



Paper Type: Original Article

# Realistic Economic-Statistical Design of $\bar{X}$ Control Chart Based on the Lorenzen and Vance Model in the Presence of Independent Multiple Assignable Causes under the Burr-XII Shock Model

Farnoosh Shiravani<sup>1</sup>, Mohammad Bamenimoghaddam<sup>1,\*</sup> , Reza Poortaheri<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Department of Statistics, Faculty of Statistics, Mathematics and Computer Science, Allameh Tabatabaee University, Tehran, Iran; f.shiravani@atu.ac.ir; bamenimoghaddam@atu.ac.ir; poortaheri@atu.ac.ir.

## Citation:

Received: 15 July 2023 Revised: 11 October 2023 Accepted: 09 November 2023	Shiravani, F., Bamenimoghaddam, M., & Poortaheri, R. (2024). Realistic economic-statistical design of $\bar{X}$ control chart based on the Lorenzen and Vance model in the presence of independent multiple assignable causes under the burr-XII shock model. <i>Journal of Quality Engineering and Management</i> , 14(2), 127-144.
----------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

## Abstract


**Purpose:** The main goal of this study is to propose a realistic and practical model for the economic-statistical design of  $\bar{X}$  control charts in the presence of multiple independent assignable causes under the Burr Type XII shock model. The model aims to minimize the underestimation of the actual cost per unit time of the quality cycle.

**Methodology:** This research utilizes the Burr Type XII distribution as a shock model to develop the RED model for optimal design of  $\bar{X}$  control charts. The Lorenzen and Van cost function is also extended to account for multiple assignable causes, and a numerical example is provided to demonstrate the solution approach.

**Findings:** Numerical results reveal that the proposed model outperforms existing models in accurately estimating the real cost per unit time of the quality cycle. Furthermore, an increase in the shock probability leads to a non-decreasing trend in the average cost, emphasizing the importance of considering this probability in  $E(A)$  calculations.

**Originality/Value:** This is the first study to employ the Burr Type XII distribution as a shock model in the economic-statistical design of control charts. By extending existing cost models, the paper introduces a novel and realistic approach to designing control charts in the presence of multiple independent shocks.

**Keywords:** Realistic economic-statistical design, Control chart  $\bar{X}$ , Multiple assignable causes, Burr-XII shock model.

 Corresponding Author: bamenimoghaddam@atu.ac.ir

 10.48313/jqem.2024.214758

 Licensee System Analytics. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



## طراحی آماری-اقتصادی واقع‌بینانه نمودار کنترلی $\bar{X}$ بر اساس مدل لورنزن و ونس در حضور

### علت‌های اسنادپذیر چندگانه مستقل تحت مدل شوک بر ۱۲

فرنوش شیروانی<sup>۱</sup>، محمد بامنی مقدم<sup>۱\*</sup>، رضا پورطاهری<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup>گروه آمار، دانشکده آمار، ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران.

#### چکیده

هدف: هدف این مقاله ارایه یک مدل واقع‌گرایانه و کاربردی برای طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترل  $\bar{X}$  در حضور علت‌های اسنادپذیر چندگانه مستقل تحت مدل شوک بر ۱۲ است. این مدل با هدف کاهش خطای برآورد هزینه در واحد زمان چرخه کیفیت طراحی شده است. روش‌شناسی پژوهش: در این پژوهش با استفاده از توزیع بر ۱۲ به‌عنوان مدل شوک، مدل  $RED$  برای طراحی بهینه نمودار کنترل  $\bar{X}$  توسعه داده شده است. همچنین تابع هزینه لورنزن و ونس در حضور علت‌های اسنادپذیر چندگانه تعمیم یافته و با یک مثال عددی اعتبار روش پیشنهادی نشان داده شده است.

یافته‌ها: نتایج عددی نشان می‌دهد مدل پیشنهادی نسبت به مدل‌های پیشین، دقت بالاتری در برآورد هزینه واقعی در واحد زمان چرخه کیفیت دارد. همچنین افزایش احتمال وقوع شوک باعث افزایش هزینه متوسط می‌شود که ضرورت لحاظ کردن این احتمال در طراحی را برجسته می‌سازد.

اصالت/ارزش افزوده علمی: برای نخستین بار توزیع بر ۱۲ به‌عنوان مدل شوک در طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترل معرفی شده است. مقاله با تعمیم مدل هزینه‌ای موجود، رویکردی نوین و واقع‌گرایانه برای طراحی نمودارهای کنترلی در حضور شوک‌های چندگانه ارایه می‌دهد.

کلیدواژه‌ها: طراحی آماری-اقتصادی واقع‌بینانه، نمودار کنترلی  $\bar{X}$ ، علت‌های اسنادپذیر چندگانه، مدل شوک بر ۱۲.

#### ۱- مقدمه

نمودار کنترلی، ارزشمندترین ابزار کنترل آماری فرآیند است که اولین بار توسط شوهارت [1] پایه‌گذاری شد. نمودار کنترلی شوهارتی  $\bar{X}$  از پرکاربردترین و مهم‌ترین نمودارهای کنترلی تک‌متغیره برای پایش میانگین فرآیندهای تولیدی هستند. به‌طور معمول برای پیاده‌سازی هر نمودار کنترلی نیاز به تعیین پارامترهای اندازه‌ی نمونه ( $n$ )، فاصله‌ی نمونه‌گیری ( $h$ ) ضریب‌های کنترلی ( $L$ ) است. این پارامترها را پارامترهای طراحی یا طرح می‌گویند. هدف اصلی در طراحی نمودارهای کنترلی، تعیین بهینه پارامترهای طرح مورد مطالعه است. تعیین پارامترهای تنظیمی بهینه در طراحی‌های اقتصادی و آماری-اقتصادی نمودارهای کنترلی، بیش از همه، به توزیع طول عمر فرآیند، یعنی توزیع مدت‌زمان تحت کنترل بودن آن تا رخداد علت یا علت‌های اسنادپذیر، بستگی دارد که از آن به‌عنوان مدل شوک یا سازوکار شکست فرآیند یاد می‌شود. تابع نرخ خطر یا تابع نرخ شکست به‌عنوان

ابزاری برای تبیین تغییر در فرآیند در نظر گرفته می شود که در مبحث کنترل کیفیت از آن به نام مدل شوک یاد می شود. این تابع ممکن است تابعی ثابت، افزایشی، کاهششی، گودالی شکل و غیره برحسب زمان ( $t$ ) باشد. انتخاب یک توزیع مناسب به عنوان توزیع سازوکار شکست فرآیند در طراحی نمودار کنترلی از اهمیت ویژه ای برخوردار است. در ابتدا اغلب پژوهشگران از توزیع نمایی به عنوان توزیع سازوکار شکست فرآیند استفاده می کردند. این توزیع دارای نرخ خطر ثابت است. بررسی دقیق تر فرآیندها نشان داد که همیشه نرخ شکست ثابت نیست [2]. به طور مثال در فرآیندهای روبه زوال نرخ شکست افزایشی است. توزیع های گاما و وایبول به عنوان رایج ترین توزیع ها برای تحلیل سازوکار شکست یک فرآیند تولیدی روبه زوال به کار برده شده اند [3]، [4]. در توزیع بر ۱۲ می توان نرخ شکست را به صورت ثابت، افزایشی، کاهششی یا حتی وانی شکل (گودالی  $U$  - شکل) در نظر گرفت. از طرفی با تغییر پارامترهای توزیع بر ۱۲، می توان تقریب مناسبی برای توزیع وایبول، گاما، لگ-لوژستیک، نرمال و غیره به دست آورد. از این رو می توان گفت توزیع بر ۱۲ در برگیرنده توزیع های قبلی است و توزیعی جامع تر و کلی تر نسبت به توزیع وایبول است. از طرفی شکل ساده و بسته این توزیع باعث می شود در مسایل تحلیل بقا و قابلیت اعتماد کاربرد مناسبی پیدا کند [5]. بنا بر موارد ذکر شده، توزیع بر ۱۲ می تواند انتخاب مناسب تری به عنوان توزیع سازوکار شکست فرآیند باشد.

دانکن [6] برای اولین بار طراحی اقتصادی جامعی برای تعیین پارامترهای طراحی نمودار کنترلی  $\bar{X}$  ارائه داد. او در مقاله خود فرض کرد که پارامتر میانگین فرآیند تحت تاثیر یک علت اسنادپذیر است که زمان وقوع آن از مدل شوک نمایی تبعیت می کرد. باکر [7]، هیکس و همکاران [8]، مونت گمری و هیکس [9] و مک ویلیامز [10] به بررسی اثر مدل شوک غیر نمایی در تعیین پارامترهای طراحی نمودار کنترلی و متوسط هزینه در واحد زمان پرداختند. بنرجی و رحیم [3] مدل اقتصادی دانکن [6] را تحت مدل شوک وایبول و نمونه گیری نایکنواخت توسعه دادند. چانگ [11] یک روش ساده تر برای تخمین پارامترهای طراحی بر پایه مدل اقتصادی دانکن [6] ارائه داد که ساده تر، دقیق تر و انعطاف پذیرتر از روش های قبلی بود. برای مرور جامعی از پژوهش های پیشین بر مبنای مدل اقتصادی دانکن [6] به مونت گمری [12]، هو و کیس [13] و وودال و مونت گمری [14] مراجعه شود. حیدری و همکاران [15] تحت مدل شوک بر ۱۲ به طراحی اقتصادی نمودار کنترلی  $\bar{X}$  پرداختند. پاشا و همکاران [16] نیز مدل اقتصادی دانکن [6] و بنرجی و رحیم [3] را تحت بازه های نمونه گیری یکنواخت و نایکنواخت با مدل شوک متعلق به خانواده توزیع های نرخ خطر متناسب توسعه دادند. وانگ و لی [17] نیز به طراحی اقتصادی نمودار کنترلی  $\bar{X}$  با نمونه های همبسته تحت مدل شوک گاما و بازه های نمونه گیری نایکنواخت پرداختند.

