




Paper Type: Original Article

Bayesian Estimation of Fractional Ornstein-Uhlenbeck Model Parameters Using the SIR Algorithm in Financial Derivatives Pricing

Parviz Nasiri^{1*}, Amir Haj Salmani¹, Mahdiah Tahmasebi²

¹ Department of Statistics, Payam Noor University, Tehran, Iran; pnasiri@pnu.ac.ir; amir.salmany@gmail.com.

² Department of Mathematics, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran; mah.tahmasebi15@gmail.com.

Citation:

Received: 21 October 2023

Revised: 02 January 2024

Accepted: 04 March 2024

Nasiri, P., Haj Salmani, A., & Tahmasebi, M. (2024). Bayesian estimation of fractional Ornstein-Uhlenbeck model parameters using the sir algorithm in financial derivatives pricing. *Journal of Quality Engineering and Management*, 14(3), 217-223.

Abstract

Purpose: This paper aims to accurately estimate the parameters of the fractional Ornstein-Uhlenbeck model using the Bayesian method and the SIR simulation algorithm and to compare its performance with the Maximum Likelihood Estimation (MLE) method in the context of stochastic differential models with long-memory properties. The paper also seeks to evaluate the efficiency of the Bayesian approach in similar models, particularly in analyzing financial data with long-term dependencies.


Methodology: In this study, the parameters of the fractional Ornstein-Uhlenbeck model are estimated for the first time using the Bayesian method, with appropriate prior distributions and the SIR algorithm employed for simulation. The efficiency of the Bayesian estimator is compared with that of the MLE estimator using RMSE and variance indices.

Findings: The results demonstrate that the Bayesian estimator provides more accurate parameter estimates than the Maximum Likelihood method. Moreover, as the degree of long-term data dependence increases, the accuracy of estimates improves under both methods; however, the Bayesian approach consistently outperforms the MLE. Additionally, the parameter σ is estimated with higher precision compared to the parameters k and μ .

Originality/Value: The originality of this paper lies in the application of the SIR algorithm to estimate the parameters of the fractional Ornstein-Uhlenbeck model. This approach has not been previously explored. This innovation represents a significant contribution to the application of Bayesian methods for parameter estimation in stochastic differential models with long-memory properties, and it opens new avenues for applying similar techniques to models such as the Heston model in future research.

Keywords: Long-term memory models, Heston model, Fractional Ornstein Uhlenbeck model, Fractional model, SIR algorithm, Bayesian estimation, Maximum likelihood method.

 Corresponding Author: pnasiri@pnu.ac.ir

 10.48313/jqem.2025.513308.1507



Licensee System Analytics. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



برآورد بیزی پارامترهای مدل ارنشتاین-النبگ کسری با استفاده از الگوریتم SIR در

قیمت گذاری مشتقات مالی

پرویز نصیری^{۱*}، امیر حاج سلمانی^۱، مهدیه طماسبی^۲

^۱گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.

^۲گروه ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران.

چکیده

هدف: هدف این مقاله، برآورد دقیق پارامترهای مدل ارنشتاین-النبگ کسری با استفاده از روش بیزی و الگوریتم شبیه‌سازی SIR و مقایسه عملکرد آن با روش ماکسیمم درستنمایی در زمینه مدل‌های دیفرانسیل تصادفی دارای حافظه بلندمدت است. همچنین، مقاله در پی بررسی کارایی روش بیزی در مدل‌های مشابه، به‌ویژه در تحلیل داده‌های مالی با وابستگی بلندمدت می‌باشد. روش‌شناسی پژوهش: در این تحقیق، پارامترهای مدل ارنشتاین-النبگ کسری برای اولین بار به روش بیزی و با در نظر گرفتن توزیع‌های پیشین مناسب، توسط الگوریتم SIR شبیه‌سازی و برآورد شده‌اند. کارایی برآوردگر بیزی با برآوردگر ماکسیمم درستنمایی بر اساس شاخص‌های RMSE و واریانس مقایسه شده است.

یافته‌ها: نتایج نشان دادند که برآوردگر بیزی نسبت به روش ماکسیمم درستنمایی، دقت بیشتری در برآورد پارامترهای مدل دارد. همچنین، با افزایش میزان وابستگی بلندمدت بین داده‌ها، دقت برآوردها در هر دو روش افزایش می‌یابد، اما در همه حالت‌ها روش بیزی عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهد. دقت برآورد پارامتر σ نسبت به پارامترهای دیگر (k و μ) بیشتر بوده است.

اصالت/ارزش افزوده علمی: اصالت این مقاله در به‌کارگیری الگوریتم SIR برای برآورد پارامترهای مدل ارنشتاین-النبگ کسری است که در تحقیقات پیشین مورد توجه قرار نگرفته بود. این کار نوآوری مهمی در استفاده از روش‌های بیزی در برآورد مدل‌های دیفرانسیل تصادفی با حافظه بلندمدت به شمار می‌رود و زمینه را برای برآورد پارامترهای مدل‌های مشابه (مانند مدل هستون) در پژوهش‌های آتی فراهم می‌کند.

