




Paper Type: Original Article

## Bayesian Inference of the Parameters under the Generalized Power Lindley Distribution Based on the Hybrid Type-II Censoring Scheme: A Simulation Study and Application

Nassrin Balouch Roodbari<sup>1</sup>, Iman Makhdoom<sup>2,\*</sup> 

<sup>1</sup> Department of Statistics, Ahvaz Branch, Islamic Azad University, Ahvaz, Iran; N\_roodbary@yahoo.com.

<sup>2</sup> Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran, Iran; makhdoom@pnu.ac.ir.

### Citation:

Received: 13 November 2023

Revised: 16 February 2024

Accepted: 02 April 2024

Balouch Roodbari, N., & Makhdoom, I. (2024). Bayesian inference of the parameters under the generalized power Lindley distribution based on the hybrid type-II censoring scheme: A simulation study and application. *Journal of Quality Engineering and Management*, 14(2), 177-198.

### Abstract

**Purpose:** In this paper, we examine the Bayesian inference of the parameters of the generalized power Lindley distribution in the presence of type two hybrid censored data.

**Methodology:** To estimate the maximum likelihood of the parameters, given that the estimates cannot be obtained implicitly and do not have a closed-form solution, we employ the EM algorithm and use the Fisher information matrix to construct asymptotic confidence intervals. Additionally, when estimating the parameters of the generalized power Lindley distribution, which we denote EPL throughout the article, we employ two Lindley approximation methods and Markov chain Monte Carlo under the squared-error loss function. We obtain HPD confidence intervals according to Bayesian estimates. Then we compare two Bayesian methods using simulation studies.

**Findings:** The Monte Carlo method for the three-parameter distribution shows less bias and greater consistency than the Bayesian parameter estimates derived from the Lindley approximation. In high-dimensional distributions, the MCMC method yields more accurate forecasts than the Lindley approximation, and convergence occurs more rapidly. The MSE estimates from the Lindley approximation, as shown in Table 2, are significantly larger than the data dispersion for a similar sample size from the MCMC method, as presented in Table 3. We also provide an example of real data.

**Originality/Value:** Given that no study has been conducted so far on the generalized Lindley power distribution in the presence of censored hybrid type II, the findings of this study can be used for future studies.

**Keywords:** Bayesian estimation, Maximum likelihood estimation, Generalized Lindley power, Monte Carlo Markov chain, EM algorithm.

 Corresponding Author: makhdoom@pnu.ac.ir

 10.48313/jqem.2024.218909



Licensee System Analytics. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



## استنباط بیزی پارامترهای توزیع لیندلی توانی تعمیم‌یافته بر اساس طرح سانسور هیبرید نوع دوم:

### یک مطالعه شبیه‌سازی و کاربردی

نسرین بلوچ رودباری<sup>۱</sup>، ایمان مخدوم<sup>۲\*</sup>  
<sup>۱</sup>گروه آمار، واحد اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی، اهواز، ایران.  
<sup>۲</sup>گروه آمار، دانشگاه پیام‌نور، تهران، ایران.

#### چکیده

هدف: در این پژوهش، استنباط بیزی پارامترهای توزیع لیندلی توانی تعمیم‌یافته در حضور داده‌های سانسور شده هیبرید نوع دوم مورد بررسی قرار می‌گیرد. روش‌شناسی پژوهش: برای برآورد ماکسیمم درستمایی پارامترها، با توجه به اینکه این برآوردها فرم بسته‌ای ندارند و به صورت ضمنی قابل محاسبه نیستند، از الگوریتم *EM* استفاده شده و ماتریس اطلاع فیشر به منظور ساخت فواصل اطمینان مجانبی به کار گرفته می‌شود. در ادامه، برای برآورد پارامترهای توزیع لیندلی توانی تعمیم‌یافته که در این مقاله با نماد *EPL* نمایش داده می‌شود، دو روش بیزی، شامل تقریب لیندلی و زنجیره مارکوف مونت کارلو، تحت تابع زیان مربعات خطا مورد استفاده قرار می‌گیرند. سپس، فواصل اطمینان بیشینه پسین (*HPD*) بر اساس برآوردهای بیزی محاسبه می‌شود. به منظور ارزیابی عملکرد روش‌های پیشنهادی، مطالعات شبیه‌سازی انجام شده و نتایج حاصل از دو روش بیزی مقایسه می‌شوند. یافته‌ها: یافته‌ها نشان می‌دهند که روش *MCMC* در برآورد پارامترهای توزیع سه‌پارامتری، دارای اریبی کمتر بوده و نسبت به تقریب لیندلی از سازگاری بیشتری برخوردار است. در توزیع‌های با پارامترهای زیاد، روش *MCMC* برآوردهای بهتری نسبت به تقریب لیندلی ارائه می‌دهد و همگرایی در این حالت سریع‌تر رخ می‌دهد. *MSE* برآوردها در تقریب لیندلی با توجه به جدول ۲ خیلی بیشتر از پراکندگی داده‌ها با حجم نمونه مشابه از روش *MCMC* در جدول ۳ است. در پایان، یک مجموعه داده‌ی واقعی برای نشان دادن کاربرد عملی روش‌های پیشنهادی ارائه می‌شود. اصالت/ارزش افزوده علمی: با توجه به اینکه تاکنون هیچ مطالعه‌ای در خصوص توزیع لیندلی توانی تعمیم‌یافته در حضور داده‌های سانسور شده هیبرید نوع دوم انجام نشده است، یافته‌های این پژوهش می‌تواند برای مطالعات بعدی مورد استفاده قرار گیرد.

کلیدواژه‌ها: تخمین بیزی، تخمین حداکثر احتمال، توان لیندلی تعمیم‌یافته، زنجیره مونت کارلو مارکوف، الگوریتم *EM*.

#### ۱- مقدمه

توزیع لیندلی یک پارامتری برای داده‌هایی که شکل نرخ خطرات‌ها یکنواخت نیست، نخستین بار توسط قیطانی و همکارانش [1] معرفی شد. تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر است:

$$f(x; \beta) = \frac{\beta^2}{1 + \beta} (1 + x) e^{-\beta x}, \quad x, \beta > 0. \quad (1)$$

قیطانی و همکارانش [2] ویژگی‌ها و کاربردهای توزیع لیندلی را در زمینه قابلیت اعتماد بررسی کرده و به این نتیجه رسیدند که این توزیع نسبت به توزیع نمایی، برآزش بهتری ارایه می‌دهد. بر همین اساس، پژوهشگران مختلف کلاس‌های جدیدی از توزیع‌ها را با اصلاحاتی بر توزیع لیندلی، همراه با ویژگی‌های ریاضی و کاربردهای گسترده، پیشنهاد کرده‌اند [3-6]. شانکر و همکارانش [7]، توزیع لیندلی دو پارامتری را برای مدل‌های طول عمر و بقا به صورت زیر تعریف کردند:

$$f(z; \beta, \theta) = \frac{\beta^2}{\theta + \beta} (1 + \theta z) e^{-\beta z}, \quad z, \alpha, \beta > 0. \quad (2)$$

قابل توجه است که اگر  $\theta = 1$  باشد، توزیع لیندلی دو پارامتری به لیندلی یک پارامتری که در رابطه (۱) تعریف شده است، تبدیل می‌شود.

سعید هوفان [8]، نوع جدیدی از توزیع لیندلی با سه پارامتر را معرفی کرده است که به توزیع لیندلی توانی تعمیم‌یافته (EPL) معروف است. این توزیع، توسیعی از توزیع لیندلی توانی (PL) تعریف شده در رابطه (۲) با استفاده از تبدیل  $X = Z^{1/\alpha}$  است که تابع چگالی احتمال آن به صورت

$$f_{EPL}(x; \alpha, \beta, \theta) = \frac{\alpha \beta^2}{\theta + \beta} (1 + \theta x^\alpha) x^{\alpha-1} e^{-\beta x^\alpha}, \quad x, \alpha, \beta, \theta > 0, \quad (3)$$

و تابع توزیع تجمعی آن به صورت

$$F_{EPL}(x; \alpha, \beta, \theta) = 1 - \left(1 + \frac{\beta \theta}{\theta + \beta} x^\alpha\right) e^{-\beta x^\alpha}, \quad x, \alpha, \beta, \theta > 0, \quad (4)$$

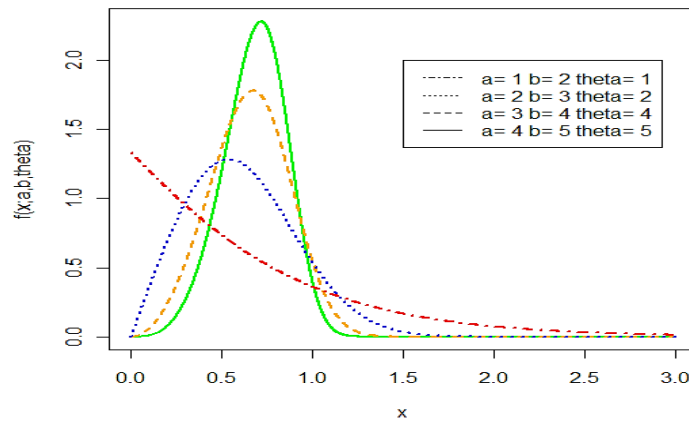
است که در آن  $Z$  دارای تابع چگالی احتمال تعریف شده در رابطه (۲) است.

مدل EPL یک توزیع تلفیقی دو مولفه‌ای است که در آن یک مولفه دارای توزیع وایبول با پارامتر شکل  $\alpha$  و پارامتر مقیاس  $\beta$  است. مولفه دیگر دارای توزیع گاما با پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  است. این دو مولفه با نسبت تلفیق  $\frac{\beta}{\beta + \theta}$  ترکیب می‌شوند. خواص ریاضی توزیع EPL شامل بررسی شکل‌های تابع چگالی احتمال، تابع نرخ خطر، گشتاورها، تابع مولد گشتاور و سایر اندازه‌های مرتبط است [8].

قیطانی و همکاران [9]، استنباط کلاسیک و مطالعات قابلیت اعتماد را برای پارامترهای توزیع لیندلی توانی (PL) در حالتی که  $\theta = 1$  است، بررسی و معرفی کردند. آن‌ها برآورد کلاسیک این توزیع را در مدل تنش-مقاومت برای قابلیت اطمینان مطالعه نمودند. همچنین، مخدوم و همکارانش [10]، پارامتر اعتمادپذیری این توزیع را از دیدگاه استنباط بیزی مورد بررسی قرار دادند. رفاه الطایبی و همکاران [11]، استنباط و کاربردهای توزیع وایبول توانی آلفا را تحت داده‌های سانسور هیبرید نوع دوم پیش‌رونده در مهندسی بررسی کردند. برآوردهای بیزی را تحت تابع زیان مربع خطا و لاینکس با استفاده از روش MCMC به دست آوردند. المطیری و همکاران [12]، برآوردهای بیزی و غیربیزی توزیع لیندلی توانی وارون ترانکیت شده را تحت داده‌های سانسور نوع دوم پیش‌رونده با توجه به توزیع پیشین ناآگاهی بخش به دست آوردند. در آزمایش‌های قابلیت اطمینان و تحلیل طول عمر، سانسور کردن روشی رایج برای مدیریت داده‌های ناقص است. در بسیاری از این آزمایش‌ها، داده‌های حاصل سانسور شده هستند. دو طرح سانسور متداول که در مطالعات قابلیت اطمینان به کار می‌روند، عبارت‌اند از:

سانسور نوع I: در این طرح، آزمایش در زمان از پیش تعیین شده  $T$  متوقف می‌شود. پس از زمان  $T$ ، شکست‌های بعدی مشاهده نمی‌شوند.

سانسور نوع II: در این طرح، تعداد شکست‌ها تصادفی است. به عبارت دیگر، آزمایش تا زمانی ادامه می‌یابد که تعداد معینی  $R$  از بین  $n$  مولفه موجود دچار شکست شوند؛ بنابراین، زمان آزمایش متغیر تصادفی خواهد بود.



شکل ۱- نمودار تابع چگالی احتمال توزیع لیندلی توانی تعمیم یافته برای مقادیر متفاوت  $\theta, \beta, \alpha$ .  
Figure 1- Plots of the probability density function of the EPL distribution for different values of  $\theta, \beta, \alpha$ .

ترکیب طرح های سانسور نوع  $I$  و نوع  $II$ ، به طرح سانسور هیبریدی ( $HCS$ ) معروف است. کاندو و بالا کریشن [13] مطالعه جامعی در مورد طرح سانسور هیبریدی و کاربردهای آن انجام داده اند. این طرح را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

فرض کنید  $n$  مولفه تحت شرایط یکسان در یک آزمایش طول عمر قرار می گیرند. طول عمر هر مولفه، متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع هستند. در طرح سانسور هیبریدی نوع  $I$ ، آزمایش زمانی متوقف می شود که یکی از دو شرط زیر برآورده شود:

۱. تعداد از پیش تعیین شده  $R$  از بین  $n$  مولفه دچار شکست شوند.

۲. زمان آزمایش به مقدار از پیش تعیین شده  $T$  برسد.

طرح سانسور هیبریدی نوع  $I$  دارای یک نقص اساسی است؛ ممکن است تا زمان از پیش تعیین شده  $T$ ، تنها تعداد کمی از شکست ها رخ دهد یا حتی هیچ شکستی ثبت نشود. به همین دلیل، چاپلندز و همکارانش [14] طرح سانسور هیبریدی نوع  $II$  را پیشنهاد کردند. برخلاف طرح سانسور هیبریدی نوع  $I$ ، در این طرح آزمایش زمانی متوقف می شود.

$$T^* = \max\{x_{R:n}, T\},$$

که در آن

۱.  $R$  و  $T$  مقادیر از پیش تعیین شده هستند.

۲.  $x_{R:n}$  زمانی است که شکست  $R$ th در نمونه ای با اندازه  $n$  رخ می دهد.