در خصوص بررسی پیشینه حضور علت های اسنادپذیر چندگانه قابل ذکر است که دانکن [6] در بخش ۴ مقاله اش مدل هزینه خود را تحت مدل شوک نمایی، به چندین علت اسنادپذیر و فاصله نمونه گیری یکسان برای نمودارهای کنترلی  $\bar{X}$  تعمیم داد. دانکن [18] دو مدل را برای بررسی علت های اسنادپذیر ارائه داد. در مدل اول به تشریح مدل هزینه قبلی خود تحت مدل شوک نمایی و در حضور چند علت اسنادپذیر و فاصله نمونه گیری یکسان برای نمودارهای کنترلی  $\bar{X}$  پرداخت. او در مدل اول فرض می کند زمانی که علت اسنادپذیر  $i$ th رخ می دهد تا زمان کشف این علت اسنادپذیر، علت اسنادپذیر دیگری فرآیند را تحت تاثیر قرار نمی دهد. در مدل دوم، او فرض می کند که قبل از کشف علت اسنادپذیر اول، علت اسنادپذیر دیگری مجدداً رخ می دهد و این دو علت اسنادپذیر به صورت هم زمان باعث تغییر در بردار میانگین فرآیند می شوند و تغییرهای ایجاد شده توسط هر دو علت اسنادپذیر مورد بررسی قرار می گیرد. لورنزن و ونس [19] طی مقاله ای مدل اقتصادی بر پایه مدل دانکن [6] مطرح کردند اما در آن به جای استفاده از معیارهای آماری مانند احتمال رخداد خطای نوع اول و دوم، از متوسط طول اجرا<sup>۱</sup> استفاده شد. مدل اقتصادی لورنزن و ونس به گونه ای طراحی شده است که در آن امکان تصمیم گیری در مورد ادامه یا توقف فرآیند تولید به هنگام جست و جوی عامل علت اسنادپذیر و تعمیر فرآیند وجود دارد. پاشا و همکاران [20] مدل چن و یانگ [21] را تحت مدل شوک دلخواه متعلق به خانواده نرخ خطر متناسب در حضور  $m$  علت اسنادپذیر تعمیم دادند. شجاعی و همکاران [22] و نیز شجاعی و بامنی مقدم [23]، ابتدا به اصلاح پذیره های مدل دانکن [18] پرداختند و سپس

<sup>1</sup> Average Run Length (ARL)

مدل اقتصادی و آماری-اقتصادی واقع‌بینانه (RED) را ارایه دادند. در این مدل ابتدا برای اولین بار به بررسی احتمال وقوع پیشامد فقط یک علت اسنادپذیر تا صدور هشدار درست پرداخته و بر اساس آن مدل اقتصادی و آماری-اقتصادی واقع‌بینانه (RED و RSED) در حضور چند علت اسنادپذیر مستقل برای رفع نواقص و کاستی‌های مدل‌های پیشین ارایه شده است. نتایج حاصل از پیاده‌سازی مدل واقع‌بینانه در طراحی نشان داد که در پژوهش‌های پیشین، متوسط هزینه در واحد زمان چرخه کیفیت دارای اختلاف قابل توجهی با نتایج حاصل از این مدل است و بنابراین، نیاز به طراحی پژوهش‌های پیشین بر اساس مدل واقع‌بینانه است. در این پژوهش برای اولین بار به طراحی واقع‌بینانه اقتصادی و آماری-اقتصادی نمودار کنترلی شوهرتی  $\bar{X}$  در حضور علت‌های اسنادپذیر چندگانه مستقل تحت مدل شوک بر ۱۲ خواهیم پرداخت.

ساختار این مقاله به این صورت است که در بخش ۲، تعاریف و فرض‌های ابتدایی برای طراحی نمودار کنترلی شوهرتی  $\bar{X}$  ارایه می‌شود. در بخش ۳، طراحی اقتصادی واقع‌بینانه لورنزن و ونس برای نمودارهای کنترلی شوهرتی ارایه می‌شود. در بخش ۴، به تعیین مقدار بهینه‌ی پارامترهای طراحی در طراحی آماری-اقتصادی واقع‌بینانه نمودار کنترلی  $\bar{X}$  پرداخته می‌شود. در نهایت، نتیجه‌گیری در بخش ۵ ارایه می‌شود.

## ۲- پذیره‌ها و نمادها

مفروضات مورد استفاده برای طراحی مدل اقتصادی و آماری-اقتصادی واقع‌بینانه  $\bar{X}$  در بخش‌های بعدی عبارتند از:

- مشخصه کیفیت فرآیند از توزیع نرمال با میانگین  $\mu$  معلوم و واریانس  $\sigma^2$  (در طول فرآیند ثابت است) معلوم تبعیت می‌کند. فرآیند تحت کنترل آماری است اگر  $\mu = \mu_0$  باشد. وقتی علت اسنادپذیر  $i$ th رخ می‌دهد میانگین فرآیند از  $\mu_0 + \delta_i\sigma$  به  $\mu_0$  منتقل می‌شود که در این حالت فرآیند خارج از کنترل آماری است.  $\delta_i$  میزان انتقال در میانگین بر اثر رخداد علت اسنادپذیر  $i$ th است.
- حد کنترلی بالا  $\mu_0 + L(\sigma / \sqrt{n})$  و حد کنترلی پایین  $\mu_0 - L(\sigma / \sqrt{n})$  است.
- احتمال‌های خطای نوع اول با فرض این‌که مشخصه کیفیت دارای توزیع  $N(\mu_0, \sigma_0^2)$  باشد  $\alpha = 2(1 - \Phi(L))$  و احتمال کشف تغییر در میانگین فرآیند پس از وقوع علت اسنادپذیر برابر  $i$ th است با

$$1 - \beta_i = 1 - (\Phi(L - \delta_i\sqrt{n}) - \Phi(-L - \delta_i\sqrt{n})).$$

- زمان وقوع علت اسنادپذیر  $i$ th ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) دارای توزیع  $Burr12(s, c, k_i)$  با تابع چگالی است.

$$f_{T_i}(t) = \frac{k_i c (t/s)^{c-1}}{s(1 + (t/s)^c)^{k_i+1}}, \quad s, k_i, c > 0, 0 \leq t < \infty,$$

- زمان‌های وقوع علت‌های اسنادپذیر مستقل از یکدیگر هستند؛ بنابراین  $T = \min(T_1, T_2, \dots, T_m)$  دارای توزیع  $Burr12(s, c, k_0)$  است که  $k_0 = \sum_{i=1}^m k_i$  است.

با انتخاب نمونه‌ای تصادفی به اندازه  $n$  از فرآیند تولید در زمان، فرآیند مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.  $h_l$ ،  $l$  فاصله نمونه‌گیری است و چنان تعیین می‌شوند که احتمال خارج شدن فرآیند از حالت تحت کنترل در زمانی که ابتدای فاصله تحت کنترل بوده، برای تمام فاصله‌های نمونه‌گیری مقدار ثابتی بماند.

$$h_v = w_v - w_{v-1} = s((1 + (h_l/s)^c)^v - 1)^{1/c} - s((1 + (h_l/s)^c)^{v-1} - 1)^{1/c}, \quad v = 2, 3, \dots$$

- زمان اخذ نمونه‌گیری و رسم نمودار ناچیز فرض می‌شود.
- فرآیند خود اصلاح نیست. به عبارتی، وقتی فرآیند از حالت کنترل خارج شود فقط با دخالت عامل انسانی امکان بازگشت به حالت تحت کنترل دارد.
- فرآیند از حالت تحت کنترل شروع به کار می‌کند.
- پس از وقوع یک علت اسنادپذیر تا صدور هشدار درست، علت اسنادپذیر دیگری رخ ندهد. این پذیره یک پیشامد هست که با  $I$  نشان می‌دهیم.

نمادها و پارامترهای هزینه و زمان به صورت زیر هستند:

$Z_0$ : متوسط زمان برای جست‌وجوی هشدار اشتباه است.

$Z_1$ : متوسط زمان برای کشف علت اسنادپذیر  $i$ th زمانی که توسط نمودار تشخیص داده شده است.

$Z_{2i}$ : متوسط زمان برای تعمیر علت اسنادپذیر  $i$ th زمانی که علت اسنادپذیر  $i$ th ( $i=1,2,\dots,m$ ) کشف شده است.

$D_0$ : متوسط هزینه کیفیت در واحد زمان برای حالت تحت کنترل می باشد.

$D_{1i}$ : متوسط هزینه کیفیت در واحد زمان برای حالت خارج از کنترل مرتبط با علت اسنادپذیر  $i$ th ( $i=1,2,\dots,m$ ).

$Y$ : متوسط هزینه بررسی هشدار اشتباه زمانی که فرآیند تحت کنترل است.

$D_{2i}$ : هزینه مکانیابی و تعمیر علت اسنادپذیر  $i$ th است.

$a$ : هزینه ثابت نمونه گیری است.

$b$ : هزینه هر واحد نمونه می باشد.

(متغیر صفر و یک): اگر فرآیند در طول زمان جست و جو انحرافات با دلیل ادامه پیدا کند مقدار یک و در صورتی که متوقف گردد مقدار صفر خواهد بود.

(متغیر صفر و یک): اگر هنگامی که علت اسنادپذیر  $i$ th اتفاق افتاده است، فرآیند در طول زمان اصلاح فرآیند ادامه پیدا کند مقدار یک و در صورتی که متوقف گردد مقدار صفر خواهد بود.

در این مقاله پس از رخداد علت اسنادپذیر  $i$ th میزان تغییری که در میانگین فرآیند رخ می دهد برابر با  $d_-(i)$  است که سه توزیع یکنواخت، نیم-نرمال  $(1/2 d_-(i)) e^{-1/2 d_-(i)}$  و نمایی منفی  $(1/2 d_-(i)) e^{-1/2 d_-(i)}$  به عنوان توزیع پیشین برای  $d_-(i)$  در نظر گرفته شده است.

### ۳- بناسازی مدل هزینه لورنزن و ونس واقع گرایانه نمودارهای کنترلی شوهارتی

#### ۳-۱- محاسبه ARL در نمودارهای کنترلی شوهارتی

ARL یکی از معیارهای آماری است که به عنوان معیاری برای شناسایی توان نمودارهای کنترلی در طراحی های آماری مورد استفاده قرار می گیرد. ARL همچنین یکی از پارامترهای مهم در مدل اقتصادی لورنزن و ونس می باشد ARL بیانگر میانگین تعداد نمونه های لازم (به اندازه  $n$ ) یا تعداد نقطه های رسم شده در نمودار تا قبل از دریافت اولین هشدار است. در واقع ARL مربوط به هر نمودار کنترلی شوهارتی، میانگین توزیع هندسی است که عملیات محاسبه آن زمانی که فرآیند تحت کنترل به سر می برد، یعنی  $(\delta = 0)$  به صورت زیر است:

$$ARL_{\delta=0} = ARL_0 = E(RL) = \sum_{r=1}^{\infty} r Pr(RL=r) = \sum_{r=1}^{\infty} r(1-\alpha)^{r-1} \alpha = \frac{1}{\alpha}$$

که در آن  $RL$  مدت زمانی است که طول می کشد تا نمونه ای خارج از کنترل قرار گیرد. این حالت ممکن است در زیرگروه منطقی اول یا در زیرگروه منطقی دوم و .... یا در زیرگروه منطقی  $r$ th رخ دهد.