کلیدواژه‌ها: مدل‌های حافظه بلند مدت، مدل هستون، مدل کسری ارنشتاین اولنبگ، مدل کسری، الگوریتم SIR، تخمین بیزی، روش حداکثر درستنمایی.

۱- مقدمه

در دهه ۱۹۷۰ فیشر بلک، مایرون اسکولز و رابرت مerton مدل بلک شولز مerton را ارائه دادند که باعث تغییر اساسی در بررسی قیمت‌گذاری مشتقات مالی، اقتصادی و تئوری قیمت‌گذاری از جمله سهام به‌عنوان دارایی شد [1] و در نهایت منجر به یک مدل دیفرانسیل تصادفی گردید. در این مدل فرض می‌شود ارزش دارایی از یک حرکت براونی با واریانس ثابت پیروی می‌کند و ساختار سرمایه شرکت شامل بدهی و حقوق صاحبان سهام است [2]. با اضافه کردن تغییرات تصادفی به معادله دیفرانسیل تصادفی $\frac{d}{dt}X_t = b(t, X_t), X(0) = 0$ می‌توان خطاهای اندازه‌گیری و معادله دیفرانسیل تصادفی را به صورت

$$X_{(t+\Delta t)} - X_t = \mu(t, X_t)\Delta t + U(t, X_t)\Delta B_t, \quad (1)$$

در نظر گرفت. پورک [3] معادله دیفرانسیل تصادفی خطی مربوط به رابطه (۱) را به صورت

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t, \quad (2)$$

ارایه داد که حالت ساده‌ای از معادلات دیفرانسیل تصادفی است و دارای کاربرد فراوان در علوم مختلف بخصوص قیمت‌گذاری سهام می‌باشد. یکی از انواع معادلات دیفرانسیل تصادفی که به صورت دو فاکتوری نمایش داده می‌شود، مدل هستون^۱ [4] است.

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu X_t dt + U_t X_t dB_t, \\ dU_t &= (\mu - kU_t)dt + \sigma_t dB_t \end{aligned} \quad (3)$$

است که در آن قیمت سهام U_t ارزش دارایی در زمان t می‌باشند؛ عبارت دوم رابطه (۳) را مدل ارنشتاین النبگ OU می‌نامند که در آن k نرخ بازگشت، μ جمله رانشی و B_t چنانکه قبلاً ذکر شد فرآیند براونی است و بردار پارامترهای مدل در این حالت $\theta = (k, \mu, \sigma_t)'$ می‌باشد. در ابتدا کاربرد مدل ارنشتاین النبگ در فیزیک به‌عنوان مدلی برای سرعت یک ذره عظیم براونی تحت تاثیر اصطکاک بود. این نام از لئونارد ارنشتاین و جورج یوجین اولنیک گرفته شده و یک فرآیند ثابت گاوس مارکوف است، به این معنی که یک فرآیند گاوسی، یک فرآیند مارکوف و از نظر زمانی همگن است. این مدل تنها فرآیند غیر پیش پا افتاده‌ای است که شرط‌های را برآورده دارای است و امکان تبدیل خطی متغیرهای مکان و زمان را فراهم می‌کند. با گذشت زمان، فرآیند به سمت عملکرد میانگین خود حرکت می‌کند، چنین فرآیندی بازگشت میانگین نامیده می‌شود.

این مدل را می‌توان به‌عنوان فرآیند اتورگرسیو مرتبه گسسته در نظر گرفت [5]. با توجه به این مزیت‌ها مدل ارنشتاین النبگ در حالت کسری (این مدل در بخش بعدی معرفی می‌گردد) در مقاله حاضر مورد بررسی قرار گرفته است.

۲- مدل ارنشتاین النبگ کسری^۲

با توجه به کاربرد وسیع مدل‌های باحافظه بلندمدت در مباحث مالی و اقتصادی و مزایای مدل ارنشتاین النبگ با جایگزینی حرکت براونی استاندارد B_t با حرکت براونی کسری B_t^H و ثابت در نظر گرفتن σ_t در عبارت سمت راست رابطه (۳) مدل ارنشتاین النبگ کسری به فرم زیر به دست می‌آید که موضوع اصلی مقاله حاضر می‌باشد:

$$dV_t = (\mu - kV_t)d_t + \sigma dB_t^H \quad (4)$$

و در آن پارامتر H ، ضریب هارست^۳ مقدار ضریب کسری یا تفاضل‌گیری مدل را تعیین می‌کند و مقدار آن $0 < H < 1$ است [6]. به ازای $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ و مقادیر n مشاهدات فرآیند V_t دارای خاصیت وابستگی بلندمدت و برای $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ و مقادیر بزرگ n فرآیند ایستا با تابع همبستگی منفی است [3]. در مقاله حاضر مقادیر $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ در نظر گرفته می‌شود. بردار پارامترهای مدل در رابطه (۲) $\theta = \{k, \mu, \sigma\}$ است. تحقیقات مختلفی از گذشته تاکنون برای بررسی خواص و برآورد پارامترهای مدل دیفرانسیل کسری بخصوص مدل ارنشتاین النبگ کسری انجام شده است. از جمله ماندلبرو و ولس [7] یک مدل دیفرانسیل تصادفی از حرکت براونی کسری برای برخی از خواص بلندمدت سوابق ژئوفیزیکی با کاربرد در منابع آب به دست آوردند. فینک [8] با استفاده از الگوی معادلات دیفرانسیل تصادفی و ارنشتاین النبگ، فرآیند لوی کسری^۴ را بررسی کرده است. وی از معادله دیفرانسیل تصادفی $dX_t = \mu(X_t)d_t + \sigma(X_t)dL_t^a, t \in \mathbb{R}$ استفاده کرد که در آن L^P فرآیند لوی کسری P بعدی است. باجا [9] با گسترش

¹ Heston

² Fractional

³ Hurst

⁴ Fractional Lévy Process (FLP)

روش‌های گذشته از روش حداقل مربعات برای برآورد پارامترهای مدل ارنشتاین النبگ کسری استفاده کرده است. وی مقدار پارامتر هارست را $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ اختیار کرده است و در مورد توزیع مجانبی میانگین دوره‌ای فرآیند ارنشتاین النبگ کسری بحث کرده است.

چن و همکاران [10] به بررسی مدل ارنشتاین النبگ کسری مختلط با جملات نویزی مختلط پرداختند. همچنین هو و همکاران [11] با استفاده از روش برآورد حداقل مربعات به بررسی همگرایی برآوردهای پارامترهای مدل ارنشتاین النبگ کسری پرداختند. خواص نظری مدل ارنشتاین النبگ کسری برای تمام مقادیر پارامتر کسری $H \in (0, 1)$ و چندین رویکرد برای قیمت‌گذاری اختیار معامله به‌وسیله میسورا [12] مورد بررسی قرار گرفت. فلاح و همکاران [13] از معادله به فرم $d\sigma_t = \frac{1}{2}(\frac{k}{Y_t} - aY_t)dt + \frac{\sigma}{2}dB_t^H$ استفاده کرده‌اند. آن‌ها به بررسی وجود و منحصر به فرد بودن حل معادله پرداخته‌اند. همچنین تاثیر مقادیر مختلف پارامترهای مدل بر جواب معادله $dY_t = k(\theta - Y_t)dt + \sigma dB_t^H$ را بررسی کردند. حارث [14] با فرض $(X_t)_{t \geq 0}$ به‌عنوان فرآیند ارنشتاین النبگ کسری و مشاهدات در زمان‌های گسسته به فاصله زمانی h $t_k = kh, k = 0, 1, \dots, 2n + 2$ برآورد پارامترهای مدل را با استفاده از شبیه‌سازی به‌دست آورده و سازگاری و همگرایی برآوردها را ثابت کرده است. در مقالات اشاره شده برای برآورد پارامترهای مدل ارنشتاین النبگ کسری تاکنون از روش بیزی استفاده نشده است، لذا در این مقاله برآورد بیزی پارامترهای مدل ارنشتاین النبگ کسری به ازای $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ با روش SIR^1 ارایه می‌شود و نتایج حاصل از آن با روش ماکسیمم درست‌نمایی مقایسه می‌شود.

۳- الگوریتم SIR

الگوریتم SIR، یک تکنیک مبتنی بر شبیه‌سازی برای تولید توزیع‌های پیش‌بین و فیلتر متوالی برای مدل‌های فضای حالت غیرخطی یا غیرگاوسی است. این روش مبتنی بر مجموعه‌ای از نقاط است که برای نمایش توزیع متغیرهای $f(V_{t_i}|D_i, \theta)$ استفاده می‌شود و از قانون بیز با تکرار برای وزن دادن به توزیع‌ها استفاده می‌شود. برای مجموعه $D_N = \{S_{t_i}; i, \dots, N\}$ بردار سری زمانی قیمت سهام در بازه‌های زمانی برابر $t_{i+1} - t_i = h$ است. این روش توسط دوان [15] برای مدل مرتون با حضور جمله نویز برای برآورد بردار پارامتر $\theta = (k, \mu, \sigma_t)$ مورد استفاده قرار گرفت. او از روش SIR برای شبیه‌سازی استفاده کرد و برای داده‌های شرکت داو جونز برآورد پارامترها را به‌دست آورد.

