



Paper Type: Original Article

Fixed Cost Allocation Plan Based on Robust Optimization in Data Envelopment Analysis: A Case Study of the Banking Industry

Javad Gerami* 

Department of Mathematics, Shiraz Branch, Islamic Azad University, Shiraz, Iran; geramijavad@gmail.com.

Citation:

Received: 12 February 2024

Revised: 14 May 2024

Accepted: 27 June 2024

Gerami, J. (2024). Fixed cost allocation plan based on robust optimization in data envelopment analysis: A case study of the banking industry. *Journal of Quality Engineering and Management*, 14(3), 272-288.

Abstract

Purpose: This study aims to propose a fair fixed cost allocation scheme among a set of Decision-Making Units (DMUs), such as banks or factories, in an uncertain environment. The allocation is designed so as not to reduce DMU efficiency and may even lead to efficiency improvements.

Methodology: To achieve this goal, a model is developed based on Data Envelopment Analysis (DEA) integrated with robust optimization. The inputs and outputs of the DMUs are treated as fuzzy random variables to reflect environmental uncertainty. The model is linearized and converted into a deterministic programming model using principles from stochastic programming. Furthermore, a common set of weights is used to ensure fairness in the allocation process.

Findings: The results indicate that, under the proposed fixed-cost allocation plan, the DMUs' (banks') efficiency scores are not only maintained but, in many cases, improved, confirming the model's effectiveness in preserving and enhancing performance under uncertain conditions.

Originality/Value: The novelty of this research lies in integrating DEA and robust optimization in uncertain environments to design a cost allocation model that ensures non-decreasing efficiency. Using a common set of weights enhances the approach's fairness. Additionally, applying the model to the Iranian banking sector highlights its practical relevance and managerial value.

Keywords: Data envelopment analysis, Fixed cost allocation, Robust optimization, Joint weight set, Banking.



طرح تخصیص هزینه ثابت بر اساس بهینه‌سازی استوار در تحلیل پوششی داده‌ها:

مطالعه موردی صنعت بانکداری

جواد گرامی*

گروه ریاضی، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران.

چکیده

هدف: هدف این پژوهش، ارائه یک مدل منصفانه برای تخصیص هزینه ثابت میان مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیرنده مانند بانک‌ها یا کارخانه‌ها، در یک محیط نامطمئن است به نحوی که کارایی واحدها کاهش نیابد و حتی در مواردی بهبود یابد.

روش‌شناسی پژوهش: برای تحقق هدف، از تحلیل پوششی داده‌ها همراه با بهینه‌سازی استوار استفاده شده است. در این مدل، ورودی‌ها و خروجی‌های واحدها به صورت اعداد نادقیق تصادفی در نظر گرفته شده و برای خطی‌سازی مدل و تبدیل آن به یک فرم برنامه‌ریزی قطعی، از مفاهیم برنامه‌ریزی تصادفی بهره گرفته شده است؛ همچنین، مفهوم مجموعه وزن‌های مشترک برای ایجاد یک مبنای منصفانه در تخصیص به کار رفته است.

یافته‌ها: یافته‌ها نشان می‌دهند که با استفاده از طرح تخصیص هزینه ثابت پیشنهادی، کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده (بانک‌ها) نه تنها کاهش نمی‌یابد بلکه در بسیاری از موارد افزایش می‌یابد. این موضوع نشان‌دهنده موفقیت مدل در حفظ و ارتقا کارایی در فرآیند تخصیص منابع در شرایط عدم قطعیت است.

اصالت/ارزش افزوده علمی: نوآوری اصلی پژوهش در ترکیب تحلیل پوششی داده‌ها با بهینه‌سازی استوار در محیط‌های نامطمئن و توسعه یک مدل تخصیص هزینه ثابت بر پایه عدم کاهش کارایی و استفاده از مجموعه وزن‌های مشترک است؛ همچنین کاربرد عملی مدل در صنعت بانکداری ایران به ارزش واقعی پژوهش در فضای تصمیم‌گیری مدیریتی می‌افزاید.

کلیدواژه‌ها: تحلیل پوششی داده‌ها، تخصیص هزینه ثابت، بهینه‌سازی استوار، مجموعه وزنه‌های مشترک، بانکداری.

۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها یک روش غیرپارامتری برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده است که می‌تواند برای تخصیص هزینه‌های ثابت میان واحدهای تصمیم‌گیرنده، به صورت عادلانه و منصفانه مورد استفاده قرار گیرد. در این روش هزینه ثابت بر اساس سهم هر واحد از منابع مصرفی یا خروجی‌های تولیدی، تخصیص می‌یابد. تخصیص هزینه ثابت با تحلیل پوششی داده‌ها یک روش پارامتری عادلانه است که می‌تواند در سازمان‌های

خدماتی صنعتی و مالی مورد استفاده قرار گیرد [4-1]. در بسیاری از سازمان‌ها و واحدهای تولیدی تخصیص بهینه هزینه‌های ثابت میان بخش‌های مختلف یک چالش اساسی محسوب می‌شود. هزینه‌های ثابت شامل مخارجی هستند که مستقل از میزان تولیدات یا خدمات ارائه شده باید پرداخت شوند. این هزینه‌ها مانند اجاره استهلاک تجهیزات حقوق کارمندان ثابت و سایر هزینه‌های عمومی. تخصیص نادرست این هزینه‌ها می‌تواند بر عملکرد سازمان‌ها تأثیر بگذارد و منجر به ناکارآمدی سازمان‌ها گردد. در بسیاری از سازمان‌ها و واحدهای عملیاتی تخصیص هزینه‌های ثابتی از مسایل کلیدی در مدیریت‌های مالی و بهینه‌سازی منابع می‌باشد [5]. هزینه‌های ثابت شامل مخارجی هستند که شامل چه مستقل از سطح تولید یا خدمات ارائه شده بوده و باید میان واحدهای مختلف به گونه‌ای تخصیص یابد که عملکرد کلی سازمان بهبود یابد یکی از چالش‌های اساسی در این زمینه دستیابی به یک روش منصفانه و کارآمد برای تخصیص این هزینه‌ها بر اساس عملکرد واقعی واحدها می‌باشد [6].

تخصیص هزینه‌های ثابت یکی از مسایل مهم در بسیاری از سازمان‌ها، از جمله بانک‌ها و بنگاه‌های تجاری و صنعتی است. این امر به مدیران کمک می‌کند تا به سازمان تحت مدیریت خود نگاهی منصفانه داشته باشند و از هدر رفت منابع کلی سازمان جلوگیری کنند. همچنین، هزینه‌های ثابت نقشی کلیدی در فرآیند تصمیم‌گیری در زمینه قیمت‌گذاری و تعیین سودآوری صنایع مختلف ایفا می‌کنند. تخصیص صحیح این هزینه‌ها بین واحدهای مختلف تصمیم‌گیری در حوزه‌های گوناگون، مانند تخصیص هزینه‌های تبلیغاتی بین خرده‌فروشان و تخصیص منابع بهداشتی و ارتقای تجهیزات، ضروری است. در این زمینه، گروهی از مطالعات بر پایه کار بنیادی کوک و کرس [7] توسعه یافته‌اند که دو فرض اصلی را معرفی می‌کنند: "عدم تغییر کارایی" و "پارتو-حداقلی". اصل عدم تغییر کارایی بیان می‌کند که پس از تخصیص هزینه‌های ثابت بین واحدهای تصمیم‌گیری، کارایی این واحدها نباید نسبت به حالت قبل از تخصیص تغییر کند. پس از آن، کوک و ژو [8] کار کوک و کرس [7] را برای مدل‌های مختلف گسترش دادند.

لین [9] نیز اصلاحاتی را بر اساس رویکرد کوک و ژو [8] پیشنهاد کرد، اما تغییرات حاصل شده چندان معنادار نبودند. آن‌ها به تخصیص منابع پرداخته و دو اصل تغییرناپذیری کارایی و وزن‌های مشترک را در تخصیص منابع و اهداف بین واحدهای تصمیم‌گیرنده در نظر گرفتند. آنان مکانیزم جدیدی را پیشنهاد کرده‌اند که به‌طور هم‌زمان این اصول را در تخصیص منابع متعدد به‌ویژه در موقعیت‌های مختلف تخصیص هدف‌های متعدد بین واحدها، لحاظ می‌کند. آن و همکاران [10]، رویکردی مبتنی بر کارایی را برای حل مشکلات تخصیص هزینه‌های ثابت در سیستم‌های دو مرحله‌ای ارائه دادند و این مدل را به سیستم‌های عمومی تعمیم دادند. چو و همکاران [11]، رویکرد دو مرحله‌ای را برای تخصیص درآمدهای مشترک یا هزینه‌های ثابت معرفی نمودند. ژانگ و همکاران [12]، استراتژی‌های بازی تهاجمی را برای تخصیص هزینه‌ها در یک محیط غیرمتمرکز معرفی کردند. این رویکرد به‌ویژه در سیستم‌هایی که واحدهای تصمیم‌گیرنده به‌صورت مستقل از هم عمل می‌کنند، مفید است. آن و همکاران [13]، یک مدل جدید و مقاوم تخصیص هزینه ثابت برای سیستم‌های دو مرحله‌ای با ورودی‌ها و خروجی‌های غیرقطعی معرفی نمودند. حسین زاده سلجوقی و همکاران [14]، یک مدل جدید برای تخصیص منصفانه هزینه ثابت در سیستم‌های یک و دومرحله‌ای با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها ارائه دادند.