مزیت اصلی این طرح این است که حداقل  $R$  شکست در پایان آزمایش مشاهده خواهد شد. در این مدل، سه حالت مختلف ممکن است رخ دهد:

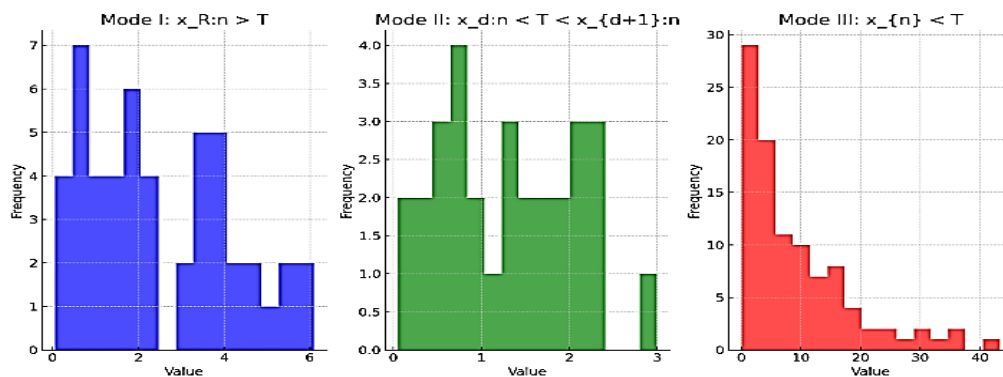
$$\text{Model 1: } \{x_{1:n} < \dots < x_{R:n}\} \text{ if } x_{R:n} > T,$$

$$\text{Model 2: } \{x_{1:n} < \dots < x_{d:n} < T < x_{d+1:n}\} \text{ if } R \leq d < n \text{ and } x_{d:n} < T < x_{d+1:n},$$

$$\text{Model 3: } \{x_{1:n} < \dots < x_{n:n}\} \text{ if } x_{1:n} < \dots < x_{n:n}.$$

زمان های شکست مرتب شده از مولفه های آزمایش را با  $x_{1:n} < \dots < x_{n:n}$  نشان می دهیم.

تا کنون، برآورد پارامترهای توزیع  $EPL$  تحت طرح سانسور هیبریدی نوع  $II$ ، چه در چارچوب استنباط کلاسیک و چه استنباط بیزی، مورد مطالعه قرار نگرفته است. هدف این مقاله ارایه برآورد بیزی برای پارامترهای توزیع لیندلی توانی تعمیم یافته ( $EPL$ ) در حضور داده های سانسور شده هیبریدی نوع دوم است که با دو روش تقریب لیندلی و شبیه سازی مونت کارلو صورت می گیرد.



شکل ۲- مدل های سانسور هیبرید نوع دوم.  
Figure 2- The Hybrid type-II censoring scheme.

ساختار مقاله بدین صورت می باشد. در بخش ۲، برآوردهای درستنمایی ماکسیمم (MLE) برای پارامترهای مجهول توزیع EPL تحت طرح سانسور هیبریدی نوع II ارائه شده و ماتریس اطلاع فیشر را به دست می آوریم. در بخش ۳، برآوردهای بیزی با استفاده از تقریب لیندلی و روش MCMC را بررسی نموده و آن ها با یکدیگر مقایسه می نمایم. در بخش ۴، نتایج تئوری را ارائه داده و در بخش ۵، یک مثال کاربردی با داده های واقعی را بررسی می کنیم و در نهایت در بخش ۶، بحث و نتیجه گیری را ارائه می دهیم.

### ۲- برآورد ماکسیمم درستنمایی

تابع درستنمایی زمان های شکست مشاهده شده در طرح سانسور هیبرید نوع II برای سه حالت مختلف به شرح زیر ارائه می شود.

تابع درستنمایی حالت اول:

$$l(\alpha, \beta, \theta) = \frac{n!}{(n-R)!} \prod_{i=1}^R f(x; \alpha, \beta, \theta) (1 - F(x_{R:n}))^{n-R}. \tag{5}$$

تابع درستنمایی حالت دوم:

$$l(\alpha, \beta, \theta) = \frac{n!}{(n-d)!} \prod_{i=1}^d f(x; \alpha, \beta, \theta) (1 - F(T))^{n-d}. \tag{6}$$

تابع درستنمایی حالت سوم:

$$l(\alpha, \beta, \theta) = \frac{n!}{(n-d)!} \prod_{i=1}^n f(x; \alpha, \beta, \theta). \tag{7}$$

با ترکیب سه تابع درستنمایی در سه حالت مختلف، تابع درستنمایی کلی زمان های شکست مشاهده شده در طرح سانسور هیبریدی نوع II به صورت زیر نوشته می شود:

$$l(\alpha, \beta, \theta) = \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^r f(x; \alpha, \beta, \theta) (1 - F(c))^{n-r} \tag{8}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} \left\{ \prod_{i=1}^r \left( \frac{\alpha\beta^2}{\beta + \theta} \right) (1 + \theta x_i^\alpha) x_i^{\alpha-1} e^{-\beta x_i^\alpha} \right\} \times \left\{ 1 + \frac{\beta\theta}{\beta + \theta} c^\alpha \right\} e^{-\beta c^\alpha} \}^{n-r},$$

که در آن  $c$  و  $r$  به صورت زیر تعریف می شوند:

$$r = \begin{cases} R, & \text{case I,} \\ d, & \text{case II,} \\ n, & \text{case III.} \end{cases}$$

$$c = \begin{cases} x_{R:n}, & \text{case I,} \\ T, & \text{case II, III.} \end{cases}$$

بنابراین با چشم‌پوشی از ثابت‌ها، لگاریتم تابع درست‌نمایی می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned}
 l(\alpha, \beta, \theta) &= r \ln \alpha + 2 \ln \beta r \ln \beta - r \ln(\beta + \theta) + \sum_{i=1}^r \ln((1 + \theta x_i^\alpha) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^r \ln x_i - \beta \sum_{i=1}^r x_i^\alpha \\
 &\quad + (n - r) \ln \left( 1 + \frac{\beta \theta}{\beta + \theta} c^\alpha \right) - \beta(n - r)c^\alpha, \\
 \frac{\partial l}{\partial \alpha} &= \frac{r}{\alpha} + \sum_{i=1}^r \frac{\theta x_i^\alpha \ln x_i}{(1 + \theta x_i^\alpha)} + \sum_{i=1}^r \ln x_i - \beta \sum_{i=1}^r \ln x_i (x_i^\alpha) + (n - r) \frac{\frac{\beta \theta}{\beta + \theta} c^\alpha \ln c}{1 + \frac{\beta \theta}{\beta + \theta} c^\alpha} \\
 &\quad - \beta(n - r)c^\alpha \ln c, \\
 \frac{\partial l}{\partial \beta} &= \frac{2r}{\beta} - \frac{r}{\beta + \theta} - \sum_{i=1}^r x_i^\alpha + (n - r) \frac{\theta^2}{(\beta + \theta)^2} c^\alpha - (n - r)c^\alpha, \\
 \frac{\partial l}{\partial \theta} &= -\frac{r}{\beta + \theta} + \sum_{i=1}^r \frac{x_i^\alpha}{(1 + \theta x_i^\alpha)} + (n - r) \frac{\frac{\beta^2}{(\beta + \theta)^2} c^\alpha}{1 + \frac{\beta \theta}{\beta + \theta} c^\alpha}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

بر اساس معادلات نرمال فوق، برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی را نمی‌توان به‌طور ضمنی به دست آورد و این برآوردها فرم بسته ندارند. از این رو، برای برآورد پارامترها از الگوریتم EM استفاده می‌کنیم.

## ۲-۱- الگوریتم EM

بردار داده‌های سانسور شده  $Z$  را می‌توان مانند داده‌های گمشده در نظر گرفت؛ بنابراین، برای برآورد پارامترهای این مدل، ترجیح می‌دهیم که از الگوریتم EM استفاده کنیم. الگوریتم EM یک روش بسیار قدرتمند برای استنباط داده‌های ناقص است. در این الگوریتم پارامترها را به دو گروه تفکیک می‌کنیم. در مرحله اول برای پارامترهای گروه اول مقدرهایی به‌عنوان مقادیر اولیه (*Initial Values*) در نظر گرفته و بر اساس این پارامترها، مقدار پارامترهای گروه دوم را برآورد می‌کنیم. حال بر اساس پارامترهای گروه دوم و داده‌های مشاهده‌شده پارامترهای گروه اول را برآورد کرده و آن‌ها را بهبود می‌دهیم. این کار تا زمانی که الگوریتم به همگرایی برسد تکرار می‌شود. نتیجه نهایی از برآورد پارامترهای مدل در الگوریتم EM، تابع درست‌نمایی را به حداکثر مقدار خود می‌رساند. تی زانک تسایی و همکاران [15] الگوریتم EM را برای توزیع آمیخته سانسور هیبرید نوع اول بررسی کردند. قبل از شروع، داده‌های مشاهده‌شده و سانسور شده را به ترتیب به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$Z = (Z_1, \dots, Z_{n-r})$  و  $X = (X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{r:n})$  برای  $r$  داده شده،  $Z$  قابل مشاهده نیست و می‌توان آن را به‌عنوان داده گمشده در نظر گرفت؛ بنابراین، کل مجموعه داده‌ها را می‌توان با بردار  $W = (X, Z)$  نمایش داد. در این مقاله، ما از روشی که کوندو و پرادان [16] برای بررسی داده‌های گمشده ارایه داده‌اند، استفاده می‌کنیم. فرض کنید لگاریتم تابع درست‌نمایی مجموعه داده‌های سانسور نشده، به صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned}
 l_c(\alpha, \beta, \theta) &= r \ln \alpha + 2 n \ln \beta - r \ln(\beta + \theta) + \sum_{i=1}^r \ln(1 + \theta x_i^\alpha) + \sum_{i=1}^{n-r} \ln(1 + \theta z_i^\alpha) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^r \ln x_i \\
 &\quad + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^{n-r} \ln z_i - \beta \sum_{i=1}^r x_i^\alpha - \beta \sum_{i=1}^{n-r} z_i^\alpha.
 \end{aligned} \tag{10}$$

## مرحله E

در این مرحله انتظار، با استفاده از داده‌های مشاهده‌شده موجود از مجموعه داده، می‌توان مقادیر داده‌های از دست‌رفته را تخمین زد یا حدس زد. در نهایت، پس از این مرحله، داده‌های کاملی را بدون مقادیر گمشده دریافت می‌کنیم.

محاسبه  $l^{(j)}(\theta) = E_{X|Y, \theta^{(j-1)}}[l_c(\theta; Y, X)]$  که امید ریاضی با توجه به داده‌های گمشده  $X$  به شرط داده‌های مشاهده  $Y$  گرفته می‌شود و باید توجه شود که مقدار  $\theta^{(j-1)}$  در این امید ریاضی جایگزین می‌شود.

لگاریتم تابع درستنمایی شبه تصادفی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 l_s(\alpha, \beta, \theta) &= E[l_c(\alpha, \beta, \theta | x)] \\
 &= r \ln \alpha + 2r \ln \beta - r \ln(\beta + \theta) + \sum_{i=1}^r \ln(1 + \theta x_i^\alpha) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^r \ln x_i - \beta \sum_{i=1}^r x_i^\alpha \\
 &+ (n - r)A(c; \alpha, \beta, \theta) + (n - r)(\alpha - 1)B(c; \alpha, \beta, \theta) - \beta(n - r)D(c; \alpha, \beta, \theta).
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

$$A(c; \alpha, \beta, \theta) = E[\ln(1 + \theta Z^\alpha) | Z > c].$$

$$B(c; \alpha, \beta, \theta) = E[\ln Z | Z > c].$$

$$D(c; \alpha, \beta, \theta) = E[Z^\alpha | Z > c].$$

مرحله M

حال باید از داده‌های کاملی که در مرحله انتظار تهیه شده است، استفاده کرده و پارامترها را به روز کنیم. در این مرحله، باید ماکسیمم تابع درستنمایی شبه تصادفی را محاسبه کنیم. اگر برآورد پارامترها در مرحله  $k$ th به صورت  $(\hat{\alpha}_k, \hat{\beta}_k, \hat{\theta}_k)$  باشد می‌توان  $(\hat{\alpha}_{k+1}, \hat{\beta}_{k+1}, \hat{\theta}_{k+1})$  را با ماکسیمم کردن تابع زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned}
 l(\alpha, \beta, \theta) &= r \ln \alpha + 2n \ln \beta - r \ln(\beta + \theta) + \sum_{i=1}^r \ln(1 + \theta x_i^\alpha) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^r \ln x_i \\
 &- \beta \sum_{i=1}^r x_i^\alpha + (n - r)A(c; \hat{\alpha}_k, \hat{\beta}_k, \hat{\theta}_k) + (n - r)(\alpha - 1)B(c; \hat{\alpha}_k, \hat{\beta}_k, \hat{\theta}_k) - \beta(n - r)D(c; \hat{\alpha}_k, \hat{\beta}_k, \hat{\theta}_k)
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

در اینجا از قضیه زیر برای محاسبه  $A, B$  و  $D$  استفاده می‌کنیم:

قضیه ۱- توزیع احتمال  $Z_i (i = 1, \dots, n - r)$  به شرط  $X_{(1)} = x_{(1)}, \dots, X_{(r)} = x_{(r)}$  برابر است با

$$f_{Z_{i|X}}(z_i | X_{(1)} = x_{(1)}, \dots, X_{(r)} = x_{(r)}) = f_{Z_{i|X}}(z_i | X_{(i)} = x_{(i)}) = \frac{f_{EPL}(z_i)}{1 - F_{EPL}(x_{(i)})} = \frac{f_W(z_i | \alpha, \beta, \theta)}{1 - F_W(c; \alpha, \beta, \theta)}.$$

اثبات: مراجعه شود به [17].

