Journal of Quality Engineering and Management

www.pqprc.ir

J. Qual. Eng. Manag. Vol. 15, No. 2 (2025) 137–147.

Paper Type: Original Article

Determining the Optimal Time Policy Model for the Products with Multiple Failure States by Considering a Mixture Distribution

Masoud Amini[1], Mohammad Saber Fallahnezhad[1,*], Mohammad Saleh Owlia[1], Mohammadali Vahdat[1], Shahaboddin Kharazmi[2]

[1] Department of Industries, Faculty of Industrial Engineering, Yazd University, Yazd, Iran; m.amini_k@hotmail.com; fallahnezhad@yazd.ac.ir; owliams@yazd.ac.ir; mvahdat@yazd.ac.ir.
[2] Department of Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering, Semnan University, Semnan, Iran; kharazmi@semnan.ac.ir.

Citation:

Received: 27 November 2024 *Revised: 19 January 2025* *Accepted: 24 February 2025*	Amini, M., Fallahnezhad, M. S., Owlia, M. S., Vahdat, M., & Kharazmi, Sh. (2025). Determining the optimal time policy model for the products with multiple failure states by considering a mixture distribution. *Journal of Quality Engineering and Management, 15*(2), 137-147.

Abstract

Purpose: This study aims to optimize warranty periods for complex products by examining the role of warranties in customer retention and cost management. The proposed model uses a mixed statistical distribution to simultaneously model minor and major failures, seeking to minimize the product's life-cycle cost while maintaining customer satisfaction.

Methodology: The mathematical model defines life-cycle costs, establishes an objective function to minimize total costs, and determines the optimal warranty period. A numerical example and sensitivity analysis are used for validation, and the model is solved using Maple 2024.

Findings: The optimal warranty period was identified as 3.5-4.5 time units, and the model achieved a 23% cost reduction compared to conventional methods. Sensitivity analysis showed that changes in failure probability and failure rate directly affect the optimal warranty length.

Originality/Value: Using a mixed statistical distribution to model different failure types simultaneously offers an innovative, more realistic approach. This model provides a practical tool for adjusting warranty policies and reducing life-cycle costs, with potential for further development by incorporating dependent failures and real-world data.

Keywords: Warranty, Mixture distribution, Life cycle, Cost rate.

Corresponding Author: fallahnezhad@yazd.ac.ir

10.48313/jqem.2025.522094.1522

Licensee System Analytics. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0).

مهندسی و مدیریت کیفیت

www.pqprc.ir

دوره ۱۵، شماره (۲)، (۱۴۰۴)، ۱۴۷-۱۳۷

نوع مقاله: پژوهشی

تعیین مدل سیاست زمان بهینه وارانتی برای محصولات باحالت‌های خرابی متعدد با در نظر گرفتن توزیع آمیخته در طول دوره وارانتی

مسعود امینی[۱]، محمدصابر فلاح‌نژاد[۱،*]، محمد صالح اولیا[۱]، محمدعلی وحدت[۱]، شهاب‌الدین خوارزمی[۲]

[۱]گروه صنایع، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه یزد، یزد، ایران.

[۲]گروه مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران.

چکیده

هدف: این پژوهش با هدف بهینه‌سازی دوره‌های وارانتی در محصولات پیچیده، نقش وارانتی را در حفظ مشتریان و مدیریت هزینه‌ها بررسی می‌کند. مدل پیشنهادی با استفاده از توزیع آماری آمیخته، خرابی‌های جزیی و اساسی را هم‌زمان مدل‌سازی کرده و به دنبال حداقل‌سازی هزینه چرخه‌عمر محصول در کنار حفظ رضایت مشتری است.

روش‌شناسی پژوهش: مدل ریاضی تحقیق شامل تعریف هزینه‌های چرخه‌عمر، تعیین تابع هدف برای حداقل‌سازی هزینه‌ها و محاسبه دوره بهینه وارانتی است. داده‌ها از طریق مثال عددی و تحلیل حساسیت اعتبارسنجی شده و حل مدل با نرم‌افزار *Maple 2024* انجام شده است.

یافته‌ها: دوره بهینه وارانتی بین ۳٫۵ تا ۴٫۵ واحد زمانی تعیین شد و مدل نسبت به روش‌های مرسوم ۲۳% کاهش هزینه ایجاد کرد. تحلیل حساسیت نشان داد تغییرات در احتمال خرابی و نرخ خرابی، تاثیر مستقیم بر طول دوره بهینه دارند.

اصالت/ارزش‌افزوده علمی: استفاده از توزیع آماری آمیخته برای مدل‌سازی هم‌زمان خرابی‌ها، رویکردی نوآورانه و واقع‌گرایانه ارایه می‌دهد. این مدل ابزاری کاربردی برای تنظیم سیاست‌های وارانتی و کاهش هزینه‌های چرخه‌عمر است و زمینه توسعه آن با در نظر گرفتن خرابی‌های وابسته و داده‌های واقعی وجود دارد.

کلیدواژه‌ها: وارانتی، توزیع آمیخته، چرخه عمر، نرخ هزینه.