اگر پس از وقوع علت اسنادپذیر  $i$ th تغییری در میانگین مشخصه کیفیت فرآیند به اندازه  $\delta_i$  رخ داده و میانگین فرآیند  $\mu_0 + \delta_i \sigma_0^2$  شود، محاسبه میانگین طول اجرای خارج از کنترل به صورت زیر محاسبه می شود:

$$ARL_{\delta>0} = ARL_i = E(RL) = \sum_{r=1}^{\infty} r Pr(RL=r) = \sum_{r=1}^{\infty} r \beta_i^{r-1} (1-\beta_i) = \frac{1}{(1-\beta_i)}$$

### ۳-۲- محاسبه احتمال وقوع پیشامد $\{I\}$ بر اساس مدل شوک بر ۱۲

طبق آنچه در بخش ۲ بیان شد، با تبعیت از مدل واقع‌بینانه شجاعی و همکاران [22] در جهت ساده‌سازی محاسبه  $E(T)$  و  $E(C)$  فرض می‌کنیم که در مدت‌زمان سپری‌شده پس از وقوع یک علت اسنادپذیر تا شناسایی آن، علت اسنادپذیر دیگری رخ ندهد. که آن را با پیشامد  $I$  نشان می‌دهیم.

هر چرخه کیفیت از حالت تحت کنترل شروع شده و پس از خارج شدن از حالت تحت کنترل، با اصلاح و تعمیر علت اسنادپذیر به پایان می‌رسد و دوباره چرخه‌ای مشابه چرخه قبل تکرار می‌شود؛ بنابراین، با فرض متناهی بودن  $E(T)$  و  $E(C)$  با توجه به قضیه تجدید پاداش راس [24] نتیجه می‌شود که متوسط هزینه در واحد زمان  $(E(A))$  برابر با نسبت  $E(C)/E(T)$  در یک چرخه کیفیت است. چنانچه متغیرهای تصادفی  $X_1$  تا  $X_4$  به ترتیب، مدت‌زمان تحت کنترل بودن فرآیند (با احتساب مدت‌زمان سپری‌شده برای یافتن هشدار اشتباه)، مدت‌زمان خارج از کنترل بودن فرآیند تا صدور هشدار درست، مدت‌زمان سپری‌شده پس از هشدار درست تا کشف علت اسنادپذیر و مدت‌زمان سپری‌شده برای تعمیر و اصلاح فرآیند پس از کشف علت اسنادپذیر باشند آنگاه

$$E(T) = E(X_1) + E(X_2 + X_3 + X_4).$$

قضیه ۱- اگر  $I_i$  پیشامد وقوع  $i$ th علت اسنادپذیر و عدم وقوع سایر علت‌های اسنادپذیر تا صدور هشدار درست باشد، آنگاه

$$P(I) = P\left(\bigcup_{i=1}^m I_i\right) = \sum_{i=1}^m P(I_i)$$

$$P(I_i) = \frac{(1-\beta_i)[1-(1+(h_1/s)^c)^{-k_i}](1+(h_1/s)^c)^{-k_{-i}}}{(1-\beta_i(1+(h_1/s)^c)^{-k_{-i}})(1-(1+(h_1/s)^c)^{-k_0})}$$

اثبات: در جهت خلاصه‌نویسی مراحل اثبات عبارت‌های زیر تعریف می‌شود:

$$k_0 = \sum_{i=1}^m k_i, \quad k_{-i} = k_0 - k_i,$$

$$\{T_{-i} > X\} = \{T_1 > X, T_2 > X, \dots, T_{i-1} > X, T_{i+1} > X, \dots, T_m > X\},$$

$$I_i = \{T_i \leq X, T_{-i} > X\}.$$

بنابراین به ازای  $i < j$ ،  $I_i \cap I_j$  تهی می‌باشد.

با استفاده از قانون احتمال کل داریم

$$P(I_i) = \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{l=1}^v P(w_{l-1} < T_i \leq w_l, T_{-i} > w_v, X = w_v) = \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{l=1}^v P(X = w_v / w_{l-1} < T_i \leq w_l, T_{-i} > w_v),$$

$$P(w_{l-1} < T_i \leq w_l, T_{-i} > w_v).$$

با توجه به تعریف متغیرها و همچنین مفروضات داریم

$$P(I_i) = \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{l=1}^v \beta_i^{v-l} (1-\beta_i) [(1+(h_1/s)^c)^{-k_i(l-1)} - (1+(h_1/s)^c)^{-k_i l}] (1+(h_1/s)^c)^{-k_{-i} v}$$

$$= \frac{(1-\beta_i)[1-(1+(h_1/s)^c)^{-k_i}](1+(h_1/s)^c)^{-k_{-i}}}{(1-\beta_i(1+(h_1/s)^c)^{-k_{-i}})(1-(1+(h_1/s)^c)^{-k_0})}$$

به‌وضوح  $\{I\} = \bigcup_{i=1}^m I_i$  است و چون برای هر  $i \neq j$  داریم  $I_i \cap I_j = \emptyset$  بنابراین،  $P(I) = \sum_{i=1}^m P(I_i)$  است.

### ۳-۳- مدت‌زمان مورد انتظار یک چرخه کیفیت

برای محاسبه  $E(T)$ ، آن را به دو بخش جدا از هم افزای نموده و همانند شجاعی و همکاران [22] فرض می‌شود که پیشامد  $I$  نیز رخ دهد؛ بنابراین، در جهت ساده‌سازی محاسبه  $E(T)$  با توجه به تعریف متغیر تصادفی  $I$  داریم

$$E(T) = E(T|I)P(I) + E(T|I^c)P(I^c).$$

با توجه به اینکه محاسبه  $E(T)$  پیچیده و غیرممکن است فرض می‌شود؛ اگر شرایطی ایجاد شود که  $E(T|I^c)P(I^c) \approx 0$  باشد آنگاه

$$E(T) = E\left(\sum_{i=1}^d X_i\right) \approx E(X_1) + E\left(\sum_{i=2}^d X_i | I\right)P(I),$$

خواهد شد [22]. با توجه به اینکه متوسط زمان خارج از کنترل مقداری متناهی است، پس برای برقراری معادله فوق کافی است که  $P(I)$  تقریباً به ۱ نزدیک باشد. به وضوح  $P(I) \approx 1$  به این معنی است که احتمال وقوع بیش از یک علت اسنادپذیر در هر چرخه کیفیت تقریباً برابر صفر است. با توجه به اینکه متوسط زمان تحت کنترل برابر با مجموع متوسط زمان سپری شده تا وقوع اولین علت اسنادپذیر و متوسط زمان بررسی هشدارهای نادرست است. همچنین با در نظر این ویژگی مدل لورنزن و ونس که تولید می‌تواند حین جست‌وجوی علت اسنادپذیر متوقف شود یا خیر  $(Y_1)$ ،  $E(X_1) = E(T) + (1 - \gamma_1)Z_0E(N_{Fa})$  که در آن  $N_{Fa}$  تعداد هشدارهای نادرست در هر چرخه کیفیت است. اگر  $N_{In}$  تعداد مراحل نمونه‌گیری در حالت تحت کنترل باشد داریم

$$(N_{Fa}|N_{In} = v) \sim Bin(v, \alpha)$$

$$E(N_{Fa}) = E(E(N_{Fa}|N_{In})) = E(\alpha N_{In}).$$

چون  $N_{In}$  یک متغیر تصادفی نامنفی است پس  $E(N_{In}) = \sum_{v=1}^{\infty} P(N_{In} \geq v)$ ، با توجه به اینکه  $N_{In} \geq v \equiv T > w_v$  آنگاه

$$E(N_{In}) = \sum_{v=1}^{\infty} P(T > w_v) = \sum_{v=1}^{\infty} ([1 + (h_1/s)^c]^{-k_0})^v = \frac{[1 + (h_1/s)^c]^{-k_0}}{1 - [1 + (h_1/s)^c]^{-k_0}}.$$

بنابراین

$$E(X_1) = sk_0 \frac{\Gamma(k_0 - (1/c))\Gamma(1 + (1/c))}{\Gamma(k_0 + 1)} + (1 - \gamma_1)Z_0\alpha \frac{(1 + (h_1/s)^c)^{-k_0}}{1 - (1 + (h_1/s)^c)^{-k_0}}. \quad (1)$$

متوسط زمان خارج از کنترل برابر است با

$$E(X_2 | I) = E(X - X_1) = E(X | I) - E(X_1 | I).$$

با توجه به اینکه فرآیند پس از هر هشدار از سوی نمودار کنترلی متوقف می‌شود، پس متغیرهای تصادفی  $X$  و  $X_1$  شامل مدت زمان بررسی هشدارهای نادرست نیز هستند؛ بنابراین،  $X' = X - Z_0N_{Fa}$  و  $X'_1 = X_1 - Z_0N_{Fa}$  که پس از ساده‌سازی محاسبات داریم،  $E(X_2 | I) = E(X | I) - E(X_1 | I)$ .

در لم‌های ۱ تا ۳ به محاسبه اجزا تشکیل دهنده میانگین زمان خارج از کنترل می‌پردازیم.