با توجه به استفاده از روش بیزی در روش SIR نیاز است توزیع پیشین بردار پارامترها مشخص شود. در این فرآیند به دلیل نامشخص بودن تابع چگالی $f(V_{t_i}|D_i, \theta)$ ، برآورد تجربی آن $\hat{f}(V_{t_i}|D_i, \theta)$ با استفاده از مجموعه M نقطه $\{V_{t_i}^{(m)}, m = 1, \dots, M\}$ با وزن‌های مساوی برآورد به‌دست می‌آید. با توجه به اینکه در مقاله حاضر بر اساس مدل ارنشتاین النبگ کسری به فرم رابطه (۴) نمونه‌ای از مدل به‌دست می‌آید. به‌وسیله بردار مشاهدات حاصل، تابع چگالی تجربی با استفاده از رابطه (۵) محاسبه می‌شود.

$$\hat{f}(V_{t_{i+1}}|D_i, \theta) \propto \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M f(V_{t_{i+1}}|V_{t_i}^{(m)}, \theta). \quad (5)$$

با استفاده از قانون بیز در زمان i th با استفاده از تابع چگالی فیلترینگ برآورد می‌شود:

$$\hat{f}(V_{t_{i+1}}|D_{i+1}, \theta) \approx f(S_{t_{i+1}}|V_{t_{i+1}}, \theta)\hat{f}(V_{t_{i+1}}|D_i, \theta). \quad (6)$$

رابطه‌های (۵) و (۶) به‌عنوان فرآیند تولید مجموعه نقاط با وزن‌های مساوی در زمان $i+1$ th با استفاده از زمان i th هستند. الگوریتم SIR به‌طور مبسوط شامل مراحل زیر است:

گام ۱- یک نمونه M تایی از توزیع $\hat{f}(V_{t_{i+1}}|D_i, \theta)$ تولید می‌شود. تولید مشاهدات برای زمان i th بردار نمونه‌ای مشاهدات $\{V_{t_i}^{(m)}, m = 1, \dots, M\}$ با وزن برابر از توزیع $f(V_{t_{i+1}}|V_{t_i}^{(m)}, \theta)$ و بر اساس مدل ارنشتاین النبگ رابطه (۴) انجام می‌شود. برای تولید نمونه از رابطه (۴) مقادیر پیش

¹ Sampling Importance Resampling (SIR)

فرض بردار پارامترها ابتدا تعیین می‌شوند. برای بررسی اثر مقدار پارامتر کسری و اندازه نمونه بر دقت برآورد و مقایسه بین کارایی دوروش ماکسیمم درست‌نمایی و SIR ، شبیه‌سازی برای مقادیر مختلف حجم نمونه و پارامتر کسری انجام می‌شود. پس از تولید نمونه اولیه از مدل استفاده از رابطه (۵) مقدار $f(V_{t_i} | D_i, \theta)$ برآورد و در نتیجه $V_{t_i}^{(m)}$ تولید می‌شود.

گام ۲- برای مشاهدات $V_{t_{i+1}}^{(m)}$ وزن‌های $w_{i+1}^{(m)} = \frac{w_{i+1}^{(m)}}{\sum_{i=1}^m w_{i+1}^{(m)}}$ تولید می‌شود. به طوری که $w_{i+1}^{(m)} = f(S_{t_{i+1}} | V_{t_{i+1}}^{(m)}, \theta)$ و بر اساس رابطه (۶) انجام می‌شود. تعیین توزیع $f(S_{t_{i+1}} | V_{t_{i+1}}^{(m)}, \theta)$ با توجه به موضوع مقاله حاضر بر اساس مدل ارنشتاین النبگ کسری رابطه (۴) و مشاهدات تولیدشده از گام اول در ادامه ارایه می‌شود.

گام ۳- به وسیله نمونه موزون تولیدشده در مرحله قبل، نمونه $\{(V_{t_{i+1}}^{(m)}, \pi_{t_{i+1}}^{(m)}), m = 1, \dots, M\}$ به حجم M تا رسیدن به نمونه‌ای با وزن‌های برابر تولید می‌گردد.

انجام نمونه‌گیری‌های مجدد در مرحله سوم حائز اهمیت می‌باشد، زیرا با تکرار نمونه‌گیری ثبات و پایایی مشاهدات افزایش و خطاهای تصادفی کاهش می‌یابد. همچنین گام اول بدون در نظر گرفتن توزیع $f(S_{t_{i+1}} | V_{t_{i+1}}^{(m)}, \theta)$ می‌باشد و نمونه‌گیری مجدد منجر به رفع این نقص می‌شود [15].

برآوردگرهای حاصل از روش SIR دارای توزیع مجانبی نرمال $\hat{\theta} \sim N(\theta_0, A_N^{-1})$ است که در آن θ_0 بردار مقادیر صحیح پارامتر و $A_N = -\frac{\partial L(\theta; D_N)}{\partial \theta \partial \theta'} |_{\theta = \hat{\theta}}$ است و در آن $L(\theta; D_N)$ لگاریتم تابع درست‌نمایی است.