۱- مقدمه

وارانتی تعهد یا قراردادی است که تولیدکنندگان را ملزم می‌کند محصولات معیوب را در بازه زمانی مشخص تعمیر یا تعویض نمایند [3–1]. این توافق که بین خریدار و تولیدکننده در زمان فروش منعقد می‌شود، تولیدکننده را ملزم می‌کند در صورت خرابی محصول تحت شرایط استفاده صحیح،

اقدامات جبرانی (مانند تعمیر رایگان، تعویض یا بازپرداخت) انجام دهد [3]. به بیان دیگر، وارانتی یک تعهد قانونی از سوی تولیدکنندگان (فروشندگان) محسوب می‌شود [4].

از دید اقتصادی، مدت و نوع وارانتی هزینه‌های مستقیمی برای تولیدکننده ایجاد می‌کند که بر سودآوری نهایی تاثیر می‌گذارد [5]. با این حال، وارانتی ابزاری استراتژیک برای تمایز محصولات در بازار محسوب می‌شود، چراکه انتظارات غیرمنطقی مشتریان را کاهش می‌دهد، ریسک درک‌شده از خرید را کم می‌کند و انتخاب محصول توسط مشتریان را تحت تاثیر قرار می‌دهد (به‌ویژه بر اساس مدت و پوشش خدمات) [6–8].

همان‌طور که پیش‌تر اشاره شد، عملیات مرتبط با وارانتی بار مالی قابل‌توجهی را تحمیل می‌کند. سیاست‌های وارانتی را می‌توان بر اساس معیارهای مختلف طبقه‌بندی نمود:

۱. از نظر تمدید دوره وارانتی پس از تعویض محصول: سیاست وارانتی تمدیدشونده و غیرتمدیدی [9].
۲. از نظر نوع جبران خسارت: وارانتی تعمیر/تعویض رایگان[1] یا وارانتی مشارکتی که در آن هزینه بین تولیدکننده و مشتری تقسیم می‌شود (*PRW*) [10].
۳. از نظر حوزه پوشش :وارانتی یک‌بعدی (فقط بر اساس زمان) و دوبعدی (ترکیب زمان و میزان استفاده، مانند کیلومتر خودرو) [11].
۴. در عمل، سیستم‌ها اغلب با حالات خرابی چندگانه (قابل‌تعمیم به n حالت) مواجه هستند که به دو دسته تقسیم می‌شوند. خرابی‌های جزیی (قابل تعمیر با هزینه کمتر) و خرابی‌های اساسی (نیازمند تعویض یا تعمیر اساسی) [12].

مطالعات گسترده‌ای در زمینه بهینه‌سازی تعمیرات و تحلیل دسترس‌پذیری این سیستم‌ها انجام شده است [13]. دور انداختن محصولات بلافاصله پس از اتمام وارانتی از نظر اقتصادی به‌صرفه نیست. در این مرحله، مسئولیت تعمیر یا تعویض محصولات معیوب کاملا بر عهده مشتری است. اجرای اقدامات نگهداری پیشگیرانه دوره‌ای (*PM*) راهکاری موثر برای کاهش هزینه‌های عملیاتی در این دوره است. مطالعات نشان می‌دهد *PM* می‌تواند قابلیت اطمینان محصول را افزایش و هزینه‌ها را کاهش دهد [14].

محصولات وارانتی‌دار از دو منظرمحصولات قابل تعمیرمحصولات غیرقابل تعمیر قابل‌بررسی هستند [15] به‌عنوان مثال، [16] استراتژی بهینه سفارش قطعات یدکی را برای محصولات غیرقابل تعمیر تحت وارانتی تخفیفی ارایه کردند. تحقیقات در این حوزه به سه دسته اصلی تقسیم می‌شوند:

۱. وارانتی با تعمیرات اصلاحی (*CM*)
۲. وارانتی با تعمیرات اصلاحی و پیشگیرانه (*CM+PM*)
۳. مدیریت تعمیرات در دوره پس از وارانتی [1]

بررسی نظام‌مند ادبیات موضوع نشان می‌دهد که محدودیت‌های اصلی زیر در پژوهش‌های موجود وجود دارد:

۱. ساده‌انگاری در مدل‌سازی خرابی‌ها: اکثر مدل‌های موجود خرابی‌ها اغلب به‌صورت تک‌حالته و مستقل در نظر می‌گیرند، درحالی‌که در عمل، محصولات صنعتی معمولا با چندین حالت خرابی وابسته به هم و احتمالی مواجه هستند. نشان دادن احتمالی و توزیع آمیخته می‌تواند نمایش بهتری از آنچه در واقعیت رخ می‌دهد باشد همچنین امکان استفاده از توزیع‌های آماری مختلف و ترکیب آن‌ها می‌تواند جنبه نوآوری را قوت بخشد.
۲. عدم توجه به اثر ترکیبی هزینه‌ها: پژوهش‌های پیشین هزینه‌های تعمیرات جزیی و اساسی را به‌صورت مجزا تحلیل کرده‌اند، درحالی‌که در واقعیت این هزینه‌ها و امکان رخداد احتمالی در مطالعه اثر دارند.