با استفاده از قضیه ۱،  $A, B$  و  $D$  به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 A(c; \alpha, \beta, \theta) &= E[\ln(1 + \theta Z^\alpha) | Z > c] = \int_0^\infty \ln(1 + \theta x^\alpha) \frac{f_{EPL}(x | \alpha, \beta, \theta)}{1 - F_{EPL}(c; \alpha, \beta, \theta)} dx \\
 &= \int_c^\infty \ln(1 + \theta x^\alpha) \frac{\frac{\alpha \beta^2}{\beta + \theta} (1 + \theta x^\alpha) x^{\alpha-1} e^{-\beta x^\alpha}}{k} dx \\
 &= \frac{\alpha \beta^2}{k(\beta + \theta)} \int_c^\infty \ln(1 + \theta x^\alpha) (1 + \theta x^\alpha) x^{\alpha-1} e^{-\beta x^\alpha} dx.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
 B(c; \alpha, \beta, \theta) &= E[\ln Z | Z > c] = \int_c^\infty \ln x \frac{f_{EPL}(x | \alpha, \beta, \theta)}{1 - F_{EPL}(c; \alpha, \beta, \theta)} dx = \int_c^\infty \ln x \frac{\frac{\alpha \beta^2}{\beta + \theta} (1 + \theta x^\alpha) x^{\alpha-1} e^{-\beta x^\alpha}}{k} dx \\
 &= \frac{\alpha \beta^2}{k(\beta + \theta)} \int_c^\infty \ln x (1 + \theta x^\alpha) x^{\alpha-1} e^{-\beta x^\alpha} dx.
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

$$D(c; \alpha, \beta, \theta) = E[Z^\alpha | Z > c] = \int_c^\infty x^\alpha \frac{f_{EPL}(x | \alpha, \beta, \theta)}{1 - F_{EPL}(c; \alpha, \beta, \theta)} dx = \int_c^\infty x^\alpha \frac{\frac{\alpha\beta^2}{\beta + \theta} (1 + \theta x^\alpha) x^{\alpha-1} e^{-\beta x^\alpha}}{k} dx \quad (15)$$

$$= \frac{\alpha\beta^2}{k(\beta + \theta)} \int_c^\infty x^\alpha (1 + \theta x^\alpha) x^{\alpha-1} e^{-\beta x^\alpha} dx.$$

### ۳- ماتریس اطلاع فیشر

الگوریتم EM اندازه‌ای از اطلاعات داده‌های سانسور شده را مشابه اصل اطلاعات داده‌های گمشده که توسط لوئیس [18] ارایه شده است، فراهم می‌آورد. ماتریس اطلاع فیشر را برای ساختن فواصل اطمینان مجانبی به کار می‌بریم. ایده‌ی اصل اطلاعات گمشده به صورت زیر بیان می‌شود [19]:

اطلاعات گمشده - اطلاعات کامل = اطلاعات مشاهده شده

فرض کنید که  $\psi = (\alpha, \beta, \theta)$  و  $X$  بردار داده‌های مشاهده شده و  $W$  نشان‌دهنده داده‌های کامل باشد. در این صورت، اطلاعات مشاهده شده، اطلاعات گمشده و اطلاعات کامل را به ترتیب با  $I_X(\psi)$ ،  $I_W(\psi)$ ، و  $I_{W|X}(\psi)$  نشان می‌دهیم [20]؛ بنابراین

$$I_X(\psi) = I_W(\psi) - I_{W|X}(\psi). \quad (16)$$

ماتریس اطلاع فیشر  $I_W(\psi)$  برابر است با

$$I_W(\psi) = -E \left[ \frac{\partial^2 l(w; \psi)}{\partial \psi^2} \right], \quad (17)$$

و ماتریس اطلاع فیشر مشاهدات سانسور شده برابر است با

$$I_{W|X}(\psi) = -(n-r) E_{Z|X} \left[ \frac{\partial^2 \ln f_{Z|X}(z|x; \psi)}{\partial \psi^2} \right]. \quad (18)$$

برای مجموعه داده‌های کامل، اعضای ماتریس اطلاع فیشر را همان طور که در گوپتا و کاندو [21] آمده است، به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$l(\alpha, \beta, \theta) = n \ln \alpha + 2n \ln \beta - n \ln(\beta + \theta) + \sum_{i=1}^n \ln(1 + x_i^\alpha) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i - \beta \sum_{i=1}^n x_i^\alpha$$

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \frac{\theta x_i^\alpha \ln x_i}{(1 + \theta x_i^\alpha)} + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \beta \sum_{i=1}^n \ln x_i (x_i^\alpha)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha^2} = -\frac{n}{\alpha^2} + \theta \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha (\ln x_i)^2}{(1 + \theta x_i^\alpha)^2} - \beta \sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2 x_i^\alpha$$

$$\Rightarrow -E \left( \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha^2} \right) = \frac{n}{\alpha^2} - n \frac{\alpha \beta^2}{\beta + \theta} \int_0^\infty \frac{(\ln x)^2 x^{2\alpha-1} e^{-\beta x^\alpha}}{(1 + \theta x^\alpha)} dx + n \frac{\alpha \beta^3}{\beta + \theta} \int_0^\infty (\ln x)^2 x^{2\alpha-1} e^{-\beta x^\alpha} dx$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = \frac{2n}{\beta} - \frac{n}{\beta + \theta} - \sum_{i=1}^n x_i^\alpha$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \beta^2} = -\frac{2n}{\beta^2} + \frac{n}{(\beta + \theta)^2}$$

$$\Rightarrow -E \left( \frac{\partial^2 l}{\partial \beta^2} \right) = \frac{2n}{\beta^2} - \frac{n}{(\beta + \theta)^2}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = -\frac{n}{\beta + \theta} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha}{(1 + \theta x_i^\alpha)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2} = \frac{n}{(\beta + \theta)^2} - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i^\alpha)^2}{(1 + \theta x_i^\alpha)^2}$$

$$-E \left( \frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2} \right) = -\frac{n}{(\beta + \theta)^2} + n \frac{\alpha \beta^2}{(\beta + \theta)^3} \int_0^\infty \frac{x^{3\alpha-1} e^{-\beta x^\alpha}}{(1 + \theta x^\alpha)} dx.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \beta} &= - \sum_{i=1}^n \ln x_i (x_i^\alpha), \\ \Rightarrow -E \left( \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \beta} \right) &= n \frac{\alpha \beta^2}{\beta + \theta} \int_0^\infty (\ln x) x^{2\alpha-1} (1 + \theta x^\alpha) e^{-\beta x^\alpha} dx \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \theta} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \theta \partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha (\ln x_i)}{(1 + \theta x_i^\alpha)^2} \\ \Rightarrow -E \left( \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \theta} \right) &= -E \left( \frac{\partial^2 l}{\partial \theta \partial \alpha} \right) = n \frac{\alpha \beta^2}{\beta + \theta} \int_0^\infty \frac{x^{2\alpha-1} (\ln x) e^{-\beta x^\alpha}}{(1 + \theta x^\alpha)} dx \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial \theta} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \theta \partial \beta} = \frac{n}{(\beta + \theta)^2} \\ \Rightarrow -E \left( \frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial \theta} \right) &= -E \left( \frac{\partial^2 l}{\partial \theta \partial \beta} \right) = -\frac{n}{(\beta + \theta)^2} \\ l(z|x) &= (n-r) \ln \alpha + 2(n-r) \ln \beta - (n-r) \ln(\beta + \theta) + \sum_{i=1}^{n-r} \ln(1 + \theta z_i^\alpha) \\ &\quad + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^{n-r} \ln z_i - \beta \sum_{i=1}^{n-r} z_i^\alpha - (n-r) \ln \left( 1 + \frac{\beta \theta}{\beta + \theta} c^\alpha \right) + (n-r) \beta c^\alpha. \end{aligned}$$

حال ماتریس اطلاعات فیشر برای مشاهدات سانسور شده طبق معادله (۱۸) و قضیه ۱ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \alpha} &= \frac{n-r}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n-r} \frac{\theta z_i^\alpha \ln z_i}{(1 + \theta z_i^\alpha)} + \sum_{i=1}^{n-r} \ln z_i - \beta \sum_{i=1}^{n-r} \ln z_i (z_i^\alpha) - (n-r) \frac{\frac{\beta \theta}{\beta + \theta} c^\alpha \ln c}{1 + \frac{\beta \theta}{\beta + \theta} c^\alpha} + \beta(n-r) c^\alpha \ln c \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha^2} &= \frac{-(n-r)}{\alpha^2} + \theta \sum_{i=1}^{n-r} \frac{(z_i^\alpha) (\ln z_i)^2}{(1 + \theta z_i^\alpha)^2} - \beta \sum_{i=1}^{n-r} (\ln z_i)^2 z_i^\alpha - (n-r) \frac{\frac{\beta \theta}{\beta + \theta} c^\alpha (\ln c)^2}{\left(1 + \frac{\beta \theta}{\beta + \theta} c^\alpha\right)^2} + \beta(n-r) c^\alpha (\ln c)^2 \\ \Rightarrow -E \left( \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha^2} \right) &= \frac{n-r}{\alpha^2} + (n-r) \frac{\alpha \beta^2 \theta}{k(\beta + \theta)} h_{11} - (n-r) \frac{\alpha \beta^3}{k(\beta + \theta)} h_{11} - (n-r) \frac{\frac{\beta \theta}{\beta + \theta} c^\alpha (\ln c)^2}{\left(1 + \frac{\beta \theta}{\beta + \theta} c^\alpha\right)^2} - \beta(n-r) c^\alpha (\ln c)^2 \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \beta} &= - \sum_{i=1}^{n-r} \ln z_i (z_i^\alpha) - \frac{(n-r) \frac{\theta^2}{(\beta + \theta)^2} c^\alpha \ln c}{\left(1 + \frac{\beta \theta}{\beta + \theta} c^\alpha\right)^2} + (n-r) c^\alpha \ln c \\ \Rightarrow -E \left( \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \beta} \right) &= \frac{(n-r) \frac{\theta^2}{(\beta + \theta)^2} c^\alpha \ln c}{\left(1 + \frac{\beta \theta}{\beta + \theta} c^\alpha\right)^2} + (n-r) c^\alpha \ln c + (n-r) \frac{\alpha \beta^2}{k(\beta + \theta)} h_{12} \\ \Rightarrow -E \left( \frac{\partial^2 l}{\partial \beta^2} \right) &= \frac{2(n-r)}{\beta^2} - \frac{n-r}{(\beta + \theta)^2} + (n-r) \frac{\frac{2\theta^2}{(\beta + \theta)^3} \left(1 + \frac{\beta \theta}{\beta + \theta} c^\alpha\right) c^\alpha - \frac{\theta^4}{(\beta + \theta)^4} (c^\alpha)^2}{\left(1 + \frac{\beta \theta}{\beta + \theta} c^\alpha\right)^2} \\ \Rightarrow -E \left( \frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2} \right) &= -\frac{n-r}{(\beta + \theta)^2} + (n-r) \frac{\frac{2\beta^2}{(\beta + \theta)^3} \left(1 + \frac{\beta \theta}{\beta + \theta} c^\alpha\right) c^\alpha}{\left(1 + \frac{\beta \theta}{\beta + \theta} c^\alpha\right)^2} - (n-r) \frac{\alpha \beta^2}{k(\beta + \theta)} h_{33} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \theta}\right) &= (n-r) \frac{\frac{\beta^2}{(\beta+\theta)^2} c^\alpha \ln c}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha\right)^2} + (n-r) \frac{\alpha\beta^2}{k(\beta+\theta)} h_{13} \\ \Rightarrow -E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial \theta}\right) &= -\frac{n-r}{(\beta+\theta)^2} + (n-r) \frac{\frac{2\theta\beta}{(\beta+\theta)^3} \left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha\right) c^\alpha - \frac{\beta^2\theta^2}{(\beta+\theta)^4} c^{2\alpha}}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha\right)^2}, \\ h_{11} &= \int_c^\infty \frac{z^{2\alpha-1} (\ln z)^2 e^{-\beta z^\alpha}}{(1+\theta z^\alpha)} dz, \\ h_{12} &= \int_c^\infty (\ln z)^2 z^{2\alpha-1} (1+\theta z^\alpha) e^{-\beta z^\alpha} dz, \\ h_{13} &= \int_c^\infty \frac{z^{2\alpha-1} (\ln z) e^{-\beta z^\alpha}}{(1+\theta z^\alpha)} dz, \\ h_{33} &= \int_c^\infty \frac{z^{3\alpha-1} e^{-\beta z^\alpha}}{(1+\theta z^\alpha)} dz. \end{aligned}$$

با معکوس کردن  $I_X(\hat{\theta})$ ، ماتریس کوواریانس واریانس مجانبی برای  $\theta$  به دست می آید و از آن می توان برای محاسبه فواصل اطمینان مجانبی پارامترها استفاده کرد.

#### ۴- برآورد بیز پارامترها

در این بخش، برآوردهای بیز پارامترهای  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\theta$  را تحت تابع زیان مربع خطای متقارن محاسبه می کنیم. تابع زیان مربع خطا به صورت زیر تعریف می شود:

$$L_s(f(\omega) \text{ و } \hat{f}(\omega)) = (\hat{f}(\omega) - f(\omega))^2. \quad (19)$$

$\hat{f}(\omega)$  برآورد  $f(\omega)$  است و  $f(\omega)$  تابعی از  $\omega$  است.