در دنیای واقعی با موارد زیادی روبرو باشیم که داده‌ها به‌صورت نادقیق می‌باشند. تقریب‌های متفاوتی برای رویارویی با داده‌های نادقیق وجود دارد. به‌عنوان مثال تحلیل پوششی داده‌های فازی [15]، تحلیل پوششی داده‌های آماری [19-16]، بهینه‌سازی استوار [20]. یکی از تقریب‌های مناسب برای رویارویی با داده‌های نامطمئن بهینه‌سازی استوار می‌باشد. تقریب‌های متفاوتی بر پایه بهینه‌سازی استوار در چارچوب تحلیل پوششی داده‌ها ارائه شده است. سجادی و همکاران [21] اولین مدل‌ها را در بهینه‌سازی استوار در تحلیل پوششی داده‌ها ارائه دادند. عمرانی [22] یک مدل بهینه‌سازی استوار در تحلیل پوششی داده‌ها بر پایه مجموعه‌ای از وزن‌های مشترک در تحلیل پوششی داده‌ها ارائه دادند. عرب‌مالدار و همکاران [23] یک مدل بهینه‌سازی استوار در تحلیل پوششی داده‌ها جدید بری رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده بر اساس مدل ابر کارایی تحلیل پوششی داده‌ها در تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر ارائه دادند. طلوع و همکاران [24] یک مدل بهینه‌سازی استوار در تحلیل پوششی داده‌ها تحت تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر با تمرکز بررسی برآمد قیود نامنفرد و در متغیرهای تصمیم‌گیرنده و پیچیدگی مدل بهینه‌سازی استوار در تحلیل پوششی داده‌ها برای رفتار با داده‌های نامطمئن ارائه دادند.

صلاحی و همکاران [25] یک رویکرد جدید بر اساس مفهوم وزن مشترک در بهینه‌سازی استوار برای مدل‌های سنتی تحلیل پوششی داده‌ها ارائه دادند. عرب‌مالدار و همکاران [26] یک مدل کلی بر اساس مدل تابع فاصله جهت‌دار در یک محیط نامطمئن ارائه دادند. آن‌ها با ساختن مجموع امکان تولید در حضور ورودی‌ها و خروجی‌های نامطمئن کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده را به‌دست آوردند. آن‌ها مدل بهینه‌سازی استوار در تحلیل پوششی داده‌ها خود را برای ارزیابی عملکرد شرکت‌های بیمه در کشور هند بکار بردند. یکی از رویکردها در تحلیل پوششی داده‌ها برای ارزیابی

واحدها در یک بستر مشترک مجموعه وزن‌های مشترک می‌باشد. در روش مجموعه وزن‌های مشترک تمام واحدها بر اساس یک مجموعه مشترک از وزن‌ها از مولفه‌های ورودی و خروجی مقایسه می‌گردند [27]. برتری روش مجموعه وزن‌های مشترک را بر روش‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها به صورت شرح زیر می‌باشد:

۱. قابلیت مقایسه منصفانه بین واحدها: در مدل‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها نظیر *CCR* یا *BCC*، هر واحد تصمیم‌گیرنده وزن‌هایی را برای ورودی‌ها و خروجی‌ها انتخاب می‌کند که بیشترین کارایی را برای خودش ایجاد کند. این باعث می‌شود که مقایسه بین واحدها ناعادلانه شود، چون هر کدام با "متر و معیار" خاص خود ارزیابی می‌شوند. در مقابل، مجموعه وزن‌های مشترک یک معیار یکتا و یکسان برای همه واحدهای تصمیم‌گیرنده ایجاد می‌کند و امکان مقایسه مستقیم و منصفانه را فراهم می‌سازد.
۲. افزایش شفافیت در تصمیم‌گیری: در روش‌های کلاسیک، تفسیر نتایج دشوار است چون وزن‌ها بین واحدها تفاوت زیادی دارند. مجموعه وزن‌های مشترک باعث می‌شوند بتوان به راحتی تحلیل کرد که چه ورودی‌ها و خروجی‌هایی بیشترین تاثیر را در کارایی دارند.
۳. کاربردپذیری در تخصیص منابع و هزینه‌ها: زمانی که هدف، تخصیص منابع محدود یا هزینه‌های ثابت بر اساس کارایی است، استفاده از یک مجموعه وزن مشترک بسیار منطقی‌تر است، چون تصمیم‌گیری باید با یک مبنا انجام شود. در تخصیص بودجه یا ارزیابی عملکرد سازمانی، این روش عملی‌تر و عادلانه‌تر است.
۴. پرهیز از کارایی کامل غیرواقعی: در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها کلاسیک، اکثر واحدهای تصمیم‌گیرنده ممکن است به طور مصنوعی "کارا" ارزیابی شوند، فقط به این دلیل که وزن‌های خاص خودشان را دارند. روش وزن‌های مشترک معمولاً تفکیک دقیق‌تری بین واحدهای واقعا کارا و ناکارا ایجاد می‌کند.
۵. پایه‌گذاری برای رتبه‌بندی دقیق‌تر: با استفاده از یک مجموعه وزن مشترک، می‌توان واحدهای تصمیم‌گیرنده را به طور دقیق رتبه‌بندی کرد، چون همگی بر اساس یک مقیاس واحد سنجیده شده‌اند.

جهان‌شاه لو و همکاران [28] دو روش جدید و عادلانه برای تخصیص هزینه‌های ثابت بر اساس اصل عدم تغییرکارایی و مفهوم مجموعه مشترک وزن‌ها ارائه دادند. غازی و همکاران [29] به منظور غلبه بر مشکلات ارزیابی از طریق مدل‌های استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها، مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها بر اساس مفهوم مجموعه مشترک وزن‌ها را برای تخصیص بودجه عملیاتی شرکت‌ها ارائه دادند. سلطانی فر و همکاران [30] یک مدل جدید برای ادغام و بازسازی شرکت‌ها در تعیین هدف در سیستم‌های بانکی با استفاده از مفهوم مجموعه مشترک وزن‌ها در تحلیل پوششی داده‌ها ارائه دادند. پیکانی و همکاران [31]، به ارائه یک رویکرد جدید در تحلیل پوششی داده‌ها شبکه‌ای مبتنی بر ماتریس کارایی و مجموعه وزن‌های مشترک بر اساس برنامه‌ریزی چندهدفه برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده با ساختار شبکه‌ای دو مرحله‌ای ارائه دادند. همانطور که در جدول ۱ مشاهده می‌کنید، ما در یک بررسی جزئی به مقایسه بعضی از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها با مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها در حضور داده‌های نادقیق در موضوع تخصیص هزینه ثابت پرداختیم.

جدول ۱ - مقایسه مدل‌های سنتی و نادقیق تحلیل پوششی داده‌ها در تخصیص هزینه.

Table 1- Comparison of traditional and imprecise data envelopment analysis models in cost allocation.

مطالعه انجام شده	مدل تحلیل پوششی داده‌ها مورد استفاده	نوع تخصیص هزینه و ویژگی‌ها
[32]	مدل سنتی CCR	استفاده از داده‌های قطعی برای ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده، تخصیص هزینه بر اساس کارایی محاسبه شده
[33]	مدل سنتی BCC	تخصیص هزینه در محیط دارای بازده به مقیاس متغیر، تحلیل بر پایه داده‌های دقیق
[34]	مدل بازه‌ای تحلیل پوششی داده‌ها	مدیریت داده‌های نادقیق در تخصیص منابع، کاربرد در شرایطی که داده‌ها در قالب بازه بیان می‌شوند
[35]	تحلیل پوششی داده‌ها فازی	تخصیص هزینه در محیط‌های دارای عدم قطعیت، مدل‌سازی داده‌ها به صورت فازی
[36]	مدل فازی با توابع عضویت	افزایش دقت در شرایط نادقیق، استفاده از توابع عضویت برای تخصیص منابع
[15]، [20]	تحلیل پوششی داده‌ها فازی و بازه‌ای	مروری بر مدل‌های نادقیق تحلیل پوششی داده‌ها برای تخصیص هزینه و تحلیل حساسیت نسبت به عدم قطعیت
[37]	تحلیل پوششی داده‌ها با داده‌های نادقیق	ارایه چارچوبی برای تخصیص هزینه در شرایط غیرقطعی با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها نادقیق

علی‌رغم کاربرد گسترده مدل‌های تحلیل پوشی داده‌ها در ارزیابی عملکرد و بهره‌وری، کاربرد این روش‌ها در مسایل تخصیص هزینه‌های ثابت، به‌ویژه در شرایط واقعی و پیچیده تصمیم‌گیری، کمتر مورد توجه قرار گرفته است. در ادبیات موجود، غالب مدل‌های تخصیص هزینه، فرض را بر دقت کامل داده‌ها قرار داده‌اند، درحالی‌که در بسیاری از محیط‌های عملی، داده‌ها با عدم قطعیت، نوسان یا خطا همراه‌اند. این امر باعث می‌شود نتایج مدل‌های کلاسیک، از قابلیت اطمینان لازم برخوردار نباشند. از سوی دیگر، استفاده از مجموعه وزن‌های مشترک که ابزاری موثر برای افزایش قابلیت مقایسه بین واحدهای تصمیم‌گیری است، بیشتر در زمینه تحلیل بهره‌وری به‌کار رفته و به‌ندرت در تخصیص هزینه‌های ثابت مورد بهره‌برداری قرار گرفته است. علاوه بر این، مدل‌هایی که هم‌زمان به عدم قطعیت در داده‌ها و ضرورت حفظ ساختار خطی برای حل موثر ریاضی توجه داشته باشند، محدود و پراکنده‌اند. استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار به‌منظور پوشش عدم قطعیت در داده‌ها و نیز بهره‌گیری از تکنیک‌های خطی‌سازی به‌منظور افزایش قابلیت حل مدل، می‌تواند پاسخی نوآورانه به این شکاف‌ها باشد. پژوهش حاضر با ترکیب این رویکردها تلاش دارد بخشی از این خلأها را پوشش داده و مدلی کاربردی‌تر و منعطف‌تر برای تخصیص هزینه‌های ثابت در محیط‌های واقعی پیشنهاد نماید.

هدف اصلی پژوهش ارائه یک چارچوب تصمیم‌گیری دقیق و منصفانه برای تخصیص هزینه ثابت می‌باشد که بتواند کارایی یک سازمان‌ها را بهبود ببخشد. در این مقاله به بررسی نحوه استفاده از مفهوم مجموعه وزن‌های مشترک در چهارچوب تحلیل پوششی داده‌ها جهت تخصیص بهینه هزینه ثابت پرداخته می‌شود. مجموعه وزن‌های مشترک از طریق اعمال مجموعه‌ای از وزن‌ها یکسان به مولفه‌های ورودی و خروجی از واحدهای امکان ارزیابی عادلانه را فراهم می‌کند. این روش تخصیص هزینه ثابت بر مبنای عملکرد نسبی و واقعی هر واحد می‌باشد، با این حال در بسیاری از مسایل دنیای واقعی داده‌ها ممکن است دارای نوسانات و عدم قطعیت باشند که می‌تواند بر دقت نتایج تاثیر بگذارد. برای این مقاله برای رویارویی با این چالش، از رویکرد بهینه‌سازی استوار در تحقیق پوششی داده‌ها استفاده می‌کنیم.

