to provide valuable insights into optimizing queuing systems for better efficiency and customer satisfaction.

**Keywords:** The  $M/M/m/K$  queuing system, Optimal system, Cost function, Optimal number of servers.

## 1- Introduction and Methodology

Finite-capacity queuing systems are of great importance and have numerous practical applications. The analysis of queuing network systems for estimating the performance of software architectures was conducted by [1]. System capacity calculations in wireless systems were addressed by [8]. Additionally, a series of applied studies on finite-capacity queuing systems have been carried out by [2], [5], [6], and [9]. Numerous studies have also been conducted in the field of optimizing finite-capacity queuing systems. [10] used a recursive method to study the N Policy conditions and optimal control of the  $M/G/1$  system with finite capacity. The N Policy condition means that if there is a customer in the system, the server will stop its operation and will not resume until there are  $N$  customers ( $N \geq 1$ ) present in the system. [11] proposed a lower bound for optimal pricing of services in blocking systems. [3] introduced a nonlinear programming method for queuing systems and used it to suggest an appropriate service rate. [7] introduced a method for the optimal selection of the number of servers in finite-capacity queuing systems, where the optimal number of servers is determined based on the average customer satisfaction criterion. [12] introduced a multi-agent-based banking queuing model and then optimized it. In this article, a function called the cost function is introduced using the average number of customers in the queue and system, as well as the number of servers. The main goal is to determine the number of servers such that the cost function is

---

<sup>2</sup> Corresponding Author: makhdoom@pnu.ac.ir

minimized. Therefore, in Section 2, the  $M / M / m / K$  queuing system is introduced, and some of its important features are presented. In Section 3, the cost function is introduced, and the optimization of the  $M / M / m / K$  system based on the cost function is explained. In Section 4, using a numerical example for different values of  $K$ , the optimal system, i.e.,  $M / M / m_{opt} / K$ , is determined, and then by calculating certain criteria, the acceptability of their performance is demonstrated.

## 2-The method of optimizing the $M / M / m / K$ model

The optimization of a finite-capacity system refers to finding the optimal number of servers such that the system's cost is minimized. It is clear that as the number of servers increases, the number of customers in the queue and system will decrease, but the system's cost will also undoubtedly increase. However, since cost is considered one of the most important factors in decision-making today, selecting the optimal number of servers with consideration of the cost function criterion plays a crucial role. In the following sections, the method for finding the optimal number of servers will be explained.

First, for a given  $K$  and specific values of  $m$  (e.g.,  $m = 2, 3, \dots, K$ ), the pair  $(\lambda, \mu)$  is determined in such a way that the cost function,  $C_m(\lambda, \mu)$ , is minimized. The optimal pair  $(\lambda, \mu)$  is obtained using the equations  $\frac{\partial C_m(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} = 0$  and  $\frac{\partial C_m(\lambda, \mu)}{\partial \mu} = 0$ , and with the help of the BB package in R software. Therefore, from the relation  $\frac{\partial C_m(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} = 0$ , the following relationship is derived:

$$\begin{aligned} \frac{(C_1 + C_6 - C_2)}{\mu} [m\varphi_m(\lambda, \mu) + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(m-n)r^{n-1}}{(n-1)!} (\frac{r\varphi_m(\lambda, \mu)}{n} - P_0)] + \frac{C_4 r^K}{m! m^{K-m}} [(k \\ + 1)P_0 - r\varphi_m(\lambda, \mu)] + \frac{C_5 r^{m-1}}{\mu} [m\phi_m(\lambda, \mu)P_0 \\ - r\phi_m(\lambda, \mu)\varphi_m(\lambda, \mu) + \frac{r}{m} \xi_m(\lambda, \mu)P_0] = 0 \end{aligned}$$