[1] Free Repair/Replacement Warranty (FRW)

۳. غفلت از بهینه‌سازی پویا: مدل‌های سنتی [17] معمولا به سیاست‌های ایستا متکی هستند و قادر به انطباق با تغییرات نرخ خرابی در طول زمان و احتمالی نمی‌باشند.

با وجود مطالعات گسترده در زمینه بهینه‌سازی سیاست‌های وارانتی شکاف تحقیقاتی قابل‌توجهی در مدل‌سازی سیستم‌های با حالات خرابی چندگانه تحت توزیع‌های عمر مختلط همچنان وجود دارد. اکثر پژوهش‌های پیشین فرضیات ساده‌اندیش مانند خرابی‌های مستقل یا توزیع‌های تک‌حالته را در نظر گرفته‌اند، درحالی‌که در دنیای واقعی، خرابی‌های محصولات اغلب از الگوهای پیچیده‌تر تبعیت می‌کنند که ترکیبی از خرابی‌های جزیی و کامل است. این محدودیت، دقت پیش‌بینی هزینه‌های وارانتی را تحت تاثیر قرار داده است.

توزیع‌های آماری مختلط و آمیخته به دلیل انعطاف‌پذیری در توصیف رفتارهای ناهمگون خرابی، ابزار مناسبی برای مدل‌سازی سیستم‌های با حالات خرابی چندگانه هستند. برای مثال، ترکیب توزیع‌های آماری مختلف مانند توزیع نمایی (برای خرابی‌های تصادفی) و وایبول (برای خرابی‌های ناشی از فرسایش) می‌تواند رفتار واقعی‌تر محصولات را در طول چرخه عمرشان نشان دهد. با این حال، پژوهش‌های معدودی به بررسی تاثیر این توزیع‌ها بر استراتژی‌های بهینه تعمیر و نگهداری تحت وارانتی پرداخته‌اند. این در حالی است که انتخاب نادرست توزیع احتمال می‌تواند به برآوردهای نادرست از هزینه‌های وارانتی و در نتیجه کاهش سودآوری تولیدکننده منجر شود که نتیجه این تحقیق فعلی می‌تواند در این زمینه قابل ارزش و استفاده مطالعات بعدی باشد.

این پژوهش به بررسی سیستم‌های قابل تعمیر با تابع عمر $f(x)$ می‌پردازد که در معرض حالات خرابی چندگانه قرار دارند. خرابی‌های سیستم به دودسته جزیی و اساسی تقسیم می‌شوند که با استفاده از توزیع آمیخته مدل‌سازی شده‌اند. در چارچوب این مطالعه، از سیاست وارانتی غیرتمدیدی و غیرمشارکتی استفاده شده است که در آن خرابی‌ها بر اساس تابع احتمال آمیخته (ترکیبی) رخ می‌دهند. هدف اصلی پژوهش حاضر، کمینه‌سازی میانگین هزینه از دیدگاه تولیدکننده است که برای دستیابی به این منظور، سیاست وارانتی پژوهش به بررسی سیستم‌های قابل تعمیر با تابع عمر $f(x)$ می‌پردازد که در معرض دو حالت خرابی (قابل تعمیم به n حالت) قرار دارند پرداخته می‌شود. خرابی‌های سیستم به دو دسته جزیی و اساسی تقسیم می‌شوند که با استفاده از توزیع آمیخته مدل‌سازی شده‌اند. در چارچوب این مطالعه، از سیاست وارانتی غیرتمدیدی و غیرمشارکتی استفاده شده است که در آن خرابی‌ها بر اساس تابع احتمال ترکیبی رخ می‌دهند. هدف اصلی پژوهش حاضر، کمینه‌سازی میانگین هزینه از دیدگاه تولیدکننده است که برای دستیابی به این منظور، سیاست وارانتی با رویکرد طول چرخه عمر [18] به کار گرفته شده است.

ساختار مقاله به‌صورت پیوسته و در امتداد یکدیگر تنظیم شده است: ابتدا نمادها و توصیف مدل ارایه می‌شود، سپس تحلیل مدل انجام می‌گیرد، در ادامه آزمایش‌های عددی موردبررسی قرار می‌گیرند و نهایتا به نتیجه‌گیری ختم می‌شود. این رویکرد پیوسته امکان درک بهتر روابط بین اجزای مختلف پژوهش را فراهم می‌آورد و خواننده را قادر می‌سازد تا ارتباط منطقی بین بخش‌های مختلف را به‌صورت یک کل منسجم درک کند.

۲- نمادها و توصیف مدل

نمادها

نمادهای مورداستفاده در این مقاله به همراه توضیحات آن در **جدول ۱** آمده است.

جدول ۱- نمادهای مورداستفاده در مقاله.
Table 1- Symbols used in the article.

نام نماد	توضیح
N	تعداد تعمیرات در طول دوره وارانتی
X	عمر محصول تحت پوشش وارانتی
t	زمان
P	احتمال خرابی برای توزیع مخلوط
λ_i	تابع نرخ خرابی

جدول ۱- ادامه.
Table 1- Continued.