بهینه‌سازی استوار در تحلیل پوششی داده‌ها به سازمان‌ها کمک می‌کند تا تخصیص هزینه‌های ثابت را به گونه‌ای انجام دهند که حتی در شرایط تغییرات محیطی و نوسانات داده‌ها نتایج پایدار و قابل اتکا باقی بماند. این رویکرد مدل‌هایی را ارائه می‌دهد که نسبت به تغییرات احتمالی در داده‌ها حساس حساسیت کمتری دارند و تخصیص هزینه را با حداقل ریسک انجام می‌دهند. در این مقاله یک چارچوب ترکیبی شامل تحلیل پوششی داده‌ها، مجموعه وزن‌های مشترک و بهینه‌سازی استوار برای تخصیص هزینه ثابت استفاده می‌گردد. این چهارچوب با در نظر گرفتن عملکرد نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده بر اساس مفهوم مجموعه وزن‌های مشترک از مولفه‌های ورودی و خروجی، یک رویه بر اساس در نظر گرفتن عدالت در تخصیص هزینه‌ها با بهره‌گیری از بهینه‌سازی استوار برای افزایش پایداری در شرایط عدم اطمینان را معرفی می‌کند. ما می‌توانیم تصمیمات بهتری در زمینه تخصیص هزینه‌های ثابت اتخاذ کرده و کارایی یک سازمان را بهبود بخشیم. ادامه این مقاله به‌صورت زیر سازماندهی شده است. در بخش دوم به بررسی موضوع تخصیص هزینه ثابت با استفاده از مفهوم مجموعه وزن‌های مشترک در تحلیل پوششی داده‌ها می‌پردازیم. در بخش سوم یک طرح تخصیص هزینه ثابت در یک محیط نامطمئن بر اساس بهینه‌سازی استوار در تحلیل پوششی داده‌ها بر پایه مجموعه وزن‌های مشترک را ارائه می‌دهیم. یک کاربرد از رویکرد ارائه‌شده در این مطالعه برای تخصیص هزینه ثابت در مجموعه‌ای از بانک‌ها در کشور ایران به کار می‌بریم و نتایج حاصل از تحقیق را ارائه می‌دهیم.

۲- تخصیص هزینه ثابت بر اساس مدل تحلیل پوششی داده‌ها با مجموعه وزن‌های مشترک

در تحلیل پوششی داده‌ها، مجموعه وزن‌های مشترک و تخصیص هزینه ثابت هر دو مفاهیمی هستند که با ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده و تقسیم منابع با هزینه‌ها به شکلی منصفانه و بهینه در ارتباط می‌باشند. در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها سنتی، هر واحد تصمیم‌گیرنده وزن‌های ورودی و خروجی خود را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کند که بیشترین کارایی را داشته باشد. این باعث می‌شود مقایسه بین واحدها دشوار گردد، چون برای هر واحد تصمیم‌گیرنده از مجموعه وزن‌های متفاوتی در ارزیابی می‌گردد. مجموعه وزن‌های مشترک راه‌حلی برای رویارویی با این برآمد می‌باشد. در این روش، به دنبال یافتن یک مجموعه وزن مشخص برای تمام واحدهای تصمیم‌گیرنده هستیم تا بتوان مقایسه‌ای منصفانه میان آن‌ها انجام دهیم. در بسیاری از مسایل عملی، برخی هزینه‌ها (مانند هزینه‌های سربار یا هزینه‌های اداری) ثابت هستند، اما باید به نحوی منصفانه میان واحدهای تصمیم‌گیرنده تخصیص یابند.

یکی از رویکردهای تخصیص هزینه، استفاده از روش‌های تحلیل پوششی داده‌ها برای انجام این کار است. در واقع، هدف این است که با توجه به کارایی نسبی واحدها، سهم هر کدام از هزینه‌های ثابت تعیین شود. استفاده از مجموعه وزن‌های مشترک در فرآیند تخصیص هزینه ثابت به دلایل زیر اهمیت دارد:

۱. انصاف در تخصیص: وقتی همه واحدهای تصمیم‌گیرنده با یک مجموعه وزن ارزیابی شوند، سهم آن‌ها از هزینه‌ها بر اساس یک معیار یکسان و منصفانه تعیین می‌شود.
۲. هم‌راستایی با کارایی: وزن‌های مشترک معمولاً طوری انتخاب می‌شوند که تخصیص هزینه با سطح کارایی هر واحد تصمیم‌گیرنده هم‌راستا باشد؛ یعنی واحدهایی که بهره‌ورتر هستند، هزینه کمتری متقبل شوند.
۳. پرهیز از تبعیض: وزن‌های مشترک از استفاده دلخواه هر واحد از وزن‌های خاص خود جلوگیری می‌کند و باعث عدالت در ارزیابی و تخصیص می‌شود.

در ترکیب تحلیل پوششی داده‌ها و تخصیص هزینه ثابت، استفاده از مجموعه وزن‌های مشترک به‌عنوان ابزار مهمی برای ارزیابی عادلانه عملکرد واحدها و تقسیم منصفانه هزینه‌ها شناخته می‌شود. این رویکرد در تصمیم‌گیری‌های مدیریتی، برنامه‌ریزی بودجه و تحلیل کارایی سازمان‌ها بسیار کاربردی است. در این بخش طرح تخصیص هزینه ثابت بر اساس مدل وزن مشترک در تحلیل پوششی داده‌ها را ارائه می‌دهیم.

n واحد تصمیم‌گیرنده را به‌منظور ارزیابی به‌صورت $DMU_j = (X_j, Y_j)$ برای $j = 1, \dots, n$ در نظر بگیرید. بردار $X_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj})^T \in R_+^m$ بردار ورودی می‌باشد که به‌منظور تولید بردار خروجی $Y_j = (y_{1j}, \dots, y_{sj})^T \in R_+^s$ مصرف می‌گردد. همچنین فرض کنید بخواهیم هزینه ثابت به میزان ثابت R را میان واحدهای تصمیم‌گیرنده اختصاص دهیم. هزینه متناظر با DMU_j را به‌صورت $R_j \geq 0$ در نظر می‌گیریم. همچنین قرار دهید $\sum_{j=1}^n R_j = R$.

به‌منظور ارزیابی کارایی واحد DMU_o که این واحد یکی از واحدهای مشاهده‌شده DMU_j می‌باشد. هزینه جدید تخصیص‌یافته به هر واحد تصمیم‌گیرنده را به‌عنوان یک ورودی جدید در نظر می‌گیریم. فرض کنید وزن متناظر با ورودی i th را به‌صورت $v_i, i = 1, \dots, m$ و وزن متناظر با خروجی r th را به‌صورت $u_r, r = 1, \dots, s$ در نظر می‌گیریم. همچنین وزن متناظر با هزینه تخصیص‌یافته به‌عنوان ورودی $m+1$ به‌صورت v_{m+1} در نظر می‌گیریم. در این صورت کارایی واحد DMU_o به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io} + v_{m+1} R_o}$$

ما فرض می‌کنیم $v_{m+1} > 0$ یعنی هزینه ثابت تخصیص‌یافته به DMU_j نباید ارزیابی کارایی نادیده گرفته شود. برای یافتن مجموعه مشترک از وزن‌های متناظر با مولفه‌های ورودی و خروجی از روش کائو و هانگ [27] استفاده می‌کنیم. فرض کنید کارایی متناظر با واحد DMU_j حاصل از مدل CCR را با θ_j^{CCR} نشان دهیم. در این صورت مدل ارزیابی کارایی واحد DMU_o در حضور هزینه ثابت تخصیص‌یافته به واحدها بر اساس مجموعه مشترک از وزن‌های متناظر با مولفه‌های ورودی و خروجی به‌صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\begin{aligned} \min \sum_{j=1}^n \left| \theta_j^{CCR} - \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + v_{m+1} R_j} \right| \\ \text{s.t.} \\ \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - v_{m+1} R_j \leq 0, \\ \sum_{j=1}^n R_j = R, R_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \\ u_r \geq \epsilon, r = 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (1)$$

قضیه ۱- مقدار تابع هدف بهینه حاصل از مدل (۵) به مقدار ϵ بستگی ندارد.

اثبات: فرض کنید که (u, v, v_{m+1}) و $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{v}_{m+1})$ دو جواب بهینه از مدل (۵) متناظر مقادیر متفاوت $\epsilon = t_1$ و $\epsilon = t_2$ به ترتیب باشند. ما نشان می‌دهیم که

$$\left[\theta_j^{CCR} - \frac{\sum_{r=1}^s \tilde{u}_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m \tilde{v}_i x_{ij} + \tilde{v}_{m+1} R_j} \right] = \left[\theta_j^{CCR} - \frac{\sum_{r=1}^s \hat{u}_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m \hat{v}_i x_{ij} + \hat{v}_{m+1} R_j} \right].$$

به‌طور واضح $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{v}_{m+1})$ نیز یک جواب شدنی از مدل (۱) برای $\epsilon = t_2$ می‌باشد؛ بنابراین

$$\left[\theta_j^{CCR} - \frac{\sum_{r=1}^s \left(\frac{t_2}{t_1}\right) \tilde{u}_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m \left(\frac{t_2}{t_1}\right) \tilde{v}_i x_{ij} + \left(\frac{t_2}{t_1}\right) \tilde{v}_{m+1} R_j} \right] \geq \left[\theta_j^{CCR} - \frac{\sum_{r=1}^s \hat{u}_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m \hat{v}_i x_{ij} + \hat{v}_{m+1} R_j} \right].$$

در مقابل ادعای ما، فرض کنید که

$$\left[\theta_j^{CCR} - \frac{\sum_{r=1}^s \left(\frac{t_2}{t_1}\right) \tilde{u}_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m \left(\frac{t_2}{t_1}\right) \tilde{v}_i x_{ij} + \left(\frac{t_2}{t_1}\right) \tilde{v}_{m+1} R_j} \right] > \left[\theta_j^{CCR} - \frac{\sum_{r=1}^s \hat{u}_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m \hat{v}_i x_{ij} + \hat{v}_{m+1} R_j} \right].$$

