Journal of Quality Engineering and Management

www.pqprc.ir

J. Qual. Eng. Manag. Vol. 15, No. 1 (2025) 20–30.

Paper Type: Original Article

Bayesian Calculation of the Quality of the Kullback-Leibler Divergence in Normal Distributions

Parviz Nasiri[1,*], Samaneh Afshar Moghdam[1], Masoud Yarmohammadi[1]

[1] Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran, Iran; pnasiri@pnu.ac.ir; sa.afshar60@gmail.com; masyar@pnu.ac.ir.

Citation:

Received: 15 September 2024 *Revised: 27 December 2024* *Accepted: 03 February 2025*	Nasiri, P., Afshar Moghdam, S., & Yarmohammadi, M. (2025). Bayesian calculation of the quality of the Kullback-Leibler divergence in normal distributions. *Journal of Quality Engineering and Management*, *15*(1), 20-30.

Abstract

Purpose: In statistical data analysis and modeling, assessing the similarity or divergence between two probability distributions is of great importance. One of the most widely used metrics for this purpose is the Kullback-Leibler (KL) divergence, which quantifies the informational distance between distributions. This study aims to analyze the KL divergence between two normal distributions with equal variance and to compare the performance of different estimation methods for this measure.

Methodology: In this study, the exact value of the Kullback–Leibler divergence between two normal distributions with equal variance is first analytically derived, and then three estimation methods (maximum likelihood, Bayesian, and shrinkage) are proposed to estimate this measure. The performance of each estimator is evaluated via Monte Carlo simulations using the Mean Squared Error (MSE) criterion.

Findings: The simulation results indicate that the Bayesian estimator outperforms the MLE in terms of estimation accuracy. Furthermore, the shrinkage estimator performs best, achieving the lowest MSE among the three methods. This argument suggests that incorporating prior information or penalization techniques can significantly improve estimation quality.

Originality/Value: This study contributes to the literature by providing a detailed comparison of classical and modern estimation techniques for KL divergence in the context of normal distributions with equal variance. The novelty lies in integrating shrinkage methodology and demonstrating its superior performance, which is quantitatively validated through simulations. The findings have practical implications across fields such as machine learning, signal processing, and information theory.

Keywords: Kullback-Leibler divergence, Normal distribution, Bayesian estimation, Contraction estimation, Mean square error.

Corresponding Author: pnasiri45@yahoo.com

10.48313/jqem.2025.519761.1518

مهندسی و مدیریت کیفیت

www.pqprc.ir

دوره ۱۵، شماره (۱)، (۱۴۰۴)، ۳۰-۲۰

نوع مقاله: پژوهشی

برآورد بیزی معیار واگرایی کولبک-لیبلر در توزیع‌های نرمال

پرویز نصیری[۱,*]، سمانه افشار مقدم[۱]، مسعود یارمحمدی[۱]

[۱]گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.

چکیده

هدف: در تحلیل‌ها و مدل‌سازی‌های آماری، ارزیابی شباهت یا تفاوت بین دو توزیع احتمالی اهمیت زیادی دارد. یکی از پرکاربردترین معیارها برای این منظور، واگرایی کولبک–لیبلر است که فاصله اطلاعاتی بین دو توزیع را اندازه‌گیری می‌کند. هدف این مطالعه، تحلیل واگرایی *KL* بین دو توزیع نرمال با واریانس برابر و مقایسه عملکرد روش‌های مختلف برآورد این معیار است.

روش‌شناسی پژوهش: در این پژوهش ابتدا مقدار دقیق واگرایی کولبک-لیبلر بین دو توزیع نرمال با واریانس برابر به‌صورت تحلیلی به‌دست می‌آید، سپس سه روش مختلف برای برآورد این معیار پیشنهاد می‌شود: برآورد حداکثر درست‌نمایی، برآورد بیزی و برآورد شریونده عملکرد هر یک از این برآوردگرها از طریق شبیه‌سازی مونت‌کارلو و با استفاده از معیار میانگین مربعات خطا ارزیابی می‌شود.

یافته‌ها: نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که برآوردگر بیزی نسبت به *MLE* دقت بالاتری در برآورد دارد. علاوه بر این، برآوردگر شریونده بهترین عملکرد را دارد و کمترین مقدار *MSE* را در میان سه روش به‌دست می‌آورد. این یافته نشان می‌دهد که بهره‌گیری از اطلاعات پیشین یا تکنیک‌های جریمه‌گذاری می‌تواند به‌طور قابل‌توجهی کیفیت برآورد را بهبود بخشد.

اصالت/ارزش‌افزوده علمی: این مطالعه با ارایه مقایسه‌ای جامع بین تکنیک‌های کلاسیک و نوین برای برآورد واگرایی *KL* در زمینه توزیع‌های نرمال با واریانس برابر، به ادبیات علمی کمک می‌کند. نوآوری پژوهش در به‌کارگیری روش شریونده و عملکرد برتر آن است که به‌صورت کمی از طریق شبیه‌سازی تایید شده است. این یافته‌ها کاربردهای عملی در حوزه‌هایی مانند یادگیری ماشین، پردازش سیگنال و نظریه اطلاعات دارند.

کلیدواژه‌ها: واگرایی کولبک–لیبلر، توزیع نرمال، برآورد بیزی، برآورد انقباضی، میانگین توان دوم خطا.

۱- مقدمه

مقایسه روش‌های مختلف برآورد معیار واگرایی در خانواده توزیع‌ها آماری، با توجه به اهمیت آن‌ها در تحلیل داده‌ها و انتخاب مدل‌های آماری از موضوعات مهم در مقایسه توزیع‌های آماری محسوب می‌شود.

معیار واگرایی کولبک-لیبلر[1] که توسط سالومون کولبک و ریچارد لیبلر در سال ۱۹۵۱ معرفی شد، به‌عنوان یکی از معیارهای اساسی برای اندازه‌گیری ناهماهنگی بین دو توزیع احتمالی شناخته شده است که در زمینه‌های گوناگون از جمله یادگیری متریک، یادگیری ماشین، امنیت شبکه، زیست‌شناسی، پزشکی و مالی و تحلیل داده‌های آماری کاربرد فراوانی دارد [1]. برای اطلاع بیشتر می‌توان به مقالات مولن و ویروالی [2]، پاردو [3]، نو و همکاران [4]، جی و همکاران [5]، کوچ و همکاران [6]، اوگوو و همکاران [7] و کاویانی [8] مراجعه کنید.

