مقاله پژوهشی

طراحی واقع‌بینانه اقتصادی نمودار کنترلی علامت برای پایش میانگین فرایند تحت طرح نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای در حضور چندین علت اِسنادپذیر مستقل

علیا رستمی
دانشجوی دکتری، دانشگاه علامه طباطبائی، گروه آمار، تهران، ایران. olia_rostami@atu.ac.ir

محمد بامنی مقدم *
(نویسنده مسئول)، استاد تمام، دانشکده علوم پایه، گروه آمار، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران.bamenimoghadam@atu.ac.ir

فرزاد اسکندری
استاد تمام، دانشکده علوم پایه، گروه آمار، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران.askandari@atu.ac.ir

چکیده: در بسیاری از نمودارهای کنترلی، فرض نرمال بودن داده‌ها مبنا قرار می‌گیرد، اما در عمل، این فرض همواره برقرار نیست. در چنین شرایطی، کارایی نمودارهای پارامتری کاهش می‌یابد و ممکن است نتایج غیرقابل اعتمادی ارائه دهند. به‌منظور پایش فرآیندهایی با داده‌های نامعلوم یا غیرنرمال، استفاده از نمودارهای کنترلی ناپارامتری گزینه‌ای مناسب‌تر خواهد بود. در این پژوهش، به بررسی طراحی اقتصادی نمودار کنترلی علامت پرداخته شده است که یکی از روش‌های ناپارامتری برای کنترل وضعیت مکانی فرآیند محسوب می‌شود. این تحلیل در حضور چندین علت اِسنادپذیر مستقل و بر اساس یک مدل هزینه‌ای اصلاح‌شده، برگرفته از مدل دانکن، انجام شده است. نتایج نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی می‌تواند کارایی اقتصادی و عملکردی بهتری در شرایط عدم نرمال بودن داده‌ها ارائه دهد.

کلمات کلیدی: طراحی اقتصادی واقع‌بینانه، طرح نمونه‌گیری مجموعه‌ای رتبه‌ای، نمودار کنترلی علامت، چندین علت اِسنادپذیر مستقل.

۱- مقدمه

نمودار کنترلی یکی از ابزارهای کلیدی در نظارت و کنترل آماری و اقتصادی فرایندها محسوب می‌شود. به همین دلیل بسیاری از پژوهش‌گران به طراحی نمودارهای کنترلی پرداخته و روش‌های متنوعی از جمله طراحی ابتکاری، آماری، اقتصادی و آماری-اقتصادی ارائه داده‌اند. طراحی این نمودارها شامل تعیین پارامترهایی نظیر اندازه نمونه (n)، ضریب حدود کنترلی (L) و فاصله نمونه‌گیری (h) است. در طراحی اقتصادی این پارامترها تحت تأثیر عواملی مانند نوع نمودار کنترلی، نوع آماره کنترلی، توزیع آماره، طرح نمونه‌گیری، مدل هزینه و به‌ویژه مدل شوک فرایند قرار دارند. در این مقاله عوامل ذکر شده به صورت دقیق مشخص و بررسی می‌شوند.

در این پژوهش نمودار کنترلی شوهارتی ناپارامتری مورد بررسی قرار گرفته است. نمودار کنترلی علامت، به عنوان یکی از نمودارهای ناپارامتری برای پایش تغییرات در میانه یا میانگین فرایند استفاده می‌شود. امین و همکاران [۱] اولین‌بار به بررسی و توسعه نمودارهای کنترلی ناپارامتری مبتنی بر آماره علامت تحت طرح نمونه‌گیری تصادفی ساده (SRS)[1] پرداختند. آن‌ها نشان دادند که نمودارهای کنترلی ناپارامتری مبتنی بر آماره علامت در مقایسه با نمودارهای پارامتری برای توزیع‌های غیر نرمال کارایی بیشتری دارند.

در این روش آماره علامت با مقایسه مشاهدات نمونه‌گیری‌شده با مقدار هدف (مقدار از پیش تعیین‌شده)، محاسبه می‌شود. به هر مشاهده بسته به بیش‌تر، کم‌تر یا برابر بودن مقدار آن با مقدار هدف یک علامت مثبت، منفی یا صفر اختصاص داده می‌شود. این روش نیازی به فرض نرمال بودن داده‌ها یا تخمین واریانس

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۰/۲۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۱/۲۲
دوره ۱۳/ شماره ۴
صفحات ۳۵۵-۲۷۲

Corresponding Author: bamenimoghadam@atu.ac.ir
https://doi.org/10.48313/jqem.2024.215009

[1] Simple random sampling

فرایند ندارد و برای داده‌هایی با توزیع‌های پیچیده یا نامتقارن مناسب است.

با این حال توان آزمون علامت در مقایسه با برخی آزمون‌های مشابه (مانند آزمون‌های پارامتری) به‌ویژه در نمونه‌های کوچک یا توزیع‌های پیچیده، پایین‌تر است. برای رفع این محدودیت، کتی و جگش بابو[۱] [۲] روش آزمون علامت را تحت طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌ای (RSS)[۲] معرفی کردند. در این روش، توزیع دقیق آماره آزمون علامت برای طرح RSS محاسبه و ارائه شده است. این توزیع، امکان تحلیل دقیق‌تر و بهبود توان آزمون را فراهم می‌کند. نتایج پژوهش آن‌ها نشان داد که آزمون علامت تحت RSS، در مقایسه با آزمون مبتنی بر SRS، توانایی بیش‌تری در شناسایی تغییرات فرایند دارد. همچنین، محاسبه توزیع دقیق آماره آزمون به درک بهتر از نحوه بهبود عملکرد آماری این روش کمک کرده است. بنا بر این، پژوهش براساس توزیع دقیق آماره علامت انجام شده است.

در ادامه، اصغری و همکاران [۳] به توسعه طراحی آماری نمودار کنترلی علامت بر اساس روش RSS پرداخته‌اند. این روش برای پایش مرکز فرآیند در شرایطی‌که اندازه‌گیری مستقیم واحدها دشوار و پرهزینه است، طراحی شده است. آن‌ها نشان دادند که استفاده از طرح RSS به‌طور قابل توجهی دقت و کارایی نمودار کنترلی را افزایش می‌دهد. همچنین، نتایج مقایسه میان روش RSSو SRS حاکی از آن است که RSS توانایی بالاتری در شناسایی سریع تغییرات فرایند دارد و عملکرد بهتری در کاهش طول اجرای مورد انتظار (ARL)[۳] ارائه می‌دهد.

طراحی اقتصادی نمودارهای کنترلی یکی از موضوعات مهم در زمینه کنترل کیفیت فرایندها محسوب می‌شود. دانکن[۴] [۴] پایه‌گذار مفهوم طراحی اقتصادی نمودارهای کنترلی بود و با ارائه یک مدل هزینه‌ای مبتنی بر بهینه‌سازی پارامترهای طراحی، مبنای تحقیقات بسیاری را فراهم کرد. او برای اولین‌بار طراحی اقتصادی جامعی برای تعیین پارامترهای طراحی نمودار کنترلی $\overline{X}$ تحت طرح SRS ارائه کرد و فرض کرد فرایند تحت تأثیر یک علت اِسنادپذیر است که زمان وقوع آن از مدل شوک نمایی پیروی می‌کند.

مدل شوک، توزیع طول عمری است که توزیع زمان وقوع علت اِسنادپذیر را در چرخه کیفیت نشان می‌دهد. این مدل برای محاسبه متوسط زمان یک چرخه ضروری است و تعیین می‌کند که علت اِسنادپذیر با چه سازوکاری رخ می‌دهد. از آن‌جا که زمان وقوع علت اِسنادپذیر تصادفی است، از لحاظ نظری هر توزیع طول عمری با میانگین متناهی می تواند استفاده شود. در این مقاله از توزیع وایبول برای این منظور استفاده شده است.

در راستای توسعه طراحی اقتصادی نمودارهای کنترلی، پژوهش‌های بسیاری بر اهمیت و کاربرد آماره علامت در چارچوب فرضیه‌های مدل اقتصادی دانکن [۴] متمرکز شده‌اند و تلاش کرده‌اند تا از این طریق به طراحی اقتصادی نمودارهای کنترلی ناپارامتری دست یابند. به‌عنوان مثال، لی و همکاران[۵] [۵] طراحی اقتصادی نمودار کنترلی ناپارامتری با استفاده از آماره علامت بررسی کرده و بر توسعه الگوریتم‌های مقاوم برای بهینه‌سازی این طراحی‌ها تمرکز داشته‌اند. آن‌ها با استفاده از داده‌های واقعی، کارایی نمودار کنترلی ناپارامتری را با نمودار پارامتری مقایسه کردند و نتایج نشان داد که این روش در شناسایی تغییرات و کاهش هزینه‌های تولید بسیار مؤثر است.

در ادامه، پاتیل و شریک[۶] [۶] به طراحی اقتصادی نمودار کنترلی با فواصل نمونه‌گیری متغیر بر اساس آماره علامت پرداختند. هدف این پژوهش، ارائه مدلی برای کاهش هزینه‌های تولید از طریق بهینه‌سازی پارامترهای طراحی (مانند اندازه نمونه و فواصل نمونه‌گیری) و کاهش زمان تشخیص تغییرات فرآیند بود. در سال ۲۰۱۷، پاتیل و شریک [۷] به بررسی طراحی اقتصادی نمودار کنترلی ناپارامتری مبتنی بر آماره علامت پرداختند. این پژوهش نشان داد که نمودار کنترلی علامت برای پایش تغییرات در میانه فرایند، بدون نیاز به فرض توزیع مشخص، مناسب است. نتایج حاکی از آن است که این روش برای تغییرات بزرگ در فرایند اقتصادی‌تر است و می‌تواند هزینه‌های کل را به میزان قابل توجهی کاهش دهد.