لم ۱ - متوسط زمان سپری شده از ابتدای چرخه کیفیت تا صدور هشدار درست ( $X$ ) به شرط  $I$  عبارتند از:

$$E(X|I) = \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{i=1}^m w_v \frac{1}{P(I)} (1 - \beta_i) [1 - (1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k_i}]$$

$$\frac{((1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k_0})^v - (\beta_i (1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k-i})^v}{(1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k_i} - \beta_i}.$$

اثبات:

$$\begin{aligned}
E(X' | I) &= \sum_{v=1}^{\infty} w_v P(X = w_v | I) = \sum_{v=1}^{\infty} w_v \frac{P(X = w_v, I)}{P(I)} \\
&= \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{i=1}^m w_v \frac{1}{P(I)} \underbrace{P(X = w_v, T_i \leq w_v, \bar{T}_{-i} > w_v)}_{:=D} \\
D &= P(X = w_v, T_i \leq w_v, \bar{T}_{-i} > w_v) \\
&= \sum_{l=1}^v P(X = w_v, w_{l-1} < T_i \leq w_l, \bar{T}_{-i} > w_v) \\
&= \sum_{l=1}^v P(X = w_v | w_{l-1} < T_i \leq w_l, \bar{T}_{-i} > w_v) \\
&\quad P(w_{l-1} < T_i \leq w_l, \bar{T}_{-i} > w_v) \\
&= (1 - \beta_i) \left[ 1 - \frac{(1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k_i}}{s} \right] \\
&\quad \frac{(1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-vk_0} - (\beta_i (1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k_i})^v}{(1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k_i} - \beta_i}.
\end{aligned}$$

لم ۲- اگر  $f_T(t|I)$  توزیع زمان تحت کنترل بودن فرآیند به شرط وقوع فقط یک علت اسنادپذیر تا صدور هشدار درست باشد، آنگاه متوسط زمان تحت کنترل به شرط وقوع فقط یک علت اسنادپذیر برابر است با

$$\begin{aligned}
E(X_1|I) &= \int_0^{\infty} t f_T(t|I) dt = \sum_{v=1}^{\infty} \int_{w_{v-1}}^{w_v} t f_T(t|I) dt \\
&= \frac{1}{P(I)} \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^{\infty} (1 - \beta_i) \frac{(1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-vk_{-i}}}{1 - \beta_i (1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k_{-i}}} \\
&\quad \int_{w_{v-1}}^{w_v} -k_0 (1 + (\frac{t}{s})^c)^{-k_0-1} \frac{ct^c}{s^c} dt.
\end{aligned}$$

اثبات:

$$\begin{aligned}
E(X'_1 | I) &= \int_0^{\infty} t f_T(t | I) dt = \sum_{v=1}^{\infty} \int_{w_{v-1}}^{w_v} t f_T(t | I) dt \\
f_T(t | I) dt &\approx \frac{P(t < T \leq t + dt, I)}{P(I)}, \\
\frac{P(t < T \leq t + dt, I)}{P(I)} &= \sum_{i=1}^m \frac{P(t < T \leq t + dt, I, X = w_i)}{P(I)}, \\
\frac{t < w_v, < w_l}{\rightarrow} &= \sum_{l=v}^{\infty} \frac{P(t < T \leq t + dt, I, X = w_l)}{P(I)} \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{1}{P(I)} \sum_{l=v}^{\infty} P(X = w_l | t < T_i \leq t + dt, \bar{T}_{-i} > w_l), \\
P(t < T_i \leq t + dt, \bar{T}_{-i} > w_l), \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{1}{P(I)} (1 - \beta_i) P(t < T_i \leq t + dt) \frac{(1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-vk_{-i}}}{1 - \beta_i (1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k_{-i}}}, \\
f_T(t|I) &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{P(I)} (1 - \beta_i) (f_{T_i}(t)) \frac{(1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-vk_{-i}}}{1 - \beta_i (1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k_{-i}}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^m \frac{1}{P(I)} (1 - \beta_i) \left[ k_i \left( 1 + \left( \frac{t}{s} \right)^c \right)^{-k_i-1} \frac{ct^{c-1}}{s^c} \right] \\
&\quad \left( \frac{(1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-vk_i}}{1 - \beta_i (1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k_i}} \right) \\
\Rightarrow E(X'_1 | I) &= \frac{1}{P(I)} \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^{\infty} (1 - \beta_i) \frac{(1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-vk_i}}{1 - \beta_i (1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k_i}} \\
&\quad \int_{w_{v-1}}^{w_v} k_i \left( 1 + \left( \frac{t}{s} \right)^c \right)^{-k_i-1} \frac{ct^c}{s^c} dt.
\end{aligned}$$

انتگرال  $\int_{w_{v-1}}^{w_v} k_i \left( 1 + \left( \frac{t}{s} \right)^c \right)^{-k_i-1} \frac{ct^c}{s^c} dt$  دارای مقدار متناهی است. با توجه به اینکه در توزیع بر  $\gamma_2$ ؛  $s, k_i, c > 0, 0 \leq t < \infty$  است،

$$\int_{w_{v-1}}^{w_v} k_i \left( 1 + \left( \frac{t}{s} \right)^c \right)^{-k_i-1} \frac{ct^c}{s^c} dt \leq \sum_{v=1}^{\infty} \int_{w_{v-1}}^{w_v} k_i \left( 1 + \left( \frac{t}{s} \right)^c \right)^{-k_i-1} \frac{ct^{c-1}}{s^c} dt = E(t) \leq \infty.$$

لم ۳- اگر  $E(X_3 + X_4 | I)$  متوسط زمان کشف، اصلاح و تعمیر علت اسنادپذیر  $i$ th به شرط وقوع فقط یک علت اسنادپذیر تا صدور هشدار درست باشد آنگاه

$$E(X_3 + X_4 | I) = \sum_{i=1}^m [(Z_1 + Z_{2i}) \frac{P(I_i)}{P(I)}].$$

اثبات: متوسط زمان اصلاح و تعمیر فرآیند به شرط وقوع فقط یک علت اسنادپذیر تا صدور هشدار درست پس از شناسایی علت اسنادپذیر  $E(X_4 | I)$  برابر است با

$$\begin{aligned}
E(X_4 | I) &= \sum_{i=1}^m Z_{2i} P(X_4 = Z_{2i} | I) = \sum_{i=1}^m Z_{2i} \frac{P(X_4 = Z_{2i}, I)}{P(I)} \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\infty} Z_{2i} \frac{P(T_i \leq w_j, \bar{T}_{-i} > w_j, X = w_j)}{P(I)} \\
&= \sum_{i=1}^m Z_{2i} \frac{1}{P(I)} \frac{(1 - \beta_i) [1 - (1 + (h_1/s)^c)^{-k_i}] (1 + (h_1/s)^c)^{-k_i}}{(1 - \beta_i (1 + (h_1/s)^c)^{-k_i}) (1 - (1 + (h_1/s)^c)^{-k_0})} = \sum_{i=1}^m Z_{2i} \frac{P(I_i)}{P(I)}.
\end{aligned}$$

قضیه ۲- با توجه به معادله (۱) متوسط زمان یک چرخه کیفیت با فرض قابل اغماض بودن  $E(X_3 + X_4 + X_5 | I) P(I^c)$  و با توجه به این ویژگی مدل لورنزن و ونس که تولید می‌تواند حین جست‌وجوی علت اسنادپذیر متوقف شود یا خیر ( $\gamma_1$ ) و همچنین این ویژگی که تولید حین تعمیر فرآیند متوقف می‌شود یا خیر ( $\gamma_2$ ) و نیز با توجه به روابط

$$ARL_{00} = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = ARL_{00}^{-1}. \quad (۲)$$

$$ARL_{10} = \frac{1}{1 - \beta_i} \Rightarrow \beta_i = 1 - ARL_{10}^{-1}. \quad (۳)$$

عبارتند از

$$\begin{aligned}
E(T) &= sk_0 \frac{\Gamma(k_0 - (1/c))\Gamma(1 + (1/c))}{\Gamma(k_0 + 1)} \\
&+ (1 - \gamma_1)Z_0(ARL_0^{-1}) \frac{(1 + (h_1/s)^c)^{-k_0}}{1 - (1 + (h_1/s)^c)^{-k_0}} \\
&+ \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{i=1}^m w_v \frac{1}{P(I)} (ARL_{1i}^{-1}) [1 - (1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k_i}] \\
&\frac{((1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k_0})^v - ((1 - ARL_{1i}^{-1})(1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k_i})^v}{(1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k_i} - (1 - ARL_{1i}^{-1})} \\
&- \frac{1}{P(I)} \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^{\infty} (ARL_{1i}^{-1}) \frac{(1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-vk_i}}{1 - (1 - ARL_{1i}^{-1})(1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k_i}} \\
&\int_{w_{v-1}}^{w_v} -k_0(1 + (\frac{t}{s})^c)^{-k_0-1} \frac{ct^c}{s^c} dt + \sum_{i=1}^m [(Z_{1i} + Z_{2i}) \frac{P(I_i)}{P(I)}].
\end{aligned}$$

اثبات: با توجه به لم ۱ تا ۳ و معادله (۱)، اثبات واضح است.

#### ۳-۴- هزینه مورد انتظار یک چرخه کیفیت

متوسط هزینه چرخه کیفیت شامل ۱- متوسط هزینه در زمان تحت کنترل ( $D_0 E(T)$ )، ۲- متوسط هزینه جست و جوی هشدارهای اشتباه ( $YE(N_a)$ )، ۳- متوسط هزینه در زمان خارج از کنترل ( $D_i E(X_i | I)$ )، ۴- متوسط هزینه نمونه‌گیری ( $(a + bn)E(N_{rr} | I)$ ) و ۵- متوسط هزینه مکان‌یابی، تشخیص و تعمیر علت اسنادپذیر ( $\sum_{i=1}^m (P(I_i) / P(I)) D_{1i}$ ) می‌شود.