با یک بحث مشابه ما نشان می‌دهیم که $\frac{t_1}{t_2}(\hat{u}, \hat{v}, \hat{v}_{m+1})$

نیز یک جواب شدنی برای مدل (۱) برای $\epsilon = t_1$ می‌باشد؛ بنابراین مقدار تابع هدف

$$\left[\theta_j^{CCR} - \frac{\sum_{r=1}^s \left(\frac{t_1}{t_2}\right) \hat{u}_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m \left(\frac{t_1}{t_2}\right) \hat{v}_i x_{ij} + \left(\frac{t_1}{t_2}\right) \hat{v}_{m+1} R_j} \right] \geq \left[\theta_j^{CCR} - \frac{\sum_{r=1}^s \tilde{u}_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m \tilde{v}_i x_{ij} + \tilde{v}_{m+1} R_j} \right],$$

کمتر یا مساوی با مقدار تابع هدف

$$\left[\theta_j^{CCR} - \frac{\sum_{r=1}^s \tilde{u}_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m \tilde{v}_i x_{ij} + \tilde{v}_{m+1} R_j} \right] = \left[\theta_j^{CCR} - \frac{\sum_{r=1}^s \left(\frac{t_2}{t_1}\right) \tilde{u}_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m \left(\frac{t_2}{t_1}\right) \tilde{v}_i x_{ij} + \left(\frac{t_2}{t_1}\right) \tilde{v}_{m+1} R_j} \right],$$

که غیرممکن می‌باشد. در نتیجه مقدار تابع هدف مدل (۱) برای هر مقدار متفاوت $\epsilon > 0$ یکسان می‌باشد و اثبات کامل می‌گردد. مدل (۱) یک مدل غیرخطی می‌باشد. اما می‌توان آن را به یک مدل خطی تبدیل نمود. ما میدانیم که برای هر واحد تصمیم‌گیرنده DMU_j مقدار کارایی حاصل از مدل CCR یعنی θ_j^{CCR} همواره بزرگتر یا مساوی از مقدار کارایی این واحد بر اساس مجموعه وزن‌های مشترک می‌باشد؛ زیرا بر اساس مدل CCR واحد تحت ارزیابی در مقابل سایر واحدها، در بهترین شرایط ارزیابی می‌گردد؛ بنابراین خواهیم داشت

$$\theta_j^{CCR} \geq \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + v_{m+1} R_j} \quad (2)$$

با توجه به رابطه (۲) خواهیم داشت.

$$\theta_j^{CCR} \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \theta_j^{CCR} v_{m+1} R_j - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} \geq 0. \quad (3)$$

با توجه به رابطه (۳)، مدل (۱) به‌صورت زیر تبدیل می‌گردد.

$$\min \sum_{j=1}^n \left(\theta_j^{CCR} \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \theta_j^{CCR} v_{m+1} R_j - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} \right),$$

$$\text{s. t. } \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - v_{m+1} R_j \leq 0, \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n R_j = R, \quad R_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$u_r \geq \epsilon, r = 1, \dots, s, \quad v_i \geq \epsilon, i = 1, \dots, m + 1.$$

برای خطی سازی مدل (۴)، به صورت زیر قرار می دهیم

$$v_{m+1}R_j = r_j, j = 1, \dots, n.$$

بنابراین مدل (۴) به صورت زیر به مدل خطی (۵) تبدیل می گردد:

$$\min \sum_{j=1}^n \left(\theta_j^{CCR} \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \theta_j^{CCR} r_j - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} \right),$$

$$s. t. \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - r_j \leq 0,$$

$$\sum_{j=1}^n r_j = v_{m+1}R, \quad r_j \geq 0, j = 1, \dots, n,$$

$$u_r \geq \epsilon, r = 1, \dots, s,$$

$$v_i \geq \epsilon, i = 1, \dots, m + 1,$$

$$r_j \geq 0, j = 1, \dots, n.$$

با توجه به قضیه ۱ جواب بهینه مدل (۵) برای هر مقدار متفاوت $\epsilon > 0$ یکسان می باشد؛ البته برای حل مدل (۵) آن را مخالف صفر انتخاب می کنیم.

۳- تخصیص هزینه ثابت بر اساس مدل تحلیل پوششی داده های استوار و مجموعه وزن های مشترک

در این بخش یک طرح تخصیص هزینه ثابت را بر اساس مدل تحلیل پوششی داده ها با مجموعه وزن مشترک ارائه می دهیم. با توجه به اینکه داده های ورودی و خروجی را به صورت اعداد نادقیق در یک محیط نامطمئن در نظر می گیریم، لذا از روش بهینه سازی استوار برای خطی سازی مدل تحلیل پوششی داده ها استفاده می کنیم. ما فرمول بندی مدل (۵)، در حضور ورودی ها و خروجی های نادقیق را بر اساس بهینه سازی استوار به دست می آوریم. فرض کنید که انحراف مقیاس شده^۱ از یک مقدار ورودی اسمی از i th ورودی DMU_j یعنی x_{ij} به صورت $\tau_{ij}^x = \frac{\tilde{x}_{ij} - x_{ij}}{\hat{x}_{ij}}$ وقتی $i = 1, \dots, m$ و $j = 1, \dots, n$ باشند. \tilde{x}_{ij} ورودی نامطمئن i th از DMU_j و $\hat{x}_{ij} = e^x x_{ij}$ دقت تخمین می باشد. e^x سطح آشفستگی یا سطح عدم قطعیت (درصد آشفستگی) را نشان می دهد.

ما فرض می کنیم که انحراف مقیاس شده یعنی τ_{ij}^x یک متغیر تصادفی می باشد که دارای مقدار نامعلوم می باشد؛ اما دارای توزیع متقارن می باشد و مقادیر آن در بازه $[-1, 1]$ می باشد. در صورتی که متغیر انحراف مقیاس شده برابر صفر باشد یعنی $\tau_{ij}^x = 0$ آنگاه \tilde{x}_{ij} دارای مقدار معین و مطمئن می باشد. همچنین فرض کنید که IP_j^x نشان دهنده مجموعه اندیس های ورودی از DMU_j باشند که دارای مقادیر نامطمئن می باشند. فرض کنید $\delta_j^x \in [0, |IP_j^x|], j = 1, \dots, n$ ، پارامتر $\sum_{i \in IP_j^x} |\tau_{ij}^x| \leq \delta_j^x, j = 1, \dots, n$ ، که لزوماً یک عدد صحیح نمی باشد، اما ما برای سادگی کار، فرض می کنیم که یک عدد صحیح باشد. به طور مشابه فرض کنید که انحراف مقیاس شده از یک مقدار خروجی اسمی از r th ورودی DMU_j یعنی y_{rj} به صورت $\tau_{rj}^y = \frac{\tilde{y}_{rj} - y_{rj}}{\hat{y}_{rj}}$ وقتی $r = 1, \dots, s$ و $j = 1, \dots, n$ باشند. \tilde{y}_{rj} ورودی نامطمئن r th از DMU_j و $\hat{y}_{rj} = e^y y_{rj}$ دقت تخمین می باشد. e^y سطح آشفستگی یا سطح عدم قطعیت (درصد آشفستگی) را نشان می دهد.

^۱ Scaled deviation

ما فرض می‌کنیم که انحراف مقیاس شده یعنی τ_{rj}^y یک متغیر تصادفی می‌باشد که دارای مقدار نامعلوم می‌باشد؛ اما دارای توزیع متقارن می‌باشد و مقادیر آن در بازه $[-1,1]$ می‌باشد. در صورتیکه متغیر انحراف مقیاس شده برابر صفر باشد یعنی $\tau_{rj}^y = 0$ آنگاه \tilde{y}_{rj} دارای مقدار معین و مطمئن می‌باشد. همچنین فرض کنید که OP_j^y نشان دهنده مجموعه اندیس‌های خروجی از DMU_j باشند که دارای مقادیر نامطمئن می‌باشند. فرض کنید پارامتر $\sum_{r \in OP_j^y} |\tau_{rj}^y| \leq \delta_j^y, j = 1, \dots, n$ ، که $\delta_j^y \in [0, |OP_j^y|], j = 1, \dots, n$ ، لزوماً یک عدد صحیح نمی‌باشد، اما ما برای سادگی کار، فرض می‌کنیم که یک عدد صحیح باشد.

اکنون مدل (۵) در حضور داده‌های نادقیق بر اساس بهینه‌سازی استوار ارایه می‌دهیم. بدین منظور در ابتدا هر عبارت در مجموع تابع هدف از مدل (۵) را با در نظر گرفتن مقادیر غیرقطعی از ورودی‌ها و خروجی‌ها به صورت $\tilde{x}_{ij} = \tau_{ij}^x \hat{x}_{ij} + x_{ij}$ و $\tilde{y}_{rj} = \tau_{rj}^y \hat{y}_{rj} + y_{rj}$ به صورت اعداد استوار را به صورت زیر در نظر بگیرد.

$$\begin{aligned} \theta_j^{CCR} \sum_{i=1}^m v_i \tilde{x}_{ij} + \theta_j^{CCR} r_j - \sum_{r=1}^s u_r \tilde{y}_{rj} \\ = \theta_j^{CCR} \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \theta_j^{CCR} r_j - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + \theta_j^{CCR} \sum_{i \in IP_j^x} v_i \hat{x}_{ij} \tau_{ij}^x - \sum_{r \in OP_j^y} u_r \hat{y}_{rj} \tau_{rj}^y. \end{aligned} \quad (۶)$$

همچنین قید اول در مدل (۵) به صورت زیر خواهد بود.

$$\sum_{r=1}^s u_r \tilde{y}_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i \tilde{x}_{ij} - r_j = \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - r_j + \sum_{r \in OP_j^y} u_r \hat{y}_{rj} \tau_{rj}^y - \sum_{i \in IP_j^x} v_i \hat{x}_{ij} \tau_{ij}^x \leq 0. \quad (۷)$$