And from the relation  $\frac{\partial C_m(\lambda, \mu)}{\partial \mu} = 0$ , the following relationship is derived:

$$\begin{aligned} \frac{(C_2 - C_1 - C_6)}{\mu} [m\varphi_m^*(\lambda, \mu) - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{r^n(m-n)}{(n-1)!} (P_0 - \frac{\varphi_m^*(\lambda, \mu)}{n})] \\ + \frac{C_4 r^{K+1}}{m! m^{K-m}} (\varphi_m^*(\lambda, \mu) - KP_0) - \frac{C_5 r^m}{\mu} (\xi_m^*(\lambda, \mu)P_0 \\ + m\phi_m(\lambda, \mu)P_0 - \varphi_m^*(\lambda, \mu)\phi_m(\lambda, \mu)) = 0 \end{aligned}$$

In which,

$$\begin{aligned} \varphi_m(\lambda, \mu) &= (\sum_{n=1}^{m-1} \frac{r^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{m^{m-1}}{m!} \sum_{n=m}^K n\rho^{n-1})P_0^2 \\ \phi_m(\lambda, \mu) &= \frac{\rho + (K-m)\rho^{K-m+2} - (K-m+1)\rho^{K-m+1}}{m!(1-\rho)^2} \\ \xi_m(\lambda, \mu) &= \frac{1 + \rho - (K-m+1)^2\rho^{K-m} - (K-m)^2\rho^{K-m+2}}{m!(1-\rho)^3} \\ &\quad + \frac{[(K-m)(K-m+2) + (K-m+1)(k-m-1)]\rho^{K-m+1}}{m!(1-\rho)^3} \\ \xi_m^*(\lambda, \mu) &= \frac{1 + \rho - (K-m+1)^2\rho^{K-m} - (K-m)^2\rho^{K-m+2}}{m!(1-\rho)^3} \\ &\quad + \frac{[(K-m)(K-m+2) + (K-m+1)(k-m-1)]\rho^{K-m+1}}{m!(1-\rho)^3} \end{aligned}$$

$$\varphi_m^*(\lambda, \mu) = \left( \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} + \frac{\lambda^{m-1}}{m!} \sum_{n=m}^K n \rho^n \right) P_0^2$$

$$\xi_m^*(\lambda, \mu) = \frac{\rho + \rho^2 - (K-m)\rho^{K-m+3} - (K-m+1)^2 \rho^{K-m+1}}{m!(1-\rho)^3} + \frac{[(K-m)(K-m+2) + (K-m+1)(K-m-1)]\rho^{K-m+2}}{m!(1-\rho)^3}$$

Since increasing customer satisfaction is important, in this paper, the level of customer satisfaction (degree of customer satisfaction) is calculated for the optimal  $M/M/m_{opt}/K$  model. A method proposed by [8] is used to calculate the degree of customer satisfaction by observing the queue length at the time of entering the system. If a customer encounters a short, medium, or long queue upon entry, their satisfaction level will be high ( $a_1$ ), medium ( $a_2$ ), or low ( $a_3$ ), respectively, where  $(a_1 \geq a_2 \geq a_3)$ .

The queues referred to, due to the relative nature of the terms short, medium, and long, are represented by them as fuzzy sets  $\tilde{A}$  (short queue),  $\tilde{B}$  (medium queue), and  $\tilde{C}$  (long queue) as follows:

$$\tilde{A} = \{(0, \mu_{\tilde{A}}(0)), (1, \mu_{\tilde{A}}(1)), \dots, (K, \mu_{\tilde{A}}(K))\}$$

$$\tilde{B} = \{(0, \mu_{\tilde{B}}(0)), (1, \mu_{\tilde{B}}(1)), \dots, (K, \mu_{\tilde{B}}(K))\}$$

$$\tilde{C} = \{(0, \mu_{\tilde{C}}(0)), (1, \mu_{\tilde{C}}(1)), \dots, (K, \mu_{\tilde{C}}(K))\}$$

It is assumed that  $\mu_{\tilde{A}}$ ,  $\mu_{\tilde{B}}$ , and  $\mu_{\tilde{C}}$  are the membership functions of the fuzzy sets  $\tilde{A}$  (short queue),  $\tilde{B}$  (medium queue), and  $\tilde{C}$  (long queue), respectively.