بنابراین، با توجه به مراحل محاسبه  $E(T)$ ، اجزای تشکیل‌دهنده  $E(C)$  به شرح زیر هستند:

۱. مجموع متوسط هزینه در زمان تحت کنترل و متوسط هزینه جست‌وجو هشدارهای اشتباه برابر با رابطه (۴) است.

$$\begin{aligned}
D_0 E(T) + YE(N_{Fa}) &= \\
D_0 sk_0 \frac{\Gamma(k_0 - (1/c))\Gamma(1 + (1/c))}{\Gamma(k_0 + 1)} & \\
+ Y(1 - \gamma_1) \alpha \frac{(1 + (h_1/s)^c)^{-k_0}}{1 - (1 + (h_1/s)^c)^{-k_0}} & \quad (4)
\end{aligned}$$

۲. متوسط هزینه خارج از کنترل برابر

$$\begin{aligned}
D_{1i} E(X_2 | I) &= \\
= \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{i=1}^m D_{1i} w_v \frac{1}{P(I)} (1 - \beta_i) [1 - (1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k_i}] & \\
\frac{((1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k_0})^v - (\beta_i (1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k_i})^v}{(1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k_i} - \beta_i} & \quad (5) \\
- \frac{1}{P(I)} \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^{\infty} D_{1i} (1 - \beta_i) \frac{(1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-vk_i}}{1 - \beta_i (1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k_i}} & \\
\int_{w_{v-1}}^{w_v} -k_i (1 + (\frac{t}{s})^c)^{-k_i-1} \frac{ct^c}{s^c} dt. &
\end{aligned}$$

لم ۴- اگر  $N_{oc}$  و  $N_{inc}$  به ترتیب تعداد کل نمونه‌های اخذشده از فرآیند و تعداد نمونه‌های اخذشده از فرآیند در حالت خارج از کنترل باشند آنگاه

$$\begin{aligned}
 E(N_{oc}|I) &= \sum_{i=1}^m \frac{P(I_i)}{P(I)} \\
 &\left[ \frac{(1 + (\frac{h_1}{S})^c)^{-k_0}}{1 - (1 + (\frac{h_1}{S})^c)^{-k_0}} + \frac{1}{1 - \beta_i(1 + (\frac{h_1}{S})^c)^{-k-i}} \right] \\
 &- \frac{(1 + (h_1/S)^c)^{-k}}{1 - (1 + (h_1/S)^c)^{-k}} \\
 &= \sum_{i=1}^m \frac{P(I_i)}{P(I)} \left[ \frac{1}{1 - \beta_i(1 + (\frac{h_1}{S})^c)^{-k-i}} \right].
 \end{aligned} \tag{۶}$$

$$\begin{aligned}
 E(N_{TST}|I) &= \sum_{i=1}^m \frac{P(I_i)}{P(I)} \\
 &\left[ \frac{(1 + (\frac{h_1}{S})^c)^{-k_0}}{1 - (1 + (\frac{h_1}{S})^c)^{-k_0}} + \frac{1}{1 - \beta_i(1 + (\frac{h_1}{S})^c)^{-k-i}} \right].
 \end{aligned} \tag{۷}$$

اثبات: اگر  $N_{inc}$  برابر تعداد نمونه‌های اخذشده از فرآیند در حالت تحت کنترل باشد به‌وضوح  $N_{oc} = N_{TST} - N_{inc}$  است؛ بنابراین،  $E(N_{oc}|I) = E(N_{TST}|I) - E(N_{inc}|I)$  است.

$$E(N_{TST}|I) = \sum_{v=1}^{\infty} v \frac{P(N_{TST} = v, I)}{P(I)} = \sum_{i=1}^m \frac{P(I_i)}{P(I)} \left[ \frac{(1 + (\frac{h_1}{S})^c)^{-k_0}}{1 - (1 + (\frac{h_1}{S})^c)^{-k_0}} + \frac{1}{1 - \beta_i(1 + (\frac{h_1}{S})^c)^{-k-i}} \right],$$

چون  $N_{inc}$  یک متغیر تصادفی نامنفی است آنگاه  $E(N_{inc}|I) = \sum_{v=1}^{\infty} P(N_{inc} \geq v | I)$ ، با توجه به اینکه  $N_{inc} \geq v \cong T > w_v$  آنگاه

$$\begin{aligned}
 E(N_{inc}|I) &= \sum_{v=1}^{\infty} P(T > w_v | I) \\
 &= \sum_{i=1}^m \frac{P(I_i)}{P(I)} \sum_{v=1}^{\infty} ([1 + (h_1/S)^c]^{-k_0})^v = \frac{[1 + (h_1/S)^c]^{-k_0}}{1 - [1 + (h_1/S)^c]^{-k_0}}.
 \end{aligned}$$

با توجه به لم ۴ متوسط هزینه نمونه‌گیری برابر

$$\begin{aligned}
 (a + bn)E(N_{TST}|I) &= (a + bn) \sum_{i=1}^m \frac{P(I_i)}{P(I)} \\
 &\left[ \frac{(1 + (\frac{h_1}{S})^c)^{-k_0}}{1 - (1 + (\frac{h_1}{S})^c)^{-k_0}} + \frac{1}{1 - \beta_i(1 + (\frac{h_1}{S})^c)^{-k-i}} \right],
 \end{aligned} \tag{۸}$$

است.

احتمال اینکه علت اسنادپذیر  $i$ th باعث خروج فرآیند از حالت تحت کنترل شده باشد برابر  $\frac{P(I_i)}{P(I)}$  است؛ بنابراین متوسط هزینه مکان‌یابی، تشخیص و تعمیر علت اسنادپذیر برابر  $\sum_{i=1}^m \frac{P(I_i)}{P(I)}$  است؛ بنابراین، با توجه به مراحل محاسبه  $E(T)$ ، اجزای تشکیل دهنده  $E(C)$  به شرح زیر هستند:

با توجه به معادله (۴) تا معادله (۸) و با توجه به رابطه‌های (۲) و (۳)، متوسط هزینه یک چرخه‌ی کیفیت برابر است با

$$\begin{aligned}
 E(C) &= D_0 s k_0 \frac{\Gamma(k_0 - (1/c))\Gamma(1 + (1/c))}{\Gamma(k_0 + 1)} \\
 &+ \frac{Y}{ARL_0} \frac{(1 + (h_1/s)^c)^{-k_0}}{1 - (1 + (h_1/s)^c)^{-k_0}} \\
 &+ \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{i=1}^m D_{1i} W_v \frac{1}{P(I) ARL_{1i}} [1 - (1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k_i}] \\
 &\frac{((1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k_0})^v - ((1 - ARL_{1i}^{-1})(1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k-i})^v}{(1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k_i} - (1 - ARL_{1i}^{-1})} \\
 &- \frac{1}{P(I)} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{\infty} D_{1i} \frac{1}{ARL_{1i}} \frac{(1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-vk-i}}{1 - (1 - ARL_{1i}^{-1})(1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k-i}} \\
 &\int_{w_{v-1}}^{w_v} -k_0 (1 + (\frac{t}{s})^c)^{-k_0-1} \frac{ct^c}{s^c} dt \\
 &+ \sum_{i=1}^m D_{1i} [(\gamma_1 Z_1 + \gamma_{2i} Z_{2i}) \frac{P(I_i)}{P(I)}] + \sum_{i=1}^m \frac{P(I_i)}{P(I)} D_{2i} \\
 &+ (a + bn) \sum_{i=1}^m \frac{P(I_i)}{P(I)} \left[ \frac{(1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k_0}}{1 - (1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k_0}} \right. \\
 &\left. + \frac{1}{1 - (1 - ARL_{1i}^{-1})(1 + (\frac{h_1}{s})^c)^{-k-i}} \right] + (\gamma_1 Z_1 + \gamma_{2i} Z_{2i})
 \end{aligned}$$

با توجه به این‌که هدف ما یافتن مقادیر بهینه پارامترهای طراحی نمودار کنترلی  $\bar{x}$  برای کمینه نمودن  $E(A) = E(C) / E(T)$  در شرایطی است که پیشامد  $I$  با احتمال نزدیک به یک رخ دهد طراحی آماری-اقتصادی واقع‌بینانه ( $RESD$ ) را می‌توان به صورت

$$\text{RSED Model: } \begin{cases} \text{minimize } E(A) \\ \text{subject to:} \\ P(I) \geq p_0, \\ ARL_0 \geq ARL_{0l}, \\ ARL_1 \geq ARL_{1l}. \end{cases} \quad (9)$$

فرمول‌بندی نمود که در آن  $p_0$ ، کران پایین موردقبول برای  $P(I)$  در انتخاب پارامترهای طراحی است. به منظور ارزیابی عملکرد نمودار کنترلی از شاخص  $ARL_0$  و  $ARL_1$  استفاده می‌شود به طوری که  $ARL_0 = 1/\alpha$  و  $ARL_{overall} = 1/(1 - \beta_{overall})$  که در آن ابتدا  $\beta_j$  یعنی احتمال وقوع خطای نوع دوم به ازای علت اسنادپذیر  $j$ th برای  $j = 1, 2, \dots, m$  به دست می‌آید و در نهایت  $\beta$  کل نمودار کنترلی برابر است با  $\beta_{overall} = \sum_{j=1}^m \beta_j (P(I_j) / P(I))$ . در بخش بعد به پردازش طراحی آماری-اقتصادی نمودارهای کنترلی  $\bar{x}$  پرداخته شده است.

## ۴- نتایج تحلیل عددی

در این بخش، پارامترهای طراحی بهینه  $h, l, n$  و  $L$  را با به حداقل رساندن تابع هزینه واقع بینانه پیدا می‌کنیم. کلیه تحلیل‌های عددی در این بخش، با استفاده از نرم‌افزار  $R$  نسخه ۴/۳/۱ و آخرین نسخه پکیج  $DEoptim$  در آن انجام شده‌اند. پارامترهای ورودی مدل را می‌توان به پارامترهای هزینه  $(Y, D_0, D_{ii}, D_{2i}, a, b, \gamma_1, \gamma_2)$ ، پارامترهای زمان  $(Z_0, Z_1, Z_{2i})$ ، پارامترهای انتقال  $(\delta_i)$  و پارامترهای توزیع بر  $12 (s, c, k_i)$  طبقه‌بندی نمود.

۴-۱- بررسی تاثیر احتمال پیشامد  $I$  در طراحی نمودار کنترلی  $\bar{X}$  در حضور علت‌های اسنادپذیر مستقل تحت مدل شوک بر ۱۲

این بخش به بررسی احتمال وقوع پیشامد  $I$  در طراحی نمودار کنترلی  $\bar{X}$  در حضور علت‌های اسنادپذیر تحت مدل شوک بر ۱۲ می‌پردازد. برای مقایسه پذیر بودن نتایج مدل ما با مدل سعادت‌ملی و همکاران [5]، پارامترهای ورودی مدل بر اساس مقاله سعادت‌ملی و همکاران [5] مقداردهی شده‌اند، همچنین  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$  قرار داده شده است. پارامترهای ورودی مدل در جدول ۱ آمده است. برای همه علت‌های اسنادپذیر، مقادیر  $Y = \$2000, D_0 = \$210, a = \$20, b = \$20, Z_0 = 1.25h, Z_1 = 1.25$  و یکسان فرض می‌شوند. پارامترهای  $\lambda_i, Z_{2i}, D_{2i}$  و  $D_{i1}$  نیز تابعی از  $\delta_i$  هستند. برای بررسی قواعد تعیین این پارامترها به بخش ۵ مقاله سعادت‌ملی و همکاران [5] مراجعه شود. همچنین فرض می‌شود در طراحی آماری-اقتصادی واقع بینانه  $p_0$  مقادیر ۰/۹۹، ۰/۹۵، ۰/۹۰ و ۰/۸۵ اختیار کند. قابل ذکر است که نزدیک شدن مقدار  $p_0$  به ۱ معادل ایجاد شرایطی برای واقع بینانه نمودن رخداد فرض دوم در محاسبه میانگین هزینه در واحد زمان چرخه کیفیت است.