با توجه به اینکه $\sum_{r \in OP_j^y} |\tau_{rj}^y| \leq \delta_j^y, j = 1, \dots, n$ ، و $\sum_{i \in IP_j^x} |\tau_{ij}^x| \leq \delta_j^x, j = 1, \dots, n$ ، بنابراین مدل (۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned} \min \sum_{j=1}^n \left(\theta_j^{CCR} \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \theta_j^{CCR} r_j - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + \right. \\ \left. \max_{\substack{\sum_{i \in IP_j^x} |\tau_{ij}^x| \leq \delta_j^x, \sum_{r \in OP_j^y} |\tau_{rj}^y| \leq \delta_j^y, \\ -1 \leq \tau_{ij}^x \leq 1, -1 \leq \tau_{rj}^y \leq 1}} \left\{ \theta_j^{CCR} \sum_{i \in IP_j^x} v_i \hat{x}_{ij} \tau_{ij}^x - \sum_{r \in OP_j^y} u_r \hat{y}_{rj} \tau_{rj}^y \right\} \right), \\ \text{s.t. } \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - r_j + \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + \\ \max_{\substack{\sum_{i \in IP_j^x} |\tau_{ij}^x| \leq \delta_j^x, \sum_{r \in OP_j^y} |\tau_{rj}^y| \leq \delta_j^y, \\ -1 \leq \tau_{ij}^x \leq 1, -1 \leq \tau_{rj}^y \leq 1}} \left\{ \sum_{r \in OP_j^y} u_r \hat{y}_{rj} \tau_{rj}^y - \sum_{i \in IP_j^x} v_i \hat{x}_{ij} \tau_{ij}^x \right\} \leq 0, \end{aligned} \quad (۸)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n r_j &= v_{m+1} R, r_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \\ u_r &\geq \epsilon, r = 1, \dots, s, \\ v_i &\geq \epsilon, i = 1, \dots, m+1, \\ r_j &\geq 0, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

هر عبارت در مجموع تابع هدف از مدل (۸) به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} \theta_j^{CCR} \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \theta_j^{CCR} r_j - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + \max_{\substack{\sum_{i \in IP_j^x} |\tau_{ij}^x| \leq \delta_j^x, \sum_{r \in OP_j^y} |\tau_{rj}^y| \leq \delta_j^y, \\ -1 \leq \tau_{ij}^x \leq 1, -1 \leq \tau_{rj}^y \leq 1}} \left\{ \theta_j^{CCR} \sum_{i \in IP_j^x} v_i \hat{x}_{ij} \tau_{ij}^x - \right. \\ \left. \sum_{r \in OP_j^y} u_r \hat{y}_{rj} \tau_{rj}^y \right\}. \end{aligned}$$

به علاوه ما مساله داخلی در تابع هدف مدل (۸) را ساده می‌کنیم. بدین منظور در ابتدا ناحیه شدنی از مساله داخلی در تابع هدف مدل (۸) را به صورت

$$\left\{ (\tau_{ij}^x, \tau_{rj}^y) \left| \begin{array}{l} \sum_{i \in IP_j^x} |\tau_{ij}^x| \leq \delta_j^x, \sum_{r \in OP_j^y} |\tau_{rj}^y| \leq \delta_j^y, \\ -1 \leq \tau_{ij}^x \leq 1, -1 \leq \tau_{rj}^y \leq 1 \end{array} \right. \right\} \quad (9)$$

را با ناحیه زیر جایگزین می‌کنیم.

$$\left\{ (\tau_{ij}^x, \tau_{rj}^y) \left| \begin{array}{l} \sum_{i \in IP_j^x} \tau_{ij}^x \leq \delta_j^x, \sum_{r \in OP_j^y} \tau_{rj}^y \leq \delta_j^y, \\ 0 \leq \tau_{ij}^x \leq 1, 0 \leq \tau_{rj}^y \leq 1 \end{array} \right. \right\} \quad (10)$$

بنابراین مساله داخلی در تابع هدف مدل (8) به صورت زیر در نظر می‌گیریم و عبارت را به صورت حاصل جمع در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} \max & \left\{ \theta_j^{CCR} \sum_{i \in IP_j^x} v_i \hat{x}_{ij} \tau_{ij}^x + \sum_{r \in OP_j^y} u_r \hat{y}_{rj} \tau_{rj}^y \right\}, \\ \text{s. t.} & \quad \sum_{i \in IP_j^x} \tau_{ij}^x \leq \delta_j^x, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \quad \sum_{r \in OP_j^y} \tau_{rj}^y \leq \delta_j^y, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \quad \tau_{ij}^x \leq 1, \quad i \in IP_j^x, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \quad \tau_{rj}^y \leq 1, \quad r \in OP_j^y, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \quad 0 \leq \tau_{ij}^x, \quad i \in IP_j^x, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \quad 0 \leq \tau_{rj}^y, \quad r \in OP_j^y, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (11)$$

دوآل مدل (11) به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} \min & \quad \sum_{i \in IP_j^x} \mu_{ij}^x + \sum_{r \in OP_j^y} \mu_{rj}^y + \gamma_j^x \delta_j^x + \gamma_j^y \delta_j^y, \\ \text{s. t.} & \quad \mu_{ij}^x + \gamma_j^x \geq v_i \hat{x}_{ij} \theta_j^{CCR}, \quad i \in IP_j^x, \\ & \quad \mu_{rj}^y + \gamma_j^y \geq u_r \hat{y}_{rj}, \quad r \in OP_j^y, \\ & \quad \mu_{ij}^x \geq 0, \quad i \in IP_j^x, \mu_{rj}^y \geq 0, \quad r \in OP_j^y, \\ & \quad \gamma_j^x \geq 0, \gamma_j^y \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (12)$$

به طور مشابه محاسبات انجام شده برای مساله داخلی تابع هدف مدل (8)، قید اول در مدل (8) را در نظر می‌گیریم و مساله داخلی آن را به صورت

زیر می‌نویسیم:

$$\max \left\{ \sum_{r \in OP_j^y} u_r \hat{y}_{rj} \tau_{rj}^y + \sum_{i \in IP_j^x} v_i \hat{x}_{ij} \tau_{ij}^x \right\}, \quad (10)$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{i \in IP_j^x} \tau_{ij}^x \leq \delta_j^x, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\begin{aligned} & \quad \sum_{r \in OP_j^y} \tau_{rj}^y \leq \delta_j^y, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \quad \tau_{ij}^x \leq 1, \quad i \in IP_j^x, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \quad \tau_{rj}^y \leq 1, \quad r \in OP_j^y, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \quad 0 \leq \tau_{ij}^x, \quad i \in IP_j^x, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \quad 0 \leq \tau_{rj}^y, \quad r \in OP_j^y, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (13)$$

دوآل مدل (13) به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in IP_j^x} \eta_{ij}^x + \sum_{r \in OP_j^y} \eta_{rj}^y + \sigma_j^x \delta_j^x + \sigma_j^y \delta_j^y, \\
\text{s.t.} \quad & \eta_{ij}^x + \sigma_j^x \geq v_i \hat{x}_{ij}, i \in IP_j^x, \\
& \eta_{rj}^y + \sigma_j^y \geq u_r \hat{y}_{rj}, r \in OP_j^y, \\
& \eta_{ij}^x \geq 0, i \in IP_j^x, \eta_{rj}^y \geq 0, r \in OP_j^y, \\
& \sigma_j^x \geq 0, \sigma_j^y \geq 0, j = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{14}$$

با جایگذاری مدل‌های (۱۲) و (۱۴) در مدل (۸) و مدل (۱۵) به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j=1}^n \left(\theta_j^{CCR} \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \theta_j^{CCR} r_j - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + \sum_{i \in IP_j^x} \mu_{ij}^x + \sum_{r \in OP_j^y} \mu_{rj}^y + \gamma_j^x \delta_j^x + \right. \\
& \left. \gamma_j^y \delta_j^y \right) \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - r_j + \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + \sum_{i \in IP_j^x} \eta_{ij}^x + \sum_{r \in OP_j^y} \eta_{rj}^y + \sigma_j^x \delta_j^x + \\
& \sigma_j^y \delta_j^y \leq 0, \\
& \sum_{j=1}^n r_j = v_{m+1} R, \\
& \mu_{ij}^x + \gamma_j^x \geq v_i \hat{x}_{ij} \theta_j^{CCR}, i \in IP_j^x, \\
& \mu_{rj}^y + \gamma_j^y \geq u_r \hat{y}_{rj}, r \in OP_j^y, \\
& \eta_{ij}^x + \sigma_j^x \geq v_i \hat{x}_{ij}, i \in IP_j^x, \\
& \eta_{rj}^y + \sigma_j^y \geq u_r \hat{y}_{rj}, r \in OP_j^y, \\
& \mu_{ij}^x \geq 0, i \in IP_j^x, \mu_{rj}^y \geq 0, r \in OP_j^y, \\
& \gamma_j^x \geq 0, \gamma_j^y \geq 0, j = 1, \dots, n, \\
& \eta_{ij}^x \geq 0, i \in IP_j^x, \eta_{rj}^y \geq 0, r \in OP_j^y, \\
& \sigma_j^x \geq 0, \sigma_j^y \geq 0, j = 1, \dots, n, \\
& u_r \geq \epsilon, r = 1, \dots, s, \\
& v_i \geq \epsilon, i = 1, \dots, m + 1, \\
& r_j \geq 0, j = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{15}$$

مدل (۱۵) را مدل تحلیل پوششی داده‌های استوار بر اساس مجموعه مشترک وزن‌ها برای به دست آوردن میزان تخصیص هزینه ثابت به هر یک از واحدهای تصمیم‌گیرنده در حضور داده‌های نادقیق می‌نامیم.

۴- ارزیابی عملکرد بانک‌های تجاری در ایران

بانک‌های تجاری نقش مهمی در برنامه‌های توسعه یک کشور دارند. عملکرد مناسب بانک‌ها می‌تواند عملکرد سایر صنایع وابسته را نیز بهبود ببخشد؛ زیرا این بانک‌ها می‌توانند به سایر صنایع نظیر کارخانه‌ها تسهیلات پرداخت نمایند و پویایی این صنایع را ایجاد کنند. یکی از موضوعات مهم در نظام بانکداری، ارزیابی عملکرد بانک‌ها در طول یک دوره زمانی می‌باشد. به‌کارگیری یک ابزار دقیق برای ارزیابی عملکرد بسیار حائز اهمیت می‌باشد. یکی از تکنیک‌های مناسب برای ارزیابی عملکرد و اندازه‌گیری کارایی بانک‌ها تحلیل پوششی داده‌ها می‌باشد تحلیل پوششی داده‌ها علاوه بر مشخص کردن نمره کارایی بانک‌ها می‌تواند آن‌ها را نیز از نقطه نظر کارایی رتبه‌بندی کند و نقاط ضعف و قوت آن‌ها را ارائه دهد. همچنین می‌تواند اهداف مناسب متناظر با ورودی‌ها و خروجی‌های بانک‌ها را نیز ارائه دهد.