این معیار به‌ویژه در مواردی که نیاز به ارزیابی تفاوت‌های نامتقارن بین توزیع‌ها وجود دارد، نقش بسزایی در مدل‌سازی‌های پیچیده آماری و یادگیری عمیق، ایفا می‌کند. به‌طوری‌که معیار فاصله هلینگر[2] که به افتخار ارنست هلینگر در اوایل قرن بیستم معرفی شد به دلیل ویژگی‌های متقارن و پایداری در برابر مقادیر کوچک احتمال، در تحلیل داده‌ها و آزمون‌های فرضیه به‌طور گسترده‌ای مورداستفاده قرار گرفته است [9]. درحالی‌که معیار واگرایی کولبک-لیبلر نامتقارن است و می‌تواند کاربرد گسترده‌ای داشته باشد [10]. در استفاده از توزیع‌های آماری برای تحلیل داده‌ها و مدل‌سازی آماری، ارزیابی شباهت بین دو توزیع احتمالی معیارهای مختلفی برای اندازه‌گیری این شباهت وجود دارند. برای نمونه می‌توان به معیارهای مجذور فاصله هلینگر، واگرایی کولبک-لیبلر، واگرایی کل تغییرات[3]، واگرایی آلفا[4] و واگرایی توانی[5] اشاره کرد [10].

در به‌کارگیری این معیارها، یکی از بحث‌های مهم برآورد این معیارها است [11]. برای برآورد این معیارها، روش‌های مختلفی مانند برآورد ماکسیمم درستنمایی[6] و روش تجربی ارایه شده‌اند. در این مقاله ضمن بررسی معیارهای واگرایی برای ارزیابی شباهت بین دو توزیع نرمال برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی، بیزی و انقباضی ارایه می‌شود. در برآورد بیزی برای معیار واگرایی کولبک-لیبلر بر اساس توزیع پیشین مناسب و استفاده از تابع زیان توان دوم خطا برآوردگر کارا ارایه می‌شود. توسعه روش‌های برآوردگرها برای معیار واگرایی کولبک-لیبلر به‌عنوان معیاری اساسی برای سنجش ناهماهنگی بین دو توزیع، نقش مهمی در انتخاب مدل‌های آماری ایفا می‌کند. در عمل ویژگی نامتقارن بودن معیار واگرایی کولبک-لیبلر در برخی کاربردها محدودیت ایجاد می‌کند، درحالی‌که ویژگی متقارن آن مطلوب است. برای رفع مشکل ویژگی نامتقارن، معیار واگرایی جفری به‌صورت

$$D_{\text{sym}}(P \parallel Q) = D_{\text{KL}}(P \parallel Q) + D_{\text{KL}}(Q \parallel P) = \int \left(p(x) - q(x)\right) log\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) dx, \tag{۱}$$

در نظر گرفته می‌شود. در حالی است که معیار فاصله هلینگر بین دو توزیع‌های احتمالی P و Q به‌صورت

$$H^2(P,Q) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sqrt{p(x)} - \sqrt{q(x)}\right)^2, \tag{۲}$$

تعریف می‌شود که می‌توان آن را به‌صورت

$$H^2(P,Q) = \sqrt{1 - \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sqrt{p(x)q(x)}\right) dx}, \tag{۳}$$

نیز در نظر گرفت. معیار واگرایی در خانواده توزیع‌های پیوسته، به‌ویژه برای خانواده توزیع نمایی مانند توزیع نرمال، پواسون، نمایی و گاما که در بسیاری از کاربردهای عملی نظیر مدل‌سازی رشد جمعیت، پدیده‌های طبیعی، فرآیندهای شکست و تعمیر و حتی در شبکه‌های عصبی مصنوعی و یادگیری ماشین استفاده می‌شوند، نقش مهمی در تحلیل داده‌ها و مدل‌سازی آماری دارد. برآورد دقیق معیار واگرایی در این توزیع‌ها می‌تواند به بهبود مدل‌سازی و تحلیل داده‌ها کمک کرده و به محققان امکان دهد از مدل‌های آماری دقیق‌تر و کارآمدتری برای تصمیم‌گیری و پیش‌بینی، به‌ویژه در

[1] Kullback-Leibler (KL)
[2] Helinger
[3] TV-divergence
[4] Alpha-divergence
[5] Power divergence
[6] Maximum Likelihood Estimation (MLE)

مواقعی که داده‌های بزرگ و پیچیده مورد تحلیل قرار می‌گیرند، استفاده کنند. در ادامه مقاله در بخش دوم معیار واگرایی کولبک - لیبلر در توزیع‌های نرمال محاسبه می‌شود. در بخش سوم برآوردگرهای معیار واگرایی کولبک–لیبلر دو توزیع نرمال به روش‌های ماکسیمم درستنمایی، بیزی و انقباضی ارایه می‌شوند. در بخش چهارم با استفاده از شبیه‌سازی برآوردگرها مورد مقایسه قرار می‌گیرند.