فرض کنید  $x = (x_{1:n}, \dots, x_{r:n})$  یک نمونه مشاهده شده از طرح سانسور هیبرید (HCS) نوع II باشد که از توزیع  $EPL(\alpha, \beta, \theta)$  پیروی می کند. با توجه به توابع درستنمایی و لگاریتم درستنمایی داده شده در معادله های (۸) و (۹)، و با فرض اینکه پارامترهای  $\theta, \beta, \alpha$  دارای توزیع های پیشین مستقل گاما باشند، توزیع های پیشین آن ها به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\begin{aligned} \pi_1(\alpha) &\propto \alpha^{w_2-1} e^{-\alpha w_1}, & \alpha > 0, \\ \pi_2(\beta) &\propto \beta^{w_4-1} e^{-\beta w_3}, & \beta > 0, \\ \pi_3(\theta) &\propto \theta^{w_6-1} e^{-\theta w_5}, & \theta > 0. \end{aligned} \quad (19)$$

بنابراین توزیع پیشین توام آن ها به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} \pi(\alpha, \beta, \theta) &\propto \alpha^{w_2-1} e^{-\alpha w_1} \beta^{w_4-1} e^{-\beta w_3} \theta^{w_6-1} e^{-\theta w_5} \quad \alpha, \beta, \theta > 0 \quad w > 0, i = 1, \dots, 6. \\ L(\alpha, \beta, \theta; x) &\propto \frac{\alpha^r \beta^{2r}}{(\beta+\theta)^r} \prod_{i=1}^r (1+\theta x_i^\alpha) \prod_{i=1}^r x_i^{\alpha-1} e^{-\beta \sum_{i=1}^r x_i^\alpha} \left\{ 1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha e^{-\beta c^\alpha} \right\}^{n-r} \\ \Rightarrow \pi(\alpha, \beta, \theta | x) &= k \frac{\alpha^{r+w_2-1} \beta^{2r+w_4-1} \theta^{w_6-1}}{(\beta+\theta)^r} \prod_{i=1}^r (1+\theta x_i^\alpha) \prod_{i=1}^r x_i^{\alpha-1} \left\{ 1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha e^{-\beta c^\alpha} \right\}^{n-r} \\ &\quad e^{-\beta(\sum_{i=1}^r x_i^\alpha + w_3) - w_1\alpha - w_5\theta}, \end{aligned} \quad (20)$$

که در آن  $k$  مقداری ثابت است. امید ریاضی توابع چگالی حاشیه ای نسبت به هر یک از پارامترها، تحت تابع زیان مربع خطا، همان برآوردهای بیزی آن ها هستند؛ بنابراین، برآوردهای بیزی پارامترهای  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\theta$  به ترتیب برابرند با

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_s &= k \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha^{r+w_2} \beta^{2r+w_4-1} \theta^{w_6-1}}{(\beta + \theta)^r} \prod_{i=1}^r (1 + \theta x_i^\alpha) \prod_{i=1}^r x_i^{\alpha-1} \left\{ 1 \right. \\ &+ \left. \frac{\beta \theta}{\beta + \theta} c^\alpha e^{-\beta c^\alpha} \right\}^{n-r} e^{-\beta(\sum_{i=1}^r x_i^\alpha + w_3) - w_1 \alpha - w_5 \theta} d\alpha d\beta d\theta \hat{\beta}_s \\ &= k \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha^{r+w_2-1} \beta^{2r+w_4} \theta^{w_6-1}}{(\beta + \theta)^r} \prod_{i=1}^r (1 + \theta x_i^\alpha) \prod_{i=1}^r x_i^{\alpha-1} \left\{ 1 \right. \\ &+ \left. \frac{\beta \theta}{\beta + \theta} c^\alpha e^{-\beta c^\alpha} \right\}^{n-r} e^{-\beta(\sum_{i=1}^r x_i^\alpha + w_3) - w_1 \alpha - w_5 \theta} d\alpha d\beta d\theta, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_s &= k \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha^{r+w_2-1} \beta^{2r+w_4-1} \theta^{w_6}}{(\beta + \theta)^r} \prod_{i=1}^r (1 + \theta x_i^\alpha) \prod_{i=1}^r x_i^{\alpha-1} \left\{ 1 + \frac{\beta \theta}{\beta + \theta} c^\alpha e^{-\beta c^\alpha} \right\}^{n-r} \\ &e^{-\beta(\sum_{i=1}^r x_i^\alpha + w_3) - w_1 \alpha - w_5 \theta} d\alpha d\beta d\theta. \end{aligned}$$

حل این معادلات به روش‌های غیر عددی ناممکن است؛ بنابراین از روش‌های عددی استفاده می‌شود.

#### ۴-۱- تقریب لیندلی

لیندلی [22] یک راه‌حل مجانبی برای محاسبه نسبت دو انتگرال در روش بیزی ارائه داد. بسیاری از پژوهشگران از تقریب لیندلی برای به دست آوردن برآوردهای بیزی در توزیع‌های مختلف طول عمر استفاده کرده‌اند [23], [24].

نسبت دو انتگرال را می‌توان با استفاده از تحلیل بیزی به صورت زیر محاسبه کرد:

$$I(x) \approx E(U(\theta|x)) = \frac{\int u(\theta) \exp\{l(\theta) + \rho(\theta)\} d\theta}{\int \exp\{l(\theta) + \rho(\theta)\} d\theta}. \tag{23}$$

$u(\theta) = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$  تابعی از  $\theta$ ،  $l(\theta)$  لگاریتم تابع درست‌نمایی و  $\rho(\theta)$  لگاریتم چگالی پیشین توام  $\theta$  است.

سلطان و همکاران [25] نشان داده‌اند که برای نمونه‌های با اندازه‌ی کافی بزرگ، تحت شرایط نظم، می‌توان بسط مرتبه‌ی بالا را به صورت زیر تقریب زد:

$$I(x) \approx u + 1/2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (u_{ij} + 2u_{ij}\rho_j) \sigma_{ij} + 1/2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m l_{ijkl} u_i \sigma_{ij} \sigma_{kl}, \tag{24}$$

که در آن  $u(\theta)$  تنها تابعی از  $(\alpha, \beta, \theta)$  است و  $l(\alpha, \beta, \theta)$  لگاریتم-درست‌نمایی و  $\rho(\alpha, \beta, \theta)$  لگاریتم  $\pi(\alpha, \beta, \theta)$  است.

فرض کنید  $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\theta})$  نشان‌دهنده برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی  $(\alpha, \beta, \theta)$  باشند. برای نمونه‌ای با اندازه‌ی کافی بزرگ و حجم  $m$ ، با استفاده از روشی که لیندلی در [26] ارائه داده است، نسبت انتگرال (۲۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$I(x) \approx u(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\theta}) + 1/2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (u_{ij} + 2u_{ij}\rho_j) \sigma_{ij} + 1/2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m l_{ijkl} u_i \sigma_{ij} \sigma_{kl}, \tag{25}$$

که در آن  $u_{\alpha\alpha}$  مشتق دوم تابع  $u(\alpha, \beta, \theta)$  نسبت به  $\alpha$  است و  $\hat{u}_{\alpha\alpha}$  نشان‌دهنده همان عبارت با توجه به  $\alpha = \hat{\alpha}$ ،  $\beta = \hat{\beta}$ ،  $\theta = \hat{\theta}$  است. همه کمیت‌هایی که در  $I(x)$  نشان دادیم در زیر محاسبه می‌شوند:

$$l(\alpha, \beta, \theta) = r \ln \alpha + 2 r \ln \beta - r \ln(\beta + \theta) + \sum_{i=1}^r (1 + \theta x_i^\alpha) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^r \ln x_i \tag{26}$$

$$-\beta \sum_{i=1}^r x_i^\alpha + (n-r) \ln \left( 1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha \right) - \beta(n-r)c^\alpha,$$

$$\hat{l}_{\alpha\alpha} = -\frac{r}{\alpha^2} + \sum_{i=1}^r \frac{\theta x_i^\alpha (\ln x_i)^2}{(1+\theta x_i^\alpha)^2} - \beta \sum_{i=1}^r x_i^\alpha (\ln x_i)^2 - \beta(n-r)(\ln c)^2 c^\alpha + (n-r) \frac{\frac{\beta\theta}{\beta+\theta} (\ln c)^2 c^\alpha}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha\right)^2},$$

و بنابراین  $\hat{\sigma}_{\alpha\alpha} = \frac{-1}{\hat{l}_{\alpha\alpha}}$

$$\hat{l}_{\beta\beta} = -\frac{2r}{\beta^2} + \frac{r}{(\beta+\theta)^2} + (n-r) \frac{-2 \frac{\theta^2 c^\alpha}{(\beta+\theta)^3} \left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha\right) - \left(\frac{\theta^2}{(\beta+\theta)^2} c^\alpha\right)^2}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha\right)^2},$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}_{\beta\beta} = \frac{-1}{\hat{l}_{\beta\beta}}$$

$$\hat{l}_{\alpha\beta} = -\sum_{i=1}^r x_i^\alpha \ln x_i - (n-r)c^\alpha \ln c + (n-r) \frac{\frac{\theta^2}{(\beta+\theta)^2} c^\alpha \ln c}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha\right)^2},$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}_{\alpha\beta} = \frac{-1}{\hat{l}_{\alpha\beta}}$$

$$\hat{l}_{\beta\alpha} = -\sum_{i=1}^r x_i^\alpha \ln x_i - (n-r)c^\alpha \ln c + (n-r) \frac{\frac{\theta^2}{(\beta+\theta)^2} c^\alpha \ln c}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha\right)^2},$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}_{\beta\alpha} = \frac{-1}{\hat{l}_{\beta\alpha}}$$

$$\hat{l}_{\alpha\theta} = \sum_{i=1}^r \frac{x_i^\alpha \ln x_i}{(1+\theta x_i^\alpha)^2} + (n-r) \frac{\frac{\beta^2}{(\beta+\theta)^2} c^\alpha \ln c}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha\right)^2},$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}_{\alpha\theta} = \frac{-1}{\hat{l}_{\alpha\theta}}$$

$$\hat{l}_{\theta\beta} = \frac{r}{(\beta+\theta)^2} + (n-r) \frac{\frac{\beta^2\theta}{(\beta+\theta)^3} c^\alpha \left(2 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha\right)}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha\right)^2},$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}_{\theta\beta} = \frac{-1}{\hat{l}_{\theta\beta}}$$

$$\hat{l}_{\theta\theta} = \frac{r}{(\beta+\theta)^2} - \sum_{i=1}^r \frac{(x_i^\alpha)^2}{(1+\theta x_i^\alpha)^2} - (n-r) \frac{\frac{2\beta^2}{(\beta+\theta)^3} c^\alpha + \frac{2\beta^3\theta}{(\beta+\theta)^4} (c^\alpha)^2 + \frac{\beta^4}{(\beta+\theta)^4} (c^\alpha)^2}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha\right)^2}, \Rightarrow \hat{\sigma}_{\theta\theta}$$

$$= \frac{-1}{\hat{l}_{\theta\theta}}$$

$$\hat{l}_{\theta\alpha} = \sum_{i=1}^r \frac{x_i^\alpha \ln x_i}{(1+\theta x_i^\alpha)^2} + (n-r) \frac{\frac{\beta^2}{(\beta+\theta)^2} c^\alpha \ln c}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha\right)^2} \Rightarrow \hat{\sigma}_{\theta\alpha} = \frac{-1}{\hat{l}_{\theta\alpha}}$$