نام نماد	توضیح
R	تابع قابلیت اطمینان
W	مدت زمان وارانتی پایه
Ci	هزینه واحد تعمیرith
C_T	هزینه واحد تعمیر با در نظر گرفتن اثر توزیع مخلوط
$f_i(x)$	تابع احتمال عمر محصول برای حالت ith
f(x)	تابع احتمال عمر محصول با اثر توزیع مخلوط
$F_i(x)$	تابع بقای محصول برای حالت ith
$\overline{F}(X)$	1-F(X)
E(Ci)	هزینه چرخه عمر مورد انتظار برای محصول وارانتی با حالات خرابی چندگانه
$E(C_T)$	هزینه مورد انتظار تعمیرith
E(N)	هزینه مورد انتظار با اثر توزیع مخلوط
E(L)	تعداد مورد انتظار تعمیرات در طول دوره وارانتی
$E_i(N)$	طول کل مورد انتظار چرخه عمر
$E_T(N)$	تعداد مورد انتظار تعمیرات در دوره وارانتی با اثر توزیع مخلوط
ECR	هزینه چرخه عمر مورد انتظار به ازای واحد زمان محصول

فرضیات زیر برای توصیف مدل وارانتی در نظر گرفته شده است:

۱. خرابی‌ها مستقل از یکدیگر رخ می‌دهند.
۲. خرابی آیتم تنها تابعی از عمر آن از دیدگاه احتمالاتی است.
۳. زمان انجام اقدامات اصلاحی (تعمیر یا تعویض) ناچیز در نظر گرفته می‌شود.
۴. هر خرابی محصول منجر به ادعای فوری می‌شود و کلیه ادعاها معتبر هستند.
۵. محصول قابل تعمیر بوده و مستهلک می‌شود.
۶. در ابتدا، محصولی که با وارانتی رایگان فروخته شده است، به بهره‌برداری می‌رسد. این محصول دارای M حالت خرابی مستقل از یکدیگر می‌باشد.
۷. هر حالت خرابی دارای یک تابع قابلیت اطمینان نظری R_i و تابع نرخ خرابی λ_i می‌باشد (وقتی محصول با حالت خرابی i-ام دچار نقص می‌شود).
۸. هزینه هر واحد خرابی به‌عنوان مضربی از هزینه تعمیر در طول دوره وارانتی در نظر گرفته شده است؛ به عبارت دیگر $C_i = C_{i0} * W$.

۳- توزیع آمیخته

در نظریه احتمالات و آمار، توزیع آمیخته به توزیع احتمال متغیر تصادفی گفته می‌شود که از مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی دیگر به‌صورت زیر به دست می‌آید: ابتدا یک متغیر تصادفی به‌طور تصادفی از مجموعه مطابق با احتمالات انتخاب داده شده انتخاب می‌شود، سپس مقدار متغیر تصادفی انتخاب شده محقق می‌گردد. متغیرهای تصادفی پایه می‌توانند اعداد حقیقی تصادفی یا بردارهای تصادفی (همه با بعد یکسان) باشند که در این حالت توزیع آمیخته چندمتغیره خواهد بود.

توزیع‌های آمیخته در بسیاری از زمینه‌های ادبیات تخصصی ظاهر می‌شوند و به‌طور طبیعی در مواردی که یک جامعه آماری شامل دو یا چند زیرجامعه باشد، به وجود می‌آیند. همچنین گاهی از آن‌ها به‌عنوان روشی برای نمایش توزیع‌های غیرنرمال استفاده می‌شود. تحلیل داده‌های مربوط به مدل‌های آماری شامل توزیع‌های آمیخته تحت عنوان مدل‌های آمیخته موردبحث قرار می‌گیرد. در عین حال، این مقاله بر ویژگی‌های احتمالی و آماری ساده توزیع‌های آمیخته و ارتباط آن‌ها با ویژگی‌های توزیع‌های خرابی پایه تمرکز دارد.

با توجه به مجموعه متناهی توابع چگالی احتمال $p_1(x)$، ...، $p_n(x)$، یا توابع توزیع تجمعی متناظر $P_1(x)$، ...، $P_n(x)$ و وزن‌های w_1، ...، w_n به‌طوری که $w_i \geq 0$ و $\Sigma w_i = 1$، توزیع آمیخته را می‌توان با نوشتن چگالی f یا تابع توزیع F به‌صورت مجموع (که در هر دو حالت یک ترکیب محدب است) نمایش داد: $F(x) = \sum_{i=0}^{n} w_i P_i(x)$ ما در اینجا رویدادهای خرابی را به‌عنوان ترکیبی از توابع آماری در نظر می‌گیریم.