۲- معیار واگرایی کولبک - لیبلر در توزیع‌های نرمال

در این بخش برای محاسبه معیار واگرایی در توزیع‌های نرمال، توابع چگالی احتمال $p(x)$ و $q(x)$ به ترتیب به‌صورت

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-\mu_1)^2}, -\infty < x < \infty, -\infty < \mu_1 < \infty, \sigma_1 > 0, \qquad (۴)$$

در نظر گرفته می‌شود. با توجه به **رابطه (۱)** معیار واگرایی بین توزیع‌های P و Q به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$D(P\|Q) = \int_R P(x)\, log \frac{P(x)}{q(x)} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-\mu_1)^2}\, log \frac{\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-\mu_1)^2}}{\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2}(x-\mu_2)^2}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-\mu_1)^2}\, log \frac{\sigma_2 e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-\mu_1)^2}}{\sigma_1 e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2}(x-\mu_2)^2}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-\mu_1)^2}\, log \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-\mu_1)^2 + \frac{1}{2\sigma_2^2}(x-\mu_2)^2}\right) dx$$

$$= log\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-\mu_1)^2} dx\; D(P\|Q) = \int_R P(x)\, log \frac{P(x)}{q(x)} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-\mu_1)^2}\, log \frac{\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-\mu_1)^2}}{\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2}(x-\mu_2)^2}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-\mu_1)^2}\, log \frac{\sigma_2 e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-\mu_1)^2}}{\sigma_1 e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2}(x-\mu_2)^2}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-\mu_1)^2}\, log \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-\mu_1)^2 + \frac{1}{2\sigma_2^2}(x-\mu_2)^2}\right) dx$$

$$= log\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-\mu_1)^2} dx$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-\mu_1)^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}(x-\mu_2)^2\right) e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^2} dx$$

$$= \log\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}$$

$$\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-\mu_1)^2 + \frac{1}{2\sigma_2^2}(x-\mu_2)^2\right) e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^2} dx$$

$$
\begin{aligned}
&= log\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) - \frac{1}{2\sigma_1^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}(x-\mu_1)^2 dx \\
&+ \frac{1}{2\sigma_2^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}(x-\mu_2)^2\, e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^2} dx \\
&= log\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sigma_2^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}(x-\mu_2)^2\, e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^2} dx.
\end{aligned}
$$

در حالت خاص برای $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$ $D(P\|Q)$ برابر است با:

$$D(P\|Q) = \int_R P(x)\, log\frac{P(x)}{q(x)}dx = \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2)^2. \qquad (۵)$$

۳- برآوردهای معیار واگرایی کولبک-لیبلر دو توزیع نرمال

در این بخش با توجه به **رابطه (۵)** برای برآورد معیار واگرایی کولبک-لیبلر به روش‌های ماکسیمم درستنمایی، بیزی و انقباضی موردبحث قرار می‌گیرد.

۳-۱- برآورد ماکسیمم درستنمایی معیار واگرایی لولبک - لیبلر

معیار واگرایی کولبک لیبلر برای دو توزیع نرمال با میانگین‌های μ_1 و μ_2 و واریانس‌های واحد برای نمونه‌های تصادفی $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ و $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ با توجه به **رابطه (۵)** برابر است با

$$\widehat{D}_{mle}(P\|Q) = \frac{1}{2}\hat{\mu}^2{}_1 + \frac{1}{2}\hat{\mu}^2{}_2 - \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 = \frac{1}{2}\bar{X}^2 + \frac{1}{2}\bar{Y}^2 - \bar{X}\bar{Y}. \qquad (۶)$$

با توجه به **رابطه (۶)** میانگین و واریانس برآوردگر ماکسیمم درستنمایی معیار واگرایی کولبک - لیبلر به ترتیب برابر است با:

$$
\begin{aligned}
E\left(\widehat{D}_{mle}(P\|Q)\right) &= E\left(\frac{1}{2}\bar{X}^2 + \frac{1}{2}\bar{Y}^2 - \bar{X}\bar{Y}\right) \\
&= \frac{1}{2}E(\bar{X}^2) + \frac{1}{2}E(\bar{Y}^2) - E(\bar{X}\bar{Y}) \\
&= \frac{1}{2}E(\bar{X}^2) + \frac{1}{2}E(\bar{Y}^2) - \mu_1\mu_2 \\
&= \frac{1}{2}(var(\bar{X}) + (E(\bar{X}))^2) \\
&+ \frac{1}{2}(var(\bar{Y}) + (E(\bar{Y}))^2) - \mu_1\mu_2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \mu_1^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \mu_2^2\right) \\
&-\mu_1\mu_2 = \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\mu_1^2 + \frac{1}{2}\mu_2^2 - \mu_1\mu_2.
\end{aligned} \qquad (۷)
$$

$$
\begin{aligned}
var\left(\widehat{D}_{mle}(P\|Q)\right) &= var\left(\frac{1}{2}\bar{X}^2 + \frac{1}{2}\bar{Y}^2 - \bar{X}\bar{Y}\right) \\
&= \frac{1}{4}var(\bar{X}^2) + \frac{1}{4}var(\bar{Y}^2) + var(\bar{X}\bar{Y}) \\
&= \frac{1}{4}var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2 + \frac{1}{4}var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)^2 + \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{1}{4n^4}var\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2 + \frac{1}{4n^4}var\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)^2 + \frac{1}{n^2}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{4n^4} var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i<j}^{n} X_i X_j\right) + \frac{1}{4n^4} var\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 + \sum_{i<j}^{n} Y_i Y_j\right) + \frac{1}{n^2}$$
$$= \frac{1}{4n^4}\left(n\, var(X^2) + n(n-1)\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{4n^4}\left(n\, var(Y^2) + n(n-1)\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n^2}$$

حال برای محاسبه $var(X^2)$ می‌توان نوشت:

$$var(X^2) = \frac{1}{n^2} var\left(\frac{X-\mu_1}{\frac{1}{\sqrt{n}}} + \frac{\mu_1}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)^2 = \frac{1}{n^2} var\left(\left(\frac{X-\mu_1}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)^2 + \left(\frac{\mu_1}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)^2 + 2\left(\frac{\mu_1}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)\left(\frac{X-\mu_1}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)\right) = \frac{1}{n^2}\left(2 + 4\left(\frac{\mu_1}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)^2\right) = \frac{1}{n^2}(2 + 4n\mu_1^2). \qquad (۸)$$