تعیین توزیع $f(V_{t_{i+1}} | V_{t_i}^{(m)}, \theta)$: چنانکه ذکر شد نیاز به تعیین توزیع تابع چگالی $f(V_{t_{i+1}} | D_i, \theta)$ است که وابسته به توزیع $f(V_{t_{i+1}} | V_{t_i}^{(m)}, \theta)$ است و برای تعیین آن به روش زیر عمل می‌کنیم [15]. با استفاده از خواص رابطه اوایلر [16] داریم:

$$\begin{aligned} \underbrace{\Delta V_t}_{V_{t_{i+1}} - V_{t_i}} &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} (K - \mu V_s) ds + \sigma \Delta B_t^H \\ \Rightarrow V_{t_{i+1}} &= V_{t_i} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (K - \mu V_s) ds + \sigma \Delta B_t^H, \end{aligned} \quad (7)$$

که در نتیجه آن برای فرآیند براونی کسری [11]

$$\Delta B_t^H \sim N(0, H(2H-1)(t_{i+1} - t_i)^{2H-2}), \quad (8)$$

بنابراین با استفاده از رابطه (۸) و مدل ارنشتاین النبگ کسری رابطه (۲) داریم:

$$f(V_{t_{i+1}} | V_{t_i}) \sim N((\mu - kV_{t_i})\Delta t, \sigma^2 H(2H-1)\Delta t^{2H-2}). \quad (9)$$

تعیین توزیع $f(S_{t_{i+1}} | V_{t_{i+1}}, \theta)$: با جایگزینی رابطه $d_t = \frac{\ln(V_t/F) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T^H - t^H)}{\sigma\sqrt{T^H - t^H}}$ در معادله استاندارد ارزش اختیار معامله اروپایی روی دارایی پایه V_t به فرم $S_t = V_t \phi(d_t) - F e^{-r(T-t)} \phi(d_t - \sigma\sqrt{T^H - t^H})$ است و با در نظر گرفتن دارایی پایه V_t به صورت $(V_t - F)^+$ داریم [15]:

$$S_t = V_t \phi\left(\frac{d_t}{\sigma\sqrt{T^H - t^H}}\right) - F e^{-r(T-t)} \phi\left(d_t - \sigma\sqrt{T^H - t^H}\right). \quad (10)$$

با استفاده از خاصیت وارون‌پذیری داریم $V_{t_{i+1}} = S^{-1}(S_{t_{i+1}})$ و در نتیجه

$$f(V_{t_{i+1}})(S^{-1})'(S_{t_{i+1}}) = f_{S_{t_{i+1}}}(S_{t_{i+1}}) \Rightarrow f(V_{t_{i+1}}) = \frac{f_{S_{t_{i+1}}}(S_{t_{i+1}})}{(S^{-1})'(S_{t_{i+1}})} \quad (11)$$

با کاربرد خاصیت وارون‌پذیری توابع مرکب داریم [17]

$$f(V_{t_{i+1}}) = f(S_{t_{i+1}})S'(V_{t_{i+1}}) \quad (12)$$

به طوری که مشتق S_t' در رابطه (۱۲) برابر است با

$$S'_t = \phi(d_t) + V_t \phi'(d_t) \left(\frac{1}{V_t \sigma \sqrt{T^{2H} - t^{2H}}} \right) - F e^{-r(T-t)} \phi' \left(d_t - \sigma \sqrt{T^{2H} - t^{2H}} \right) \left(\frac{1}{V_t \sigma \sqrt{T^{2H} - t^{2H}}} \right). \quad (13)$$

با فاکتورگیری از جمله $\frac{1}{\sigma \sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}$ و در نظر گرفتن مشتق توزیع نرمال استاندارد رابطه (13) را می توان به صورت

$$S'_t = \phi(d_t) + \frac{1}{\sigma \sqrt{T^{2H} - t^{2H}}} \quad (14)$$

$$\left[e^{-\frac{d_t^2}{2}} - \frac{F}{V_t} e^{r(T-t)} e^{-\frac{d_t^2}{2}} e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T^{2H} - t^{2H})} e^{d_t \sigma \sqrt{T^{2H} - t^{2H}}} \right]$$

نوشت. با استفاده از تعریف d_t در رابطه (14) خواهیم داشت:

$$e^{d_t \sigma \sqrt{T^{2H} - t^{2H}}} = \frac{V_t}{F} \cdot e^{r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T^{2H} - t^{2H})}. \quad (15)$$

پس از جایگذاری رابطه (15) در رابطه (14) و ساده کردن آن داریم:

$$S'_t = \phi(d_t). \quad (16)$$

با استفاده از رابطه (16) می توان رابطه (11) را به صورت

$$f(V_{t_{i+1}}) = f_{S_{t_{i+1}}}(S_{t_{i+1}}) \phi(d_t) \quad (17)$$

نوشت. در نتیجه با توجه به توزیع $f(V_{t_{i+1}} | V_{t_i})$ رابطه (9) و توزیع استاندارد $\phi(d_t)$ ، توزیع $f(S_{t_{i+1}} | V_{t_{i+1}}, \theta)$ از تقسیم دو توزیع نرمال به دست می آید که می توان در شبیه سازی استفاده کرد [18].