جدول ۲ مقادیر بهینه پارامترهای طراحی برای طراحی اقتصادی نمودار کنترلی  $\bar{X}$  در حضور ۷ علت اسنادپذیر مستقل چندگانه تحت دو مدل  $RED$  و سعادت‌ملی و همکاران [5] آورده شده است. چون در مدل اقتصادی سعادت‌ملی و همکاران [5]، احتمال وقوع پیشامد  $I$  در محاسبه  $E(A)$  منظور نشده است، پس جهت مقایسه عادلانه این دو مدل اقتصادی فرض می‌شود که در مدل  $RED$  محدودیتی برای احتمال وقوع پیشامد  $I$  نداشته باشد ( $p_0 = 0$ ).

در جدول ۲ مشاهده می‌شود که در هر سه توزیع پیشین  $NE, Un$  و  $HN$  با مقادیر مختلفی از  $c$  و  $s$  یکسان در هر دو مدل، مقدار هزینه در واحد زمان در مدل سعادت‌ملی و همکاران [5] به‌طور محسوس از مدل  $RED$  کمتر است؛ بنابراین، با اینکه سعادت‌ملی و همکاران [5] فرض کردند که پیشامد  $I$  رخ دهد ولی چون این فرض را در به‌دست آوردن  $E(A) = E(C)/E(T)$  منظور نکردند باعث انحراف شدید در نتایج آن‌ها شده است. در ادامه با توجه به این‌که در طراحی اقتصادی به ویژگی‌های آماری توجه نمی‌شود، به تعیین پارامترهای طراحی در طراحی آماری-اقتصادی ارایه شده در رابطه (۹) پرداخته می‌شود.

۴-۲- نتایج تحلیل عددی طراحی آماری-اقتصادی واقع بینانه نمودار کنترلی شوهارتی  $\bar{X}$ 

در اجرای طراحی آماری-اقتصادی واقع بینانه، با توجه به مقدار حداقل متوسط طول اجرای تحت کنترل و خارج از کنترل موردقبول به تعیین پارامترهای طراحی پرداخته می‌شود. برای این منظور  $ARL_{01}$  و  $ARL_{11}$  به ترتیب برابر ۲۰۰ و ۱/۱۱ در نظر گرفته می‌شود. بر اساس معادله (۹)، برای کاهش احتمال وقوع بیش از یک علت اسنادپذیر تا صدور هشدار درست که به معنی واقع بینانه نمودن وقوع پیشامد  $I$  در مدل  $RED$ ، باید مقدار  $p_0$  افزایش داده شود؛ بنابراین، برای بررسی اثر قید  $P(I) \geq p_0$  بر پارامترهای طراحی و  $E(A)$ ، در جدول ۳، مقدار بهینه پارامترهای طراحی با در نظر گرفتن مقادیر مختلف برای  $p_0$ ، تحت سه توزیع پیشین محاسبه شده است.

نتایج جدول ۳ نشان می‌دهد که با افزایش  $p_0$  از ۰/۸۵ به ۰/۹۹ مقدار  $E(A)$  تحت هر سه توزیع پیشین  $NE, HN$  و  $Un$  افزایشی است. برای مقدار ثابت  $c$  و  $s$  در هر سه توزیع پیشین، با افزایش  $p_0$  از ۰/۸۵ به ۰/۹۹ مقدار بهینه اندازه نمونه  $n, h$  و  $L$  به‌دست آمده روند غیر صعودی دارند.

## ۵- نتیجه گیری

هدف اصلی در طراحی نمودارهای کنترلی، تعیین بهینه پارامترهای طرح مورد مطالعه است. هدف طراحی‌های اقتصادی و آماری-اقتصادی تعیین پارامترهای طراحی به گونه‌ای است که متوسط هزینه پیاده‌سازی نمودار در واحد زمان کمینه شود. تعیین پارامترهای تنظیمی بهینه در طراحی‌های اقتصادی و آماری-اقتصادی نمودارهای کنترلی، بیش از همه، به توزیع طول عمر فرآیند، یعنی توزیع مدت زمان تحت کنترل بودن آن تا رخداد علت یا علت‌های اسنادپذیر، بستگی دارد. در اکثر فرآیندهای تولیدی، بیش از یک علت اسنادپذیر باعث تغییرپذیری در مشخصه کیفیت محصول و در نتیجه کاهش کیفیت فرآیند تولید می‌شود.

در این مقاله یک مدل اقتصادی واقع‌بینانه و کاربردی برای طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل  $\bar{X}$  در حضور چندین علت اسنادپذیر مستقل تحت مدل شوک ببر ۱۲ در جهت اصلاح کاستی‌های مدل‌های قبلی ارائه شد. مقایسه بین نتایج عددی به دست آمده از مدل *RED* با نتایج سعادت‌ملی و همکاران [5] در طراحی اقتصادی و آماری-اقتصادی نمودار کنترل  $\bar{X}$ ، حاکی از کم‌برآوردی شدید متوسط هزینه در واحد زمان چرخه کیفیت در مدل آن‌ها بود.

نتایج عددی نشان داد که استفاده از مدل واقع‌بینانه آماری-اقتصادی برای تعیین پارامترهای طراحی نمودار کنترلی  $\bar{X}$  در حضور چندین علت اسنادپذیر تحت مدل شوک ببر ۱۲ متوسط هزینه در واحد زمان چرخه کیفیت با افزایش احتمال  $p0$  روند غیرنزولی دارد که اهمیت در نظر گرفتن احتمال پیشامد *I* را در محاسبات  $E(A)$  نشان می‌دهد؛ بنابراین، به مدیران و صاحبان صنایع پیشنهاد می‌شود برای تخمین درست از هزینه‌های مربوط به پایش فرآیندهای تولیدی از مدل واقع‌بینانه در طراحی آماری-اقتصادی نمودارهای کنترلی  $\bar{X}$  در حضور چندین علت اسنادپذیر تحت مدل شوک ببر ۱۲ استفاده کنند. از موضوعات جالب برای پژوهش‌های آینده می‌توان به بررسی اثرات استفاده از مدل *RESD* در طراحی آماری-اقتصادی انواع نمودارهای کنترلی پارامتری و غیرپارامتری و نیز نمودارهای کنترلی سازوار تحت مدل شوک ببر ۱۲ اشاره کرد.

جدول ۱- مجموعه مقادیر پارامترهای ورودی مدل (جدول ۳ سعادت ملی و همکاران [5]).

Table 1- Set of model input parameter values (Table 3 of Saadat Melli et al. [5]).

i	$\delta_i$	$D_{1i}$		$D_{2i}$		$Z_{2i}$			$k_i$		
		NE <sub>i</sub>	Un <sub>i</sub>	HN <sub>i</sub>	NE <sub>i</sub>	Un <sub>i</sub>	HN <sub>i</sub>	NE <sub>i</sub>		Un <sub>i</sub>	HN <sub>i</sub>
1	1	575	1647	1000	1454	3.293	2	2.909	11.429	6.932	10.086
2	1.5	1684	1283	1000	1244	2.565	2	2.488	8.901	6.932	8.627
3	1.8	2901	1103	1000	1099	1.1.03	2	2.198	7.661	6.932	7.623
4	2	4000	1000	1000	1000	2	2	2	6.932	6.932	6.932
5	2.2	5341	902	1000	901	1.804	2	1.802	6.272	6.932	6.241
6	2.5	7776	777	1000	756	1.554	2	1.512	5.399	6.932	5.233
7	3	12602	609	1000	537	1.217	2	1.074	4.735	6.932	4.289

\* NE: نمایی منفی؛ Un: یکنواخت؛ HN: نیم نرمال

جدول ۲- بررسی تاثیر احتمال پیشامد I در طراحی نمودار کنترلی  $\bar{X}$  در حضور علت‌های اسنادپذیر مستقل تحت مدل شوک بر ۱۲.

Table 2- Investigating the effect of the probability of event I in the design of the  $\bar{X}$  control chart in the presence of independently attributable causes under the Ber12 shock model.