به تشابه $var(Y^2)$ برابر است با

$$var(Y^2) = \frac{1}{n^2}(2 + 4n\mu_2^2). \qquad (۹)$$

با توجه به **رابطه‌های (۸)** و **(۹)**، $var\left(\widehat{D}_{mle}(P\|Q)\right)$ برابر است با

$$var\left(\widehat{D}_{mle}(P\|Q)\right) = \frac{1}{4n^4}\left(\frac{1}{n}(2 + 4n\mu_1^2) + 1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{4n^4}\left(\frac{1}{n}(2 + 4n\mu_2^2) + 1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2}$$
$$= \frac{1}{4n^4}\left(1 + \frac{1}{n} + 4\mu_1^2\right) + \frac{1}{4n^4}\left(1 + \frac{1}{n} + 4\mu_2^2\right) + \frac{1}{n^2}$$
$$= \frac{1}{2n^4}\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^4}(\mu_1^2 + \mu_2^2) + \frac{1}{n^2}. \qquad (۱۰)$$

۲-۳- برآورد بیزی معیار واگرایی لولبک - لیبلر

در این بخش برای برآورد بیزی معیار واگرایی کولبک–لیبلر برای نمونه تصادفی $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ برای توزیع $X \sim N\ \mu_1, 1)$، از توزیع

$$\pi(\mu_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{{\mu_1}^2}{2}}, -\infty < \mu_1 < \infty. \qquad (۱۱)$$

به‌عنوان توزیع پیشین استفاده می‌شود که پس از انجام محاسبات می‌توان نشان داد که توزیع پسین برابر است با

$$\pi(\mu_1 \mid \underline{x}) N\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right). \qquad (۱۲)$$

به‌طور مشابه، برای نمونه تصادفی $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ از توزیع $N\ \mu_2, 1)$ برای توزیع پیشین

$$\pi(\mu_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{{\mu_2}^2}{2}}, -\infty < \mu_2 < \infty. \qquad (۱۳)$$

توزیع پسین برابر است با

$$\pi(\mu_2 \mid \underline{y}) N\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right). \tag{۱۴}$$

با توجه به **رابطه‌های (۱۳)** و **(۱۴)** برآورد بیزی تحت تابع زیان توان دوم خطا پارامترها به ترتیب برابرند با

$$\hat{\mu}_2 = \frac{n}{n+1}\bar{Y}\,, \quad \hat{\mu}_1 = \frac{n}{n+1}\bar{X}, \tag{۱۵}$$

که با جایگذاری آن‌ها در **رابطه (۵)** برآوردگر بیزی معیار واگرایی کولبک–لیبلر برابر است با

$$\begin{aligned}\widehat{D}_{Bayse}(P\|Q) &= \frac{1}{2}\hat{\mu}^2{}_1 + \frac{1}{2}\hat{\mu}^2{}_2 - \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \bar{X}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \bar{Y}^2 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \bar{X}\bar{Y}.\end{aligned} \tag{۱۶}$$

با توجه به **رابطه (۱۶)** و در نظر گرفتن $N = \frac{n}{n+1}$ میانگین و واریانس برآوردگر بیزی معیار واگرایی کولبک - لیبلر به ترتیب برابر است با

$$\begin{aligned}E\left(\widehat{D}_{Bayse}(P\|Q)\right) &= \frac{1}{2}N^2E(\bar{X}^2) + \frac{1}{2}N^2E(\bar{Y}^2) - N^2E(\bar{X}\bar{Y}) \\ &= N^2\left\{\frac{1}{2}E(\bar{X}^2) + \frac{1}{2}E(\bar{Y}^2) - \mu_1\mu_2\right\} \\ &= N^2\left\{\frac{1}{2}(var(\bar{X}) + (E(\bar{X}))^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(var(\bar{Y}) + (E(\bar{Y}))^2) - \mu_1\mu_2\right\} \\ &= N^2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}(2 + 4n\mu_1^2) + \mu_1^2\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}(2 + 4n\mu_2^2) + \mu_2^2\right) - \mu_1\mu_2\right\} \\ var\left(\widehat{D}_{Bayse}(P\|Q)\right) &= var\left(\frac{1}{2}\hat{\mu}^2{}_1 + \frac{1}{2}\hat{\mu}^2{}_2 - \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\right) = var\left(\frac{1}{2}N^2\bar{X}^2 + \frac{1}{2}N^2\bar{Y}^2 - N^2\bar{X}\bar{Y}\right) \\ &= N^4\left\{\frac{1}{4}var(\bar{X}^2) + \frac{1}{4}var(\bar{Y}^2) + var(\bar{X}\bar{Y})\right\}.\end{aligned} \tag{۱۷}$$

لم ۱- اگر $MES\left(\widehat{D}_{mle}(P\|Q)\right)$ و $MES\left(\widehat{D}_{Bayes}(P\|Q)\right)$ به ترتیب میانگین توان دوم معیار واگرایی کولبک - لیبلر به روش‌های ماکسیمم درستنمایی و بیزی باشند، آنگاه

$$MES\left(\widehat{D}_{Bayes}(P\|Q)\right) \le MES\left(\widehat{D}_{mle}(P\|Q)\right).$$

برهان:

$$\begin{aligned}MES\left(\widehat{D}_{Bayes}(P\|Q)\right) &= E\left(\widehat{D}_{Bayes}(P\|Q) - E\left(\widehat{D}_{Bayes}(P\|Q)\right)\right)^2 \\ &= var\left(\widehat{D}_{Bayes}(P\|Q)\right) - \left(E\left(\widehat{D}_{Bayes}(P\|Q)\right)\right)^2 \\ &= var\left(\frac{1}{2}N^2\bar{X}^2 + \frac{1}{2}N^2\bar{Y}^2 - N^2\bar{X}\bar{Y}\right) - \left(N^2\left(\frac{1}{2}E(\bar{X}^2) + \frac{1}{2}E(\bar{Y}^2) - \mu_1\mu_2\right)\right)^2 \\ &= N^4\left\{\begin{aligned}&Var\left(\frac{1}{2}\bar{X}^2 + \frac{1}{2}\bar{Y}^2 - \bar{X}\bar{Y}\right) \\ &-\left(\frac{1}{2}E(\bar{X}^2) + \frac{1}{2}E(\bar{Y}^2) - \mu_1\mu_2\right)^2\end{aligned}\right\} = N^4 MES\left(\widehat{D}_{mle}(P\|Q)\right).\end{aligned}$$