با این حال، با توجه به این‌که در عمل بیش از یک علت اِسنادپذیر باعث تغییر در مشخصه‌ی کیفیت فرایند می‌شود، دانکن [۸] در سال ۱۹۷۱ فرایند را تحت تأثیر m علت اِسنادپذیر مستقل در نظر گرفت. او فرض کرد که در حضور چندین علت اِسنادپذیر، اگر یکی از آن‌ها رخ دهد، فرآیند خارج از کنترل خواهد شد تا زمانی که علت شناسایی و اصلاح شود. با توجه به این‌که مدل‌بندی دقیق‌تر متوسط هزینه کل در واحد زمان $(E(A))$

[۱] Koti and Jogesh Babu
[۲] Ranked Set Sampling
[۳] Average Run Length
[۴] Duncan
[۵] Li et al.
[۶] Patil and Shirke

کاربرد عملی بیش‌تری دارد، شجاعی و همکاران [۹]، شجاعی و بامنی‌مقدم [۱۰] با هدف رفع نواقص و کاستی‌های فرضیه دانکن، به توسعه مدل‌های پیشین پرداختند. آنان با معرفی مدلی جدید، طراحی اقتصادی و آماری-اقتصادی واقع‌بینانه در حضور چندین علت اِسنادپذیر ارائه کردند. در این پژوهش با استفاده از مدل پیشنهادی آن‌ها، به طراحی اقتصادی نمودار کنترلی علامت تحت طرح RSS با استفاده از مدل اقتصادی واقع‌بینانه در حضور چندین علت اِسنادپذیر مستقل پرداخته شده است.

ساختار این مقاله به این صورت است که در بخش دوم، طرح RSS و تابع توزیع تحت طرح RSS معرفی می‌شود. سپس در بخش سوم، به طراحی آماری نمودار کنترلی علامت تحت طرح RSS پرداخته می‌شود. در بخش چهارم، طراحی اقتصادی واقع‌بینانه برای نمودار کنترلی علامت بر مبنای طرح RSS در حضور چندین علت اِسنادپذیر ارائه می‌شود. در بخش پنجم، نتایج عددی حاصل از طراحی اقتصادی واقع‌بینانه نمودار کنترلی علامت بر مبنای طرح RSS در حضور چندین علت اِسنادپذیر بررسی شده است. در این بخش، تأثیر تغییر پارامترهای ورودی مدل بر متوسط هزینه‌ی بهینه در واحد زمان تحلیل می‌شود. در پایان، بخش ششم به نتیجه‌گیری اختصاص دارد و به جمع‌بندی یافته‌های اصلی مقاله می‌پردازد.

۲- طرح RSS و تابع توزیع تحت طرح RSS

طرح RSS، به‌عنوان یک روش کارامد برای انتخاب نمونه‌ها و کاهش هزینه‌های اندازه‌گیری در طراحی نمودارهای کنترلی استفاده می‌شود. روش کلی طرح نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌ای به شرح زیر است:

نمونه اول ($i = ۱$) : ابتدا یک نمونه تصادفی ساده با اندازه k از جامعه گرفته می‌شود. این k واحد رتبه‌بندی می‌شوند و واحدی که رتبه یکم را دارد جدا شده ($X_{۱(۱)l}$) و برای اندازه‌گیری استفاده می‌شود. سپس بقیه واحدها به جامعه بازگردانده می‌شوند.

نمونه دوم ($i = ۲$): نمونه تصادفی ساده دیگری با اندازه‌ی k انتخاب می‌شود. واحدهای این نمونه دوباره رتبه‌بندی می‌شوند و این‌بار واحد با رتبه دوم ($X_{۲(۲)l}$) جدا شده و برای اندازه‌گیری استفاده می‌شود.

نمونه ($i = k$): نمونه تصادفی ساده دیگری با اندازه‌ی k انتخاب می‌شود. واحدهای این نمونه دوباره رتبه‌بندی می‌شوند و این‌بار واحد با رتبه k-ام ($X_{k(k)l}$) جدا شده و برای اندازه‌گیری استفاده می‌شود.

این چرخه r-بار تکرار می‌شود تا در نهایت نمونه‌ای به اندازه‌ی $n = rk$ به دست آمد.

به عبارتی، انتخاب واحدهای نمونه جهت اندازه‌گیری دقیق، شامل انتخاب واحد دارای کوچکترین رتبه در اولین نمونه ، سپس انتخاب واحد دارای دومین رتبه در دومین نمونه و به همین ترتیب تا انتخاب واحد دارای بزرگترین رتبه در آخرین نمونه است.

یعنی یک نمونه مجموعه رتبه‌دار با r تکرار و به اندازه‌ی $n = rk$ به صورت زیر حاصل می شود:

نمونه اول k-تایی

$$(X_{۱۱l}, X_{۱۲l}, X_{۱۳l}, \dots, X_{۱kl})$$

نمونه دوم k-تایی

$$(X_{۲۱l}, X_{۲۲l}, X_{۲۳l}, \dots, X_{۲kl})$$

نمونه k-ام k-تایی

$$(X_{k۱l}, X_{k۲l}, X_{k۳l}, \dots, X_{kkl})$$

که در هر نمونه، r دفعه نمونه‌گیری انجام می‌شود. سپس رتبه‌بندی به صورت زیر انجام می‌شود

رتبه‌بندی نمونه اول

$$X_{۱(۱)l} < X_{۱(۲)l} < \cdots < X_{۱(k)l} \Rightarrow X_{۱(۱)l}$$

رتبه‌بندی نمونه دوم

$$X_{۲(۱)l} < X_{۲(۲)l} < \cdots < X_{۲(k)l} \Rightarrow X_{۲(۲)l} \vdots$$

رتبه‌بندی نمونه k-ام

$$X_{k(۱)l} < X_{k(۲)l} < \cdots < X_{k(k)l} \Rightarrow X_{k(k)l}$$

که $l = ۱،۲،\dots،r$. چنانچه رتبه‌بندی مشاهدات بدون خطا انجام شود، رتبه‌بندی بی نقص است.

فرض بر این است که $X_{i(j)l}$، j-امین آماره‌ی مرتب در نمونه k-تایی، در نمونه i-ام و تکرار l-ام باشد که

$$\begin{cases} i = ۱،۲،\dots،k & \text{(شماره نمونه)} \\ j = ۱،۲،\dots،k & \text{(شماره آماره مرتب)} \\ l = ۱،۲،\dots،r & \text{(شماره تکرار)} \end{cases}$$

بنابر این، با انتخاب نمونه‌های کوچک k-عضوی و تکرار این فرایند r-بار، یک مجموعه نمونه‌ی رتبه‌ای به دست می‌آید که از دقت بیش‌تری در مقایسه با نمونه‌گیری تصادفی ساده برخوردار است.

در این صورت نمونه به دست آمده به روش فوق که مجموعه ای از آماره‌های مرتب مستقل و غیر هم توزیع است را به صورت:

$$\{(X_{i(1)l}, X_{i(2)l}, X_{i(3)l} \dots, X_{i(k)l}); i = 1,2,\dots,k;\ j = 1,2,\dots,k; l = 1,2,\dots,r\}$$

نمایش می‌دهیم. حال اگر این نمونه تصادفی از یک خانواده از توزیع‌های مکانی با استفاده از تابع توزیع تجمعی $G(x)$ و تابع چگالی $g(x)$ جمع‌آوری شده باشد، آنگاه، تابع توزیع تجمعی j-امین آماره‌ی مرتب در یک نمونه‌ی تصادفی k-تایی $(X_{i(j)1})$ برابر است با

$$G_{(j)}(x) = \frac{k!}{(j-1)!\,(k-j)!}\int_{-\infty}^{x} G(t)^{j-1}[1 - G(t)]^{k-j} g(t)\,dt \qquad (1)$$

حال اگر فرض شود که $g(x)$ تابع چگالی X باشد، آنگاه با تغییر متغیر $G(x) = F(x-\theta)$ می‌توان تابع توزیع تجمعی $G_{(j)}(x)$ به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$G_{(j)}(x) = \frac{k!}{(j-1)!\,(k-j)!}\int_{0}^{F(x-\theta)} u^{j-1}[1-u]^{k-j}\,du = I_{F(x-\theta)}(j, k-j+1) \qquad (2)$$

که در آن

$$I_x(a,b) = \frac{1}{B(a,b)}\int_0^x u^{a-1}[1-u]^{b-1}\,du \qquad (3)$$

که در آن $B(a,b)$ تابع بتا است. بنابر این $G_{(j)}(\theta)$ تحت فرض $H_0: \theta = \theta_0$ برابر است با

$$G_{(j)}(\theta) = I_{\frac{1}{2}}(j, k-j+1) \qquad (4)$$

۳- طراحی آماری نمودار کنترلی علامت تحت طرح RSS

در طراحی آماری، با استفاده از یک طرح نمونه‌گیری و آزمون فرض آماری، می‌توان روابط مرتبط با احتمال خطای نوع اول (α) و نوع دوم (β) را به دست آورد. سپس با تعیین مقادیر مطلوب برای این معیارها، پارامترهای تنظیمی فرآیند (h،n،L) به‌گونه‌ای انتخاب می‌شوند که شاخص‌های آماری مورد نظر به سطح قابل قبول دست یابند.

فرضیات آماری بر اساس میانه‌ی جامعه (θ) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_0: \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1: \theta \neq \theta_0$$

یا به عبارتی

$$H_0: p = 0.5 \quad vs \quad H_1: p > 0.5$$

که در آن θ_0 مقداری از پیش تعیین شده است. فرض کنید نمونه تصادفی به صورت زیر است:

$$\{(X_{1(1)l}, X_{i(2)l}, X_{i(3)l} \dots, X_{i(k)l}); l = 1,2,\dots,r\}$$

آماره آزمون علامت SI_{RSS} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$SI_{RSS} = \sum_{l=1}^{r} I^*(X_{i(j)l} - \theta_0) \qquad (5)$$

که در آن :

$$I^*(X_{i(j)l} - \theta_0) = \begin{cases} 1; & X_{i(j)l} - \theta_0 > 0 \\ 0; & X_{i(j)l} - \theta_0 = 0 \\ -1; & X_{i(j)l} - \theta_0 < 0 \end{cases} \qquad (6)$$

با توجه به پیوستگی توزیع، حالت $X_{i(j)l} - \theta_0 = 0$ رخ نمی‌دهد و توزیع این آماره حول نقطه‌ی صفر متقارن است.