۴- تحلیل مدل

در این بخش، هزینه چرخه عمر مورد انتظار به ازای واحد زمان برای محصول تحت وارانتی با حالات خرابی چندگانه را از دیدگاه مشتری با مدل‌سازی ریاضی فرمول‌بندی می‌کنیم. چرخه عمر با نصب محصول جدید آغاز می‌شود. در اینجا بازه زمانی $[0-w]$ را در نظر می‌گیریم که دوره وارانتی را مشخص می‌کند (در مرحله اول، این وارانتی تمدیدشدنی نیست). سپس با در نظر گرفتن توابع خرابی که دارای توزیع نمایی هستند، هزینه‌های تعمیر (مطابق با نوع تعمیر) و محاسبه هزینه‌های مرتبط با طول عمر، در نهایت دوره وارانتی متوسط و تابع هزینه بهینه وارانتی متوسط به دست می‌آید.

۵- طول چرخه عمر

در این بخش، طول عمر مورد انتظار محصول تحت وارانتی را محاسبه می‌کنیم. یک محصول قابل تعمیر با مشخصات قابلیت اطمینان و عملکرد خرابی زیر به فروش می‌رسد و قرارداد وارانتی آغاز می‌شود؛ بنابراین، مطابق با مطالعه [19]، تابع توزیع تجمعی زمان تا اولین تعمیر و خرابی با در نظر گرفتن قوانین احتمالاتی به‌صورت زیر محاسبه خواهد شد. همچنین شایان ذکر است که توابع قابلیت اطمینان و نرخ خرابی در ادامه آورده شده‌اند.

طول چرخه عمر در این بخش به‌صورت زیر ارایه می‌شود.

$$R(t) = P(X > t) = \prod_{j=1}^{M} R_j(t). \quad (۱)$$

$$\lambda(t) = \lambda_1(t) + \cdots + \lambda_M(t). \quad (۲)$$

در این پژوهش، توابع را به‌صورت ترکیبی از توابع آماری در نظر می‌گیریم. این رویکرد به ما کمک می‌کند تا به شرایط و احتمالات واقعی نزدیک‌تر شویم. به‌طورکلی، برای تابعی مانند $f(t)$ در حالت ترکیبی دوگانه، دیدگاه زیر را در نظر می‌گیریم که می‌توان آن را به M حالت تعمیم داد و این امر کلیت مساله را تغییر نخواهد داد. این روش تحلیل به ما این امکان را می‌دهد تا شرایط عملیاتی واقعی‌تر را مدل‌سازی کنیم، انعطاف‌پذیری بیشتری در تحلیل رفتار سیستم داشته باشیم و به نتایجی با دقت بالاتر دست یابیم. مدل ارایه‌شده قابلیت توسعه به موارد چندحالته را دارا است، درحالی‌که تمام ویژگی‌های اساسی و مفروضات اولیه مساله حفظ می‌شوند. این رویکرد ترکیبی به‌ویژه در تحلیل سیستم‌های پیچیده با حالات خرابی چندگانه کاربرد دارد.

$$f(t) = P * f1(t) + (1 - P) * f2(t). \quad (۳)$$

ما تابع توزیع آماری مخلوط را با ساده‌ترین شکل اولیه به‌عنوان احتمال تحت تاثیر قرار خواهیم داد، همان‌طور که در **معادله (۳)** بیان شده است. توابع توزیع تجمعی زمان برای تعمیرات نوع ۱ و ۲ به شرح زیر محاسبه می‌شوند:

$$F_1(w) = \left[1 - e^{-\lambda 1 W}\right]. \quad (۴)$$

رابطه‌های (۴) و **(۵)** تابع تولید خرابی را نشان می‌دهند.

$$F_2(w) = \left[1 - e^{-\lambda 2 W}\right]. \quad (۵)$$

با توجه به مفروضات مدل و همچنین با استناد به مطالعه [18]، روابط مرتبط با احتمال خرابی و مقدار مورد انتظار خرابی در **رابطه (۶)** تا **رابطه (۸)** ارایه شده است. این تابع از توزیع آماری هندسی (تعداد آزمایش‌ها تا رسیدن به اولین موفقیت) پیروی می‌کند که می‌توان آن را به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$P(N=n)=F(W)^n\overline{F}(W). \quad (۶)$$

میانگین رابطه فوق به‌صورت **رابطه (۷)** تعریف می‌شود:

$$E(N)=\sum_{n=1}^{\infty} nP(N=n). \quad (۷)$$

با توجه به ارتباط بین تابع احتمال و توزیع هندسی، میانگین به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E(N)=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{F}(W)F^n(W). \quad (۸)$$

بنابراین، مقدار مورد انتظار هزینه‌های تولیدکننده در این دوره برابر خواهد بود با:

$$E(L)=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{F}(W)F^n(W)\left[W+n\frac{\int_{i=0}^{W} xdF(x)}{F(W)}\right]. \quad (۹)$$

$$E(L)=\sum_{n=0}^{\infty}[1-[P(1-e^{\lambda 1W})+(1-P)(1-e^{\lambda 2W})][P(1-e^{\lambda 1W})+(1-P)(1-e^{\lambda 2W})^n]\left[w+n\frac{\int_{i=0}^{W} xdF(x)}{P(1-e^{\lambda 1W})+(1-P)(1-e^{\lambda 2W})}\right]. \quad (۱۰)$$

در این کار فرض می‌شود که میانگین زمان تعمیر محصول بسیار کمتر از میانگین زمان کارکرد آن است، بنابراین وقوع خرابی‌ها تقریبا از یک فرآیند پواسون ناهمگن پیروی می‌کند و در نتیجه، زمان تعمیر موردنیاز در **رابطه (۱۰)** محاسبه نشده است. ما همچنین محاسبات عددی را با استفاده از نرم‌افزار *Maple* ساده‌سازی خواهیم کرد.