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{\theta\beta} &= \frac{r}{(\beta + \theta)^2} + (n - r) \frac{\frac{2\beta\theta}{(\beta + \theta)^3} c^\alpha + \frac{(\beta\theta)^2}{(\beta + \theta)^4} (c^\alpha)^2}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta + \theta} c^\alpha\right)^2}, \\ &\Rightarrow \hat{\sigma}_{\theta\beta} = \frac{-1}{\hat{\tau}_{\theta\beta}}, \\ \hat{\tau}_{\alpha\alpha} &= \frac{r}{\alpha^2} + \sum_{i=1}^r \frac{\theta x_i^\alpha (\ln x_i)^3 (1 - \theta x_i^\alpha)}{(1 + \theta x_i^\alpha)^3} - \beta \sum_{i=1}^r x_i^\alpha (\ln x_i)^3 - \beta(n - r)(\ln c)^3 c^\alpha \\ &\quad + (n - r) \frac{\frac{\beta\theta}{\beta + \theta} (\ln c)^3 c^\alpha \left(1 - \frac{\beta\theta}{\beta + \theta} c^\alpha\right)}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta + \theta} c^\alpha\right)^3}, \\ &= - \sum_{i=1}^r x_i^\alpha (\ln x_i)^2 - (n - r) c^\alpha (\ln c)^2 \\ &\quad + (n - r) \frac{\frac{\theta^2}{(\beta + \theta)^2} c^\alpha (\ln c)^2 + \frac{\theta^3 \beta^2}{(\beta + \theta)^3} (c^\alpha)^2 (\ln c)^2 - \frac{2\beta\theta^3}{(\beta + \theta)^3} (c^\alpha)^2 (\ln c)^2}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta + \theta} c^\alpha\right)^3}, \\ \hat{\tau}_{\alpha\theta\alpha} &= \sum_{i=1}^r \frac{x_i^\alpha (\ln x_i)^2 (1 - \theta x_i^\alpha)}{(1 + \theta x_i^\alpha)^3} - (n - r) \frac{\frac{\beta^2}{(\beta + \theta)^2} c^\alpha (\ln c)^2}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta + \theta} c^\alpha\right)^3}, \\ \hat{\tau}_{\beta\alpha\alpha} &= - \sum_{i=1}^r x_i^\alpha (\ln x_i)^2 - (n - r) c^\alpha (\ln c)^2 \\ &\quad + (n - r) \frac{\frac{\theta^2}{(\beta + \theta)^2} c^\alpha (\ln c)^2 \left(1 - \frac{\beta\theta}{\beta + \theta} c^\alpha\right)}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta + \theta} c^\alpha\right)^3}, \\ \hat{\tau}_{\beta\beta\alpha} &= (n - r) \frac{-2 \frac{\theta^2 c^\alpha \ln c}{(\beta + \theta)^3} - 2 \frac{\theta^3 (c^\alpha)^2 \ln c (\theta + 3\beta)}{(\beta + \theta)^4} - 6 \frac{\theta^4 \beta^2 (c^\alpha)^3 \ln c}{(\beta + \theta)^5}}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta + \theta} c^\alpha\right)^4}, \\ \hat{\tau}_{\beta\theta\alpha} &= 2(n - r) \frac{\frac{\beta\theta c^\alpha \ln c}{(\beta + \theta)^3} + \frac{\theta^2 \beta^2 (c^\alpha)^2 \ln c}{(\beta + \theta)^4} - \frac{\theta^3 \beta^3 (c^\alpha)^3 \ln c}{(\beta + \theta)^5}}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta + \theta} c^\alpha\right)^4}, \\ \hat{\tau}_{\theta\alpha\alpha} &= \sum_{i=1}^r \frac{x_i^\alpha (\ln x_i)^2 (1 - \theta x_i^\alpha)}{(1 + \theta x_i^\alpha)^3} + (n - r) \frac{\frac{\beta^2}{(\beta + \theta)^2} c^\alpha (\ln c)^2 - \frac{\beta^3 \theta}{(\beta + \theta)^3} (c^\alpha)^2 (\ln c)^2}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta + \theta} c^\alpha\right)^3}, \\ \hat{\tau}_{\theta\beta\alpha} &= (n - r) \frac{\frac{2\beta\theta}{(\beta + \theta)^3} c^\alpha \ln c}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta + \theta} c^\alpha\right)^3}, \\ \hat{\tau}_{\theta\theta\alpha} &= -2 \sum_{i=1}^r \frac{(x_i^\alpha)^2 \ln x_i (1 - \theta x_i^\alpha)}{(1 + \theta x_i^\alpha)^3} - 2(n - r) \frac{\frac{\beta^2}{(\beta + \theta)^3} c^\alpha \ln c - \frac{2\beta^3 \theta}{(\beta + \theta)^4} (c^\alpha)^2 \ln c - \frac{\beta^4}{(\beta + \theta)^5} (c^\alpha)^2 \ln c}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta + \theta} c^\alpha\right)^3}, \\ \hat{\tau}_{\alpha\alpha\beta} &= - \sum_{i=1}^r x_i^\alpha (\ln x_i)^2 - (n - r) (\ln c)^2 c^\alpha \\ &\quad - (n - r) \frac{\frac{\theta^2}{(\beta + \theta)^2} (\ln c)^2 c^\alpha - \frac{\beta\theta^3}{(\beta + \theta)^3} (\ln c)^2 (c^\alpha)^2}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta + \theta} c^\alpha\right)^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\tau}_{\alpha\beta\beta} &= -2(n-r) \frac{\frac{\theta^2}{(\beta+\theta)^3} c^\alpha \ln c - \frac{\theta^3 (c^\alpha)^2 \ln c}{(\beta+\theta)^3}}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha\right)^3}, \\
\hat{\tau}_{\alpha\theta\beta} &= (n-r) \frac{\frac{2\beta\theta}{(\beta+\theta)^3} c^\alpha \ln c + \frac{2\beta^2\theta^2}{(\beta+\theta)^4} (c^\alpha)^2 \ln c - \frac{\beta^2\theta^2}{(\beta+\theta)^3} (c^\alpha)^2 \ln c}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha\right)^3}, \\
\hat{\tau}_{\beta\alpha\beta} &= -2(n-r) \frac{\frac{\theta^2}{(\beta+\theta)^3} c^\alpha \ln c + \frac{\beta\theta^3}{(\beta+\theta)^3} (c^\alpha)^2 \ln c + \frac{\theta^4}{(\beta+\theta)^4} (c^\alpha)^2 \ln c}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha\right)^3}, \\
\hat{\tau}_{\beta\beta\beta} &= \frac{4r}{\beta^3} - \frac{2r}{(\beta+\theta)^3} + \\
&- r) \frac{\frac{4\beta^3 (c^\alpha)^2}{(\beta+\theta)^3} (1+2\beta) + \frac{6\theta^2}{(\beta+\theta)^4} c^\alpha - \frac{4\theta^2}{(\beta+\theta)^5} (c^\alpha)^2 + \frac{4\theta^4 \beta (c^\alpha)^3 (1-\beta) + 4\theta^3 (c^\alpha)^2 (2\theta^3 c^\alpha - 1) - 6\theta^5 \beta (c^\alpha)^3 - 4\theta^4}{(\beta+\theta)^6}}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha\right)^3} \\
&= \frac{-2r}{(\beta+\theta)^3} \\
&+ (n \\
&- r) \frac{\left(\frac{4\beta\theta^2 c^\alpha - 2\beta^2\theta c^\alpha + 2\beta^2\theta^3 (c^\alpha)^2 - \beta^2\theta^2 (c^\alpha)^2 (\beta-\theta)}{(\beta+\theta)^4}\right) \left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha\right) - \left(\frac{2\beta^2\theta^3 (c^\alpha)^2}{(\beta+\theta)^5} + \frac{\beta^3\theta^4 (c^\alpha)^2}{(\beta+\theta)^6}\right)}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha\right)^3} \\
&\hat{\tau}_{\theta\alpha\beta} = (n-r) \frac{\frac{2\beta\theta c^\alpha \ln c}{(\beta+\theta)^3} - \frac{2\beta^3\theta^2 (c^\alpha)^3 \ln c}{(\beta+\theta)^5}}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha\right)^3}, \\
&\hat{\tau}_{\theta\beta\beta} \\
&= \frac{-2r}{(\beta+\theta)^3} \\
&+ (n-r) \frac{\frac{(2\theta^2 - 4\beta\theta)}{(\beta+\theta)^4} c^\alpha + \frac{2\beta\theta^3 - 2\beta^2\theta^2 - 4\beta^2\theta}{(\beta+\theta)^5} (c^\alpha)^2 - \frac{2\beta^3\theta^3}{(\beta+\theta)^6} (c^\alpha)^2}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha\right)^3}, \\
&\hat{\tau}_{\theta\theta\beta} \\
&= \frac{-2r}{(\beta+\theta)^3} \\
&- (n \\
&- r) \frac{\frac{(4\beta\theta - 2\beta^2)}{(\beta+\theta)^4} c^\alpha - \frac{2\beta^3\theta}{(\beta+\theta)^5} (c^\alpha)^2 + \frac{(6\beta^3 + 6\beta^2\theta - 4\beta^3\theta)(c^\alpha)^2 + (6\beta^4\theta + 6\beta^3\theta^2 - 6\beta^4\theta^2 - 4\beta}{(\beta+\theta)^6}}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha\right)^3} \\
&\hat{\tau}_{\alpha\alpha\theta} = \sum_{i=1}^r \frac{x_i^\alpha (\ln x_i)^2 (1 - \theta x_i^\alpha)}{(1 + \theta x_i^\alpha)^2} + (n-r) \frac{\frac{\theta^2}{(\beta+\theta)^2} (\ln c)^2 c^\alpha - \frac{\beta\theta(\beta-\theta)}{(\beta+\theta)^2} (\ln c)^2 (c^\alpha)^2}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha\right)^3}, \\
&\hat{\tau}_{\alpha\beta\theta} = (n-r) \frac{\frac{2\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha \ln c + \frac{2\beta^2\theta^2}{(\beta+\theta)^2} (c^\alpha)^2 \ln c - \frac{2\beta^2\theta^2}{(\beta+\theta)^4} c^\alpha \ln c}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha\right)^3}, \\
&\hat{\tau}_{\alpha\theta\theta} = -2 \sum_{i=1}^r \frac{(x_i^\alpha)^2 \ln x_i}{(1 + \theta x_i^\alpha)^3} - 2(n-r) \frac{\frac{\beta^2}{(\beta+\theta)^3} c^\alpha \ln c + \frac{\beta^3}{(\beta+\theta)^3} (c^\alpha)^2 \ln c}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha\right)^3}, \\
&\hat{\tau}_{\beta\alpha\theta} = (n-r) \frac{\frac{2\beta\theta}{(\beta+\theta)^3} c^\alpha \ln c}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha\right)^3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{l}_{\beta\theta\theta} &= \frac{-2r}{(\beta + \theta)^3} + (n-r) \frac{\frac{2\beta(\beta-2\theta)}{(\beta+\theta)^4} c^\alpha + \frac{2\beta^2\theta(\beta-\theta-2\beta\theta)}{(\beta+\theta)^5} (c^\alpha)^2}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha\right)^3}, \\ \hat{l}_{\theta\alpha\theta} &= -2 \sum_{i=1}^r \frac{x_i^\alpha (\ln x_i)^2}{(1 + \theta x_i^\alpha)^3} - (n-r) \frac{\frac{2\beta^2 c^\alpha \ln c + \beta^4 (c^\alpha)^2 \ln c}{(\beta+\theta)^4} + \frac{2\beta^3 \theta (c^\alpha)^2 \ln c}{(\beta+\theta)^5}}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha\right)^3}, \\ \hat{l}_{\theta\beta\theta} &= \frac{-2r}{(\beta + \theta)^3} + (n-r) \frac{\frac{2\beta(\beta-2\theta)}{(\beta+\theta)^4} c^\alpha + \frac{2\beta^2\theta(2\beta-3\theta)}{(\beta+\theta)^5} (c^\alpha)^2 + \frac{2\beta^3\theta^2(\beta-\theta)}{(\beta+\theta)^6} (c^\alpha)^3}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha\right)^3}, \\ \hat{l}_{\theta\theta\theta} &= \frac{-2r}{(\beta + \theta)^3} + 2 \sum_{i=1}^r \frac{(x_i^\alpha)^3}{(1 + \theta x_i^\alpha)^3} \\ &\quad - (n-r) \frac{\frac{-6\beta^2}{(\beta+\theta)^4} c^\alpha - \frac{4\beta^3(3\theta-\beta)}{(\beta+\theta)^5} (c^\alpha)^2 + \frac{\beta^4(2-\beta^2) - 6\beta^2\theta(\theta-\beta^3)}{(\beta+\theta)^6} (c^\alpha)^3}{\left(1 + \frac{\beta\theta}{\beta+\theta} c^\alpha\right)^3}, \end{aligned}$$

و با توجه به

$$\begin{aligned} \pi(\alpha, \beta, \theta) &\propto \alpha^{w_2-1} e^{-\alpha w_1} \beta^{w_4-1} e^{-\beta w_3} \theta^{w_6-1} e^{-\theta w_5}, \\ \ln \pi(\alpha, \beta, \theta) &\propto (w_2 - 1) \ln \alpha + (w_4 - 1) \ln \beta + (w_6 - 1) \ln \theta - \alpha w_1 - \beta w_3 - \theta w_5, \\ \hat{\rho}(\alpha, \beta, \theta) &= (w_2 - 1) \ln \hat{\alpha} + (w_4 - 1) \ln \hat{\beta} + (w_6 - 1) \ln \hat{\theta} - \hat{\alpha} w_1 - \hat{\beta} w_3 - \hat{\theta} w_5, \\ \hat{\rho}_\alpha &= \frac{w_2 - 1}{\alpha} - w_1, \\ \hat{\rho}_\beta &= \frac{w_4 - 1}{\beta} - w_3, \\ \hat{\rho}_\theta &= \frac{w_6 - 1}{\theta} - w_5. \end{aligned}$$

بنابراین برآوردهای بیز  $\alpha, \beta, \theta$  تحت تابع زیان مربع خطا برابرند با

$$\begin{aligned} U(\alpha, \beta, \theta) &= \alpha, \\ U_\alpha = 1 &\Rightarrow U_{\alpha\alpha} = U_\beta = U_\theta = U_{\beta\beta} = U_{\theta\theta} = U_{\alpha\beta} = U_{\alpha\theta} = U_{\beta\alpha} = U_{\theta\alpha} = 0, \\ I(X) = E(\alpha|D) &= \hat{\alpha} + \left[\left(\frac{w_2-1}{\alpha} - w_1\right) \hat{\sigma}_{\alpha\alpha} + \left(\frac{w_4-1}{\beta} - w_3\right) \hat{\sigma}_{\alpha\beta} + \left(\frac{w_6-1}{\theta} - w_5\right) \hat{\sigma}_{\beta\theta}\right. \\ &\quad \left. + 1/2 [\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}(I) + \hat{\sigma}_{\beta\alpha}(II) + \hat{\sigma}_{\theta\alpha}(III)]\right]. \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} U(\alpha, \beta, \theta) &= \beta, \\ U_\beta = 1 &\Rightarrow U_{\beta\beta} = U_\alpha = U_\theta = U_{\alpha\alpha} = U_{\theta\theta} = U_{\alpha\beta} = U_{\alpha\theta} = U_{\beta\alpha} = U_{\theta\alpha} = U_{\theta\beta} = U_{\theta\beta} = 0, \\ I(X) = E(\beta|D) &= \hat{\beta} + \left[\left(\frac{w_2-1}{\alpha} - w_1\right) \hat{\sigma}_{\beta\alpha} + \left(\frac{w_4-1}{\beta} - w_3\right) \hat{\sigma}_{\beta\beta} + \left(\frac{w_6-1}{\theta} - w_5\right) \hat{\sigma}_{\beta\theta}\right. \\ &\quad \left. + 1/2 [\hat{\sigma}_{\alpha\beta}(I) + \hat{\sigma}_{\beta\beta}(II) + \hat{\sigma}_{\theta\beta}(III)]\right]. \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} U(\alpha, \beta, \theta) &= \theta, \\ U_\theta = 1 &\Rightarrow U_{\theta\theta} = U_{\theta\alpha} = U_{\theta\beta} = U_{\alpha\alpha} = U_\beta = U_\alpha = U_{\beta\beta} = U_{\alpha\beta} = U_{\beta\alpha} = U_{\alpha\theta} = U_{\beta\theta} = 0, \\ I(X) = E(\theta|D) &= \hat{\theta} + \left[\left(\frac{w_2-1}{\alpha} - w_1\right) \hat{\sigma}_{\theta\alpha} + \left(\frac{w_4-1}{\beta} - w_3\right) \hat{\sigma}_{\theta\beta} + \left(\frac{w_6-1}{\theta} - w_5\right) \hat{\sigma}_{\theta\theta}\right. \\ &\quad \left. + 1/2 [\hat{\sigma}_{\alpha\theta}(I) + \hat{\sigma}_{\beta\theta}(II) + \hat{\sigma}_{\theta\theta}(III)]\right], \\ I &= \hat{l}_{\alpha\alpha\alpha} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha} + \hat{l}_{\alpha\beta\alpha} \hat{\sigma}_{\alpha\beta} + \hat{l}_{\alpha\theta\alpha} \hat{\sigma}_{\alpha\theta} + \hat{l}_{\beta\beta\alpha} \hat{\sigma}_{\beta\alpha} + \hat{l}_{\beta\beta\alpha} \hat{\sigma}_{\beta\beta} + \hat{l}_{\beta\theta\alpha} \hat{\sigma}_{\beta\theta} + \hat{l}_{\theta\alpha\alpha} \hat{\sigma}_{\theta\alpha} + \hat{l}_{\theta\beta\alpha} \hat{\sigma}_{\theta\beta} \\ &\quad + \hat{l}_{\theta\theta\alpha} \hat{\sigma}_{\theta\theta}, \\ II &= \hat{l}_{\alpha\alpha\beta} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha} + \hat{l}_{\alpha\beta\beta} \hat{\sigma}_{\alpha\beta} + \hat{l}_{\alpha\theta\beta} \hat{\sigma}_{\alpha\theta} + \hat{l}_{\beta\beta\beta} \hat{\sigma}_{\beta\alpha} + \hat{l}_{\beta\beta\beta} \hat{\sigma}_{\beta\beta} + \hat{l}_{\beta\theta\beta} \hat{\sigma}_{\beta\theta} + \hat{l}_{\theta\alpha\beta} \hat{\sigma}_{\theta\alpha} + \hat{l}_{\theta\beta\beta} \hat{\sigma}_{\theta\beta} \\ &\quad + \hat{l}_{\theta\theta\beta} \hat{\sigma}_{\theta\theta}, \\ III &= \hat{l}_{\alpha\alpha\theta} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha} + \hat{l}_{\alpha\beta\theta} \hat{\sigma}_{\alpha\beta} + \hat{l}_{\alpha\theta\theta} \hat{\sigma}_{\alpha\theta} + \hat{l}_{\beta\alpha\theta} \hat{\sigma}_{\beta\alpha} + \hat{l}_{\beta\beta\theta} \hat{\sigma}_{\beta\beta} + \hat{l}_{\beta\theta\theta} \hat{\sigma}_{\beta\theta} + \hat{l}_{\theta\alpha\theta} \hat{\sigma}_{\theta\alpha} + \hat{l}_{\theta\beta\theta} \hat{\sigma}_{\theta\beta} \\ &\quad + \hat{l}_{\theta\theta\theta} \hat{\sigma}_{\theta\theta}. \end{aligned} \tag{29}$$

## ۴-۲- روش زنجیره‌های مارکف مونت کارلو (MCMC)

اگر مدل دارای پارامترهای زیادی باشد، تقریب لیندلی به خوبی مدل‌هایی با تعداد پارامتر کمتر عمل نمی‌کند. در چنین مواردی، می‌توان از روش تکراری MCMC برای برآورد پارامترها استفاده کرد.