رابطه‌ی زیر میان آماره‌های SI_{SRS} و S^+_{RSS} برقرار است:

$$S^+_{RSS} = \frac{SI_{RSS} + rk}{2} \qquad (7)$$

که آماره S^+_{RSS} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S^+_{RSS} = \sum_{l=1}^{r}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k} I(X_{i(j)l} - \theta_0 > 0) = \sum_{j=1}^{k} S^+_{(j)} \qquad (8)$$

که در آن:

$$I(X_{i(j)l} - \theta_0) = \begin{cases} 1; & X_{i(j)l} - \theta_0 > 0 \\ 0; & X_{i(j)l} - \theta_0 \leq 0 \end{cases} \qquad (9)$$

آماره $S^+_{(j)}$ دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای r و p_j است، که p_j به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} p_j &= P(I(X_{i(j)1} - \theta_0 > 0) \\ &= P(X_{i(j)1} > \theta_0) \\ &= 1 - G_{(j)}(\theta_0) \\ &= 1 - I_{G_{(j)}(\theta_0)}(j, k-j+1) \end{aligned} \qquad (10)$$

تحت فرض $H_0: \theta = \theta_0$، رابطه زیر برقرار است:

$$G(\theta) = G(\theta_0) = \frac{1}{2} \qquad (11)$$

در حالتی‌که فرایند تحت کنترل باشد یعنی $(\theta = \theta_0)$ یا $p = \frac{1}{2}$ داریم

$$p_j = 1 - I_{\frac{1}{2}}(j, k-j+1) \qquad (12)$$

تقارن آماره SI_{RSS} حول صفر به دلایل زیر است:

۱. در آماره $I^*(X_{i(j)l} - \theta_0)$ مقادیر مثبت (بیش تر از θ_0) و منفی (کم تر از θ_0) به صورت متقارن شمارش می‌شوند.

۲.تحت فرض صفر، احتمال قرارگیری مقادیر بالاتر و پایین‌تر از θ_0 برابر است با $P(X_{i(j)l} > \theta_0) = \frac{1}{2}$.

۳. آماره S^+_{RSS} که بخشی از محاسبات SI_{RSS} است، توزیع دوجمله‌ای متقارن با پارامتر $p = \frac{1}{2}$ دارد.

۴. تقارن ذاتی موجود در S^+_{RSS} به واسطه رابطه‌ی $SI_{RSS} = 2S^+_{RSS} - rk$ به آماره SI_{RSS} منتقل می‌شود.

دامنه تغییر SI_{RSS} به صورت زیر است:

$$-rk < SI_{RSS} < rk \qquad (۱۳)$$

اگر فرض کنیم $0 < a < rk$، تحت فرض صفر حدود کنترلی بالا و پایین و خط مرکزی به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} \mathrm{UCL} = a \\ \mathrm{CL} = 0 \\ \mathrm{LCL} = -a \end{cases} \qquad (۱۴)$$

توزیع دقیق آماره S^{+}_{RSS} تحت فرض صفر توسط کتی و جُگش بابو [۲] به صورت زیر بیان شده است:

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}^{+}_{\mathrm{RSS}} = x) = \sum_{j_x} \prod_{l=1}^{k} \binom{r}{j_l} [1 - I_{\frac{1}{2}}(l, k-l+1)]^{j_l} [I_{\frac{1}{2}}(l, k-l+1)]^{(r-j_l)} \qquad (۱۵)$$

که در آن

$$J_x = \left\{ (j_1, j_2, .., j_k) : \sum_{l=1}^{k} j_l = x;\ x = 0,1,2, \dots ; 0 \le j_l \le r \right\} \qquad (۱۶)$$

با استفاده از توزیع دقیق، احتمال ارتکاب خطای نوع اول به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\text{وقتی فرایند تحت کنترل است} \mid \text{خارج شدن نقطه‌ای از حدود کنترلی}) \\ &= P(S^{+}_{RSS} > \tfrac{rk+\mathrm{ucl}}{2} \text{ یا } S^{+}_{RSS} < \tfrac{rk+lcl}{2}) \\ &= P\left(S^{+}_{RSS} > \frac{rk+\mathrm{ucl}}{2}\right) + P\left(S^{+}_{RSS} < \frac{rk+lcl}{2}\right) \\ &= 1 - \sum_{x=0}^{\frac{rk+a}{2}} \sum_{j_x} \prod_{l=1}^{k} \binom{r}{j_l} [1 - I_{\frac{1}{2}}(l, k-l+1)]^{j_l} [I_{\frac{1}{2}}(l, k-l+1)]^{(r-j_l)} \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

احتمال خطای نوع دوم برای i- امین علت اسنادپذیر برابر است با:

$$\begin{aligned} \beta_i &= P(\text{وقتی فرایند خارج از کنترل است} \mid \text{رسم نقاط داخل حدود کنترلی}) \\ &= P(\tfrac{rk+lcl}{2} < S^{+}_{RSS} < \tfrac{rk+\mathrm{ucl}}{2} \mid \mathrm{p_i} > \tfrac{1}{2}) \\ &= 1 - \sum_{x=0}^{\frac{rk+ucl}{2}} \sum_{j_x} \prod_{l=1}^{k} \binom{r}{j_l} [1 - I_{\mathrm{p_i}}(l, k-l+1)]^{j_l} [I_{\mathrm{p_i}}(l, k-l+1)]^{(r-j_l)} \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

۴- طراحی اقتصادی واقع‌بینانه نمودار کنترلی علامت تحت طرح RSS

هدف نهایی کنترل کیفیت، کاهش هزینه‌ها و بهبود فرایند تولید است. تمرکز تنها بر معیارهای آماری ممکن است نمودار کنترلی غیر بهینه از نظر اقتصادی ایجاد کند. در طراحی اقتصادی نمودارهای کنترلی، با در نظر گرفتن یک مدل هزینه، هدف پیدا کردن پارامترهای تنظیمی فرایند (h،L،n) با توجه به کمینه شدن $\mathrm{E}(A)$ در چرخه کیفیت است. از این‌رو، طراحی اقتصادی نمودار کنترلی علامت تحت طرح RSS با در نظر گرفتن چندین علت اِسنادپذیر مستقل، ارائه می‌شود. مدل هزینه در این طراحی، بر اساس مدل واقع‌بینانه شجاعی و همکاران [۹] بنا شده و پیش فرض‌ها، مطابق با پذیره‌های ارائه‌شده توسط ایشان، به شرح زیر است:

۱- مشخصه‌های کیفیت فرایند از توزیع دقیق علامت تبعیت می‌کنند. تحت فرض $\mathrm{H}_0 : \mathrm{p} = \frac{1}{2}$، فرایند تحت کنترل است. با وقوع علت اِسنادپذیر i -ام، $\mathrm{p_i} > \frac{1}{2}$ تغییر می یابد که نشان‌دهنده‌ی خروج فرایند از کنترل است.

۲- مطالعه در فاز دوم انجام شده و پارامترها معلوم فرض می‌شوند.

۳- فرض می‌شود که رتبه‌بندی مشخصه‌ی کیفیت در طرح RSS، بی نقص است.

۴- زمان وقوع علت اِسنادپذیر i-ام ($\mathrm{T_i}$) از توزیع وایبول پیروی می‌کند. این بدان معناست که $\mathrm{T} = \min(\mathrm{T_1}, \mathrm{T_2}, \dots, \mathrm{T_m})$ نیز توزیع وایبول با پارامتر شکل (ν) و پارامتر مقیاس (λ) دارد و به صورت $\mathrm{T} \sim We(\nu, \lambda)$ نمایش داده می‌شود. تابع چگالی، تابع توزیع، تابع بقا، تابع خطر و امید ریاضی T به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f(t) = \lambda \nu t^{\nu-1} e^{-\lambda t^{\nu}} \quad \lambda > 0, \nu \ge 1 \quad t \ge 0 \qquad (۱۹)$$

$$\mathrm{F}(t; \nu, \lambda) = 1 - e^{-\lambda t^{\nu}} \qquad (۲۰)$$

$$S(t; \nu, \lambda) = e^{-\lambda t^{\nu}} \qquad (۲۱)$$

$$\mathrm{h}_{\nu,\lambda}(t) = \left(\frac{\lambda \nu t^{\nu-1} e^{-\lambda t^{\nu}}}{e^{-\lambda t^{\nu}}} \right) \qquad (۲۲)$$

$$\mathrm{E}(T) = \lambda \left[\Gamma\left(\frac{1}{\nu} + 1 \right) \right] \qquad (۲۳)$$

که در آن $\Gamma(0)$ تابع گاما و $\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$ است.

۵- زمان وقوع علت‌های اِسنادپذیر به‌صورت مستقل از یکدیگر فرض می‌شود. در این شرایط، $\mathrm{T_i}$ به عنوان زمان وقوع i-امین علت اِسنادپذیر معرفی می‌شود که می‌تواند از هر توزیع پیوسته‌ای با دامنه زمان متناهی پیروی کند. در این حالت، زمانی‌که اولین علت اِسنادپذیر رخ دهد، مشخصه کیفیت $\mathrm{T} = \min(\mathrm{T_1}, \mathrm{T_2}, \dots, \mathrm{T_m})$ تعریف می‌شود. در صورتی‌که ۷ علت اِسنادپذیر به طور مستقل رخ دهند، احتمال وقوع تعریف زیر را خواهد داشت:

$$\mathrm{P}(\min(\mathrm{T_1}, \mathrm{T_2}, \dots, \mathrm{T_7}) > t)$$

$$= P(T_1 > t, \dots, T_7 > t)$$
$$= \prod_{i=1}^{7} P(T_i > t)$$
$$= \prod_{i=1}^{7} \int_t^{+\infty} f(x)dx$$
$$= \prod_{i=1}^{7} \bar{F}_T(t)$$
$$= \prod_{i=1}^{7} e^{-\lambda_i t^{\nu}}$$
$$= e^{-\sum_{i=1}^{7} \lambda_i t^{\nu}}$$
$$= e^{-\lambda t^{\nu}} \qquad (۲۴)$$

بنابر این، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\min(T_i)_{1\le i\le 7} \sim We(\nu, \lambda) \qquad (۲۵)$$

که در آن $\bar{F}_{T_i}(t)$ نشان‌دهنده تابع بقای زمان وقوع i-امین علت اِسنادپذیر و $\lambda = \sum_{i=1}^{7} \lambda_i$ است.