اما می‌دانیم که $N = \frac{n}{n+1} = 1 + \frac{1}{n} \ge 0$ است. بنابراین نتیجه می‌شود:

$$MES\left(\widehat{D}_{Bayes}(P\|Q)\right) \leq MES\left(\widehat{D}_{mle}(P\|Q)\right).$$

۳-۳- برآورد انقباضی معیار واگرایی کولبک - لیبلر

در بخش‌های ۱-۳ و ۲-۳، برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و بیزی معیار واگرایی کولبک - لیبلر ارایه شد. در این بخش برآوردگر انقباضی که تلفیقی نوین از برآورد کلاسیک و حدس اولیه ارایه می‌شود. شکل کلی برآوردگر انقباضی که توسط تامپسون در سال (۱۹۶۸) معرفی شده به‌صورت

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_{sh} &= \hat{\mu}(\mu_0) = \omega\hat{\mu} + (1-\omega)\mu_0 \\ &= \mu_0 + \omega(\hat{\mu} - \mu_0), \omega \in [0,1]\end{aligned} \tag{۱۸}$$

است که در آن $\omega \in (0,1)$ عامل انقباضی و μ_0 مقدار حدس اولیه از فضای پارامتر است. اگر $\hat{\mu}$ یک برآوردگر نا اریب باشد، می‌توان با مینیمم کردن میانگین توان دوم خطا، عامل انقباضی را به‌صورت

$$\begin{aligned}MSE(\hat{\mu}_{sh}) &= E\left(\hat{\mu}_{sh} - \mu\right)^2 = E\left(\mu_0 + \omega(\hat{\mu} - \mu_0) - \mu\right)^2 \\ &= E\left(\omega(\hat{\mu} - \mu) + \omega(\mu - \mu_0) - (\mu - \mu_0)\right)^2 \\ &= \omega^2 E\left(\hat{\mu} - \mu\right)^2 + \left(1-\omega\right)^2\left(\mu - \mu_0\right)^2 = \omega^2\, var\left(\hat{\mu}\right) + \left(1-\omega\right)^2\left(\mu - \mu_0\right)^2\end{aligned} \tag{۱۹}$$

به دست آورد. برای مینیمم کردن **رابطه (۱۹)**، پس از مشتق گرفتن نسبت به ω خواهیم داشت:

$$\frac{dMSE(\hat{\mu}_{sh})}{d\omega} = 2\omega Var\left(\hat{\mu} - \mu\right)^2 - 2\left(1-\omega\right)\left(\mu - \mu_0\right)^2 \tag{۲۰}$$

از تساوی $\frac{dMSE(\hat{\mu}_{sh})}{d\omega} = 0$ می‌توان نتیجه گرفت $\omega^* = \frac{\left(\mu - \mu_0\right)^2}{Var\left(\hat{\mu}\right) + \left(\mu - \mu_0\right)^2}$ است که با اعمال مقدار ω^* در **رابطه (۵)** برآوردگر انقباضی برابر است با

$$\hat{\mu}_{sh} = \mu_0 + \frac{\left(\mu - \mu_0\right)^2}{Var\left(\hat{\mu}\right) + \left(\mu - \mu_0\right)^2}(\hat{\mu} - \mu_0) \tag{۲۱}$$

با توجه به **رابطه (۲۱)** و به‌کارگیری توزیع‌های نرمال با میانگین‌های μ_1 و μ_2 و واریانس‌های برابر با یک، برآوردگر انقباضی معیار واگرایی کولبک - لیبلر برابر است با:

$$\hat{D}_{sh}\left(P\|Q\right) = \frac{1}{2}\hat{\mu}_{sh_1}^2 + \frac{1}{2}\hat{\mu}_{sh_2}^2 - \hat{\mu}_{sh_1}\hat{\mu}_{sh_2} \tag{۲۲}$$

که برای نمونه‌های تصادفی $(X_1, X_2, ..., X_n)$ و $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ از توزیع‌های نرمال با میانگین‌های μ_1 و μ_2 و برآوردگرها آن‌ها می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\hat{D}_{sh}\left(P\|Q\right) &= \frac{1}{2}\left(\mu_{01} + B_1(\bar{X} - \mu_{01})\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\mu_{02} + B_2(\bar{Y} - \mu_{02})\right)^2 \\ &\quad - \left(\mu_{01} + B_1(\bar{X} - \mu_{01})\right)\left(\mu_{02} + B_2(\bar{Y} - \mu_{02})\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mu_{01}^2 + B_1^2(\bar{X} - \mu_{01})^2 + 2\mu_{01}B_1(\bar{X} - \mu_{01})\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\mu_{02}^2 + B_2^2(\bar{X} - \mu_{02})^2 + 2\mu_{02}B_2(\bar{X} - \mu_{02})\right) - \left(\mu_{01} + B_1(\bar{X} - \mu_{01})\right)\left(\mu_{02} + B_2(\bar{Y} - \mu_{02})\right),\end{aligned} \tag{۲۳}$$

که در آن $B_1 = \frac{\left(\mu_1 - \mu_{01}\right)^2}{var\left(\bar{X}\right)^2 + \left(\mu_1 - \mu_{01}\right)^2}$ و $B_2 = \frac{\left(\mu_2 - \mu_{02}\right)^2}{var\left(\bar{Y}\right)^2 + \left(\mu_2 - \mu_{02}\right)^2}$ است. به‌راحتی می‌توان نشان داد که

$$E\left(\hat{D}_{sh}\left(P\|Q\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\mu_{01}^2 + B_1^2\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\mu_{02}^2 + B_2^2\frac{1}{n}\right) - \mu_{01}\mu_{02}$$

وقتی‌که $E(\bar{X}) = \mu_{01}$ و $E(\bar{Y}) = \mu_{02}$ است.