۶- هزینه کل در طول چرخه عمر

در این بخش، هزینه چرخه عمر مورد انتظار محصول را از دیدگاه تولیدکننده در این دوره به دست می‌آوریم. ما هزینه‌های زیر را داریم (**شکل ۱**):

۱. هزینه تعمیر $E(C1)$: هزینه‌ای که سیستم با تعمیر اولین محصول معیوب متحمل می‌شود.
۲. هزینه تعمیر/تعویض نوع دوم $E(C2)$: هزینه تعمیر محصولات معیوب نوع دوم که به سیستم تحمیل می‌شود.

شکل ۱- هزینه کل در مدت طول عمر.
Figure 1- Total cost over the life cycle.

هزینه کل تعمیر $E(C_T)$ هزینه‌ای است که توسط تعمیر بر اساس توزیع مختلط ایجاد می‌شود. $E(C_T) = P * E(C_1) + (1-P) * E(C_2)$، که در ابتدا این احتمالات به‌عنوان اعدادی بین صفر و یک با مجموع توابع هزینه خرابی‌های سیستم در نظر گرفته می‌شوند. در اینجا، ما دو نوع هزینه تعمیر/تعویض را به دلیل وقفه و جلوگیری از انحراف موضوع به سایر هزینه‌ها در نظر می‌گیریم.

$$E(C_i) = C_i W \sum_{n=1}^{\infty} \overline{F}(W) F^n(W) \, [n \frac{\int_{i=0}^{w} x dF(x)}{WF(w)}. \qquad (۱۱)$$

روابط فوق بیانگر امید ریاضی اولین رویداد هزینه و هزینه بعدی هستند.

$$E(C_1) = C_1 W \sum_{n=0}^{\infty} [e^{-\lambda_1 W}][1 - e^{-\lambda_1 W}] \, [n \frac{\int_{i=0}^{w} x dF_1(x)}{W[1 - e^{-\lambda_1 W}]}. \qquad (۱۲)$$

$$E(C_2) = C_2 W \sum_{n=0}^{\infty} [e^{-\lambda_2 W}][1 - e^{-\lambda_2 W}] \, [n \frac{\int_{i=0}^{w} x dF_2(x)]}{W[1 - e^{-\lambda_2 W}]}. \qquad (۱۳)$$

با در نظر گرفتن اثر توزیع آماری مختلط، می‌توانیم هزینه نهایی متوسط را به‌صورت زیر محاسبه کنیم:

$$E(C_T) = P * E(C_1) + (1-P) * E(C_2). \qquad (۱۴)$$

با توجه به کوتاه بودن دوره آزمایش اولیه محصول در مقایسه با طول دوره وارانتی، این مقدار در محاسبه هزینه متوسط به ازای واحد زمان در نظر گرفته نشده است.

$$E(CT) = P * \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [e^{-\lambda_1 W}][1 - e^{-\lambda_1 W}] \left[n \frac{\int_{i=0}^{w} x dF(x)}{W[1-e^{-\lambda_1 W}]} \right] \right\} +) + (1-P) * \; C_2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [e^{-\lambda_2 W}][1 - e^{-\lambda_2 W}] \left[n \frac{\int_{i=0}^{w} x dF(x)}{W[1-e^{-\lambda_2 W}]} \right] \right\}. \qquad (۱۵)$$

۷- نرخ مورد انتظار هزینه چرخه عمر

در این بخش، بهینه‌سازی نسبت به‌دست‌آمده از دو بخش پیشین موردتوجه قرار خواهد گرفت. هزینه چرخه عمر مورد انتظار به ازای واحد زمان محصول را می‌توان به‌صورت زیر فرموله کرد:

$$ECR = \frac{E(C_T)}{E(L)}. \qquad (۱۶)$$

در نهایت، یک مثال عددی ارایه می‌شود و از نرم‌افزار *Maple 2024* برای اعتبارسنجی عددی مدل استفاده می‌گردد.

۸- آزمایش‌های عددی

در این بخش، زمان بهینه وارانتی را با یک مثال عددی موردبررسی قرار می‌دهیم که در آن مقادیر پارامترها مطابق با **جدول ۲** تعیین شده‌اند. در واقع، مطابق با بخش‌های قبلی، محصولی با عمر مورد انتظار (همان‌گونه که در **رابطه (۱۲)** تعریف شده است) داریم. همچنین توابع هندسی و هزینه متوسط به شرح زیر می‌باشند:

$$f_i(w) = [\lambda_i e^{-\lambda_i W}]. \qquad (۱۷)$$

$$ECR = \frac{E(C_T)}{E(L)}. \qquad (۱۸)$$

مقدار بهینه وارانتی در بازه ۳/۵ تا ۴/۵ واحد زمانی اتفاق می‌افتد که منجر به کمترین هزینه می‌شود. این تغییرات را می‌توان به‌طور مستقیم در **شکل ۲** نیز مشاهده کرد. برای نمایش بهتر، محدوده زمانی از ۲ تا ۶ واحد ترسیم شده است که مقادیر مربوطه در **جدول ۳** قابل مشاهده هستند.