۶- در مدل شجاعی و همکاران [۹] و [۱۰] ، نمونه‌ای تصادفی به اندازه $n = rk$ در زمان‌های مشخص (ω_j) از فرایند تولید برداشته می‌شود که ω_j برابر است با

$$\omega_j = \sum_{l=1}^{j} h_l \qquad (۲۶)$$

که در آن فاصله‌ی نمونه‌گیری h_l، l-امین فاصله نمونه‌گیری است. h_l به گونه‌ای تعیین می‌شود که احتمال خارج شدن فرایند از وضعیت تحت کنترل زمانی‌که ابتدای فاصله تحت کنترل بوده، برای تمام فواصل نمونه‌گیری مقدار ثابتی باشد. h_l برابر است با

$$h_l = h_1 \left[l^{\frac{1}{\nu}} - (l-1)^{\frac{1}{\nu}} \right] \qquad (۲۷)$$

۷- فرایند در زمان جستجو و تعمیر علت اِسنادپذیر متوقف می‌شود.

۸- مدت زمان صرف شده برای جمع‌آوری و تفسیر نمونه‌ها قابل اغماض است.

۹- فرایند خود اصلاح نیست. به عبارت دیگر، وقتی فرایند از حالت کنترل خارج می‌شود، فقط با دخالت عامل انسانی امکان بازگشت به حالت تحت کنترل وجود دارد.

۱۰- فرایند از حالت تحت کنترل شروع به کار می‌کند.

۱۱- پس از وقوع یک علت اِسنادپذیر تا صدور هشدار درست، هیچ علت اِسنادپذیر دیگری رخ ندهد.

۱۲- بند ۱۱ یک پیشامد است و بنا بر این شجاعی و همکاران [۹] فرض می‌کنند که باید احتمال وقوع آن محاسبه شود. این پیشامد با نماد I_i نشان داده می‌شود. آن‌ها این پذیره را در محاسبه متوسط زمان مورد انتظار یک چرخه $(E(T))$ در حضور m علت اِسنادپذیر به این صورت تحلیل کردند:

اگر متغیر تصادفی گسسته I نشان‌دهنده تعداد علت‌های اِسنادپذیر رخداده قبل از صدور هشدار صحیح باشد، آن‌گاه پیشامد I معادل وقوع تنها یک علت اِسنادپذیر و عدم وقوع $m-1$ علت اِسنادپذیر دیگر تا زمان صدور هشدار صحیح است. اگر I_i پیشامد وقوع i-امین علت اِسنادپذیر و عدم وقوع سایر علت‌های اِسنادپذیر تا صدور هشدار صحیح باشد، آنگاه شجاعی و همکاران [۹] احتمال وقوع این پیشامد را به صورت زیر استنباط کردند:

$$P(I) = \sum_{i=1}^{m} P(I_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{(1-\beta_i)(1-e^{-\lambda_i h_1^{\nu}})e^{-\lambda_{-i} h_1^{\nu}}}{(1-e^{-\lambda h_1^{\nu}})(1-\beta_i e^{-\lambda_{-i} h_1^{\nu}})} \qquad (۲۸)$$

به طوری‌که در آن $\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$ و $\lambda_{-i} = \lambda - \lambda_i$ هستند. احتمال پیشامد I_i و در نتیجه پیشامد I تابعی از پارامترهای $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \nu)$ است که β_i ها نیز تابعی از n و L هستند که $n = rk$ است.

۴-۱- بناسازی مدل هزینه

رویکرد نوین شجاعی و همکاران [۱۰] به منظور کمینه شدن متوسط هزینه‌ی تولید در واحد زمان، $E(A)$ ، تأثیرقابل توجهی بر ساختار مدل هزینه داشته است. $E(A)$ برابر است با

$$E(A) = \frac{E(C)}{E(T)} \qquad (۲۹)$$

که در آن، $E(C)$ نمایان‌گر متوسط هزینه و $E(T)$ مدت زمان مورد انتظار هر چرخه‌ی کیفیت است. با جای‌گذاری این دو پارامتر در معادله‌ی فوق، $E(A)$ به دست می‌آید. بنا بر این، هدف ما این است که رویکرد شجاعی و همکاران [۱۰] را برای محاسبه‌ی $E(T)$ و $E(C)$ تحت طرح RSS به کار گیریم.

۴-۱-۱ محاسبه‌ی $E(T)$

شجاعی و همکاران [۱۰] را با رویکرد زیر $E(T)$ را فرموله کردند: مدت زمان هر چرخه‌ی کیفیت برابر مجموع مدت زمان تحت کنترل و مدت زمان خارج از کنترل بودن فرایند است. چنان‌چه

متغیرهای تصادفی X_1 تا X_4 به‌ترتیب نشان‌دهنده مدت زمان تحت کنترل بودن فرایند (با احتساب مدت زمان سپری شده برای یافتن هشدار اشتباه)، مدت زمان خارج از کنترل بودن فرایند تا صدور هشدار صحیح، مدت زمان سپری شده پس از هشدار صحیح تا کشف علت اِسنادپذیر و مدت زمان سپری شده برای تعمیر و اصلاح فرایند پس از کشف علت اِسنادپذیر در نظر گرفته شود، آن‌گاه مدت زمان مورد انتظار یک چرخه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E(T)=E(X_1)+E(X_2+X_3+X_4) \qquad (۳۰)$$

در این‌جا $E(T)$ با توجه به تعریف متغیر تصادفی I به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} E(T) &= E(T|I)P(I) + E(T|I^c)P(I^c) \\ &= E(X_1) + E(X_2 + X_3 + X_4|I)P(I) \\ &+ E(X_2 + X_3 + X_4|I^c)P(I^c) \end{aligned} \qquad (۳۱)$$

با توجه به این‌که محاسبه $E(T|I^c)P(I^c)$ پیچیده و غیرممکن است اگر شرایطی ایجاد شود که $E(X_2 + X_3 + X_4|I^c)P(I^c) \approx 0$ باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned} E(T) &= E\left(\sum_{l=1}^{4} X_l\right) \\ &= E(X_1) + E\left(\sum_{l=2}^{4} X_l\,|I\right) \end{aligned} \qquad (۳۲)$$

آن‌ها بر اساس تقریب فوق، به محاسبه متوسط زمان تحت کنترل، متوسط زمان خارج از کنترل تا صدور هشدار درست و متوسط زمان از صدور هشدار درست تا پایان چرخه‌ی کیفیت پرداختند. بنابر این، با فرض این‌که پس از وقوع یک علت اِسنادپذیر تا صدور هشدار صحیح، علت اِسنادپذیر دیگری رخ ندهد، متوسط زمان هر چرخه‌ی کیفیت در حضور علت‌های اِسنادپذیر بیان کردند. در صورتی‌که ۷ علت اِسنادپذیر به طور مستقل رخ دهند، $E(T)$ برابر است با

$$\begin{aligned} &E(T) \\ &= \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\nu}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{\nu}+1\right)\right] + \alpha Z_{\cdot}\left(\frac{e^{-\lambda h_1{}^{\nu}}}{1-e^{-\lambda h_1{}^{\nu}}}\right) + Z_1 \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{7} \omega_k \frac{(1-\beta_i)e^{-\lambda_{-i} k h_1{}^{\nu}}(1-e^{-\lambda_i h_1{}^{\nu}})}{P(I)} \times \left(\frac{e^{-\lambda_i k h_1{}^{\nu}} - \beta_i{}^{k}}{e^{-\lambda_i h_1{}^{\nu}} - \beta_i}\right) \\ &- \frac{1}{P(I)}\left[\sum_{i=1}^{7}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(1-\beta_i)e^{-\lambda_{-i} k h_1{}^{\nu}}}{1-\beta_i e^{-\lambda_{-i} h_1{}^{\nu}}}\right)\right. \\ &\left.\times \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\nu}, \lambda_i \omega_{k-1}{}^{\nu}\right) - \Gamma\left(\frac{\nu+1}{\nu}, \lambda_i \omega_k{}^{\nu}\right)}{\lambda_i{}^{\frac{1}{\nu}}}\right] \\ &+ \sum_{i=1}^{7} Z_{2i}\,\frac{P(I_i)}{P(I)} \end{aligned} \qquad (۳۳)$$

که در آن $\lambda_{-i}=\lambda-\lambda_i$ و $\lambda=\sum_{i=1}^{7}\lambda_i$ هستند.

۴-۱-۲ محاسبه‌ی $E(C)$

متوسط هزینه چرخه‌ی کیفیت از بخش‌های مختلفی تشکیل شده است. این بخش‌ها عبارت‌اند از:

۱. متوسط هزینه‌ی تولید در زمان تحت کنترل،

۲. متوسط هزینه‌ی نمونه‌گیری و بررسی هشدار نادرست،

۳. متوسط هزینه‌ی تولید در حالت خارج از کنترل،

۴. متوسط هزینه‌ی مکان‌یابی، تشخیص و تعمیر علت اِسنادپذیر.

در ادامه، متوسط هزینه‌ی نمونه‌گیری و بررسی هشدار نادرست تحت طرح RSS محاسبه خواهد شد.