۴- شبیه سازی

برای ارزیابی دقت برآوردگرها با استفاده از الگوریتم SIR و روش ماکسیمم درستنمایی با توجه به بردار پارامترهای مدل ارنشتاین النبگ کسری $\theta = (k, \mu, \sigma_t)'$ از شاخصها $RMSE^1$ و واریانس برآوردگرها استفاده می شود. برای مقایسه بهتر بین دو روش برآورد مقادیر مختلف شبیه سازی برای اندازه های نمونه به اندازه های $n = 50, 100, 200, 500$ و پارامتر کسری مدل $h = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ انجام شده است. اگر V_t ارزش شرکت در زمان t هم توزیع حرکت براونی کسری باشد، بر اساس معادله ارنشتاین النبگ کسری موضوع مقاله در رابطه (4) مقادیر اولیه برای پارامترهای مدل $\mu = 0.5, \sigma = 0.3, k = 0.4$ در نظر گرفته می شود. نمونه تصادفی از فرآیند ارنشتاین النبگ کسری (V_t) تولید و با جایگذاری مقادیر V_t در رابطه (11) توزیع $f(V_{t_{i+1}} | V_{t_i})$ در زمان t_{i+1} را برحسب زمان t_i به دست می آید. در مرحله بعد با استفاده مقادیر $f(S_{t_{i+1}} | V_{t_{i+1}}^{(m)}, \theta)$ و در نتیجه $\pi_{t_{i+1}}^{(m)}$ محاسبه می شود. سپس زوج های $\{(V_{t_{i+1}}^{(m)}, \pi_{t_{i+1}}^{(m)})\}$ تولید و در مرحله سوم نمونه های جدید با وزن های مساوی به حجم M به دست می آید. برای محاسبه برآورد بیزی بردار پارامترهای مدل در روش SIR نیاز به تعیین توزیع پیشین پارامترهای $\theta = (k, \mu, \sigma_t)'$ است. با توجه به محدوده مقادیر تعریف شده برای پارامترها توزیع پیشین پارامترهای σ, k یکنواخت با حدود مثبت و توزیع پیشین پارامتر μ نرمال در نظر گرفته می شود. نتایج شبیه سازی و مقایسه کارایی دو روش در برآورد بردار پارامترها به کمک شاخص های معیار $RMSE$ و واریانس بردار پارامتر در جدول ۱ و جدول ۲ آورده شده است. بر اساس نتایج جدول ۲ می توان گفت که دقت برآوردگر بیزی پارامترها در مقایسه روش ماکسیمم درستنمایی بیشتر است. در عین حال با افزایش مقدار پارامتر هارست و وابستگی بلندمدت (H) در بیشتر موارد مقدار شاخص $RMSE$ افزایش و به عبارت دیگر دقت برآورد کاهش می یابد اما تغییر در اندازه نمونه تاثیری در دقت برآوردگرها ندارد.

¹ Root-Mean-Square Error (RMSE)

جدول ۱- مقادیر RMSE ناشی از برآوردها روش ماکسیمم درستنمایی و بیزی پارامترها برای مقادیر مختلف n و H .
Table 1- RMSE values resulting from maximum likelihood and Bayesian parameter estimates for different values of n and H .

n	H	σ		μ		k	
		Bayes	MLE	Bayes	MLE	Bayes	MLE
50	0.6	0.080431	0.250103	0.408769	0.593087	0.192432	0.276713
	0.7	0.140174	0.241463	0.417882	0.560390	0.176738	0.252612
	0.8	0.189489	0.239984	0.408852	0.527540	0.172564	0.227594
	0.9	0.232997	0.241881	0.409160	0.470112	0.167519	0.185946
100	0.6	0.159728	0.155463	0.422835	0.639863	0.189301	0.304548
	0.7	0.159728	0.155463	0.422835	0.639863	0.189301	0.304548
	0.8	0.208440	0.163350	0.437849	0.564033	0.190968	0.265128
	0.9	0.247199	0.171047	0.413453	0.463239	0.192177	0.203814
200	0.6	0.095480	0.150225	0.473312	0.587787	0.161384	0.206970
	0.7	0.161848	0.154366	0.471515	0.558001	0.180845	0.218561
	0.8	0.209866	0.161475	0.460544	0.531867	0.173715	0.202891
	0.9	0.247592	0.168712	0.449655	0.470253	0.163833	0.167731
500	0.6	0.112167	0.070873	0.458700	0.632757	0.172312	0.248653
	0.7	0.183668	0.112992	0.495513	0.595925	0.184174	0.232977
	0.8	0.229902	0.139026	0.489330	0.559079	0.186962	0.215452
	0.9	0.269455	0.154031	0.824668	0.487964	0.240708	0.178381

بر اساس نتایج جدول ۲ می توان گفت که دقت برآوردگر بیزی پارامترها در مقایسه روش ماکسیمم درستنمایی بیشتر است که نشان دهنده پراکندگی کمتر برآوردگرها حاصل از روش بیزی نسبت به روش ماکسیمم درستنمایی است و افزایش مقدار وابستگی بلندمدت (پارامتر هارست H) در هر دو روش در بیشتر موارد باعث کاهش پراکندگی مشاهدات شده است.