EA	P(I)	L	h	n	s	c	EA	P(I)	L	h	n	p0	PD	s	c
332.44	0.912	2.57	13.59	4	50	4.79	283.49	0.937	2.67	28.35	3	S.e	HN	100	5.5
491.434	0	0.1	88.207	1			319.528	0.948	2.575	27.806	3	0			
332.84	0.908	2.55	13.88	4			274.57	0.935	2.54	30.55	4	S.e	NE		
460.788	0	0.1	68.805	1			321.281	0.947	2.574	27.614	3	0			
340.79	0.934	2.64	13.22	4	-		283.49	0.951	2.67	29.43	4	S.e	UN		
387.765	0.939	2.633	12.205	3			327.316	0.957	2.647	27.239	3	0			
302.74	0.932	2.54	19.73	4	83.55	4.33	300.8	0.923	2.59	20.3	4	S.e	HN	50	7
348.394	0.943	2.566	16.905	3			435.464	0	0.1	71.25	1	0			
302.79	0.937	2.62	17.39	3			300.85	0.918	2.58	20.34	4	S.e	NE		
350.979	0.941	2.564	16.762	3			337.312	0.922	2.573	19.307	3	0			
312.16	0.948	2.66	17.98	4			306.3	0.93	2.65	20.3	4	S.e	UN		
358.105	0.953	2.637	16.472	3			343.552	0.938	2.641	19.081	3	0			
276.42	0.927	2.55	30.3	4	75	7	297.74	0.942	2.63	18.92	4	S.e	HN	100	4
315.882	0.939	2.576	28.145	3			345.966	0.947	2.566	17.351	3	0			
276.42	0.923	2.59	30.19	4			296.17	0.938	2.56	19.24	4	S.e			
317.779	0.939	2.559	27.897	3			348.401	0.945	2.564	17.195	3	0	NE		
283.39	0.942	2.67	29.5	4			308.35	0.952	2.66	18.52	4	S.e			
323.483	0.95	2.648	27.68	3			355.435	0.956	2.637	16.877	3	0	UN		
299.85	0.999	2.49	20.68	4	60.42	5.88	264.51	0.935	2.55	39.73	4	S.e	HN	100	7
338.885	0.933	2.561	19.184	3			303.78	0.947	2.58	36.645	3	0			
299.7	0.918	2.56	20.5	4			264.62	0.93	2.65	37.52	3	S.e			
341.469	0.929	2.574	19.109	3			305.212	0.946	2.579	36.441	3	0	NE		
306.73	0.938	2.65	20.19	4			270.89	0.949	2.67	38.48	4	S.e			
348.069	0.945	2.641	18.795	3			310.527	0.956	2.652	36.05	3	0	UN		
274.91	0.932	2.65	30.47	3	87.5	6.47	329.5	0.922	2.62	12.61	3	S.e	HN	66.84	4
314.318	0.944	2.577	29.853	3			369.218	0.935	2.56	12.277	3	0			
275.01	0.933	2.66	30	3			327.34	0.917	2.53	14.04	4	S.e	NE		
316.034	0.942	2.575	29.674	3			372.586	0.934	2.557	12.142	3	0			
280.37	0.947	2.67	31.4	4			337.89	0.943	2.65	13.05	4	S.e	UN		
321.793	0.954	2.649	29.326	3			380.36	0.946	2.631	11.932	3	0			

جدول ۳- مقدار بهینه پارامترهای طراحی آماری-اقتصادی واقع بینانه نمودار کنترلی  $\bar{X}$  در حضور علت‌های اسنادپذیر مستقل تحت مدل شوک بر ۱۲.

Table 3- Optimal value of realistic statistical-economic design parameters of the  $\bar{X}$  control chart in the presence of independent attributable causes under the Ber12 shock model.

EA	arl <sub>1</sub>	arl <sub>0</sub>	P(I)	L	h	n	s	c	EA	arl <sub>1</sub>	arl <sub>0</sub>	P(I)	L	h	n	p0	PD	s	c	
403.521	1.11	259.42	0.94	2.89	143	9	50	4.79	344.736	1.11	248.9	0.995	2.9	30.7	9	0	HN	100	5.5	
403.521	1.11	259.42	0.94	2.89	143	9			344.736	1.11	248.92	0.995	2.9	30.7	9	0.85				
403.521	1.11	259.42	0.94	2.89	143	9			344.736	1.11	248.92	0.995	2.9	30.7	9	0.9				
405.571	1.10	200.126	0.95	2.807	13.542	9			344.736	1.11	248.92	0.995	2.9	30.7	9	0.95				
721.996	1.10	201.29	0.99	2.809	9.617	9			344.736	1.11	248.92	0.995	2.9	30.7	9	0.99				
407.626	1.11	206.435	0.936	2.817	14.091	9			351.39	1.11	350.05	0.958	2.983	30.7	10	0	NE			
407.626	1.11	206.435	0.936	2.817	14.091	9			351.39	1.11	350.05	0.958	2.983	30.7	10	0.85				
407.626	1.11	206.435	0.936	2.817	14.091	9			351.39	1.11	350.05	0.958	2.983	30.7	10	0.9				
416.656	1.9	201.861	0.95	2.81	13.539	10			351.39	1.11	350.05	0.958	2.983	30.7	10	0.95				
751.638	1.9	201.176	0.99	2.809	9.624	10			485.404	1.9	202.243	0.99	2.811	23.81	10	0.99				
407.597	1.11	221.107	0.95	2.839	13.305	7	50	4.79	347.544	1.11	207.708	0.966	2.819	29.409	7	0	UN	100	5.5	
407.597	1.11	221.107	0.95	2.839	13.305	7			347.544	1.11	207.708	0.966	2.819	29.409	7	0.85				
407.597	1.11	221.107	0.95	2.839	13.305	7			347.544	1.11	207.708	0.966	2.819	29.409	7	0.9				
415.93	1.9	306.247	0.95	2.942	13.412	8			347.544	1.11	207.708	0.966	2.819	29.409	7	0.95				
686.39	1.9	201.213	0.99	2.809	9.615	8			455.198	1.9	200.373	0.99	2.808	23.787	8	0.99				
380.405	1.11	251.826	0.955	2.88	19.143	9	83.55	4.33	362.56	1.11	261.266	0.939	2.892	20.984	9	0	HN	50	7	
380.405	1.11	251.826	0.955	2.88	19.143	9			362.56	1.11	261.266	0.939	2.892	20.984	9	0.85				
380.405	1.11	251.826	0.955	2.88	19.143	9			362.56	1.11	261.266	0.939	2.892	20.984	9	0.9				
380.405	1.11	251.826	0.955	2.88	19.143	9			364.475	1.10	206.351	0.95	2.817	20.445	9	0.95				
573.148	1.10	201.173	0.99	2.809	13.488	9			614.476	1.10	201.85	0.99	2.81	16.183	9	0.99				
389.26	1.11	338.689	0.953	2.973	19.2	10			365.416	1.11	205.552	0.938	2.816	20.944	9	0	NE			
389.26	1.11	338.689	0.953	2.973	19.2	10			365.416	1.11	205.552	0.938	2.816	20.944	9	0.85				
389.26	1.11	338.689	0.953	2.973	19.2	10			365.416	1.11	205.552	0.938	2.816	20.944	9	0.9				
389.26	1.11	338.689	0.953	2.973	19.2	10			367.546	1.11	200.559	0.95	2.808	20.286	9	0.95				
594.84	1.9	200.145	0.99	2.807	13.501	10			636.743	1.9	201.256	0.99	2.809	16.191	10	0.99				

جدول ٣- ادامه.

Table 3- Continued.

EA	arl <sub>1</sub>	arl <sub>0</sub>	P(I)	L	h	n	s	c	EA	arl <sub>1</sub>	arl <sub>0</sub>	P(I)	L	h	n	p0	PD	s	c
383.741	1.11	211.035	0.962	2.824	18.131	7	83.55	4.33	366.019	1.11	221.797	0.949	2.84	20.255	7	0	UN	50	7
383.741	1.11	211.035	0.962	2.824	18.131	7			366.019	1.11	221.797	0.949	2.84	20.255	7	0.85			
383.741	1.11	211.035	0.962	2.824	18.131	7			366.019	1.11	221.797	0.949	2.84	20.255	7	0.9			
383.741	1.11	211.035	0.962	2.824	18.131	7			366.043	1.11	219.116	0.95	2.836	20.203	7	0.95			
550.09	1.09	200.34	0.99	2.808	13.479	8			586.262	1.09	203.777	0.99	2.813	16.178	8	0.99			
339.884	1.11	253.573	0.952	2.883	30.422	9	75	7	377.575	1.11	249.539	0.958	2.878	19.848	9	0	HN	100	4
339.884	1.11	253.573	0.952	2.883	30.422	9			377.575	1.11	249.539	0.958	2.878	19.848	9	0.85			
339.884	1.11	253.573	0.952	2.883	30.422	9			377.575	1.11	249.539	0.958	2.878	19.848	9	0.9			
339.884	1.11	253.573	0.952	2.883	30.422	9			377.575	1.11	249.539	0.958	2.878	19.848	9	0.95			
496.828	1.10	201.863	0.99	2.81	24.275	9			544.515	1.10	200.642	0.99	2.808	13.89	9	0.99			
346.343	1.10	334.617	0.95	2.969	30.481	10			386.249	1.11	348.564	0.956	2.981	19.907	10	0	NE		
346.343	1.10	334.617	0.95	2.969	30.481	10			386.249	1.11	348.564	0.956	2.981	19.907	10	0.85			
346.343	1.10	334.617	0.95	2.969	30.481	10			386.249	1.11	348.564	0.956	2.981	19.907	10	0.9			
346.343	1.109	334.617	0.95	2.969	30.481	10			386.249	1.11	348.564	0.956	2.981	19.907	10	0.95			
512.362	1.09	200.772	0.99	2.808	24.288	10			564.553	1.09	202.475	0.99	2.811	13.896	10	0.99			
342.789	1.11	212.942	0.959	2.827	29.393	7			387.953	1.10	387.988	0.963	3.014	18.966	8	0	UN		
342.789	1.11	212.942	0.959	2.827	29.393	7			387.953	1.10	387.988	0.963	3.014	18.966	8	0			
342.789	1.11	212.942	0.959	2.827	29.393	7			387.953	1.10	387.988	0.963	3.014	18.966	8	0			
342.789	1.11	212.942	0.959	2.827	29.393	7			387.953	1.10	387.988	0.963	3.014	18.966	8	0			
478.038	1.09	200.749	0.99	2.808	24.271	8			523.515	1.08	200.115	0.99	2.807	13.888	8	0.99			
368.146	1.11	254.477	0.946	2.884	21.044	9	60.42	5.88	325.184	1.11	249.278	0.959	2.877	39.613	9	0	HN	100	7
368.146	1.11	254.477	0.946	2.884	21.044	9			325.184	1.11	249.278	0.959	2.877	39.613	9	0.85			
368.146	1.11	254.477	0.946	2.884	21.044	9			325.184	1.11	249.278	0.959	2.877	39.613	9	0.9			
368.442	1.10	228.898	0.95	2.85	20.797	9			325.184	1.11	249.278	0.959	2.877	39.613	9	0.95			
592.13	1.10	204.298	0.99	2.814	15.771	9			434.185	1.105	200.858	0.99	2.808	32.368	9	0.99			
376.323	1.10	310.916	0.944	2.946	21.081	10			330.737	1.11	349.419	0.957	2.982	39.673	10	0	NE		
376.323	1.10	310.916	0.944	2.946	21.081	10			330.737	1.11	349.419	0.957	2.982	39.673	10	0.85			

جدول ٣- ادامه.

Table 3- Continued.