۴-۱-۳ متوسط هزینه نمونه‌گیری و بررسی هشدار نادرست

متوسط هزینه بررسی هر اشتباه Y در نظر گرفته شده است. بنا بر این، متوسط تعداد هشدار نادرست در چرخه کیفیت به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\alpha Y\left(\frac{e^{-\lambda h_1{}^{\nu}}}{1-e^{-\lambda h_1{}^{\nu}}}\right) \qquad (۳۴)$$

چنان‌چه N_{TST} برابر با تعداد کل نمونه‌های اخذ شده تا صدور هشدار درست باشد، آن‌گاه متوسط هزینه نمونه‌گیری برابر است با:

$$\begin{aligned} &\text{متوسط هزینه نمونه‌گیری} = (a + bn)\,E(N_{TST}|I) \\ &= (a + bn)\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{P(I_i)}{P(I)}\left(\frac{e^{-\lambda h_1{}^{\nu}}}{1-e^{-\lambda h_1{}^{\nu}}}\right.\right. \\ &\left.\left. + \frac{1}{1-\beta_i e^{-\lambda_{-i} h_1{}^{\nu}}}\right)\right] \end{aligned} \qquad (۳۵)$$

یکی از رده‌های هزینه که می‌تواند بر استفاده بهینه از نمودار کنترلی مؤثر واقع شود، هزینه مربوط به هر مرحله نمونه‌گیری است. در طرح SRS، هزینه‌ی نمونه‌گیری به صورت یک رابطه‌ی خطی بین هزینه‌های ثابت نمونه‌گیری و هزینه‌های متغیر نمونه‌گیری به ازای هر یک واحد نمونه در نظر گرفته شده است. مدل هزینه‌ی نمونه‌گیری در مدل شجاعی و همکاران [۱۰] تحت طرح SRS برابر با $a + bn$ است. در طرح RSS، باید هزینه رتبه‌بندی را علاوه بر هزینه‌های ثابت a و متغیر b در مدل هزینه

نمونه‌گیری در نظر گرفت. دل و کلاتر[۱] [۱۱] اولین‌بار مدل هزینه‌ای برای هزینه نمونه‌گیری تحت طرح RSS پیشنهاد کردند. نهاز و همکاران یک مدل هزینه‌ی جامع‌تر از دل و کلاتر [۱۱] ارائه نمودند. مطابق با مقاله‌ی نهاز و همکاران[۲] [۱۲]، مدل هزینه‌ی نمونه‌گیری تحت طرح RSS با توجه به این‌که k اندازه نمونه در هر چرخه و r تعداد تکرار در نمونه‌گیری است، عبارت است از:

$$C_{RSS} = C_{O(RSS)} + rk[C_q + kC_i + f(k)C_r] \qquad (۳۶)$$

که در آن می‌توان تابع $f(k)$ را به شیوه‌های زیر در نظر گرفت:

$$f(k) = \begin{cases} k-1 \\ k\log(k) \\ \binom{k}{2} \end{cases} \qquad (۳۷)$$

کور و همکاران [۱۳] نمادها هزینه‌ی نمونه‌گیری را تحت طرح RSS با اندازه‌ی نمونه $n = rk$ به صورت زیر معرفی کردند:

k: اندازه‌ی نمونه،

r: تکرار چرخه،

C_{RSS} : هزینه‌ی کل نمونه‌گیری طرح RSS،

$C_{O(RSS)}$: هزینه‌های ثابت برای اجرای طرح RSS،

C_i: هزینه نمونه‌گیری یک واحد،

C_q: هزینه اندازه‌گیری یک واحد،

C_r: هزینه رتبه‌بندی یک واحد نمونه‌گیری،

$f(r)$: این تابع بیان کننده‌ی تعداد مقایسه‌هایی است که برای رتبه‌بندی نمونه‌های گرفته شده باید انجام شود.

در واقع اگر متصدی مربوط به رتبه‌بندی داده‌ها فردی خبره باشد کم‌ترین تعداد مقایسه را خواهد داشت یعنی $(k-1)$ مقایسه برای رتبه‌بندی نمونه‌ها نیاز دارد. ولی در صورتی که مهارت کافی برای انجام این کار نداشته باشد در بیشترین حالت نیاز به $\binom{k}{2}$ بررسی برای رتبه‌بندی کامل نمونه‌ها دارد. هر اندازه که نمونه گرفته شده در هر چرخه بزرگ‌تر باشد تعداد حالت‌های بررسی برای رتبه‌بندی نمونه‌ها بیش‌تر شده و هزینه نمونه‌گیری نیز بیش‌تر خواهد بود در ادامه برای انجام طراحی اقتصادی از این مدل هزینه که در آن تابع $f(k)$ برابر با $(k-1)$ استفاده خواهیم کرد.

متوسط هزینه کل نمونه گیری مدل شجاعی و همکاران [۱۰] تحت طرح RSS برابر است با:

متوسط هزینه نمونه‌گیری =

$$(C_{O(RSS)} + rk[kC_i + f(k)C_r + C_q])E(N_{TST}|I)$$

$$= C_{O(RSS)} + rk[kC_i + f(k)C_r + C_q]\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{P(I_i)}{P(I)}\left(\frac{e^{-\lambda h_1{}^{\nu}}}{1-e^{-\lambda h_1{}^{\nu}}} + \frac{1}{1-\beta_i e^{-\lambda_{-i} h_1{}^{\nu}}}\right)\right] \qquad (۳۸)$$

اگر C متوسط هزینه هر چرخه‌ی کیفیت در حضور علت‌های اِسنادپذیر باشد، آنگاه با این فرض که پس از وقوع یک علت اِسنادپذیر تا صدور هشدار درست، علت اِسنادپذیر دیگری رخ ندهد، متوسط هزینه مورد انتظار هر چرخه کیفیت برای رخداد مستقل ۷ علت اِسنادپذیر به‌صورت زیر فرموله می‌شود:

$$E(C) = D_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\nu}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{\nu}+1\right)\right] + \alpha Y\left(\frac{e^{-\lambda h_1{}^{\nu}}}{1-e^{-\lambda h_1{}^{\nu}}}\right) + \sum_{i=1}^{2}\frac{D_{1i}}{P(I)}\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k\,(1-\beta_i)e^{-\lambda_{-i}kh_1{}^{\nu}}\left(1-e^{-\lambda_i h_1{}^{\nu}}\right) \times \left(\frac{e^{-\lambda_i kh_1{}^{\nu}} - \beta_i{}^{k}}{e^{-\lambda_i h_1{}^{\nu}} - \beta_i}\right) - \sum_{i=1}^{2}\frac{D_{1i}}{P(I)}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-\beta_i)e^{-\lambda_{-i}kh_1{}^{\nu}}}{1-\beta_i e^{-\lambda_{-i}h_1{}^{\nu}}} \times \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\nu}, \lambda_i\omega_{k-1}{}^{\nu}\right) - \Gamma\left(\frac{\nu+1}{\nu}, \lambda_i\omega_k{}^{\nu}\right)}{\lambda_i{}^{\frac{1}{\nu}}}\right]$$
$$+(C_{O(RSS)} + rk[kC_i + f(k)C_r + C_q]) \times \sum_{i=1}^{2}\left[\frac{P(I_i)}{P(I)}\left(\frac{e^{-\lambda h_1{}^{\nu}}}{1-e^{-\lambda h_1{}^{\nu}}} + \frac{1}{1-\beta_i e^{-\lambda_{-i}h_1{}^{\nu}}}\right)\right] + \sum_{i}^{2}\frac{P(I_i)}{P(I)}D_{2i} \qquad (۳۹)$$

با توجه به این که هدف ما یافتن مقادیر بهینه پارامترهای طراحی نمودار کنترلی علامت تحت طرح RSS برای کمینه شدن $E(A) = \frac{E(C)}{E(T)}$ در شرایطی است که پیشامد I با احتمال نزدیک به یک رخ دهد طراحی اقتصادی واقع‌بینانه (RED) را می‌توان به صورت زیر فرمول‌بندی کرد:

$$RED\ Model: \begin{cases} minimize\ E(A) \\ subject\ to\ P(I) \geq p_0 \end{cases} \qquad (۴۰)$$

که در آن p_0، کران پایین مورد قبول برای $P(I)$ در انتخاب پارامترهای طراحی است.

[۱] Dell and Clutter

[۲] Nahhas et al.

۵- نتایج تحلیل عددی

پارامترهای ورودی مدل بر اساس مقدارهای تعیین‌شده توسط شجاعی و همکاران [۱۰] و نیز نهاز و همکاران [۱۲] در نظر گرفته شده‌اند. در این بخش، ابتدا رابطه‌ی عددی میان فرض عدم وقوع سایر علت‌های اِسنادپذیر پس از وقوع یک علت اِسنادپذیر (پیشامد I) در چرخه کیفیت و پارامترهای n, h_1, L بررسی می‌شود. سپس با استفاده از نرم‌افزار جولیا و پکیج‌های بهینه‌سازی مقادیر بهینه پارامترهای طراحی در مدل RED محاسبه خواهد شد.

پارامترهای ورودی مدل به دسته‌های زیر تقسیم می‌شوند:

۱.پارامترهای هزینه: $Y, D., D_{1i}, D_{2i}$،

۲. پارامترهای زمان: $Z., Z_1, Z_{2i}$،

۳. پارامترهای انتقال: $\mathrm{p_i}$،

۴. پارامترهای توزیع وایبول: λ_i, υ،

۵.پارامترهای هزینه طرح RSS: $\mathrm{C_{O(RSS)}, C_i, C_r, C_q}$.

برای ۷ علت اِسنادپذیر، مقادیر پارامترهای $Z., Z_1, C_i, C_{O(RSS)}, C_q, C_r, Y, D.$ ثابت فرض می‌شوند. مقادیر این پارامترها در جدول ۱ ارائه شده است. سایر پارامترهای ورودی برای هر علت اِسنادپذیر به صورت جداگانه تعیین می‌شوند. در این‌جا فرض شده است که λ_i ها توابعی غیر صعودی از $\mathrm{PD_i}$ها هستند. سه مجموعه توزیع برای این منظور استفاده شده است:

۱.مجموعه اول:

$\mathrm{PD_i}$ها متناسب با $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_i^2}{2}}$ در نظر گرفته شده که در آن $z_i = \frac{p_i^2}{2}$ است و با نماد HN_i نشان داده می‌شود. این مجموعه به عنوان توزیع نیم نرمال برای تولید $\mathrm{p_i}$ در نظر گرفته شده است.

۲. مجموعه دوم:

$\mathrm{PD_i}$ها را متناسب با $\frac{1}{2} e^{-\frac{p_i}{2}}$ در نظر گرفته شده که با نماد NE_i نشان داده می‌شود. این مجموعه به عنوان توزیع نمایی منفی برای تولید $\mathrm{p_i}$ در نظر گرفته شده است.