چالش اصلی در روش مونت کارلو، استخراج نمونه از چگالی  $f(x)$  است. روش نمونه‌گیری MCMC، یک زنجیره مارکف نامتناوب و تحویل‌ناپذیر را ایجاد می‌کند که توزیع ایستای آن برابر با توزیع پسین مورد نظر است. دو الگوریتم مهم برای تولید زنجیره‌های نمونه، الگوریتم متروپلیس-هستینگز و نمونه‌گیری گیبز هستند.

اگر تابع زیان برابر با معذور خطا باشد، در این صورت میانگین توزیع پسین برای هر یک از پارامترها، برآورد بی‌بازمان محسوب می‌شود.

### ۴-۲-۱- نمونه‌گیری گیبز

نمونه‌گیری گیبز یک کلاس گسترده از روش‌های MCMC است که در تحلیل بیزی مورد استفاده قرار می‌گیرد. الگوریتم گیبز روشی برای تولید زنجیره مارکف است که حالت چندمتغیره روش متروپلیس-هستینگز (MH) محسوب می‌شود [27].

برای شروع این روش، لازم است که چگالی‌های حاشیه‌ای پسین پارامترهای مدل محاسبه شوند.

$$\pi_1(\alpha|\beta, \theta, x) \propto \alpha^{r+w_2-1} \prod_{i=1}^r (1 + \theta x_i^\alpha) \prod_{i=1}^r x_i^{\alpha-1} e^{-\beta \sum_{i=1}^r x_i^\alpha - w_1 \alpha} \left\{ 1 + \frac{\beta \theta}{\beta + \theta} c^\alpha e^{-\beta c^\alpha} \right\}^{n-r} \quad (30)$$

$$\pi_2(\beta|\alpha, \theta, x) \propto \frac{\beta^{2r+w_4-1}}{(\beta + \theta)^r} e^{-\beta(\sum_{i=1}^r x_i^\alpha + w_3)} \left\{ 1 + \frac{\beta \theta}{\beta + \theta} c^\alpha e^{-\beta c^\alpha} \right\}^{n-r} \quad (31)$$

$$\pi_3(\theta|\alpha, \beta, x) \propto \frac{\theta^{w_6-1}}{(\beta + \theta)^r} \prod_{i=1}^r (1 + \theta x_i^\alpha) \left\{ 1 + \frac{\beta \theta}{\beta + \theta} c^\alpha e^{-\beta c^\alpha} \right\}^{n-r} e^{-w_5 \theta} \quad (32)$$

قضیه ۲- اگر  $w_4 > 1$  باشد، آنگاه توزیع شرطی  $\beta$  به شرط  $(x, \theta, \alpha)$ ، مقعر لگاریتمی است.

اثبات:

$$\frac{\partial^2 \log [\pi_2(\beta|\alpha, \theta, x)]}{\partial \beta^2} = \frac{-(2r + w_4 - 1)}{\beta^2} + \frac{r}{(\beta + \theta)^4} - \frac{(n-r)}{(\beta + \theta)^2} < 0.$$

چگالی‌های پسین  $\beta, \theta, \alpha$  که در بالا ارایه شد، نامعلوم هستند؛ بنابراین از روش MH برای تولید متغیرهای تصادفی از این توزیع‌ها استفاده می‌کنیم. بهترین انتخاب برای توزیع پیشنهادی (2 و 4) gamma است. گام‌های نمونه‌گیر گیبز به صورت زیر است:

۱. انتخاب برداری از مقادیر اولیه  $(\alpha^{(0)}, \beta^{(0)}, \theta^{(0)})$
۲.  $t=1$
۳. مقدار  $\alpha^{(t)}$  را از توزیع شرطی  $\pi(\alpha|\beta^{(t-1)}, \theta^{(t-1)}, x)$  بیرون می‌کشیم.
۴. مقدار  $\beta^{(t)}$  را از توزیع شرطی  $\pi(\beta|\alpha^{(t)}, \theta^{(t-1)}, x)$  با قرار دادن  $\alpha^{(t)}$  به جای  $\alpha^{(t-1)}$ ، انتخاب می‌کنیم.
۵. مقدار  $\theta^{(t)}$  را از توزیع شرطی  $\pi(\theta|\alpha^{(t)}, \beta^{(t)}, x)$  به دست می‌آوریم.
۶.  $t=t+1$

گام‌های ۲ تا ۶ را  $T$  بار تکرار می‌کنیم.

اینک الگوریتم MH را برای گام‌های ۳ تا ۵ اجرا می‌کنیم.

۱.  $t = 1$
۲.  $w_3, w_2, w_1$  را از توزیع پیشنهادی ( $g \sim \text{gama}(4, 2)$ ) تولید می‌کنیم.
۳.  $R_k = \frac{g(\theta^*) \pi_k(\theta^{(t-1)} | \theta^*)}{g(\theta^{(t-1)}) \pi_k(\theta^* | \theta^{(t-1)})}$   $k = 1, 2, 3$  را محاسبه می‌کنیم.
۴. احتمال پذیرش  $P_k = \min \{R_k, 1\}$  را به دست می‌آوریم.
۵.  $u$  را از توزیع  $U(0, 1)$  تولید می‌کنیم.
۶. اگر  $u < P_k$  باشد  $w_i$  را می‌پذیریم. در غیر این صورت به مرحله بعد می‌رویم.
۷.  $t = t + 1$
۸. گام ۲ تا گام ۷ را تکرار می‌کنیم.

### ۵- مطالعات شبیه‌سازی

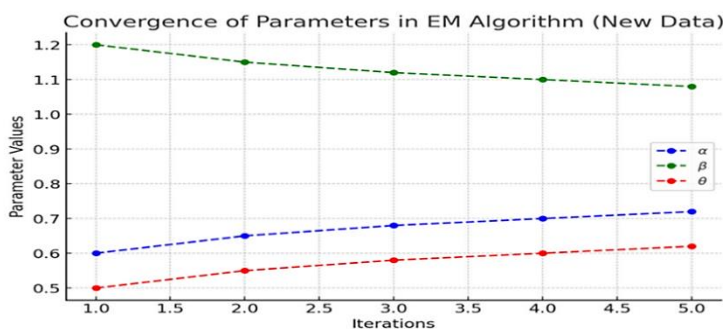
در مطالعات شبیه‌سازی به روش کلاسیک، ما نمونه‌ها را از توزیع  $EPL$  با  $\alpha = 1, \beta = 1, \theta = 1$  و  $n = 30$  تولید کردیم. فرآیند را ۱۰۰۰۰ بار تکرار کردیم. در برآورد پارامترها از روش ماکسیمم درستنمایی با استفاده از الگوریتم  $EM$ ، شبیه‌سازی را برای مقادیر مختلف  $T, r, k$  انجام دادیم.

جدول ۱- برآورد پارامترها ( $\theta, \beta, \alpha$ ) با استفاده از الگوریتم  $EM$  و انحراف معیار آن‌ها.

Table 1- Programs ( $\theta, b, \alpha$ ) using the EM algorithm and the deviation of those criteria.

T	75	30	4	k	r	
90	(0.604, 1.092, 0.906) (0.006, 0.015, 0.006)	(0.603, 1.094, 0.904) (0.014, 0.007, 0.005)	(0.601, 1.097, 0.902) (0.013, 0.014, 0.008)	(0.600, 1.100, 0.900) (0.006, 0.012, 0.009)	17	23
	(0.657, 1.111, 0.928) (0.006, 0.014, 0.011)	(0.655, 1.113, 0.926) (0.014, 0.016, 0.014)	(0.652, 1.117, 0.923) (0.011, 0.017, 0.006)	(0.650, 1.120, 0.920) (0.007, 0.012, 0.007)	27	33
	(0.678, 1.121, 0.939) (0.006, 0.012, 0.014)	(0.676, 1.123, 0.937) (0.007, 0.015, 0.010)	(0.673, 1.127, 0.934) (0.008, 0.018, 0.008)	(0.670, 1.130, 0.930) (0.006, 0.011, 0.007)	19	41
	(0.627, 1.106, 0.919) (0.011, 0.016, 0.010)	(0.625, 1.108, 0.917) (0.012, 0.011, 0.007)	(0.622, 1.112, 0.914) (0.014, 0.011, 0.007)	(0.620, 1.115, 0.910) (0.010, 0.011, 0.010)	25	25
	(0.707, 1.131, 0.949) (0.005, 0.013, 0.012)	(0.705, 1.133, 0.947) (0.013, 0.010, 0.011)	(0.702, 1.137, 0.944) (0.008, 0.018, 0.010)	(0.700, 1.140, 0.940) (0.009, 0.007, 0.008)	37	37

برآوردهای  $\theta, \beta, \alpha$  در جدول ۱ آورده شده است. در شکل ۳ میزان همگرایی پارامترها داده شده است. نمودارهای همگرایی نشان می‌دهند که مقادیر پارامترهای  $\alpha, \beta$  و  $\theta$  به تدریج در طول تکرارها به حالت پایداری رسیده‌اند. نمودار همگرایی الگوریتم  $EM$  نشان می‌دهد که مقدار درستنمایی به مرور به حالت پایدار همگرا می‌شود. در گام‌های اولیه، افزایش سریع در مقدار درستنمایی نشان‌دهنده تاثیر بالای مراحل اولیه الگوریتم در بهبود مدل است. این نتایج بیانگر کارایی بالای الگوریتم  $EM$  در تخمین پارامترهای مدل است، به شرطی که داده‌ها به خوبی توزیع مناسبی داشته باشند. الگوریتم توانسته است با حداقل تعداد تکرار، مقادیر بهینه را پیدا کند و این نشان‌دهنده قدرت آن در مسائل پیچیده تخمین پارامتر است.



شکل ۳- روند همگرایی پارامترها در الگوریتم  $EM$ .

Figure 3- Ggplot for convergence of parameters in EM algorithm.

در برآورد پارامترها به روش بیز از دو روش تقریب لیندلی و  $MCMC$  استفاده کرده‌ایم.

در جدول ۲ برآورد بیزی را با استفاده از تقریب لیندلی محاسبه کرده و  $MSE$  برآوردها را به دست آورده ایم. هایپر پارامترهای توزیع های پیشین  $w_1 = w_2 = 4, w_3 = 4, w_4 = 2$  و  $w_5 = 4, w_6 = 2$  در نظر گرفته و برای مقادیر مختلف پارامتر وقتی که  $R = 20, n = 40$  است نتایج را در جدول ۲ آورده ایم.

جدول ۲- میانگین تخمین ها و میانگین مربعات خطا (MSE) پارامترها با تغییرات مختلف  $(\alpha, \beta, \theta)$  و  $T$  برای مقادیر ثابت  $n=40$  و  $R=20$ .

Table 2- Average estimate (AE) and mean square error (MSEs) of the parameters for different variation of T when  $n = 40, R=20$ .

MSE $\theta$	AE $\theta$	MSE $\beta$	AE $\beta$	MSE $\alpha$	AE $\alpha$	T	$\theta$	$\beta$	$\alpha$
0.017000	0.095000	0.017589	0.099327	1.917222	1.337705	0.5	0.15	0.05	1.5
0.018000	0.100000	0.017139	0.095879	1.927086	1.342010	1.5	0.15	0.05	1.5
0.019500	0.105000	0.019676	0.104753	1.910326	1.330942	3.0	0.15	0.05	1.5
0.018000	0.098000	0.017694	0.099968	1.953364	1.347149	5.0	0.15	0.05	1.5
0.170000	0.310000	0.173613	0.315403	0.803665	0.887576	0.5	0.25	0.25	1
0.175000	0.320000	0.180251	0.322549	0.813284	0.892358	1.5	0.25	0.25	1
0.165000	0.310000	0.164529	0.309238	0.798596	0.879653	3.0	0.25	0.25	1
0.170000	0.315000	0.175689	0.318732	0.814237	0.891401	5.0	0.25	0.25	1
0.310000	0.470000	0.312891	0.468125	0.523181	0.650432	0.5	0.75	0.75	0.75
0.305000	0.460000	0.305284	0.459891	0.541254	0.661294	1.5	0.75	0.75	0.75
0.320000	0.470000	0.319843	0.472362	0.522416	0.649721	3.0	0.75	0.75	0.75
0.315000	0.465000	0.313121	0.464504	0.535193	0.658239	5.0	0.75	0.75	0.75
0.390000	0.560000	0.396814	0.561489	0.430712	0.567314	0.5	0.5	0.5	0.5
0.385000	0.550000	0.387913	0.553104	0.440257	0.573812	1.5	0.5	0.5	0.5
0.400000	0.565000	0.404762	0.569762	0.423890	0.560139	3.0	0.5	0.5	0.5
0.390000	0.555000	0.3932894	0.558493	0.437419	0.570204	5.0	0.5	0.5	0.5

در جدول ۳، برآورد بیزی پارامترها را با استفاده از زنجیره مارکف مونت کارلو به دست آورده و نتایج جدول های ۱ تا ۴، به شرح زیر گزارش می شود:

۱. برای مقدار ثابت  $T$  با افزایش  $r, k$ ، مقدار پارامترها به مقادیر واقعی پارامتر نزدیک تر شده است.
۲. درصد همگرایی پارامترها با افزایش  $T$ ، افزایش پیدا کرده است.
۳. مقادیر برآورد شده به روش بیزی با توجه به تابع زیان مربع خطا، با افزایش مقدار  $T$  به مقدار واقعی پارامتر نزدیک تر می شوند.
۴.  $MSE$  پارامترهای برآورد شده با کاهش  $T$  کمتر شده و نسبت به برآوردهای  $MLE$  مشابه کارایی کمتری دارند.
۵. مشاهده می شود که برآوردهای بیز از برآوردهای  $MIE$  اریبی کمتری دارند.
۶. در فواصل اطمینان بیشینه پسین داده شده، مشاهده می شود که در طرح سوم طول فواصل اطمینان برای  $\alpha, \beta$  کوتاهتر ولی  $\theta$  بیشتر شده است.
۷. واضح است که با وجود اینکه تابع ریسک وابسته به طرح است اما برآوردها سازگار هستند.
۸. با توجه به میانگین مربع خطا و انحراف استاندارد محاسبه در دو روش تقریب لیندلی و مونت کارلو مشاهده می شود که برآوردهای به دست آمده با استفاده از روش مونت کارلو کاراتر از برآوردهای دست آمده توسط تقریب لیندلی هستند.