۴- شبیه‌سازی

در این بخش برای مقایسه برآوردگرهای معیار واگرایی کولبک - لیبلر به ترتیب به روش‌های ماکسیمم درستنمایی، بیزی و انقباضی یا **رابطه‌های (۶)، (۱۶)** و **(۲۳)** نمونه‌های از توزیع‌های نرمال مطابق **جدول ۱** تا **جدول ۶** تولید می‌شود. برای ارزیابی روش‌های برآوردگرها از معیارهای اریبی و میانگین توان دوم خطا

$$\hat{D}_{mle}(P\|Q)_i - \bar{\hat{D}}_{mle}(P\|Q) = \hat{D}_{mle}(P\|Q) - \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000}\hat{D}_{mle}(P\|Q)_i \; MSE(\hat{D}_{mle}(P\|Q)) = \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000}\left(\hat{D}_{mle}(P\|Q)_i - \bar{\hat{D}}_{mle}(P\|Q)\right)^2$$

استفاده می‌شود. نتایج شبیه‌سازی برآوردگرهای معیار کولبک - لیبلر به روش‌های مختلف در جداول ۱ تا ۶ آورده شده است. قابل‌ذکر است مراحل شبیه‌سازی به کمک نرم‌افزار R انجام شده و تعداد تکرار شبیه‌سازی به ۱۰۰۰ افزایش داده شده تا برآورد پایدارتر و دقیق‌تری به دست آید. با توجه به نتایج شبیه‌سازی می‌توان گفت:

۱. با افزایش اندازه نمونه میانگین توان دوم خطا همه برآوردگرها کاهش می‌یابد.
۲. برای میانگین‌های برابر دو توزیع به ترتیب برآوردگرهای انقباضی، بیزی و ماکسیمم درستنمایی بهتر عمل می‌کنند.
۳. برای μ_1 ثابت با افزایش μ_2 میانگین توان دوم خطا برآوردگرها کاهش می‌یابد.
۴. برای میانگین‌های برابر توزیع‌ها با افزایش اندازه نمونه میانگین‌های توان دوم خطا هر سه برآوردگر کاهش یافته و برآوردگر انقباضی بهتر عمل می‌کند.
۵. با کاهش تفاضل میانگین توزیع‌ها و اندازه نمونه‌ها میانگین توان دوم خطا کاهش پیدا می‌کنند و این در حالی است که برآوردگر انقباضی در مقایسه با برآوردگرهای بیزی و ماکسیمم درستنمایی بهتر عمل می‌کند.

جدول ۱- اریبی و میانگین توان دوم خطای برآوردگرها وقتی‌که $\mu_0 = 1/8, \mu_{01} = 3/25, \mu_{02} = 3, \mu_{02} = 4/5$.

Table 1- Oribi and square root of evaluator error when $\mu_0 = 1/8, \mu_{01} = 3/25, \mu_{02} = 3, \mu_{02} = 4/5$.

n	میانگین‌ها		$\hat{D}_{mle}(P\|Q)$		$\hat{D}_{Bayse}(P\|Q)$		$\hat{D}_{sh}(P\|Q)$	
	μ_1	μ_2	BIAS	MSE	BIAS	MSE	BIAS	MSE
10	2	2	-0.0942	0.0265	-0.0779	0.0181	-0.0749	0.0166
		3	0.0194	0.1718	0.1028	0.1276	0.1277	0.1213
		5	0.8168	2.0608	1.4560	3.0719	0.1736	0.8438
20	2	2	-0.0475	0.0067	-0.0431	0.0055	-0.0422	0.0053
		3	0.01140	0.0891	0.0569	0.0764	0.0717	0.0743
		5	0.42210	0.9507	0.8012	1.2775	0.1696	0.5518
30	2	2	-0.0314	0.0029	-0.0294	0.0025	-0.0290	0.0025
		3	0.0095	0.0588	0.0406	0.0531	0.0511	0.0531
		5	0.2880	0.6069	0.5554	0.7680	0.1459	0.4163
40	2	2	-0.0252	0.0019	-0.0240	0.0017	-0.0238	0.0017
		3	0.0038	0.0497	0.0277	0.0458	0.0359	0.0450
		5	0.2102	0.4790	0.4169	0.5678	0.1172	0.3562
50	2	2	-0.0205	0.0012	-0.0197	0.0011	-0.0195	0.0011
		3	0.0054	0.0396	0.0246	0.0371	0.0313	0.0367
		5	0.1762	0.3845	0.3441	0.4449	0.1074	0.3017

جدول ۲- اریبی و میانگین توان دوم خطای برآوردگرها وقتی‌که $\mu_0 = 2/5, \mu_{01} = 3/5, \mu_{02} = 3, \mu_{02} = 4/5$.

Table 2- Oribi and square root of error of estimators when $\mu_0 = 2/5, \mu_{01} = 3/5, \mu_{02} = 3, \mu_{02} = 4/5$.

n	میانگین‌ها		$\hat{D}_{mle}(P\Vert Q)$		$\hat{D}_{Bayse}(P\Vert Q)$		$\hat{D}_{sh}(P\Vert Q)$	
	μ_1	μ_2	**BIAS**	**MSE**	**BIAS**	**MSE**	**BIAS**	**MSE**
10	3	2	-0.0180	0.1689	0.0718	0.1203	0.0024	0.1038
		3	-0.0942	0.0265	-0.0779	0.0181	-0.0384	0.0046
		5	0.3231	0.7345	0.6141	0.8075	0.3035	0.6204
20	3	2	-0.0091	0.0915	0.0382	0.0767	-0.0028	0.0704
		3	-0.0475	0.0067	-0.0431	0.0055	-0.0277	0.0022
		5	0.1680	0.3732	0.3383	0.3983	0.1624	0.3406
30	3	2	-0.0067	0.0625	0.0253	0.0554	-0.0037	0.0522
		3	-0.0314	0.0029	-0.0294	0.0025	-0.0217	0.0014
		5	0.1160	0.2461	0.2356	0.2596	0.1133	0.2312
40	3	2	-0.0050	0.0489	0.0193	0.0447	-0.0031	0.0428
		3	-0.0252	0.0019	-0.0240	0.0017	-0.0188	0.0017
		5	0.0823	0.2010	0.1747	0.2065	0.0809	0.1916
50	3	2	-0.0069	0.0408	0.0127	0.0378	-0.0055	0.0366
		3	-0.0205	0.0012	-0.0197	0.0011	-0.0162	0.0007
		5	0.0710	0.1621	0.1459	0.1664	0.0701	0.1560

جدول ۳- اریبی و میانگین توان دوم خطای برآوردگرها وقتی‌که $\mu_0 = 4/5, \mu_{01} = 6/5, \mu_{02} = 3, \mu_{02} = 4/5$.