۳. مجموعه سوم:

$\mathrm{PD_i}$ها برابر هستند. این مجموعه به عنوان توزیع یکنواخت برای تولید $\mathrm{p_i}$ در نظر گرفته شده که با نماد UN_i نشان داده می‌شود. بنابر این، $\mathrm{PD_i}$ به صورت سه تابع تعریف شده (HN_i, UN_i, NE_i) تعریف می‌شوند. همچنین فرض شده است که فرایند مورد بررسی متأثر از ۷ علت اِسنادپذیر با اندازه انتقال‌های متفاوت قرار دارد. مقادیر این اندازه انتقال‌ها در جدول ۲ ارائه شده است.

جدول۲ مقادیر اندازه انتقال

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7
۰.۷	۰.۷۵	۰.۸	۰.۸۵	۰.۹	۰.۹۵	۰.۹۹

پارامترهای D_{1i}، D_{2i} و Z_{2i} به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

۱. مقدارهای D_{1i} بر اساس درصد اقلام معیوب خارج از حدود مشخصه‌ی فنی تولید، تعیین می‌شوند. اگر حدود مشخصه‌ی فنی برای ۳ انحراف معیار تعریف شود، نسبت اقلام معیوب (γ_i) به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\gamma_i = 1 - \varphi(3 - p_i) + \varphi(-3 - p_i) \qquad (41)$$

در نتیجه :

$$D_{1i} = c\gamma_i \qquad (42)$$

که در آن c مقداری ثابت است. برای تعیین D_{1i}، با فرض $p_4 = 0.85$، متوسط هزینه تولید در هر ساعت یعنی D_{14} برابر با ۴۰۰۰ دلار است. بنا بر این، برای سایر D_{1i} ها داریم:

$$D_{1i} = 4000\frac{\gamma_i}{\gamma_4} \qquad (43)$$

۲. فرض شده است که D_{2i} و Z_{2i} متناسب با PD_i هستند. در این حالت، با فرض $p_4 = 0.85$، مقدار $D_{24} = 1000$ دلار و مقدار $Z_{24} = 2$ ساعت است. بنابر این،

$$D_{2i} = 1000\frac{PD_i}{PD_4} \qquad (44)$$

$$Z_{2i} = 2\frac{PD_i}{PD_4} \qquad (45)$$

۳. در جهت تعیین λ_iها، فرض می‌شود:

$$\lambda_i \propto PD_i \qquad (i = 1,2,\ldots,7) \qquad (46)$$

همچنین فرض شده است:

$$\sum_{i=1}^{7} \lambda_i D_{1i} = 80 \qquad (47)$$

از روابط (۴۳) و (۴۷) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_4} = \frac{PD_i}{PD_4} \qquad (48)$$

که در آن

$$\lambda_4 = \frac{80}{\sum_{i=1}^{7} \lambda_i D_{1i}} \qquad (49)$$

است. همچنین فرض می‌شود در طراحی اقتصادی واقع‌بینانه، $p.$ برابر است با مقادیر ۰.۸۵،۰.۹، ۰.۹۵.

جدول۳- مقدار پارامترهای هزینه، زمان و هزینه تحت طرح RSS برای ۷ علت اِسنادپذیر.

$Z_.$	Z_1	C_i	$C_{O(RSS)}$	C_q	C_r	$D.$	Y
۰/۲۵	۰/۲۵ ساعت	۰/۵	۲۰	۴/۲۲	۲/۱۱	۲۱۰	۲۰۰۰
ساعت		دلار	دلار	دلار	دلار	دلار	دلار

جدول ۴- مجموعه مقادیر پارامترهای $\boldsymbol{D_{1i}, D_{2i}, Z_{2i}, \lambda_i}$ برای ۷ علت اِسنادپذیر.

i	p_i	D_{1i}	D_{2i}			Z_{2i}			λ_i		
			NE_i	Un_i	HN_i	NE_i	Un_i	HN_i	NE_i	Un_i	HN_i
۱	۰.۷	۸۱۴.۸۲۷	۱۰۷۷.۷	۱۰۰۰	۱۰۳۵.۸۵۸	۲.۱۵۵	۲	۲.۰۷۲	۰.۰۰۹۳	۰.۰۰۰۸	۰.۰۰۷۸
۲	۰.۷۵	۳۱۱۳.۹۲۴	۱۰۵۱.۰۸۶	۱۰۰۰	۱۰۲۶.۲۲۴	۲.۱۰۲	۲	۲.۰۵۲	۰.۰۰۹	۰.۰۰۰۸	۰.۰۰۷۷
۳	۰.۸	۳۵۴۴.۳۰۴	۱۰۲۵.۳۹	۱۰۰۰	۱۰۱۴.۱۸۲	۲.۰۵۱	۲	۲.۰۲۸	۰.۰۰۸۸	۰.۰۰۰۸	۰.۰۰۷۶
۴	۰.۸۵	۴۰۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰	۲	۲	۲	۰.۰۰۸۶	۰.۰۰۰۸	۰.۰۰۷۵
۵	۰.۹	۴۵۳۱.۶۴۶	۹۷۵.۲۲۲	۱۰۰۰	۹۸۳.۴۰۹	۱.۹۵	۲	۱.۹۶۷	۰.۰۰۸۴	۰.۰۰۰۸	۰.۰۰۷۴
۶	۰.۹۵	۵۱۱۳.۹۲۴	۹۵۱.۰۵۵	۱۰۰۰	۹۶۴.۱۴۲	۱.۹۰۲	۲	۱.۹۲۸	۰.۰۰۸۲	۰.۰۰۰۸	۰.۰۰۷۲
۷	۰.۹۹	۵۶۲۰.۲۵۳	۹۳۲.۳۹۵	۱۰۰۰	۹۴۶.۷۴۹	۱.۸۶۵	۲	۱.۸۹۳	۰.۰۰۸	۰.۰۰۰۸	۰.۰۰۷۱

❋ NE; Negative-exponential; Un; Uniform, HN; Half-normal.

جدول ۵- مقادیر پارامترهای طراحی و هزینه مورد انتظار فرایند در طراحی اقتصادی برای $p_0 = ۰.۸۵$

ν	PD	$P(I)$	h_1	L	$n = rk$	α	β	$E(A) = \frac{E(C)}{E(T)}$
۱	HN	۰.۹۹۴۹۲	۰.۲۱۱۶۴	۱.۰۷۲۷	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۴۲۶	۸۳.۵۸۲۴
	NE	۰.۹۹۴۴۰۳	۰.۲۰۲۵	۱.۰۵۸۴۰	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۹۹	۹۰.۹۱۳۱۲
	UN	۰.۹۹۷۴۳۹	۰.۹۹۸۵۴	۱.۳۲۷۱۷	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۲۵۰۹	۱۹.۶۷۵۴
۱.۵	HN	۰.۹۹۵۵۳	۰.۳۲۶۱۱	۱.۲۸۹۲	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۴۲۷	۱۴۵.۱۴۴۷
	NE	۰.۹۹۰۴۱	۰.۴۹۴۲۴	۱.۰۴۷۳۵	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۹۸۴	۱۵۸.۴۴۶۴
	UN	۲۰.۹۹۵۳	۱.۴۹۳۹	۱.۰۵۵۷۶	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۲۵۰	۶۷.۹۰۷۸
۱.۸	HN	۰.۹۹۵۸	۰.۳۸۰۰۰۶	۱.۰۸۵۲۹	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۴۲۸	۱۶۳.۵۱۹۹
	NE	۰.۹۹۸۲۶۴	۰.۲۱۴۶۷	۱.۲۵۰۹۴	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۹۹۸	۱۶۵.۶۵۶۴
	UN	۰.۹۹۴۷۱۶	۱.۴۹۵۱۰	۱.۱۲۷۲۰	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۲۵۰	۹۵.۲۸۲۸۴
۲	HN	۰.۹۹۹۹	۰.۰۱۵۵	۱.۰۳۶۳	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۴۳۶۱	۱۶۷.۰۴۱۱۱
	NE	۴۸۰.۹۹۹۹	۰.۰۴۲۹۷	۱.۰۰۵۵	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۴۰۰۱	۱۶۷.۱۳۷۰
	UN	۰.۹۹۴۰۶	۱.۵۲۱۷۱	۱.۳۴۲۷۹	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۲۵۰۲	۱۱۰.۹۷۵۶۶۷
۲.۵	HN	۰.۹۹۹۹	۰.۰۱۸۱۹۴	۱.۱۳۸۵۷	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۴۳۶	۱۶۷.۰۴۶۳۶
	NE	۰.۹۹۹۹	۰.۰۵۹۹۰۹	۱.۲۵۸۱	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۴۰۰۱۶	۱۶۷.۲۱۰۵۳۳
	UN	۰.۹۹۶۱۲۹	۱.۱۷۹۲۳	۱.۲۸۵۶	۲	۰.۲۵	۰۶۰.۰۳۲۵	۱۴۱.۱۳۷۸۸
۳	HN	۰.۹۹۵۷	۰.۵۶۱۴	۱.۱۷۲۰۵۹	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۴۲۸۲	۱۹۲.۳۳۸۹
	NE	۰.۹۷۶۰۰۹	۰.۹۵۶۱۴۹	۱.۲۷۳۸۱۲	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۹۵۹	۲۴۸.۱۳۸۵۴۴
	UN	۰.۹۹۶۶۴۶	۱.۰۹۳۶۷	۱.۰۴۴۰۵	۲	۰.۲۵	۸۰.۰۳۳۹۵۹	۱۵۸.۷۴۷۶۸
۴	HN	۰.۹۹۲۹۰۸	۰.۷۳۷۷۴۳	۱.۳۸۹۸۷	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۴۲۳	۲۱۳.۴۷۲۰۲۰۹
	NE	۰.۹۹۹۹۹	۰.۰۹۷۲۷	۱.۲۳۸۰۴	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۴۰۰۱	۱۶۷.۰۷۰۴۱
	UN	۰.۹۹۸۶۲۶	۰.۸۵۵۳۳	۱.۰۹۲۳	۲	۰.۲۵	۱۰.۰۳۲۵۱	۱۷۱.۳۳۰۰۱۷

* NE; Negative-exponential; Un; Uniform, HN; Half-normal.

جدول ۶- مقادیر پارامترهای طراحی و هزینه مورد انتظار فرایند در طراحی اقتصادی برای $p_. = ۰.۹$.