جدول ۳- مقادیر ریسک برآورد شده همه برآوردها برای  $n, r$  داده شده و انحراف استاندارد آن ها.

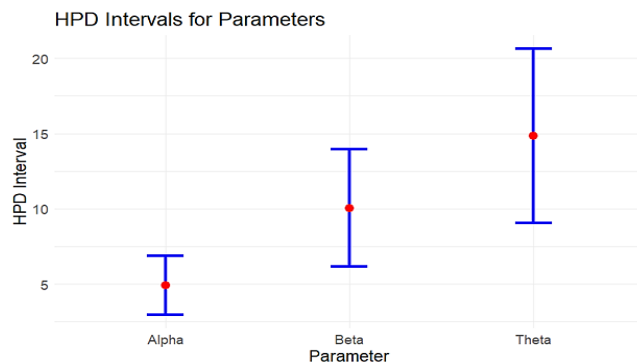
Table 3- The estimated risk values and SD of all estimates for all estimate of  $n$  and  $r$ .

$\hat{\theta}_s$ (sd)	$\hat{\beta}_s$ (sd)	$\hat{\alpha}_s$ (sd)	$\hat{r}_s$ (sd)	$\hat{n}_s$ (sd)	$\hat{\alpha}$ (sd)	$r$	$n$
0.784208(0.011)	0.800120(0.09)	1.285208(0.010)	1.290318(0.08)	3.378101(0.012)	3.410502(0.017)	5	20
0.816268(0.010)	0.825130(0.08)	1.328568(0.013)	1.335219(0.009)	3.302541(0.011)	3.328612(0.015)	10	40
0.834935(0.013)	0.845295(0.09)	1.398735(0.014)	1.408295(0.012)	3.005171(0.010)	3.238688(0.014)	15	60

جدول ۴- فواصل اطمینان HPD برای پارامترهای  $\theta, \beta, \alpha$ .

Table 4- The associated HPD credible intervals for  $\alpha, \beta, \theta$ .

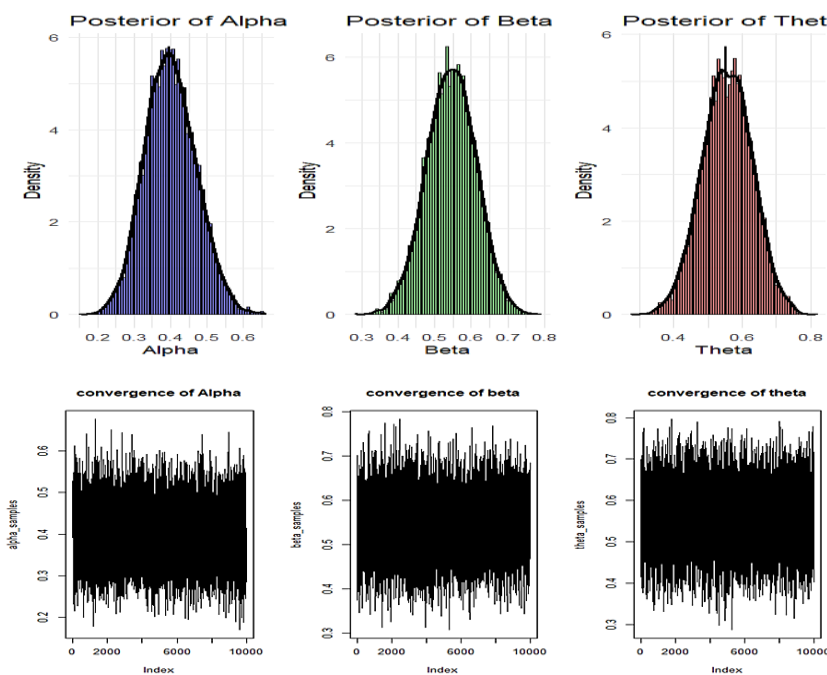
طول فواصل اطمینان $\theta, \beta, \alpha$	$\theta$	$\beta$	$\alpha$	$r$	$n$
2.3979, 1.3711, 0.3711	(0.1523, 0.5234)	(1.1523, 2.5234)	(2.1452, 4.5431)	5	20
2.4454, 1.3964, 0.3964	(0.1235, 0.5199)	(1.1235, 2.5199)	(2.1224, 4.5678)	10	40
2.4722, 1.3946, 0.3946	(0.1397, 0.5343)	(1.1397, 2.5343)	(2.1767, 4.5889)	15	60



شکل ۴- فواصل اطمینان بیشینه پسین برای  $\theta, \beta, \alpha$ .

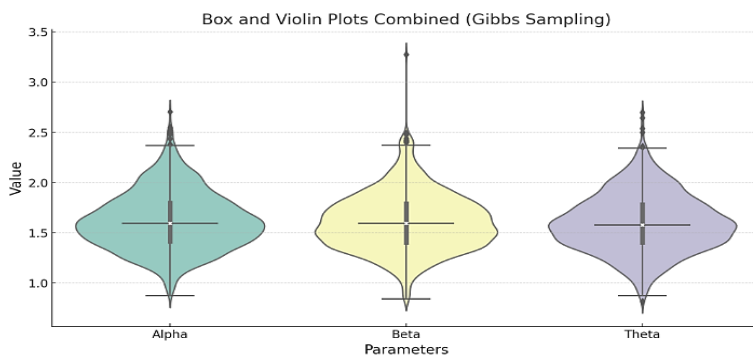
Figure 4- HPD interval for  $\theta, \beta, \alpha$ .

نمودارهای همگرایی نشان می‌دهند که مقادیر پارامترهای  $\alpha, \beta$  و  $\theta$  به تدریج در طول تکرارهای شبیه‌سازی مونت‌کارلو به حالت پایداری رسیده‌اند. در هر نمودار، نوسانات اولیه به مرور کاهش یافته و مقادیر حول یک نقطه ثابت متمرکز یافته‌اند. این رفتار بیانگر همگرایی مناسب الگوریتم است و نشان می‌دهد که تخمین‌ها به مقادیر واقعی نزدیک شده‌اند. نمودارها همچنین تفاوت در نوسانات هر پارامتر را نشان می‌دهند؛  $\theta$  پراکندگی کمتری دارند، در حالی که  $\alpha$  دارای نوسانات بیشتری در طی تکرارهاست.



شکل ۵- نمودارهای هیستوگرام و همگرایی برای  $\theta, \beta, \alpha$  در شبیه‌سازی مونت‌کارلو.

Figure 5- Trace plot and Histogram MCMC for  $\theta, \beta, \alpha$ .

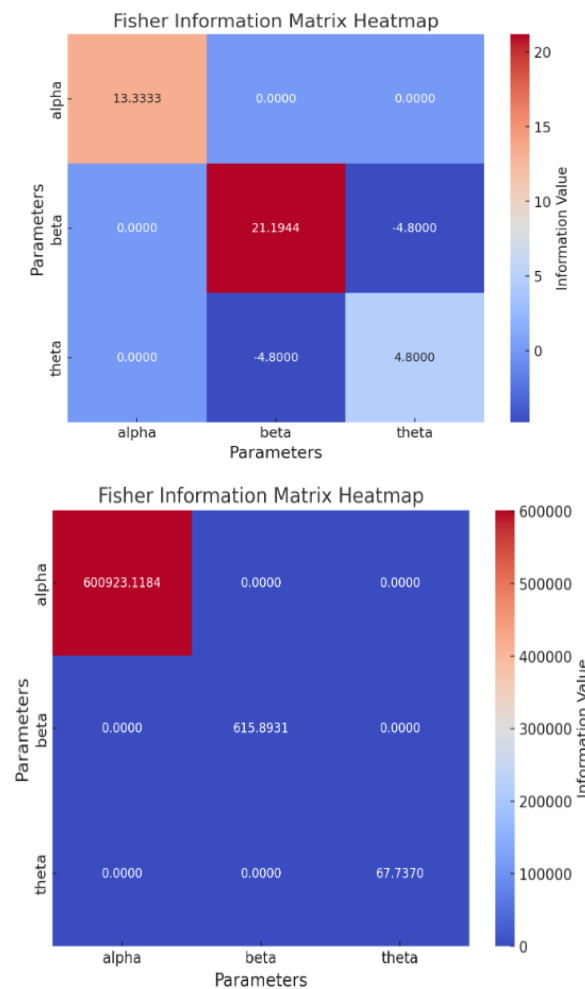


شکل ۶- نمودارهای ترکیبی جعبه‌ای و ویولن برای  $\theta, \beta, \alpha$  در نمونه‌گیری گیبز.

Figure 5- Box and Violin plots combined in Gibbs sampling for  $\theta, \beta, \alpha$ .

در نمودار ترکیبی *Boxplot* و *Violin Plot*، جزئیات بیشتری از توزیع پارامترها ارائه شده است. بخش‌های میانی هر *Boxplot* موقعیت میانه داده‌ها و فاصله بین چارک‌ها (*IQR*) را نشان می‌دهد که محدوده داده‌های متمرکز را مشخص می‌کند. طول خطوط در بالا و پایین هر *Boxplot* نشان‌دهنده مقادیر افراطی و محدوده بازه داده‌ها است. با این حال، *Violin Plot* در پشت *Boxplot* به‌عنوان مکملی برای نمایش چگالی توزیع داده‌ها عمل می‌کند. چگالی داده‌ها در اطراف مقادیر خاص نشان‌دهنده تمرکز داده‌ها در آن بازه‌هاست. در مورد پارامتر  $\alpha$ ، مشاهده می‌شود که مقادیر بیشتر داده‌ها در بازه نزدیک به میانگین قرار گرفته‌اند. پهنای *Violin Plot* برای  $\alpha$  در وسط آن نشان‌دهنده تراکم بالای داده‌ها در اطراف میانه است. با این حال، دم‌های کوچک‌تر در دو انتهای آن نشان می‌دهد که داده‌های خارج از این بازه محدودتر هستند. برای پارامتر  $\beta$ ، *Violin Plot* نشان‌دهنده یک توزیع مشابه اما کمی گسترده‌تر است، به طوری که تراکم داده‌ها در نزدیکی مرکز بازه کاهش یافته است. این موضوع نشان می‌دهد که  $\beta$  دارای نوسانات بیشتری است و نسبت به  $\alpha$  حساس‌تر به تغییرات داده‌ها عمل می‌کند. در مورد  $\theta$ ، توزیع تقریباً مشابهی با  $\beta$  دارد اما با تغییرات کمتر در دم‌ها. این موضوع نشان می‌دهد که  $\theta$  در مقایسه با  $\beta$  پایداری بیشتری دارد و داده‌ها تمایل بیشتری به متمرکز شدن در اطراف مقدار خاصی دارند.

نمودارهای ارائه شده ابزار بسیار قدرتمندی برای تحلیل هم‌زمان رفتار هر پارامتر و رابطه آن‌ها هستند. تمرکز داده‌ها در *Boxplots* همراه با شکل *Violin Plots* نشان می‌دهد که شبیه‌سازی به‌خوبی انجام شده است و الگوریتم‌های استفاده‌شده، همگرایی مناسبی برای پارامترها فراهم کرده‌اند. مقادیر مربوط به ماتریس اطلاعات فیشر نشان می‌دهد که مقدار اطلاعات در رابطه با پارامتر  $\alpha$  بسیار بالاست و این پارامتر بیشترین تاثیر را بر روی مدل دارد. این موضوع از مقدار بالای المان  $\alpha$  در ماتریس مشخص است. برای پارامتر  $\beta$ ، مقدار اطلاعات نیز قابل توجه است اما بسیار کمتر از  $\alpha$  می‌باشد. پارامتر  $\theta$  کمترین مقدار اطلاعات را ارائه می‌دهد که نشان‌دهنده حساسیت کمتر مدل نسبت به تغییرات در این پارامتر است. مقادیر سایر عناصر ماتریس که نشان‌دهنده اطلاعات مشترک بین پارامترها هستند مانند  $(\alpha, \beta)$  یا  $(\alpha, \theta)$  تقریباً صفر هستند، که بیانگر این است که این پارامترها تاثیر متقابلی بر یکدیگر ندارند یا این تاثیر بسیار ناچیز است.



شکل ۷- ماتریس اطلاع فیشر برای  $\theta, \beta, \alpha$ .

Figure 4- Heatmap plots of Fisher information matrix for  $\theta, \beta, \alpha$ .

## ۶- مثال واقعی

در این بخش، یک مجموعه داده واقعی را برای نشان دادن روش پیشنهادی ارائه می‌دهیم. این مجموعه داده‌ها نخستین بار توسط چیکارا و فولکز [28] مورد توجه قرار گرفت. سپس کوماراسینگ و همکاران [29] این مجموعه داده‌ها را برای مدل لوماکس به کار بردند. ۴۶ داده مربوط به زمان تعمیر (به ساعت) برای یک فرستنده ارتباطی هوابرد به صورت مرتب شده داده شده است.

0.2, 0.3, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.6, 0.6, 0.7, 0.7, 0.7, 0.8, 0.8, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.1, 1.3, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 2.0, 2.0, 2.2, 2.5, 2.7, 3.0, 3.0, 3.3, 3.3, 4.0, 4.0, 4.5, 4.7, 5.0, 5.4, 5.4, 7.0, 7.5, 8.8, 9.0, 10.3, 22.0, 24.5.