اما ممکن است اطلاعات مربوط به ورودی‌ها و خروجی‌های یک بانک نادقیق باشند و دارای یک میزان تغییر در طول دوره ارزیابی باشند. به‌عنوان مثال ممکن است یک داده دارای یک میزان نوسان باشد و نتوان آن را به صورت دقیق تعیین نمود؛ اما می‌توان تعیین نمود که این داده در یک بازه مشخص قرار دارد. از تقریب ارائه‌شده در این مقاله می‌توان برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده در شرایط نامطمئن استفاده نمود و بانک‌ها را در یک شرایط یکسان در حضور داده‌های نامطمئن ارزیابی نمود. در این بخش از تقریب ارائه‌شده در این مقاله برای ارزیابی عملکرد بانک‌های تجاری در کشور ایران استفاده می‌کنیم. اطلاعات مربوط به این بانک‌ها از طریق سایت بانک مرکزی در دسترس می‌باشد. می‌توان بیان داشت که علت انتخاب این بانک‌ها برای ارزیابی این است که نویسندگان سعی داشتند از داده‌های واقعی برای نشان دادن کاربردی از تقریب خود استفاده نمایند. همچنین این نتایج می‌تواند به مدیران بانک در اتخاذ تصمیمات مناسب برای بهبود عملکرد بانک‌ها کمک نماید. داده‌های ورودی و خروجی در جدول‌های ۱ و ۲ آمده است. در این ارزیابی برای هر یک از بانک‌ها سه ورودی و سه خروجی را انتخاب می‌کنیم. ورودی‌ها شامل هزینه‌های پرسنلی، هزینه‌های خالص بهره و هزینه‌های غیر بهره می‌باشند. هزینه‌های پرسنلی شامل هزینه‌هایی می‌باشد که بانک در طول این دوره ارزیابی برای پرسنل خود پرداخت می‌کند. این هزینه‌ها شامل حقوق و دستمزد، بیمه، مزایا و پاداش‌ها، اضافه‌کاری، بیمه و درمان می‌باشند. هزینه‌های

خالص بهره میزان سود پرداخت شده به مشتریان بانک می‌باشد. مشتریان سپرده‌های خود را نزد بانک بر اساس یک قرارداد معین قرار می‌دهند. بانک برای هر سپرده یک سود را در نظر می‌گیرد. مجموع کل مبالغ پرداخت شده به مشتریان در طول دوره ارزیابی برای این سپرده‌ها را هزینه خالص بهره می‌نامیم. هزینه‌های غیر بهره شامل هزینه‌هایی است که مستقیماً با جذب و نگهداری وجوه سپرده‌گذاری مرتبط نیستند. این هزینه‌ها شامل هزینه‌های بانک در موارد مختلف شامل اجاره ساختمان، هزینه‌های مربوط به نگهداری اموال بانک، هزینه‌های جاری بانک، هزینه‌های ایجاد و نگهداری امکانات نرم‌افزاری و سخت‌افزاری، هزینه‌های خدماتی نظیر هزینه‌های آب و برق و گاز و انرژی می‌باشند. سه خروجی نیز در این ارزیابی مورد توجه قرار گرفتند. خروجی‌ها شامل درآمدهای خالص بهره، درآمدهای ناخالص بهره و کل سپرده‌های بانک می‌باشند.

درآمد خالص بهره: شامل درآمدهایی است که بانک از محل دادن تسهیلات وام به مشتریان به دست می‌آورد. این نرخ بهره توسط بانک بر اساس این قرارداد با مشتریان تعیین می‌گردد. این درآمدها حاصل از کم کردن کل مبلغ اخذ شده از مشتریان منهای مقدار وام داده شده به آن‌ها می‌باشد.

درآمدهای غیر بهره: این درآمدها شامل درآمدهای بانک، غیر از بهره‌های بانکی می‌باشد. این درآمدها شامل درآمد کسب شده از مشتریان از محل خدمات مختلف شامل کارمزدهای مختلف، درآمد حاصل از انتقال وجوه مختلف توسط مشتریان، دستگاه‌های خودپرداز، درآمدهای حاصل از حواله‌های بین بانکی، درآمد حاصل از خدمات اینترنتی، کارمزد مربوط به ارسال پیامک به مشتریان و ... می‌باشد.

کل سپرده‌ها: این سپرده‌ها شامل سپرده‌های جاری، سپرده‌های کوتاه‌مدت و سپرده‌های بلندمدت می‌باشند. هر اندازه میزان کل سپرده‌ها بزرگتر باشد در نتیجه نقدینگی بانک بالا می‌رود و بانک می‌تواند به مشتریان خود تسهیلات پرداخت کند و در نتیجه می‌تواند از محل پرداخت تسهیلات سود بالاتری را دریافت کند.

داده‌های ورودی و خروجی از بانک‌ها در جدول‌های ۲ و ۳ آمده‌اند.

جدول ۲- داده‌های ورودی از بانک‌های تجاری در ایران.

Table 2- Input data from commercial banks in Iran.

بانک‌ها	ورودی‌ها		
	هزینه‌های پرسنلی	هزینه‌های خالص بهره	هزینه‌های غیر بهره
B01	317.89	299.49	545.79
B02	378.32	278.51	631.92
B03	517.17	426.61	969.23
B04	416.64	472.69	828.88
B05	492.51	250.37	1123.39
B06	179.2	250.75	323.73
B07	946.59	734.53	1861.31
B08	414.16	1943.06	1444.78
B09	29.8	226.1	62.22
B10	44.36	206.74	74.83
B11	4.88	60.65	1.52
B12	32.8	161.31	96.26
B13	21.17	24.45	55.48
B14	293.1	1042.17	733.04
B15	69.71	153.84	158.58
B16	36.32	92.7	58.33
B17	100.94	292.27	215.88
B18	273.25	1001.94	618.34
B19	77.44	238.72	173.97
B20	224.13	700.13	477.47
B21	4.39	4.79	10.64
B22	691.81	4978.76	1543.7
B23	609.89	1885.35	2006.85
B24	528.57	4739.71	1008.21
B25	871.17	2544.86	2010.64
B26	11.76	21.82	27.61
B27	557.66	2285.09	1265.91

جدول ۳- داده‌های خروجی از بانک‌های تجاری در ایران.

Table 3- Output data from commercial banks in Iran.

بانک‌ها	خروجی‌ها		
	درآمد خالص بهره	درآمدهای غیر بهره	کل سپرده‌ها
B01	1320.56	245.84	37054.91
B02	1397.76	455.76	38374.35
B03	2217.63	775.55	65284.05
B04	1552.24	961.04	59446.67
B05	1839.47	549.84	54976.85
B06	619.12	152.08	18057.09
B07	4476.56	1374.35	125038.24
B08	2787.97	709.58	39390.93
B09	91.86	27.63	2464.75
B10	98.86	78.54	3317.07
B11	1.39	2.16	32.25
B12	94.57	26.19	1901.54
B13	138.51	53.5	2001.94
B14	1477.93	551.42	24874.5
B15	173.32	136.03	4164.14
B16	61.35	45.13	1567.28
B17	411.45	85.76	5404.07
B18	1384.41	30	17598.12
B19	223.95	62.99	4061.78
B20	842.54	37.09	12623.39
B21	6.53	5.44	159.13
B22	5047.84	398.23	93567.68
B23	3422.38	1167.37	48354.12
B24	2630.84	252.98	63029.72
B25	3917.8	1300.21	54898.37
B26	14.19	7.09	307.03
B27	2430.37	1059.02	35605.78

در ابتدا به ارزیابی عملکرد بانک‌ها بر اساس مدل *CCR* در تکنولوژی بازده به مقیاس ثابت در تحلیل پوششی داده‌ها می‌پردازیم. نتایج ارزیابی کارایی بانک‌ها در جدول ۴ آمده است.

جدول ۴- کارایی حاصل از مدل *CCR* از بانک‌ها.Table 4- Efficiency derived from the *CCR* model of banks.

بانک‌ها	کارایی	بانک‌ها	کارایی
B01	1	B15	0.8109
B02	0.9281	B16	0.6634
B03	0.9904	B17	0.693
B04	1	B18	0.7928
B05	1	B19	0.4808
B06	0.8162	B20	0.6344
B07	1	B21	0.5225
B08	0.9833	B22	1
B09	0.5929	B23	0.8446
B10	0.8985	B24	0.9582
B11	1	B25	0.7478
B12	0.4711	B26	0.2479
B13	1	B27	0.8234
B14	0.81	میانگین	0.8041
		کارایی	

نمره کارایی بانک‌ها در تکنولوژی بازده به مقیاس ثابت در جدول ۳ آمده است. در تکنولوژی بازده به مقیاس ثابت، بانک‌های *B01*, *B04*, *B05*, *B07*, *B11*, *B13*, *B22* کارا و سایر بانک‌ها ناکارا می‌باشند.

فرض کنید مدیریت بانک بخواهد یک هزینه ثابت به میزان ۲۵۰۰ میلیون ریال را به این بانک‌های تجاری تخصیص دهد. بدین منظور مدل‌های ارائه شده در این مقاله را در دو حالت دقیق در شرایط اطمینان (مدل (۵)) و نادقیق در شرایط عدم اطمینان (مدل (۱۵)) حل می‌کنیم. در ابتدا مدل (۵) را حل می‌کنیم. برای حل مدل‌ها ما قرار می‌دهیم $\epsilon = 5 \times 10^{-5}$ نتایج در جدول ۵ آمده است.

جدول ۵- هزینه تخصیصی به بانک‌ها حاصل از مدل (۵).

Table 5- Cost allocated to banks resulting from Model (5).