EA	arl <sub>1</sub>	arl <sub>0</sub>	P(I)	L	h	n	s	c	EA	arl <sub>1</sub>	arl <sub>0</sub>	P(I)	L	h	n	p0	PD	s	c
376.323	1.10	310.916	0.944	2.946	21.081	10	60.42	5.88	330.737	1.11	349.419	0.957	2.982	39.673	10	0.9	NE	100	7
371.263	1.11	200.55	0.95	2.808	20.64	10			330.737	1.11	349.419	0.957	2.982	39.673	10	0.95			
613.327	1.09	201.203	0.99	2.809	15.783	10			446.199	1.093	200.109	0.99	2.807	32.386	10	0.99			
371.585	1.11	216.615	0.955	2.833	20.175	7			327.738	1.11	208.009	0.965	2.82	38.297	7	0	UN		
371.585	1.11	216.615	0.955	2.833	20.175	7			327.738	1.11	208.009	0.965	2.82	38.297	7	0.85			
371.585	1.11	216.615	0.955	2.833	20.175	7			327.738	1.11	208.009	0.965	2.82	38.297	7	0.9			
371.585	1.11	216.615	0.955	2.833	20.175	7			327.738	1.11	208.009	0.965	2.82	38.297	7	0.95			
565.497	1.09	200.062	0.99	2.807	15.774	8			420.759	1.09	202.543	0.99	2.811	32.359	8	0.99			
338.127	1.11	250.978	0.956	2.879	32.475	9	87.5	6.47	406.01	1.11	249.128	0.948	2.877	14.058	9	0	HN	66.84	4
338.127	1.11	250.978	0.956	2.879	32.475	9			406.01	1.11	249.128	0.948	2.877	14.058	9	0.85			
338.127	1.11	250.978	0.956	2.879	32.475	9			406.01	1.11	249.128	0.948	2.877	14.058	9	0.9			
338.127	1.11	250.978	0.956	2.879	32.475	9			406.117	1.11	246.607	0.95	2.874	13.906	9	0.95			
472.976	1.10	201.225	0.99	2.809	25.824	9			676.142	1.106	201.432	0.99	2.809	9.284	9	0.99			
344.432	1.11	342.103	0.954	2.976	32.529	10			416.552	1.108	333.781	0.946	2.968	14.081	10	0	NE		
344.432	1.11	342.103	0.954	2.976	32.529	10			416.552	1.108	333.781	0.946	2.968	14.081	10	0.85			
344.432	1.11	342.103	0.954	2.976	32.529	10			416.552	1.108	333.781	0.946	2.968	14.081	10	0.9			
344.432	1.11	342.103	0.954	2.976	32.529	10			416.862	1.098	244.311	0.95	2.871	13.917	10	0.95			
487.464	1.09	200.601	0.99	2.808	25.836	10			704.868	1.093	201.555	0.99	2.81	9.286	10	0.99			
340.93	1.11	209.861	0.963	2.823	31.293	7			409.816	1.11	215.638	0.956	2.831	13.23	7	0	UN		
340.93	1.11	209.861	0.963	2.823	31.293	7			409.816	1.11	215.638	0.956	2.831	13.23	7	0.85			
340.93	1.11	209.861	0.963	2.823	31.293	7			409.816	1.11	215.638	0.956	2.831	13.23	7	0.9			
340.93	1.11	209.861	0.963	2.823	31.293	7			409.816	1.11	215.638	0.956	2.831	13.23	7	0.95			
456.831	1.09	204.177	0.99	2.814	25.81	8			644.493	1.09	200.949	0.99	2.809	9.28	8	0.99			

## تشکر و قدردانی

نویسندگان بدین وسیله از تمامی افرادی که با ارایه دیدگاه‌ها و پیشنهادهای علمی در بهبود کیفیت این پژوهش نقش داشته‌اند، صمیمانه قدردانی می‌نمایند.

## منابع مالی

این پژوهش بدون دریافت هرگونه حمایت مالی از سوی نهادهای دولتی، تجاری یا غیرانتفاعی انجام شده است.

## تعارض با منافع

هیچ‌گونه تعارض منافی برای این پژوهش گزارش نمی‌شود.

## منابع

- [1] Shewhart, W. A. (1924). Some applications of statistical methods to the analysis of physical and engineering data. *Bell system technical journal*, 3(1), 43–87. <https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1924.tb01347.x>
- [2] Bowles, J. B. (2002). Commentary-caution: Constant failure-rate models may be hazardous to your design. *IEEE transactions on reliability*, 51(3), 375–377. <https://doi.org/10.1109/TR.2002.801850>
- [3] Banerjee, P. K., & Rahim, M. A. (1988). Economic design of  $\bar{x}$  - control charts under weibull shock models. *Technometrics*, 30(4), 407–414. <https://doi.org/10.1080/00401706.1988.10488435>
- [4] Rahim, M. A., & Banerjee, P. K. (1993). A generalized model for the economic design of  $\bar{x}$  control charts for production systems with increasing failure rate and early replacement. *Naval research logistics (NRL)*, 40(6), 787–809. [https://doi.org/10.1002/1520-6750\(199310\)40:6<787::AID-NAV3220400605>3.0.CO;2-4](https://doi.org/10.1002/1520-6750(199310)40:6<787::AID-NAV3220400605>3.0.CO;2-4)
- [5] Saadatmelli, A., Moghadam, M. B., Seif, A., & Faraz, A. (2019). Economic design of  $X^{\bar{}}$  control charts with multiple assignable causes under Burr XII shock model. *Communications in statistics-theory and methods*, 48(3), 500–522. <https://doi.org/10.1080/03610926.2017.1414262>
- [6] Duncan, A. J. (1956). The economic design of  $X$  charts used to maintain current control of a process. *Journal of the american statistical association*, 51(274), 228–242. <https://doi.org/10.1080/01621459.1956.10501322>
- [7] Baker, K. R. (1971). Two process models in the economic design of an  $x$  chart. *AIIE transactions*, 3(4), 257–263. <https://doi.org/10.1080/05695557108974814>
- [8] Heikes, R. G., Montgomery, D. C., & Yeung, J. Y. H. (1974). Alternative process models in the economic design of  $t$  control charts. *AIIE transactions*, 6(1), 55–61. <https://doi.org/10.1080/05695557408974933>
- [9] Montgomery, D. C., & Heikes, R. G. (1976). Process failure mechanisms and optimal design of fraction defective control charts. *AIIE transactions*, 8(4), 467–472. <https://doi.org/10.1080/05695557608975110>
- [10] McWilliams, T. P. (1989). Economic control chart designs and the in-control time distribution: A sensitivity study. *Journal of quality technology*, 21(2), 103–110. <https://doi.org/10.1080/00224065.1989.11979152>
- [11] Chung, K. J. (1990). A simplified procedure for the economic design of  $X^{\bar{}}$  -charts. *International journal of production research*, 28(7), 1239–1246. <https://doi.org/10.1080/00207549008942790>
- [12] Montgomery, D. C. (1980). The economic design of control charts: A review and literature survey. *Journal of quality technology*, 12(2), 75–87. <https://doi.org/10.1080/00224065.1980.11980940>
- [13] Ho, C., & Case, K. E. (1994). Economic design of control charts: a literature review for 1981-1991. *Journal of quality technology*, 26(1), 39–53. <https://doi.org/10.1080/00224065.1994.11979497>
- [14] Woodall, W. H., & Montgomery, D. C. (1999). Research issues and ideas in statistical process control. *Journal of quality technology*, 31(4), 376–386. <https://doi.org/10.1080/00224065.1999.11979944>
- [15] Heydari, A. A., Moghadam, M. B., & Eskandari, F. (2016). Economic and economic statistical designs of  $X$  control charts under Burr XII shock model. *International journal of engineering and technology*, 6(1–2), 1–15. <https://doi.org/10.1504/IJQET.2016.081626>
- [16] Pasha, M. A., Moghadam, M. B., & Fani, S. (2017). A generalized approach to economic design of control charts: A discussion on implementing. *Communications in statistics - theory and methods*, 46(21), 10495–10506. <https://doi.org/10.1080/03610926.2016.1236963>
- [17] Wang, C. H., & Li, F. C. (2020). Economic design under gamma shock model of the control chart for sustainable operations. *Annals of operations research*, 290(1–2), 169–190. <https://doi.org/10.1007/s10479-018-2949-1>
- [18] Duncan, A. J. (1971). The economic design of (Equation presented)-charts when there is a multiplicity of assignable causes. *Journal of the american statistical association*, 66(333), 107–121. <https://doi.org/10.1080/01621459.1971.10482230>
- [19] Lorenzen, T. J., & Vance, L. C. (1986). The economic design of control charts: A unified approach. *Technometrics*, 28(1), 3–10. <https://doi.org/10.1080/00401706.1986.10488092>
- [20] Pasha, M. A., Bameni Moghadam, M., Nematollahi, N., & Fani, S. (2018). A generalized model for multiplicity-cause economic and economic statistical design of (formula presented)-control charts with proportional hazards shock model. *Communications in statistics: simulation and computation*, 47(6), 1866–1878. <https://doi.org/10.1080/03610918.2017.1327071>
- [21] Chen, Y. S., & Yang, Y. M. (2002). Economic design of  $\bar{x}$ -control charts with Weibull in-control times when there are multiple assignable causes. *International journal of production economics*, 77(1), 17–23. [https://doi.org/10.1016/S0925-5273\(01\)00196-7](https://doi.org/10.1016/S0925-5273(01)00196-7)
- [22] Shojaei, S. R., Bameni Moghadam, M., & Eskandari, F. (2022). Fundamental changes in theory of duncan's model for economic design of control charts in the presence of multiple assignable causes. *Iranian journal of science and technology, transaction a: science*, 46(6), 1613–1628. <https://doi.org/10.1007/s40995-022-01365-8>
- [23] Shojaei, R., & Bameni Moghadam, M. (2023). An extension of Yang and Rahim's model to determine design parameters in multivariate control charts under multiple assignable causes and Weibull Shock model. *Stochastics and quality control*, 38(1), 25–46. <https://doi.org/10.1515/eqc-2022-0053>
- [24] Ross, S. M. (1971). *Applied probability models with optimization applications*. Dover Publication. [https://books.google.com.gi/books?id=ciU87-2kO1wC&printsec=copyright&source=gbs\\_pub\\_info\\_r#v=onepage&q&f=false](https://books.google.com.gi/books?id=ciU87-2kO1wC&printsec=copyright&source=gbs_pub_info_r#v=onepage&q&f=false)