ν	PD	$P(I)$	h_1	L	$n=rk$	α	β	$E(A)=\frac{E(C)}{E(T)}$
۱	HN	۰.۹۹۴۲۲	۰.۲۴۱۲۵۹	۱.۰۱۴۸۶۳۴	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۴۲۵	۸۳.۸۴۶۸۸۳
	NE	۰.۹۹۴۶۹۷	۰.۱۹۱۸۳۳	۱.۱۱۰۶۷۴	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۹۹۲	۹۰.۸۴۷۳۳۸۷
	UN	۰.۹۹۷۳۵	۱.۰۳۱۷۷۷	۱.۰۲۱۳۱۹	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۲۵۰۹	۱۹.۶۷۱۶۲
۱.۵	HN	۰.۹۹۲۵۲	۰.۴۶۰۱۴۶	۱.۲۸۳۱۱۹	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۴۲	۱۴۷.۹۲۷۴۲۸
	NE	۰.۹۹۵۷۸۸	۰.۲۸۵۲۰	۱.۱۵۱۱۱۳	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۹۹۴	۱۵۰.۷۰۴۹۱۲
	UN	۰.۹۹۵۰۵	۱.۵۴۹۴۲۹	۱.۳۹۷۷۴۷	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۲۵۰۴	۶۷.۹۹۷۵۲۲۰
۱.۸	HN	۰.۹۹۷۵۳۱	۰.۲۸۲۷۳۹	۱.۰۰۹۷۴	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۴۳۱	۱۶۲.۶۳۵۷۱
	NE	۰.۹۹۷۷۶۶	۰.۲۴۶۹۹	۱.۰۹۸۴۴۶	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۹۹۷	۱۶۵.۷۸۴۳۵
	UN	۰.۹۹۴۹۹۰۶	۱.۴۵۱۴۳۱	۱.۰۷۸۵۹	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۲۵۰۴	۹۵.۳۳۳۲۵۸
۲	HN	۰.۹۹۵۴۷۰	۰.۴۳۴۷۶	۱.۰۷۵۶۲	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۴۲۷	۱۷۲.۳۷۲۳۹۳
	NE	۰.۹۹۹۹۱۴	۰.۰۵۵۵	۱.۲۵۰۸۷۰	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۴۰۰۱	۱۶۷.۲۰۱۰۷
	UN	۰.۹۹۴۷۳۲	۱.۴۳۳۹	۱.۰۹۹۰۲۳	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۲۵۰۳	۱۱۰.۹۰۳۶۲
۲.۵	HN	۰.۹۹۹۴۴۰۷	۰.۲۲۲۳۰۹	۱.۳۷۰۳۲۵	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۴۳۵	۱۷۰.۱۱۳۱۵۴
	NE	۰.۹۹۸۳۵۷۰	۰.۳۲۳۱۳۹	۱.۳۰۳۰۳۶	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۹۹۸۷	۱۷۶.۵۷۶۹۲
	UN	۰.۹۹۴۱۶۱۷	۱.۳۹۰۴۲۹	۱.۳۵۶۰۸۹	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۲۵۰۲	۱۴۰.۶۶۱۹۷۱
۳	HN	۰.۹۹۹۴۷۷۱۸	۰.۲۷۹۲۸	۱.۱۰۸۷۵۵	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۴۳۵	۱۷۱.۳۵۲۰۱
	NE	۰.۹۹۹۹۰۶۹	۰.۱۴۹۷۶۴	۱.۱۹۳۹۶۴	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۴۰۰۱	۱۶۷.۹۲۶۸۲
	UN	۰.۹۹۶۵۲۲	۱.۱۰۶۹۸۸	۷۵۱.۰۷۹۲	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۲۵۰۷	۱۵۸.۷۳۸۳۳۸۸
۴	HN	۹۸۰.۹۹۸۲۸	۰.۵۱۶۷۲۴	۱.۳۰۱۳۳۵	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۴۳۲	۱۸۳.۵۶۱۱۳۹۲
	NE	۰.۹۹۹۵۱۰۴	۰.۳۶۴۶۴۱۷۲	۱.۰۰۲۰۳	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۴۰۰۰۷	۱۷۲.۶۸۸۵۱۰۷
	UN	۰.۹۹۹۶۹۹	۰.۵۸۴۹۶	۱.۲۹۲۰۴	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۲۵۱	۱۶۸.۰۶۴۲۳۹

* NE; Negative-exponential; Un; Uniform, HN; Half-normal.

جدول ۷- مقادیر پارامترهای طراحی و هزینه مورد انتظار فرایند در طراحی اقتصادی برای $p_0 = 0.95$.

ν	PD	$P(I)$	h_1	L	$n=rk$	α	β	$E(A)=\frac{E(C)}{E(T)}$
۱	HN	۰.۹۹۳۷۳۱	۰.۲۶۱۷۶۵	۱.۳۸۰۸۶	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۴۲۴	۸۴.۳۸۳۵۸۶
	NE	۰.۹۹۳۸۴۲۶	۰.۲۲۲۸۴	۱.۰۲۰۹	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۹۹	۹۱.۳۲۷۴۳
	UN	۰.۹۹۷۴۳	۱.۰۰۱۵	۱.۳۲۵۱	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۲۵۰۹	۱۹.۶۷۴۱۷۳۹
۱.۵	HN	۰.۹۸۷۸۲	۰.۶۳۷۸۱۳۱	۱.۲۲۶۷۱	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۴۱	۱۵۸.۳۶۱۱۷۰۷
	NE	۰.۹۹۴۸۲۸	۰.۳۲۷۱۳	۱.۲۳۸۱۶	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۹۹۲	۳۶۱۵۱.۰۶۹۰۴
	UN	۰.۹۹۵۳۹۱	۱.۴۷۹۰۲۳	۱.۰۳۹۵۶	۲	۰.۲۵	۰۵۰.۰۳۲۵	۶۷.۹۰۲۴۸
۱.۸	HN	۰.۹۹۶۵۰۶	۰.۳۴۳۰۱	۱.۱۲۸۹۵	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۴۲	۱۶۲.۹۱۲۰۱۶
	NE	۰.۹۹۹۵۹۰۷	۰.۰۹۶۱۸	۱.۰۹۷۰۱۴	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۴۰۰۰۹	۱۶۶.۴۲۲۸۷
	UN	۰.۹۹۵۴۰۴	۱.۳۸۳۴۹	۱.۲۱۶۸۶	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۲۵۰۵	۹۵.۶۱۳۰۵۶۸
۲	HN	۰.۹۹۹۹۳۸۸	۰.۰۵۰۴۸	۱.۰۴۶۰۲	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۴۳	۱۶۷.۰۵۱۸۲
	NE	۰.۹۹۲۹۸۱	۰.۵۰۴۰۸۶	۱.۰۴۶۸۶	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۹۸۹	۱۸۲.۲۰۸۳۰۷
	UN	۰.۹۹۳۵۲۵	۱.۵۹۰۲۳۹	۱.۳۲۰۹۲	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۲۵۰۱	۱۱۱.۳۲۴۷۲۳۲
۲.۵	HN	۰.۹۹۹۷۳۷	۰.۱۶۴۲۳۲	۱.۱۵۰۱۶	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۴۳۵	۱۶۸.۵۳۷۶۱۸۲
	NE	۰.۹۹۹۹۹۰۷	۰.۰۴۰۶۳	۱.۲۵۸۷۵	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۴۰۰۱	۱۶۷.۱۰۴۷۷۹
	UN	۰.۹۹۴۷۶۷۵	۱.۳۳۰۶۹۵۹	۱.۱۶۲۹۶۳۸	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۲۵۰۳	۱۴۰.۴۶۵۰۰۰۱
۳	HN	۰.۹۸۹۹۳۵	۰.۷۴۹۴۰۲	۱.۱۸۳۹۰	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۴۱۷	۲۱۲.۵۸۴۵۱۰۴
	NE	۰.۹۹۵۵۲۱۹	۰.۵۴۵۰۹	۱.۰۰۵۷۶۴	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۹۹۳۷	۱۹۵.۵۶۲۵۵
	UN	۰.۹۹۶۲۹۲۶	۱.۱۳۰۹۲۹	۱.۳۰۷۱۱۳۰۸	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۲۵۰۶۹	۱۵۸.۷۵۱۰۴۱۲۶
۴	HN	۰.۹۸۸۷۲۹	۰.۸۲۸۶۵۵	۱.۲۱۵۰۱	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۳۴۱۵	۲۲۷.۶۲۶۵۴۲
	NE	۰.۹۹۹۹۹۷	۰.۱۰۱۶۵	۱.۰۳۶۸۹	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۴۰۰۱	۱۶۷.۰۷۶۲۷۹
	UN	۰.۹۹۳۷۹	۱.۲۴۷۷۶۴۹	۱.۳۱۳۴۱	۲	۰.۲۵	۰.۰۳۲۵۰۱	۱۸۳.۴۳۴۸۰۳۲

* NE; Negative-exponential; Un; Uniform, HN; Half-normal.

۶-نتیجه‌گیری

در این پژوهش، بهینه‌یابی طراحی اقتصادی نمودار کنترلی علامت به روش RSS با هدف تعیین مقادیر بهینه پارامترهای طراحی به‌منظور کمینه‌سازی متوسط هزینه کل در واحد زمان $E(A)$ انجام شد. در این مدل، پارامتر طراحی n از دو مولفه اندازه نمونه k و تعداد تکرار r تشکیل شده است. مقدار k در بازه ۲ تا ۶ و مقدار r در بازه ۱ تا ۸ در نظر گرفته شد. همچنین بازه h_1 بین ۰.۰۱ تا ۸ و L بین ۱ تا ۵ تنظیم شد. نتایج ارائه شده در جدول‌های ۴، ۵، ۶ نشان می‌دهند که پارامتر شکل در مدل شوک وایبول تأثیر بسزایی بر مقدار $E(A)$ دارد. هنگامی‌که مقدار پارامتر شکل ۴ باشد، مقدار $E(A)$ برای حالتی‌که PD_i دارای توزیع نمایی منفی است، کمترین مقدار را دارد. در مقابل، برای مقادیر ۱ تا ۳ از پارامتر شکل، $E(A)$ در حالتی‌که PD_i دارای توزیع یکنواخت است، مقدار کمینه را به‌دست می‌آورد. این نتایج نشان می‌دهند که انتخاب توزیع مناسب برای PD_i بسته به مقدار پارامتر شکل، تأثیر بسزایی در کاهش هزینه‌های کل دارد. این یافته‌ها می‌توانند در بهینه‌سازی طراحی اقتصادی نمودارهای کنترلی در صنایع مختلف مورد استفاده قرار گیرند.