Table 3- Oribi and square root of error of estimators when $\mu_0 = 4/5, \mu_{01} = 6/5, \mu_{02} = 3, \mu_{02} = 4/5$.

n	میانگین‌ها		$\hat{D}_{mle}(P\Vert Q)$		$\hat{D}_{Bayse}(P\Vert Q)$		$\hat{D}_{sh}(P\Vert Q)$	
	μ_1	μ_2	**BIAS**	**MSE**	**BIAS**	**MSE**	**BIAS**	**MSE**
10	5	2	0.7045	1.8814	1.3632	2.8045	0.7190	1.8062
		3	0.2482	0.6860	0.5522	0.7315	0.1896	0.6404
		5	-0.0942	0.0265	-0.0779	0.0181	-0.0596	0.0106
20	5	2	0.3602	0.9097	0.7451	1.1969	0.3691	0.8879
		3	0.1268	0.3660	0.3009	0.3785	0.0936	0.3529
		5	-0.0475	0.0067	-0.0431	0.0055	-0.0373	0.0041
30	5	2	0.2391	0.5924	0.5095	0.7291	0.2453	0.5825
		3	0.0833	0.2471	0.2050	0.2527	0.0603	0.2412
		5	-0.0314	0.0029	-0.0294	0.0025	-0.0266	0.0021
40	5	2	0.1836	0.4661	0.3916	0.5451	0.1884	0.4600
		3	0.0646	0.1968	0.1578	0.1994	0.0469	0.1933
		5	-0.0252	0.0019	-0.0240	0.0017	-0.0223	0.0015
50	5	2	0.1390	0.3764	0.3083	0.4249	0.1430	0.3722
		3	0.0462	0.1616	0.1221	0.1623	0.0320	0.1595
		5	-0.0202	0.0012	-0.0197	0.0011	-0.0185	0.0010

جدول ۴- اریبی و میانگین توان دوم خطای برآوردگرها وقتی‌که $\mu_0 = 4/5, \mu_{01} = 6/5, \mu_{02} = 4/25, \mu_{02} = 9/5$.

Table 4- Oribi and root mean square error of the estimators when $\mu_0 = 4/5, \mu_{01} = 6/5, \mu_{02} = 4/25, \mu_{02} = 9/5$.

n	میانگین‌ها		$\hat{D}_{mle}(P\Vert Q)$		$\hat{D}_{Bayse}(P\Vert Q)$		$\hat{D}_{sh}(P\Vert Q)$	
	μ_1	μ_2	**BIAS**	**MSE**	**BIAS**	**MSE**	**BIAS**	**MSE**
10	5	5	-0.0942	0.0265	-0.0779	0.0181	-0.0652	0.0124
		7	0.3231	0.7345	0.6141	0.8075	0.3564	0.5391
		9	1.5005	4.7135	2.6285	8.5908	0.8150	1.4749
20	5	9	-0.0475	0.0067	-0.0431	0.0055	-0.0401	0.0047
		7	0.1680	0.3732	0.3383	0.3983	0.2571	0.3274
		9	0.7736	1.9702	1.4455	3.2179	0.5792	1.0289
30	5	5	-0.0314	0.0029	-0.0294	0.0025	-0.0284	0.0024
		7	0.1160	0.2461	0.2356	0.2596	0.1971	0.2300
		9	0.5256	1.2087	1.0001	1.8180	0.4515	0.7781
40	5	5	-0.0252	0.0019	-0.0240	0.0017	-0.0234	0.0016
		7	0.0823	0.2010	0.1747	0.2065	0.1530	0.1894
		9	0.3874	0.9217	0.7542	1.2679	0.3605	0.6548
50	5	5	-0.0205	0.0012	-0.0197	0.0011	-0.0194	0.0011
		7	0.0710	0.1621	0.1459	0.1664	0.1320	0.1557
		9	0.3211	0.7315	0.6192	0.9641	0.3123	0.5560

جدول ۵- اریبی و میانگین توان دوم خطای برآوردگرها وقتی‌که $\mu_0 = 6/5, \mu_{01} = 7/5, \mu_{02} = 4/25, \mu_{02} = 9/5$.

Table 5- Oribi and root mean square error of the estimators when $\mu_0 = 6/5, \mu_{01} = 7/5, \mu_{02} = 4/25, \mu_{02} = 9/5$.

n	میانگین‌ها		$\widehat{D}_{mle}(P\|Q)$		$\widehat{D}_{Bayse}(P\|Q)$		$\widehat{D}_{sh}(P\|Q)$	
	μ_1	μ_2	**MSE**	**MSE**	**BIAS**	**MSE**	**BIAS**	**MSE**
10	7	5	0.2482	0.6860	0.5522	0.7315	0.0515	0.6431
		7	-0.0942	0.0265	-0.0779	0.0181	-0.0656	0.0133
		9	0.3231	0.7345	0.6141	0.8075	0.2641	0.6256
20	7	5	0.1268	0.3660	0.3009	0.3785	0.0492	0.3510
		7	-0.0475	0.0067	-0.0431	0.0055	-0.0394	0.0045
		9	0.1680	0.3732	0.3383	0.3983	0.1493	0.3431
30	7	5	0.0833	0.2471	0.2050	0.2527	0.0369	0.2393
		7	-0.0314	0.0029	-0.0294	0.0025	-0.0281	0.0023
		9	0.1160	0.2461	0.2356	0.2596	0.1063	0.2327
40	7	5	0.0646	0.1968	0.1578	0.1994	0.0317	0.1922
		7	-0.0252	0.0019	-0.0240	0.0017	-0.0232	0.0016
		9	0.0823	0.2010	0.1747	0.2065	0.0763	0.1926
50	7	5	0.0462	0.1616	0.1221	0.1623	0.0209	0.1589
		7	-0.0205	0.0012	-0.0197	0.0011	-0.0192	0.0010
		9	0.0710	0.1621	0.1459	0.1664	0.0667	0.1567

جدول ۶- اریبی و میانگین توان دوم خطای برآوردگرها وقتی‌که $\mu_0 = 8/5, \mu_{01} = 9/5, \mu_{02} = 4/25, \mu_{02} = 9/5$.