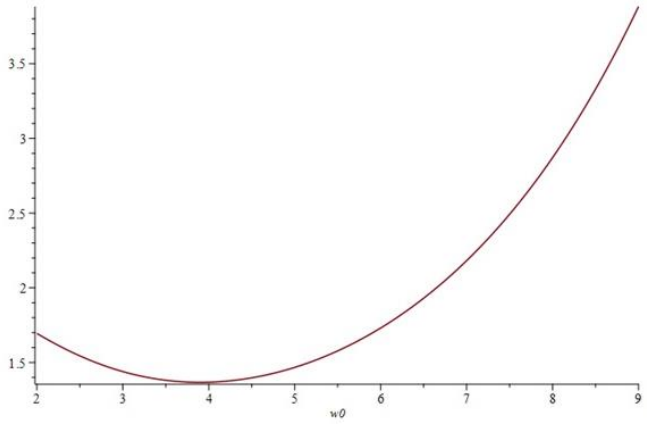
جدول ۲- پارامترهای مساله.
Table 2- Problem parameters.

C1	C2	n	λ_1	λ_2	P
2	3	10	0.3	0.5	0.4

جدول ۳- تغییر هزینه.
Table 3- Cost change.

9.1	8.2	7.3	6.4	5.5	4.6	3.7	2.8	1.9	1	0.1	w
4.0048	3.04416	2.3601881	1.886494	1.578	1.408327	1.37092	1.4758	1.72969	2.09933	2.5459	ECT
19	18.1	17.2	16.3	15.4	14.5	13.6	12.7	11.8	10.9	10	w
103.8	77.495	57.766967	42.9917	31.95	23.70331	17.5681	13.013	9.64261	7.15762	5.3343	ECT
28.9	28	27.1	26.2	25.3	24.4	23.5	22.6	21.7	20.8	19.9	w
2383.8	1800.82	1359.507	1025.597	773.1	582.2347	438.081	329.27	247.209	185.367	138.81	ECT

بر اساس **جدول ۲**، حداقل هزینه در بازه ۳/۷ تا ۴/۶ واحد زمانی رخ می‌دهد، درحالی‌که تغییرات هزینه متوسط با افزایش دوره وارانتی به وضوح قابل مشاهده است .



شکل ۲- تغییرات توابع هدف.
Figure 2- Changes in objective functions.

همان‌طور که در **شکل ۲** مشاهده می‌شود، با افزایش دوره وارانتی، هزینه‌های متوسط ابتدا کاهش یافته و سپس افزایش می‌یابند. این رفتار به شکل یک منحنی U ظاهر می‌شود که نشان‌دهنده وجود یک نقطه بهینه برای مدت وارانتی است.

۹- تحلیل حساسیت پارامترها و مثال‌های عددی برای مدل پیشنهادی

در این بخش، اثر تغییرات پارامترهای کلیدی مانند پارامتر توزیع مختلط که تاکید عمده پژوهش بر آن است و دو نوع نرخ خرابی را بر جواب بهینه بررسی می‌کنیم. در مرحله اول با بررسی تغیرات در پارامتر احتمالی سعی در تفسیر مدل و تاثیر این تغیرات داریم همان‌طور که از مدل برمی‌آید این تغییرات در حقیقت وقوع یک نوع از خرابی‌ها را بیشتر خواهد کرد در حقیقت با دادن وزن احتمالی بیشتر برای خرابی‌ها رفتار مدل و طول مدت بهینه وارانتی را بررسی می‌کنیم با در نظر گرفتن وزن بیشتر برای خرابی نوع اول که می‌توان خرابی جزیی باشد احتمال روی دادن خرابی نوع دوم منطقا کاهش پیدا میمند و ما بیشتر شاهد خرابی نوع اول در مدل خواهیم بود، همچنین با فرض مقابل احتمال روی دادن خرابی نوع دوم بیشتر می‌شود و با این فرض نیز مقدار بهینه زمان وارانتی تغییر خواهد کرد.

به‌عنوان مثال می‌توان فرض کرد یک محصول تولیدی اگر اغلب دچار خرابی‌های نوع دوم که خرابی کلی است شاید دادن مدت‌زمان وارانتی بیشتر به‌صرفه نبوده و بایستی در فرآیندهای تولیدی یا کنترل کیفیت تجدیدنظر و بررسی گردد در طرف مقابل اگر محصول با خرابی‌های نوع اول مواجه

شود که اغلب هزینه تعمیراتی کمتری دارد و شاید بیشتر تابع رفتار مصرف‌کننده باشد می‌توان مدت زمان بیشتری را متصور شد که در مثال‌های عددی بررسی خواهد شد. در مرحله بعدی نرخ خرابی در هر محصول را بررسی قرار می‌دهیم و با تغییر جداگانه نرخ‌های خرابی تاثیرات آن بر مدل بررسی می‌کنیم در این بخش نیز می‌توان از تفسیری مشابه بالا بهره گرفت.