جدول ۵- برآورد ماکسیمم درست‌نمایی و الگوریتم EM و انحراف استاندارد آن‌ها.

Table 5- Maximum likelihood estimation and EM algorithm and their standard deviation.

EM Estimate(sd)	MLE Estimate(sd)	Parameter
0.980125(0.011)	0.980125(0.008)	Shape ( $\alpha$ )
3.761722(0.010)	3.761722(0.012)	Scale ( $\theta$ )
0.265302(0.009)	0.265302(0.007)	Rate ( $\beta$ )

بر اساس برآوردهای MLE و EM برای پارامترهای مدل EPL، مشاهده می‌شود که پارامترهای شکل ( $\alpha$ )، مقیاس ( $\theta$ ) و نرخ ( $\beta$ ) در هر دو روش به طور دقیق یکسان هستند. مقدار برآورد شده برای پارامتر شکل ( $\alpha$ ) برابر با 0.980125 و برای مقیاس ( $\theta$ ) برابر با 3.761722 است. همچنین پارامتر نرخ ( $\beta$ ) برابر با 0.265302 برآورد شده است. این تطابق بین برآوردهای دو روش نشان‌دهنده دقت بالای مدل EPL در برازش داده‌ها با استفاده از هر دو روش است.

جدول ۶- برآورد پارامترها و مقدار -LogL، AIC و BIC.

Table 6- Estimation of parameters and -logL, AIC, BIC value.

BIC	AIC	-LogL	SD ( $\alpha, \beta, \theta$ )	Estimate ( $\alpha, \beta, \theta$ )	Model
219.687	216.030	106.015	0.008, 0.009, 0.012	0.980125, 0.265302, 3.761722	EPL
290.010	233.086	109.543	0.010, -, 0.013	0.150, -, 4.100	Weibull

بر اساس نتایج مدل EPL، پارامترهای شکل ( $\alpha$ ) و مقیاس ( $\theta$ ) به ترتیب برابر با 0.980125 و 3.761722 برآورد شده‌اند. مقدار -LogL برابر با 106.015- است که نشان‌دهنده مقادیر منفی لاگ-درست‌نمایی برای مدل EPL می‌باشد. همچنین، معیارهای AIC و BIC به ترتیب 216.030 و 219.687 محاسبه شده‌اند. این مقادیر برای ارزیابی کیفیت مدل EPL استفاده می‌شوند. AIC (معیار اطلاعات آکاییک) و BIC (معیار اطلاعات بیزی) هر دو معیارهایی برای انتخاب مدل‌های آماری هستند و معمولاً مدل‌هایی با کمترین مقادیر این شاخص‌ها بهترین برازش را دارند. این نتایج نشان می‌دهند که مدل EPL در مقایسه با مدل وایبول با این پارامترها به خوبی به داده‌های موجود برازش یافته است.

جدول ۷- تخمین میانگین (AE) و برآوردهای بیزی پارامترها بر اساس داده‌های واقعی.

Table 7- Average estimate (AE), Bayesian estimate of parameters based on real data.

بیزی ( $\alpha$ )	بیزی ( $\theta$ )	بیزی ( $\beta$ )	AE ( $\theta$ )(SD)	AE ( $\beta$ )(SD)	AE ( $\alpha$ )(SD)	R	T	n
1.75	3.9137	0.26065	3.2375(0.013)	0.2649(0.007)	0.980125(0.010)	40	4.5	30
1.75	3.9137	0.26065	3.2358(0.012)	0.2758(0.009)	0.980125(0.009)	35	5.0	35
1.75	3.9137	0.26065	3.2358(0.010)	0.2758(0.008)	0.980125(0.011)	25	7.0	25
1.75	3.9137	0.26065	3.2355(0.009)	0.2758(0.010)	0.980125(0.012)	20	10	20

## ۷- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، استنباط آماری پارامترهای مجهول توزیع لیندلی توانی تعمیم‌یافته (EPL) در شرایط داده‌های سانسور شده هیبرید نوع دوم مورد بررسی قرار گرفت. در این راستا، هر دو رویکرد کلاسیک و بیزی برای برآورد پارامترهای نامعلوم ارائه شدند. نتایج نشان داد که برآوردهای ماکسیمم

درست‌نمایی (MLE) فاقد فرم بسته هستند؛ از این رو، برای محاسبه این برآوردها از الگوریتم  $EM$  به‌عنوان یک روش تقریبی استفاده شد. بررسی‌ها نشان داد که برآوردهای به‌دست‌آمده از این روش به مقادیر واقعی پارامترها بسیار نزدیک هستند. در ادامه، برای برآورد بیزی پارامترها تحت تابع زیان مربع خطا اقدام شد. در این حالت نیز به دلیل نبود فرم بسته برای برآوردها، از تقریب لیندلی بهره گرفتیم. علاوه بر این، برای محاسبه فواصل اطمینان  $HPD$  از روش نمونه‌گیری گیبز استفاده شد. نتایج حاکی از آن بود که استفاده از زنجیره مارکوف مونت کارلو<sup>1</sup> (MCMC) نسبت به تقریب لیندلی از نظر سادگی و دقت عملکرد بهتری دارد. سپس یک مجموعه داده واقعی را برای نشان دادن روش پیشنهادی ارائه دادیم که شامل ۴۶ داده مربوط به زمان تعمیر (به ساعت) برای یک فرستنده ارتباطی هواپرد هستند. بر اساس برآوردهای  $MLE$  و  $EM$  برای پارامترهای مدل  $EPL$ ، مشاهده می‌شود که پارامترهای شکل  $(\alpha)$ ، مقیاس  $(\theta)$  و نرخ  $(\beta)$  در هر دو روش به‌طور دقیق یکسان هستند. مقدار برآورد شده برای پارامتر شکل  $(\alpha)$  برابر با 0.980125 و برای مقیاس  $(\theta)$  برابر با 3.761722 است. همچنین پارامتر نرخ  $(\beta)$  برابر با 0.265302 برآورد شده است. این تطابق بین برآوردهای دو روش نشان‌دهنده دقت بالای مدل  $EPL$  در برازش داده‌ها با استفاده از هر دو روش است. در این پژوهش، تمرکز بر داده‌های سانسور شده هیبرید نوع دوم بود، اما روش‌های پیشنهادی قابلیت تعمیم و کاربرد برای سایر طرح‌های سانسور را نیز دارند.

## تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از سردبیر و داوران محترم مجله در ارزیابی مقاله قدردانی و تشکر می‌کند.

## منابع مالی

این پژوهش بدون دریافت هرگونه حمایت مالی از سوی نهادها، سازمان‌ها یا مراکز تحقیقاتی انجام شده است.

## اعلام تعارض منافع

نویسندگان اظهار می‌دارند که هیچ‌گونه تعارض منافی در انجام این پژوهش وجود ندارد.

## منابع

- [1] Ghitany, M. E., Atieh, B., & Nadarajah, S. (2008). Lindley distribution and its application. *Mathematics and computers in simulation*, 78(4), 493–506. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2007.06.007>
- [2] Al-Mutairi, D. K., Ghitany, M. E., & Kundu, D. (2013). Inferences on stress-strength reliability from lindley distributions. *Communications in statistics-theory and methods*, 42(8), 1443–1463. <https://doi.org/10.1080/03610926.2011.563011>
- [3] Bakouch, H. S., Al-Zahrani, B. M., Al-Shomrani, A. A., Marchi, V. A. A., & Louzada, F. (2012). An extended Lindley distribution. *Journal of the Korean statistical society*, 41(1), 75–85. <https://doi.org/10.1016/j.jkss.2011.06.002>
- [4] Bhati, D., Malik, M. A., & Vaman, H. J. (2015). Lindley-Exponential distribution: Properties and applications. *Metron*, 73(3), 335–357. <https://doi.org/10.1007/s40300-015-0060-9>
- [5] Alkarni, S. H. (2015). Extended inverse Lindley distribution: properties and application. *SpringerPlus*, 4(1), 1–13. <https://doi.org/10.1186/s40064-015-1489-2>
- [6] Sharma, V. K., Singh, S. K., & Singh, U. (2017). Classical and Bayesian methods of estimation for power Lindley distribution with application to waiting time data. *Communications for statistical applications and methods*, 24(3), 193–209. <https://doi.org/10.5351/CSAM.2017.24.3.193>
- [7] Shanker, R., Sharma, S., & Shanker, R. (2013). A two-parameter Lindley distribution for modeling waiting and survival times data. *Applied mathematics*, 4(2), 363–368. <https://doi.org/10.4236/am.2013.42056>
- [8] Hofan Alkarni, S. (2015). Extended power lindley distribution: A new statistical model for non-monotone survival data. *European journal of statistics and probability*, 3(19), 19–34. <https://B2n.ir/pe2916>
- [9] Ghitany, M. E., Al-Mutairi, D. K., Balakrishnan, N., & Al-Enezi, L. J. (2013). Power Lindley distribution and associated inference. *Computational statistics and data analysis*, 64, 20–33. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2013.02.026>

<sup>1</sup>Markov Monte Carlo (MMC)

- [10] Makhdoom, I., Nasiri, P., & Pak, A. (2016). Bayesian approach for the reliability parameter of power Lindley distribution. *International journal of system assurance engineering and management*, 7(3), 341–355. <https://doi.org/10.1007/s13198-016-0476-5>
- [11] Alotaibi, R., Nassar, M., Rezk, H., & Elshahhat, A. (2022). Inferences and engineering applications of alpha power Weibull distribution using progressive type-II censoring. *Mathematics*, 10(16), 1–21. <https://doi.org/10.3390/math10162901>
- [12] Elgarhy, M., Al Mutairi, A., Hassan, A. S., Chesneau, C., & Abdel-Hamid, A. H. (2023). Bayesian and non-bayesian estimations of truncated inverse power Lindley distribution under progressively type-II censored data with applications. *AIP advances*, 13(9), 1–36. <https://doi.org/10.1063/5.0172632>
- [13] Balakrishnan, N., & Kundu, D. (2013). Hybrid censoring: Models, inferential results and applications. *Computational statistics and data analysis*, 57(1), 166–209. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2012.03.025>
- [14] Childs, A., Chandrasekar, B., Balakrishnan, N., & Kundu, D. (2003). Exact likelihood inference based on Type-I and Type-II hybrid censored samples from the exponential distribution. *Annals of the institute of statistical mathematics*, 55, 319–330. <https://doi.org/10.1007/BF02530502>
- [15] Tsai, T. R., Lio, Y., & Ting, W. C. (2021). Em algorithm for mixture distributions model with type-i hybrid censoring scheme. *Mathematics*, 9(19), 2483. <https://doi.org/10.3390/math9192483>
- [16] Kundu, D., & Pradhan, B. (2009). Estimating the parameters of the generalized exponential distribution in presence of hybrid censoring. *Communications in statistics-theory and methods*, 38(12), 2030–2041. <https://doi.org/10.1080/03610920802192505>
- [17] Ng, H. K. T., Chan, P. S., & Balakrishnan, N. (2002). Estimation of parameters from progressively censored data using EM algorithm. *Computational statistics and data analysis*, 39(4), 371–386. [https://doi.org/10.1016/S0167-9473\(01\)00091-3](https://doi.org/10.1016/S0167-9473(01)00091-3)
- [18] Society, R. S. (2016). Finding the observed information matrix when using the EM algorithm. *Journal of the royal statistical society, series B (Statistical methodology)*, 44(2), 226–233. <https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1982.tb01203.x>
- [19] Hartley, H. O., & Hocking, R. R. (1971). The analysis of incomplete data. *Biometrics*, 783–823. <https://www.jstor.org/stable/2528820>
- [20] Habibi Rad, A., & Izanlo, M. (2012). An EM algorithm for estimating the parameters of the generalized exponential distribution under unified hybrid censored data. *Journal of statistical research of Iran JSRI*, 8(2), 215–228. (In Persian). <http://jsri.srtc.ac.ir/article-1-74-en.html>
- [21] Gupta, R. D., & Kundu, D. (2001). Exponentiated exponential family: An alternative to gamma and Weibull distributions. *Biometrical journal*, 43(1), 117–130. [https://doi.org/10.1002/1521-4036\(200102\)43:1<117::AID-BIMJ117>3.0.CO;2-R](https://doi.org/10.1002/1521-4036(200102)43:1<117::AID-BIMJ117>3.0.CO;2-R)
- [22] Lindley, D. V. (1972). *Bayesian statistics: A review*. SIAM. <https://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/1.9781611970654.bm>
- [23] Sharma, V. K., Singh, S. K., Singh, U., & Agiwal, V. (2015). The inverse Lindley distribution: A stress-strength reliability model with application to head and neck cancer data. *Journal of industrial and production engineering*, 32(3), 162–173. <https://doi.org/10.1080/21681015.2015.1025901>
- [24] Sharma, V. K., Singh, S. K., Singh, U., & Ul-Farhat, K. (2017). Bayesian estimation on interval censored Lindley distribution using Lindley's approximation. *International journal of system assurance engineering and management*, 8, 799–810. <https://doi.org/10.1007/s13198-016-0528-x>
- [25] Sultan, K. S., Alsadat, N. H., & Kundu, D. (2014). Bayesian and maximum likelihood estimations of the inverse Weibull parameters under progressive type-II censoring. *Journal of statistical computation and simulation*, 84(10), 2248–2265. <https://doi.org/10.1080/00949655.2013.788652>
- [26] Butts, C. T. (2007). Statistical mechanical models for social systems. *Constructal theory of social dynamics* (pp. 197–223). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-0-387-47681-0\\_11](https://doi.org/10.1007/978-0-387-47681-0_11)
- [27] McCarthy, M. A. (2012). MCMC algorithms. *Bayesian methods for ecology*, 277–281. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511802454.016>
- [28] Chhikara, R. S., & Folks, J. L. (1977). The inverse Gaussian distribution as a lifetime model. *Technometrics*, 19(4), 461–468. <https://doi.org/10.1080/00401706.1977.10489586>
- [29] Yadav, A. S., Singh, U., & Singh, S. K. (2017). Bayesian estimation of Lomax distribution under type-II hybrid censored data using Lindley's approximation method. *International journal of data science*, 2(4), 352–368. <https://doi.org/10.1504/ijds.2017.10009048>