جدول ۲- مقادیر واریانس ناشی از برآوردها به روش ماکسیمم درستنمایی و بیزی پارامترها برای مقادیر مختلف n و H .
Table 2- Variance values resulting from maximum likelihood and Bayesian parameter estimates for different values of n and H .

n	H	σ		μ		k	
		Bayes	MLE	Bayes	MLE	Bayes	MLE
50	0.6	0.000625	0.036215	0.157712	0.349426	0.034746	0.076320
	0.7	0.000386	0.041133	0.176318	0.317155	0.031548	0.064453
	0.8	0.000236	0.045433	0.168406	0.280260	0.029964	0.051952
	0.9	0.000116	0.049325	0.166992	0.221192	0.027930	0.034299
100	0.6	0.000112	0.023538	0.174304	0.390132	0.035665	0.090500
	0.7	0.000112	0.023538	0.174304	0.390132	0.035665	0.090500
	0.8	0.000064	0.026918	0.183425	0.312466	0.035599	0.070066
	0.9	0.000031	0.029466	0.172459	0.214201	0.037305	0.041782
200	0.6	0.000110	0.018085	0.204758	0.314934	0.025551	0.041599
	0.7	0.000051	0.023100	0.223021	0.311672	0.032651	0.047639
	0.8	0.000032	0.026267	0.211703	0.285466	0.030279	0.041446
	0.9	0.000018	0.028723	0.196242	0.223268	0.026444	0.028404
500	0.6	0.000040	0.003718	0.198109	0.369709	0.028007	0.057500
	0.7	0.000022	0.005427	0.243653	0.344124	0.033719	0.052778
	0.8	0.000016	0.006931	0.240476	0.308171	0.035122	0.045732
	0.9	0.000011	0.008079	0.205906	0.237632	0.027510	0.031514

۵- نتیجه گیری

با بررسی و جمع بندی نتایج حاصل از مقاله می توان گفت که برآوردگر بیزی در مقایسه با برآوردگر ماکسیمم درستنمایی از دقت بیشتری برخوردار است. همچنین با افزایش میزان وابستگی بلندمدت دقت افزایش در هر دو روش افزایش می یابد و میزان دقت برآورد برای پارامتر σ بیشتر از پارامترهای μ و k است. با توجه به عدم استفاده از روش بیزی و به طور خاص الگوریتم SIR در برآورد پارامترهای مدل ارنشتاین النبگ کسری در تحقیقات گذشته، کاربرد روش بیزی را در برآورد پارامترهای مدل های دیفرانسیل تصادفی و مشتقات آن بررسی و نتایج آن را مورد مقایسه قرار می دهیم. سورنسن [19] به بررسی روش های برآورد موجود فرآیندهای انتشار و ارگودیک از جمله روش بیز پرداخت و نشان داد تحت شرایط خاص عملکردی مشابه روش EMM دارد. دوان [15] روش SIR را برای برآورد بردار پارامتر $\theta = \{\sigma, \delta, \mu\}$ در مدل مرتون با حضور جمله نویز استفاده کرد. او با استفاده از شبیه سازی و کاربرد داده های شرکت داو جونز نشان داد برای مدل های بدون نویز برآوردها با روش SIR کارایی بهتری دارند که با نتایج حاصل از این مقاله برای مدل ارنشتاین النبگ کسری مطابقت دارد. همچنین آلمو [20] از روش SIR در معادلات دیفرانسیل تصادفی برای مدل سازی

محاسبه تعداد افراد در یک جمعیت بسته که در یک دوره زمانی معین حساس، آلوده یا بهبود یافته‌اند استفاده کرد. به این صورت که یک مدل SIR تصادفی بدون حضور نرخ تولد و مرگ در جمعیت برای تجزیه و تحلیل انتقال بیماری کالا آزار مورد استفاده قرار گرفت. نتایج حاصل از تحقیق بیانگر تصادفی بودن (ماهیت تصادفی) پویایی جمعیت آلوده کالا آزار با استفاده از این روش و کارایی آن در برآورد پارامترها بود که تاییدکننده توانمندی روش SIR در برآورد پارامتر مدل‌های مشابه می‌باشد. با توجه به موارد فوق که موید کارایی برآورد بیزی پارامترها در مدل‌های دیفرانسیل تصادفی است، پیشنهاد می‌گردد برآورد پارامترهای مدل هستون به فرم رابطه (۳) با استفاده از الگوریتم SIR در تحقیقات آتی مورد بررسی قرار بگیرد.