Table 6- Oribi and square root of error of estimators when . $\mu_0 = 8/5, \mu_{01} = 9/5, \mu_{02} = 4/25, \mu_{02} = 9/5$.

n	میانگین‌ها		$\widehat{D}_{mle}(P\|Q)$		$\widehat{D}_{Bayse}(P\|Q)$		$\widehat{D}_{sh}(P\|Q)$	
	μ_1	μ_2	**MSE**	**MSE**	**BIAS**	**MSE**	**BIAS**	**MSE**
10	9	5	1.3508	4.2752	2.5048	7.9478	0.8895	3.1924
		7	0.2482	0.6860	0.5522	0.7315	0.0636	0.5805
		9	-0.0942	0.0265	-0.0779	0.0181	-0.0727	0.0163
20	9	5	0.6911	1.8593	1.3707	3.0154	0.5168	1.6183
		7	0.1268	0.3660	0.3009	0.3785	0.0307	0.3353
		9	-0.0475	0.0067	-0.0431	0.0055	-0.0410	0.0050
30	9	5	0.4604	1.1594	0.9389	1.7127	0.3585	1.0572
		7	0.0833	0.2471	0.2050	0.2527	0.0185	0.2330
		9	-0.0314	0.0029	-0.0294	0.0025	-0.0284	0.0024
40	9	5	0.3519	0.8922	0.7205	1.2152	0.2811	0.8356
		7	0.0646	0.1968	0.1578	0.1994	0.0156	0.1884
		9	-0.0252	0.0019	-0.0240	0.0017	-0.0234	0.0016
50	9	5	0.2714	0.7070	0.5715	0.9117	0.2174	0.6726
		7	0.0462	0.1616	0.1221	0.1623	0.0070	0.1565
		9	-0.0205	0.0012	-0.0197	0.0011	-0.0193	0.0010

۵- نتیجه‌گیری

هدف اصلی مقاله برآورد معیار واگرایی کولبک - لیبلر که برای برآورد آن روش‌های مختلف از جمله روش ماکسیمم درستنمایی استفاده شده است. در این مقاله برای اولین بار برآورد بیزی با استفاده از توزیع پیشین مناسب مرتبط با توزیع آماری در معیار واگرایی کولبک - لیبلر ارایه شده است و به‌صورت تئوری نشان داده شده که میانگین توان دوم خطا روش بیزی در مقایسه با سایر روش‌ها کمتر است. نتایج شبیه‌سازی تایید بر این است که روش بیزی در مقایسه با دیگر روش‌ها بهتر عمل می‌کند.

تشکر و قدردانی

از دست‌اندرکاران و داوران نشریه مهندسی و مدیریت کیفیت که در بهبود کیفی این پژوهش به نویسندگان مقاله کمک نمودند، قدردانی می‌شود.

منابع مالی

هیچ‌گونه حمایت مالی برای این پژوهش دریافت نشده است.

تعارض با منافع

همه نویسندگان، نسخه نهایی ارسال‌شده را مشاهده و تایید کرده‌اند. نویسندگان تضمین می‌کنند که مقاله، اثر اصلی آن‌ها بوده، قبلا چاپ نشده و در حال حاضر تحت انتشار نمی‌باشد.

منابع

[1] Akaike, H. (1998). Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. In *Selected papers of hirotugu akaike*. Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1694-0_15
[2] Moulin, P., & Veeravalli, V. V. (2019). *Statistical inference for engineers and data scientists*. Cambridge University Press. https://www.google.com/books/edition/Statistical_Inference_for_Engineers_and/xRNwDwAAQBAJ?hl=en&gbpv=0
[3] Pardo, L. (2019). New developments in statistical information theory based on entropy and divergence measures. *Entropy*, *21*(4), 391. http://dx.doi.org/10.3390/e21040391
[4] Noh, Y. K., Sugiyama, M., Liu, S., Plessis, M. C., Park, F. C., & Lee, D. D. (2014). Bias reduction and metric learning for nearest-neighbor estimation of kullback-leibler divergence. *Artificial intelligence and statistics* (pp. 669–677). PMLR. https://proceedings.mlr.press/v33/noh14.html
[5] Ji, S., Zhang, Z., Ying, S., Wang, L., Zhao, X., & Gao, Y. (2020). Kullback–Leibler divergence metric learning. *IEEE transactions on cybernetics*, *52*(4), 2047–2058. https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/9151281/
[6] Koç, S., Erden, C., Ateş, Ç., & Ceviz, E. (2024). Evaluation of potential logistics village alternatives using bayesian best-worst method. *Optimality*, *1*(1), 100–120. https://doi.org/10.22105/opt.v1i1.35
[7] Ugwu, D. N., Onyeagu, S. I., & Igbokwe, C. P. (2024). A new weighted T−X perks distribution: Characterization, simulation and applications. *Optimality*, *1*(1), 66–81. https://doi.org/10.22105/opt.v1i1.48
[8] Kaviani, M. (2025). Forecasting the return of government exchange-traded funds based on linear and nonlinear models in machine learning algorithms. *Innovation management and operational strategies*, *6*(1), 59–69. https://doi.org/10.22105/imos.2025.493892.1415
[9] Binette, O. (2019). A note on reverse Pinsker inequalities. *IEEE transactions on information theory*, *65*(7), 4094–4096. https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/8630660/
[10] Hellinger, E. (1909). Neue begründung der theorie quadratischer formen von unendlichvielen veränderlichen. *Journal für die reine und angewandte mathematik*, *1909*(136), 210–271. https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/crll.1909.136.210/pdf
[11] Ding, R., & Mullhaupt, A. (2023). Empirical squared Hellinger distance estimator and generalizations to a family of α-divergence estimators. *Entropy*, *25*(4), 612. http://dx.doi.org/10.3390/e25040612
[12] Hastie, T. (2009). *The elements of statistical learning*. Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-0-387-84858-7