۷- مراجع

[1] Amin, R. W., Reynolds Jr, M. R., & Saad, B. (1995). Nonparametric quality control charts based on the sign statistic. Communications in Statistics-Theory and Methods, 24(6), 1597-1623.

[2] Koti, K. M. and Jogesh Babu, G. (1996), "Sign test for ranked-set sampling," *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 25(7), 1617-1630.

[3] Asghari, S., Sadeghpour Gildeh, B., Ahmadi, J., & Mohtashami Borzadaran, G. (2018). Sign control chart based on ranked set sampling. *Quality Technology & Quantitative Management*, *15*(5), 568-588.

[4] Duncan, A. J. (1956). The economic design of X charts used to maintain current control of a process. *Journal of the American statistical association*, *51*(274), 228-242.

[5] Li, C., Mukherjee, A., Su, Q., & Xie, M. (2016). Robust algorithms for economic designing of a nonparametric control chart for abrupt shift in location. *Journal of statistical Computation and Simulation*, *86*(2), 306-323.

[6] Patil, S. H., & Shirke, D. T. (2017). Economic design of variable sampling interval sign control chart. *Journal of Industrial and Production Engineering*, *34*(4), 253-260.

[7] Patil, S. H., & Shirke, D. T. (2017). Economic design of non parametric sign control chart. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, *46*(18), 8987-8998.

[8] Duncan, A. J. (1971). The economic design of-charts when there is a multiplicity of assignable causes. *Journal of the American Statistical Association*, *66*(333), 107-121.

[9] Shojaei, S. R., Moghadam, M. B., and Eskandari, F. (2022), "Fundamental changes in theory of Duncan's model for economic design of control charts in the presence of multiple assignable causes," *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 1-16.

[10] Shojaei, R., & Bameni Moghadam, M. (2023), "An Extension of Yang and Rahim's Model to Determine Design Parameters in Multivariate Control Charts Under Multiple Assignable Causes and Weibull Shock Model," *Stochastics and Quality Control*, (0).

[11] Dell, T. R., & Clutter, J. L. (1972). Ranked set sampling theory with order statistics background. *Biometrics*, 545-555

[12] Nahhas, R. W., Wolfe, D. A., & Chen, H. (2002). Ranked set sampling: cost and optimal set size. *Biometrics*, *58*(4), 964-971.

[13] Kaur, A., Patil, G. P., Shirk, S. J., & Taillie, C. (1996). Environmental sampling with a concomitant variable: a comparison between ranked set sampling and stratified simple random sampling. *Journal of Applied Statistics*, *23*(2-3), 231-256.

A New Realistic Economic Designs of Sign Control Chart for Monitoring of Process Mean under Ranked Set Sampling in the Presence of multiple independent Assignable Causes

Olia Rostami

PhD student, Allameh Tabatabaei University, Department of Statistics, Tehran, Iran. .
olia_rostami@atu.ac.ir

Mohammad Bameni Moghadam[10]

Associate Professor, Allameh Tabatabaei University, Department of Statistics, Tehran, Iran. bamenimoghadam@atu.ac.ir

Farzad Eskandari

Associate Professor, Allameh Tabatabaei University, Department of Statistics, Tehran, Iran.. askandari@atu.ac.ir

ABSTRACT :In many control charts, the assumption of normality is a fundamental premise. However, in real-world applications, this assumption is often violated, leading to reduced efficiency in parametric control charts. When process data follow an unknown or non-normal distribution, parametric methods may yield unreliable results, making nonparametric control charts a more effective alternative. Among these, the sign control chart is a widely used technique for monitoring the location parameter of a process without requiring distributional assumptions.

This study focuses on the economic design of the sign control chart in the presence of multiple independent assignable causes. A modified cost model, adapted from Duncan's economic model, is developed to optimize the chart's parameters. The analysis balances inspection costs and process performance to determine the most cost-effective monitoring strategy. Results indicate that the proposed model significantly enhances economic efficiency and detection performance under non-normal data conditions, making it a valuable tool for practical applications.

1-Introduction

Control charts are essential tools in statistical and economic process monitoring. Traditional control charts rely on parametric assumptions, such as normality, which are often unrealistic in practice. To overcome this, nonparametric control charts, such as the sign control chart, have been introduced. This study aims to develop an economic design for the sign control chart using a realistic cost model, particularly in the presence of multiple independent assignable causes. This paper expands on previous models and presents a refined approach integrating cost and efficiency improvements.

[10] Corresponding author: pourtaheri@atu.ac.ir

2. Ranked Set Sampling (RSS) Scheme

The Ranked Set Sampling (RSS) method enhances sample selection efficiency while reducing measurement costs. The process involves:
1.Drawing a simple random sample of size kk from the population.
2.Ranking the units and selecting the one with a specific rank for measurement.
3.Repeating the process multiple times to obtain a structured sample. This method provides more precise and efficient control compared to Simple Random Sampling (SRS). By integrating RSS, the study enhances detection power and lowers operational costs, making quality monitoring more reliable.

3. Statistical Design of the Sign Control Chart Under RSS

The sign control chart monitors process changes without assuming normality. The hypothesis for process monitoring is:

- $H_0: \theta = \theta_0$ (process in control)
- $H_1: \theta \neq \theta_0$ (process out of control) The test statistic, SI_{RSS}, is computed based on the ranked sample. The Type I error (false alarm rate, α) and Type II error (missed detection rate, β_i) are calculated to set control limits optimally.
- Using the exact distribution, the probability of committing a Type I error is calculated as follows:

$$\alpha = P(A\ point\ falls\ outside\ the\ control\ limits \mid The\ process\ is\ under\ control) = P(S^+_{RSS} > \frac{rk+\mathrm{ucl}}{2}\ \ or\ \ S^+_{RSS} < \frac{rk+lcl}{2}) = P\left(S^+_{RSS} > \frac{rk+\mathrm{ucl}}{2}\right) + P\left(S^+_{RSS} < \frac{rk+lcl}{2}\right) = 1 - \sum_{x=0}^{\frac{rk+a}{2}} \sum_{j_x} \prod_{l=1}^{k} \binom{r}{j_l} [1 - I_{\frac{1}{2}}(l, k-l+1)]^{j_l} [I_{\frac{1}{2}}(l, k-l+1)]^{(r-j_l)} \quad (1)$$

- The probability of a Type II error for the i-th assignable cause is given by:

$$\beta_i = P(Points\ fall\ within\ control\ limits \mid The\ process\ is\ out\ of\ control) = P\left(\frac{rk+lcl}{2} < S^+_{RSS} < \frac{rk+\mathrm{ucl}}{2} \middle| \mathrm{p_i} > \frac{1}{2}\right) = 1 - \sum_{x=0}^{\frac{rk+ucl}{2}} \sum_{j_x} \prod_{l=1}^{k} \binom{r}{j_l} [1 - I_{\mathrm{p_i}}(l, k-l+1)]^{j_l} [I_{\mathrm{p_i}}(l, k-l+1)]^{(r-j_l)} \quad (2)$$

- The statistical efficiency of the sign test improves under RSS compared to SRS. By utilizing RSS-based hypothesis testing, this study ensures

that control charts remain sensitive to small process shifts, leading to improved detection and process stability.

4. Realistic Economic Design of the Sign Control Chart Under RSS

This study integrates a realistic cost model for the economic design of sign control charts. Key considerations include:

- The quality characteristic follows a sign distribution.
- Assignable causes occur randomly, modeled using a Weibull distribution.
- The process follows a structured sampling interval approach.
- Multiple independent assignable causes influence process control.
- Costs include sampling, false alarms, and corrective actions. The economic model aims to minimize the expected total cost per unit time, $E(A) = \frac{E(C)}{E(T)}$,where E(C) is the total cost and E(T) is the expected quality cycle duration. The proposed economic model refines cost allocation and optimizes inspection frequency to balance cost savings and efficiency.

5. Numerical Analysis

The study conducts numerical simulations to evaluate the effect of model parameters on economic efficiency. Different distributions for assignable cause probability are considered: Half-Normal (HN), Negative-Exponential (NE), and Uniform (UN). Results indicate:

- Higher Weibull shape parameter values reduce total costs.
- The selection of the probability distribution of assignable causes significantly impacts cost minimization.
- RSS provides cost-effective monitoring compared to traditional approaches. The analysis further examines variations in sample size, control limits, and inspection intervals to determine optimal parameter values. It also presents comparative case studies demonstrating improvements in cost savings and defect detection.

6. Practical Implications and Applications

This study's findings have significant practical implications across various industries. The refined economic design model can be applied in:

- Manufacturing industries to improve quality control and defect detection.
- Healthcare monitoring systems to ensure patient data integrity and medical device reliability.

- Financial risk management to detect fraudulent activities. By integrating advanced statistical approaches, industries can achieve a balance between cost efficiency and high detection accuracy.

7. Conclusion

The study presents an economic design for the sign control chart under RSS, improving cost efficiency in process monitoring. By incorporating a realistic cost model and multiple assignable causes, the proposed approach provides more reliable and economical process control. These findings have significant applications in industrial quality control. The proposed model offers a systematic approach to optimizing cost-performance trade-offs in statistical process control.

8.References

[1] Duncan, A. J. (1956). The economic design of X charts used to maintain current control of a process. *Journal of the American statistical association*, *51*(274), 228-242.
[2] Shojaei, S. R., Moghadam, M. B., and Eskandari, F. (2022), "Fundamental changes in theory of Duncan's model for economic design of control charts in the presence of multiple assignable causes," *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science,* 1-16.
[3] Shojaei, R., & Bameni Moghadam, M. (2023), "An Extension of Yang and Rahim's Model to Determine Design Parameters in Multivariate Control Charts Under Multiple Assignable Causes and Weibull Shock