According to [4],

$$\mu_{\tilde{A}}(i) + \mu_{\tilde{B}}(i) + \mu_{\tilde{C}}(i) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, K.$$

Furthermore,  $\mu_{\tilde{A}}(i)$  represents the degree of membership of the fuzzy set  $\tilde{A}$  when “i” customers is in the queue.

### 3-Discussion and Conclusion

In this paper, the  $M/M/m/K$  queuing system, where  $K$  is the system capacity and  $m$  is the number of servers ( $m \geq 2$ ), is considered. The inter-arrival times of customers follow an exponential distribution with parameter  $\lambda$ , and the service times follow an exponential distribution with parameter  $\mu$ . The main objective of the paper is to find the optimal  $m$  ( $m = 2, \dots, K$ ) such that the system's cost function is minimized.

Therefore, the cost function for the system was first proposed, and then using numerical examples and plotting graphs, for the groups  $K = 5, 6, 7, 8$ , and  $K = 9, 10, 11, 12$ , the optimal values of  $m$  ( $m_{opt}$ ) were determined to be 3 and 4, respectively. By calculating the average number of customers in the queue and system, the average waiting time in the queue and system, and the average number of lost customers for the optimal systems  $M/M/3/7$ ,  $M/M/3/8$ ,  $M/M/4/9$ , and  $M/M/4/10$ , the performance of these systems was found to be acceptable. Additionally, by finding a metric called the average customer satisfaction level, it was determined that customers had over 60% satisfaction with the performance of the optimal systems, and particularly, the  $M/M/4/10$  system had over 80% satisfaction.

#### 4-References

- [1] Balsamo, S., Di Persone, V., & Inverardi, P. (2003). A review on queuing network models with finite capacity queues for software architectures performance prediction. *Performance Evaluation*, 51, 269-288.
- [2] Bocharov, P. P., & Viskova, E. V. (2005). A single-server finite-capacity queuing system with Markov flow and discrete-time service. *Automat. Remote Control*, 66(2), 233-248.
- [3] Chen, S. P. (2007). Solving fuzzy queuing decision problems via a parametric mixed-integer nonlinear programming method. *European Journal of Operational Research*, 177, 445-457.
- [4] Dubois, D., & Prade, H. (1980). *Fuzzy sets and systems: Theory and applications*. Academic Press.
- [5] Gupta, U. C., & Sikdar, K. (2006). Computing queue length distributions in MAP/G/1/N queue under single and multiple vacation. *Applied Mathematics and Computation*, 17(2), 1498-1525.
- [6] Jain, M. (2005). Finite capacity M/M/r queuing system with queue-dependent servers. *Computational Mathematics Applications*, 50, 187-199.
- [7] Pardo, M. J., & De la Fuente, D. (2008). Optimal selection of the service rate for a finite input source fuzzy queuing system. *Fuzzy Sets and Systems*, 159(3), 325-342.
- [8] Takagi, H., Yoshino, H., Matoba, N., Azuma, M., & Shirakabe, M. (2005). System capacity calculation for packet-switched traffic in the next generation wireless systems, Part II: Batch arrival M/G/1 Nonpreemptive priority queuing model for transmission over a radio channel. *Performance Challenges for Efficient Next Generation Networks*, 6A-6C, 21-30.
- [9] Thomas, N. (2006). Approximation in non-product form finite capacity queue systems. *Future Generation Computer Systems*, 22(7), 820-827.
- [10] Wang, K. H., & Ke, J. C. (2000). A recursive method to the optimal control of an M/G/1 queuing system with finite capacity and infinite capacity. *Applied Mathematical Modelling*, 24, 899-914.
- [11] Ziya, S., Ayhan, H., & Foley, R. D. (2006). Optimal prices for finite capacity queuing systems. *Operations Research Letters*, 34, 214-218.
- [12] Zhang, Q. (2012). Multi-agent-based bank queuing model and optimization. In *Advances in electronic engineering, communication and management* (Lecture Notes in Electrical Engineering, Vol. 142, pp. 121-121). Springer