منابع مالی

این پژوهش بدون دریافت هرگونه حمایت مالی از سوی نهادها، سازمان‌ها یا مراکز تحقیقاتی انجام شده است.

تعارض منافع

نویسندگان اظهار می‌دارند که هیچ‌گونه تعارض منافی در انجام این پژوهش وجود ندارد.

منابع

- [1] Karlsson, P. (2009). *The heston model-stochastic volatility and approximation*. <https://lup.lub.lu.se/luur/download?func=downloadFile&recordId=1436827&fileId=1646914>
- [2] Di, B., & Liao, Y. (2013). Structural credit risk model with stochastic volatility: A particle-filter approach. *SSRN electronic journal*, 1–33. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2336452>
- [3] Björk, T. (2009). *Arbitrage theory in continuous time*. Oxford university press. <https://b2n.ir/un1562>
- [4] Mardani, Z., & Tahmasabi, M. (2016). *Examining the structure of credit models under stochastic fluctuations* [Thesis]. (In Persian). https://elmnet.ir/doc/10997393-81224?elm_num=1
- [5] Cooper, N., Thomas, G. H., Venditti, C., Meade, A., & Freckleton, R. P. (2016). A cautionary note on the use of Ornstein-Uhlenbeck models in macroevolutionary studies. *Biological journal of the linnean society*, 118(1), 64–77. <https://doi.org/10.1111/bij.12701>
- [6] Xiao, W., Zhang, W., & Xu, W. (2011). Parameter estimation for fractional Ornstein-Uhlenbeck processes at discrete observation. *Applied mathematical modelling*, 35(9), 4196–4207. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.02.047>
- [7] Mandelbrot, B. B., & Wallis, J. R. (1969). Some long-run properties of geophysical records. *Water resources research*, 5(2), 321–340. <https://doi.org/10.1029/WR005i002p00321>
- [8] Fink, H., & Klüppelberg, C. (2011). Fractional Lévy-driven Ornstein-Uhlenbeck processes and stochastic differential equations. *Bernoulli*, 17(1), 484–506. <http://dx.doi.org/10.3150/10-BEJ281>
- [9] Bajja, S., Es-Sebaiy, K., & Viitasaari, L. (2017). Least squares estimator of fractional Ornstein-Uhlenbeck processes with periodic mean. *Journal of the korean statistical society*, 46(4), 608–622. <https://doi.org/10.1016/j.jkss.2017.06.002>
- [10] Chen, Y., Hu, Y., & Wang, Z. (2017). *Parameter estimation of complex fractional Ornstein-Uhlenbeck processes with fractional noise*. ArXiv Preprint ArXiv:1701.07568. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1701.07568>
- [11] Hu, Y., & Nualart, D. (2010). Parameter estimation for fractional Ornstein-Uhlenbeck processes. *Statistics & probability letters*, 80(11), 1030–1038. <https://doi.org/10.1016/j.spl.2010.02.018>
- [12] Mishura, Y. (2019). *Fractional stochastic volatility: F-Ornstein-Uhlenbeck and F-CIR processes*. Minsk: BSU. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/233340>
- [13] Fallah, S., Ali Reza, N., & Mehrdoust, F. (2019). A fractional version of the Cox-Ingersoll-Ross interest rate model and pricing double barrier option with Hurst index $H \in (23, 1)$. *Communications in statistics - theory and methods*, 48(9), 2254–2266. <https://doi.org/10.1080/03610926.2018.1464580>
- [14] Haress, E. M., & Hu, Y. (2021). Estimation of all parameters in the fractional Ornstein-Uhlenbeck model under discrete observations. *Statistical inference for stochastic processes*, 24, 327–351. <https://link.springer.com/journal/11203>
- [15] Duan, J. C., & Fulop, A. (2009). Estimating the structural credit risk model when equity prices are contaminated by trading noises. *Journal of econometrics*, 150(2), 288–296. <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2008.12.003>
- [16] Hutzenthaler, M., Jentzen, A., & Kloeden, P. E. (2013). Divergence of the multilevel Monte Carlo Euler method for nonlinear stochastic differential equations. *Annals of applied probability*, 23(5). <https://b2n.ir/wk3765>
- [17] Capiński, M., & Kopp, P. E. (2004). *Measure, integral and probability* (Vol. 14). Springer. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4471-0645-6#about-book-reviews>
- [18] Oliveira, A., Oliveira, T., Macias, S., & Antonio, A. (2015). Distribution function for the ratio of two normal random variables. *AIP conference proceedings* (Vol. 1648). AIP Publishing. <https://doi.org/10.1063/1.4913045>
- [19] Sørensen, H. (2004). Parametric inference for diffusion processes observed at discrete points in time: a survey. *International statistical review*, 72(3), 337–354. <https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2004.tb00241.x>
- [20] Alemu, S. S. (2022). *A stochastic model for kala-azar transmission dynamics in libo kemkem, Ethiopia*. <https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-1210143/v1>