بانک‌ها	هزینه تخصیصی	بانک‌ها	هزینه تخصیصی
B01	145.4352	B15	0
B02	167.4373	B16	0
B03	305.0622	B17	0
B04	199.4731	B18	11.1904
B05	0	B19	0
B06	20.0536	B20	0
B07	644.9789	B21	0
B08	49.3754	B22	549.8352
B09	0	B23	0
B10	0	B24	0
B11	0	B25	175.5848
B12	0	B26	0
B13	24.2205	B27	112.0741
B14	95.2794	مجموع هزینه	2500

همان‌طور که مشاهده می‌گردد هزینه اختصاص یافته به بانک‌های تجاری متناظر با مقدار کارایی و مقادیر ورودی و خروجی از آن‌ها می‌باشد. همچنین مقدار کارایی واحدها نسبت به مقدار کارایی آن‌ها بر اساس مدل CCR در تکنولوژی بازده به مقیاس ثابت افزایش می‌یابد. نتایج در جدول ۶ آمده است.

جدول ۶- کارایی حاصل از مدل (۵) در حضور هزینه اختصاصی.

Table 6- Efficiency obtained from Model (5) in the presence of dedicated cost.

بانک‌ها	کارایی	بانک‌ها	کارایی
B01	1	B15	0.7962
B02	1	B16	0.7117
B03	1	B17	1
B04	1	B18	1
B05	1	B19	0.7038
B06	1	B20	0.8274
B07	1	B21	0.478
B08	1	B22	1
B09	0.6875	B23	1
B10	0.8379	B24	1
B11	0.2058	B25	1
B12	0.5227	B26	0.3321
B13	1	B27	1
B14	1	میانگین کارایی	0.8557

اکنون مدل تخصیص هزینه ثابت بر اساس مجموعه وزن‌های مشترک و بهینه‌سازی استوار در یک محیط نامطمئن و نادقیق را حل می‌کنیم. در ابتدای شروع آنالیز نتایج، برای در نظر گرفتن محیط نامطمئن داده‌ها، فرض می‌کنیم که تمام داده‌ها شامل ورودی‌ها، خروجی‌ها به صورت اعداد نامطمئن می‌باشند. همچنین سطح آشفستگی برای ورودی‌ها خروجی‌ها را برابر با $e^x = e^y = 0.05$ در نظر می‌گیریم؛ بنابراین ما فرض می‌کنیم که ورودی‌ها، خروجی‌ها به صورت زیر باشند:

$$\tilde{x}_{ij} \in [x_{ij} - 0.05x_{ij}x_{ij} + 0.05x_{ij}],$$

$$\tilde{y}_{rj} \in [x_{ij} - 0.05y_{rj} + 0.05y_{rj}].$$

ما فرض می‌کنیم که میزان آشفستگی ورودی‌ها و خروجی‌ها یکسان باشند، اما می‌توانیم برای آن‌ها سطوح متفاوتی را نظر بگیریم.

$$\delta_j^y \text{ and } \delta_j^x \geq \min\{n, 1 + \varphi^{-1}(1 - e)\sqrt{n}\}.$$

φ تابع توزیع تجمعی توزیع نرمال استاندارد است. علاوه بر این، n حداکثر تعداد پارامترهای نامشخص برای هر محدودیت برای محافظت از محدودیت زد در برابر اختلال داده است.

انتخاب یک مقدار سطح محافظت برای δ_j^y or δ_j^x تضمین می‌کند که جواب بهینه مورد انتظار این مدل بهینه‌سازی استوار با احتمال بالاتری شدنی باقی بماند. با توجه به اینکه در این ارزیابی ما سه ورودی و سه خروجی مطلوب را داریم. حداکثر شش پارامتر نامطمئن را در مدل خواهیم داشت؛ بنابراین

$$\delta_j^y \text{ and } \delta_j^x \in [0,6].$$

مقدار سطح محافظه‌کاری تقریبی مربوطه یعنی δ_j^y and δ_j^x برابر با $5/365$ است که به این معنی است که حفاظت از محدودیت‌ها در برابر 83% از داده‌های نامشخص برای برآورد کارایی قوی کافی است. شایان ذکر است که مدل قوی پیشنهادی دارای انعطاف‌پذیری برای محاسبه سطوح مختلف اغتشاش بر اساس ترجیحات ریسک تصمیم‌گیرنده است. ما همچنین می‌توانیم قرار دهیم.

$$\delta_j^y = \delta_j^x = 6.$$

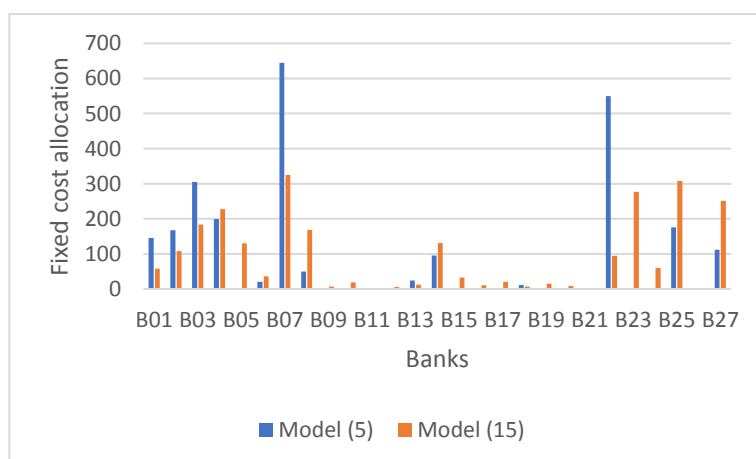
در این صورت مدل (۱۵) در مقابل 100% از پارامترهای نامطمئن که بدترین مقادیر خود را می‌گیرند حمایت می‌گردد. نتایج حاصل از مدل (۱۵) در جدول ۷ آمده است. برای حل مدل قرار می‌دهیم $\epsilon = 5 \times 10^{-5}$.

جدول ۷- هزینه تخصیصی به بانک‌ها حاصل از مدل (۱۵).

Table 7- Cost allocated to banks resulting from Model (15).

بانک‌ها	هزینه تخصیصی	بانک‌ها	هزینه تخصیصی
B01	58.2514	B15	32.2321
B02	107.9916	B16	10.6935
B03	183.7653	B17	20.3207
B04	227.7169	B18	7.1085
B05	130.2837	B19	14.9254
B06	36.0351	B20	8.7884
B07	325.65	B21	1.289
B08	168.1339	B22	94.36
B09	6.5469	B23	276.6065
B10	18.6099	B24	59.9432
B11	0.5118	B25	308.0827
B12	6.2057	B26	1.68
B13	12.6767	B27	250.9331
B14	130.6581	مجموع هزینه	2500

مطابق نتایج در جدول ۶، هزینه اختصاص‌یافته به بانک‌های تجاری متناظر با مقدار کارایی و مقادیر ورودی و خروجی از آن‌ها می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌گردد ما به یک طرح تخصیص هزینه ثابت منصفانه در حضور داده‌های نادقیق دست یافته‌ایم. در شکل ۱ ما به مقایسه مقادیر هزینه تخصیصی به بانک‌ها بر اساس مدل‌های (۵) و (۱۵) پرداختیم. همچنین مقدار کارایی واحدها نسبت به مقدار کارایی آن‌ها بر اساس مدل CCR در تکنولوژی بازه به مقیاس ثابت در حضور ورودی‌ها و خروجی‌های دقیق افزایش می‌یابد. مقادیر کارایی تمام واحدها بعد از پروسه تخصیص برابر خواهد بود. نتایج در جدول ۸ آمده است.



شکل ۱- مقایسه مقادیر هزینه تخصیصی به بانک‌ها بر اساس مدل‌های (۵) و (۱۵).

Figure 1- Comparison of cost values allocated to banks based on Models (5) and (15).

جدول ۸- کارایی حاصل از مدل (۱۵) در حضور هزینه اختصاصی.

Table 8- Efficiency obtained from Model (15) in the presence of dedicated cost.

بانکها	کارایی	بانکها	کارایی
B01	0.9524	B15	0.9524
B02	0.9524	B16	0.9524
B03	0.9524	B17	0.9524
B04	0.9524	B18	0.9524
B05	0.9524	B19	0.9524
B06	0.9524	B20	0.9524
B07	0.9524	B21	0.9524
B08	0.9524	B22	0.9524
B09	0.9524	B23	0.9524
B10	0.9524	B24	0.9524
B11	0.9524	B25	0.9524
B12	0.9524	B26	0.9524
B13	0.9524	B27	0.9524
B14	0.9524	میانگین کارایی	0.9524

۵- نتیجه گیری

بررسی یک طرح تخصیص هزینه ثابت با توجه به تضاد منافع افراد و شرکت و نهادها در عین چالش برانگیز بودن به یک موضوع حیاتی تبدیل شده است. در بسیاری از موارد دنیای واقعی، تخصیص هزینه ثابت اغلب در یک سازمان اتفاق می افتد. تمام بخش های مرتبط با سازمان باید هزینه ثابت را به اشتراک بگذارند. در این راستا از رویکردهای متعددی از جمله تحلیل پوششی داده ها استفاده می گردد. با این حال، رعایت انصاف و تخصیص عادلانه موضوعی است که استفاده از رویکرد تحلیل پوششی داده ها در مسایل تخصیص می توان آن را قوت بخشید. این پژوهش به بررسی موضوع تخصیص هزینه ثابت بر اساس تحلیل پوششی داده ها می پردازد. همان طور که می دانید ارایه یک طرح تخصیص هزینه ثابت مناسب می تواند مدیران ارشد سازمانها را در تعالی و پیشرفت سازمان تحت مدیریت خود کمک کند اما ارایه یک طرح تخصیص هزینه ثابت می تواند با اهداف متفاوتی انجام شود.

یکی از اهداف تخصیص هزینه ثابت بر اساس بهبود کارایی از واحدهای تصمیم گیرنده می باشد. در این مقاله ما از مدل تحلیل پوششی داده ها بر اساس مفهوم مجموعه وزن های مشترک به منظور ارایه یک طرح تخصیص هزینه استفاده نمودیم. در دنیای واقعی با موارد زیادی روبرو باشیم که داده ها به صورت نادقیق می باشند. یکی از این دسته داده ها، داده های استوار می باشد. در این مقاله به منظور در نظر گرفتن داده های نادقیق در مدل ارزیابی عملکرد از بهینه سازی استوار در تحلیل پوششی داده ها استفاده کردیم. در این راستا مدل تحلیل پوششی داده ها بر اساس مفهوم مجموعه وزن های مشترک را به منظور ارایه یک طرح تخصیص هزینه ثابت بر اساس بهینه سازی استوار در یک محیط نامطمئن توسعه دادیم. در ادامه به ارزیابی عملکرد بانک های تجاری در ایران که تحت یک مدیریت واحد فعالیت می کنند پرداختیم ما نشان دادیم که بر اساس رویکرد ارایه شده در این مقاله می توانیم یک میزان هزینه ثابت را به تمام بانکها اختصاص دهیم. به عنوان کارهای آتی می توان مدل های ارایه شده در این مقاله را در سایر تکنولوژی ها نظیر بازده به مقیاس متغیر یا غیرمحدب توسعه داد. همچنین می توانیم مدل های ارایه شده در این مقاله را برای ارزیابی کارایی سایر صنایع نظر کارخانه ها صنعتی توسعه داد.

تعارض منافع

نویسندگان اعلام می کنند که هیچ نوع تعارض منافی وجود ندارد.

سپاسگزاری

نویسندگان از سردبیر محترم مجله و داوران محترم در فرآیند داوری و اصلاح مقاله تشکر می نمایند.

این پژوهش هیچ کمک‌هزینه خاصی از هیچ موسسه سرمایه‌گذار در بخش عمومی تجاری یا غیرانتفاعی دریافت نکرده است.

منابع

- [1] Gerami, J. (2019). An interactive procedure to improve estimate of value efficiency in DEA. *Expert systems with applications*, 137, 29–45. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2019.06.061>
- [2] Gerami, J., & Mozaffari, M. R. (2021). Additive slacks-based measure of efficiency for dealing with undesirable outputs based on DEA-R model. *Big data and computing visions*, 1(1), 15–23. <https://doi.org/10.22105/bdev.2021.142082>
- [3] Ebrahimi, B., & Tesic, D. (2024). A DEA based performance measurement approach with weak ordinal data. *Systemic analytics*, 2(2), 229–242. <https://doi.org/10.31181/sa22202425>
- [4] Muniz, S. M., Andriola, W. B., Fátima Muniz, R. de, & Edalatpanah, S. A. (2024). The impacts of covid-19 on postgraduate courses at the Federal University of Ceará (UFC, Brazil). *Optimality*, 1(1), 1–9. <https://doi.org/10.22105/opt.v1i1.18>
- [5] Mozaffari, M. R., Kamyab, P., Jablonsky, J., & Gerami, J. (2014). Cost and revenue efficiency in DEA-R models. *Computers & industrial engineering*, 78, 188–194. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2014.10.001>
- [6] Gerami, J., Mozaffari, M. R., Wanke, P. F., & Correa, H. L. (2022). Improving information reliability of non-radial value efficiency analysis: An additive slacks based measure approach. *European journal of operational research*, 298(3), 967–978. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2014.10.001>
- [7] Cook, W. D., & Kress, M. (1999). Characterizing an equitable allocation of shared costs: A DEA approach. *European journal of operational research*, 119(3), 652–661. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(98\)00337-3](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(98)00337-3)
- [8] Cook, W. D., & Zhu, J. (2005). Allocation of shared costs among decision making units: A DEA approach. *Computers & operations research*, 32(8), 2171–2178. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2004.02.007>
- [9] Lin, R. (2011). Allocating fixed costs and common revenue via data envelopment analysis. *Applied mathematics and computation*, 218(7), 3680–3688. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.09.011>
- [10] Qingxian, A., Wang, P., Emrouznejad, A., & Hu, J. (2020). Fixed cost allocation based on the principle of efficiency invariance in two-stage systems. *European journal of operational research*, 283(2), 662–675. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221719309427>
- [11] Chu, J., Wang, S., Feng, L., & Yuan, Z. (2023). Individual rationality and overall fairness in fixed cost allocation: An approach under DEA cross-efficiency evaluation mechanism. *Journal of the operational research society*, 74(3), 992–1007. <https://doi.org/10.1080/01605682.2022.2079434>
- [12] Zhang, D., Wu, H., Li, F., & Song, Y. (2024). Fixed cost allocation based on a data envelopment analysis aggressive game approach. *Computers & industrial engineering*, 193, 110316. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2024.110316>
- [13] An, Q., Tao, X., Xiong, B., & Chen, X. (2022). Frontier-based incentive mechanisms for allocating common revenues or fixed costs. *European journal of operational research*, 302(1), 294–308. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2021.12.039>
- [14] Hosseinzadeh Saljooghi, F., Pishgooy, A. R., & Hamidi, F. (2024). Fair allocation of fixed costs in one- and two-stage systems using data envelopment analysis. *Innovation management and operational strategies*, 5(3), 348–367. **(In Persian)**. <https://doi.org/10.22105/imos.2024.453236.1350>
- [15] Hatami-Marbini, A., Emrouznejad, A., & Tavana, M. (2011). A taxonomy and review of the fuzzy data envelopment analysis literature: Two decades in the making. *European journal of operational research*, 214(3), 457–472. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2011.02.001>
- [16] Olesen, O. B., & Petersen, N. C. (2016). Stochastic data envelopment analysis—A review. *European journal of operational research*, 251(1), 2–21. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.07.058>
- [17] Montazeri, F. Z. (2020). An overview of data envelopment analysis models in fuzzy stochastic environments. *Journal of fuzzy extension and applications*, 1(4), 272–278. <https://doi.org/10.22105/jfea.2020.258330.1030>
- [18] Rasoulzadeh, M., Edalatpanah, S. A., Fallah, M., & Najafi, S. E. (2024). Combining markowitz mean-variance models with trapezoidal fuzzy returns and cross-efficiency data envelopment analysis with network structure to find the optimal investment portfolio. *Journal of decisions and operations research*, 9(4), 968–984. **(In Persian)**. <https://doi.org/10.22105/dmor.2023.396910.1743>
- [19] Najafi, S. E. (2024). The impact of entrepreneurial orientation, organizational learning, and service innovation on organizational performance (Case study: Parsian Insurance). *Modern research in performance evaluation*, 3(3), 176–184. **(In Persian)**. <https://doi.org/10.22105/mrpe.2024.480336.1113>
- [20] Hatami-Marbini, A., & Arabmaldar, A. (2021). Robustness of Farrell cost efficiency measurement under data perturbations: Evidence from a US manufacturing application. *European journal of operational research*, 295(2), 604–620. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2021.03.019>
- [21] Sadjadi, S. J., & Omrani, H. (2008). Data envelopment analysis with uncertain data: An application for Iranian electricity distribution companies. *Energy policy*, 36(11), 4247–4254. <https://doi.org/10.1016/j.enpol.2008.08.004>
- [22] Omrani, H. (2013). Common weights data envelopment analysis with uncertain data: A robust optimization approach. *Computers & industrial engineering*, 66(4), 1163–1170. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2013.07.023>
- [23] Arabmaldar, A., Josef, J., & Hosseinzadeh Saljooghi, F. (2017). A new robust DEA model and super-efficiency measure. *Optimization*, 66(5), 723–736. <https://doi.org/10.1080/02331934.2017.1295047>
- [24] Toloo, M., Mensah, E. K., & Salahi, M. (2022). Robust optimization and its duality in data envelopment analysis. *Omega*, 108, 102583. <https://doi.org/10.1016/j.omega.2021.102583>
- [25] Salahi, M., Mehdi, T., & Hesabirad, Z. (2019). Robust russell and enhanced russell measures in DEA. *Journal of the operational research society*, 70(8), 1275–1283. <https://doi.org/10.1080/01605682.2018.1489353>

-
- [26] Arabmaldar, A., Sahoo, B. K., & Ghiyasi, M. (2023). A generalized robust data envelopment analysis model based on directional distance function. *European journal of operational research*, 311(2), 617–632. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2023.05.005>
- [27] Kao, C., & Hung, H. T. (2005). Data envelopment analysis with common weights: The compromise solution approach. *Journal of the operational research society*, 56(10), 1196–1203. <https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2601924>
- [28] Jahanshahloo, G. R., Sadeghi, J., & Khodabakhshi, M. (2017). Proposing a method for fixed cost allocation using DEA based on the efficiency invariance and common set of weights principles. *Mathematical methods of operations research*, 85(2), 223–240. <https://doi.org/10.1007/s00186-016-0563-z>
- [29] Ghazi, A., & Hosseinzadeh Lotfi, F. (2019). Assessment and budget allocation of Iranian natural gas distribution company- A CSW DEA based model. *Socio-economic planning sciences*, 66, 112–118. <https://doi.org/10.1016/j.seps.2018.07.009>
- [30] Soltanifar, M., Ghiyasi, M., Emrouznejad, A., & Sharafi, H. (2024). A novel model for merger analysis and target setting: A CSW-Inverse DEA approach. *Expert systems with applications*, 249, 123326. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2024.123326>
- [31] Peykani, P., Seyed Esmaeili, F. S., Pishvaei, M. S., Rostamy-Malkhalifeh, M., & Hosseinzadeh Lotfi, F. (2024). Matrix-based network data envelopment analysis: A common set of weights approach. *Socio-economic planning sciences*, 95, 102044. <https://doi.org/10.1016/j.seps.2024.102044>
- [32] Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European journal of operational research*, 2(6), 429–444. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(78\)90138-8](https://doi.org/10.1016/0377-2217(78)90138-8)
- [33] Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management science*, 30(9), 1078–1092. <https://doi.org/10.1287/mnsc.30.9.1078>
- [34] Kao, C., & Liu, S. T. (2000). Fuzzy efficiency measures in data envelopment analysis. *Fuzzy sets and systems*, 113(3), 427–437. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(98\)00137-7](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(98)00137-7)
- [35] Lertworasirikul, S., Fang, S. C., A. Joines, J., & L.W. Nuttle, H. (2003). Fuzzy data envelopment analysis (DEA): A possibility approach. *Fuzzy sets and systems*, 139(2), 379–394. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(02\)00484-0](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(02)00484-0)
- [36] Azadeh, A., Mohammad, S., Seyed Mohammad, K., & Firoozi, M. (2014). An integrated fuzzy simulation–fuzzy data envelopment analysis approach for optimum maintenance planning. *International journal of computer integrated manufacturing*, 27(2), 181–199. <https://doi.org/10.1080/0951192X.2013.812804>
- [37] Emrouznejad, A., Anouze, A. L., & Thanassoulis, E. (2010). A semi-oriented radial measure for measuring the efficiency of decision making units with negative data, using DEA. *European journal of operational research*, 200(1), 297–304. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2009.01.001>