۱۰- تغییر در احتمال تابع

با حفظ کلیت مثال‌های قبلی، مقدار پارامتر P را از ۰/۱ تا ۰/۶ تغییر داده و اثرات آن بر دوره وارانتی و سایر موارد را تحلیل می‌کنیم. همان‌طور که در بخش قبل اشاره شد، پارامتر P به‌عنوان وزن و احتمال وقوع دو نوع تغییر، تاثیر قابل‌توجهی بر توابع مدل دارد. در توابع هزینه، پس از اعمال اثر پارامتر احتمال، با تغییر این پارامتر، احتمال یکی از خرابی‌ها افزایش می‌یابد. در **جدول ۴**، تمام پارامترهای مساله به‌جز پارامتر P را ثابت و مطابق مقادیر زیر در نظر می‌گیریم. انتخاب این پارامترها بر اساس مطالعات قبلی انجام شده است.

جدول ۴- پارامترهای مساله.
Table 4- problem parameters.

C1	C2	n	λ_2	λ_1
2	3	10	0.5	0.3

با افزایش پارامتر احتمال P از ۰.۱ تا ۰.۶، بازه‌ای که در آن زمان بهینه وارانتی رخ می‌دهد (کمترین بازه) مطابق **جدول ۵** قابل مشاهده است. البته واضح است که در دو حالت $P=0,1$ ، تنها یک خرابی بر سیستم متصور است که از آن صرف‌نظر می‌کنیم. بر اساس **جدول ۴**، مقدار بهینه با افزایش پارامتر احتمال پیچیده به سمت راست منتقل می‌شود. همچنین از نظر تجربی قابل‌درک است که با خرابی نوع جزیی، می‌توان دوره وارانتی طولانی‌تری را با هزینه کمتر برای سیستم در نظر گرفت.

جدول ۵- تغییر در احتمال تابع مختلط.
Table 5- Change in probability of complex function.

P	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
بازه‌ای که ورانتی بهینه را شامل می‌شود.	[3.31-3.33]	[3.50-3.53]	[3.69-3.71]	[3.18-3.91]	[4.10-4.13]	[4.32-4.34]

۱۱- تغییر در پارامتر λ_1

این بار تغییرات λ_1 را درحالی‌که تمام پارامترهای دیگر ثابت نگه داشته شده‌اند، بررسی می‌کنیم. پارامترها در **جدول ۶** و تغییرات حاصل و بازه‌ای که زمان بهینه وارانتی در آن قرار دارد در **جدول ۷** ارایه شده‌اند.

جدول ۶- پارامترهای مساله
Table 6- Problem parameters.

C1	C2	n	P	λ2
2	3	10	0.4	0.5

در جدول زیر بازه‌ای که زمان وارانتی بهینه در آن قرار دارد با تغییر λ_1 محاسبه شده است. این تغییر با افزایش نرخ خرابی با گام‌های مساوی ۰/۱ قابل مشاهده است:

جدول ۷- تاثیرات تغییر در پارامتر λ_1.
Table 7- Effects of changing the parameter λ_1.

λ_1	0.3	0.31	0.32	0.33
W	[3.89-3.91]	[3.83-3.86]	[3.87-3.81]	[3.73-3.76]

همان‌طور که از داده‌های جدول برمیاید با ثابت بودن $\lambda 2$، مشاهده می‌شود که با افزایش λ_1 دوره وارانتی کاهش می‌یابد (**جدول‌های ۶ و ۷**). **جدول ۸** نشان‌دهنده پارامترهای ثابت مساله است. در **جدول ۹** بازه‌ای که مقدار بهینه طول وارانتی روی می‌دهد به ازای تغییرات λ_2 قابل مشاهده است.

جدول ۸- پارامترهای مساله.

Table 8- Problem parameters.

C1	C2	n	P	λ_1
2	3	10	0.4	0.3

جدول ۹- تاثیرات تغییر در λ_2.

Table 9- Effects of changes in λ_2.

λ_2	0.5	0.51	0.53	0.54	0.55
w	[3.89-3.91]	[3.85-3.88]	[3.72-3.74]	[3.72-3.74]	[3.69-3.71]

همان‌طور که از **جدول ۹** قابل مشاهده است با افزایش λ_2 وارانتی بهینه به سمت اعداد کمتر نزول پیدا می‌کند که منطقا تفسیر آن به‌صورت این است که با افزایش نرخ خرابی دوم فروشنده مدت زمان وارانتی کمتری را ارایه خواهد کرد.

۱۲- نتیجه‌گیری

این پژوهش به توسعه یک مدل تحلیلی پیشرفته برای بهینه‌سازی دوره‌های وارانتی در محصولات پیچیده با حالات خرابی چندگانه می‌پردازد. نقطه تمایز این مطالعه، استفاده از توزیع آماری آمیخته برای مدل‌سازی هم‌زمان خرابی‌های جزیی و اساسی است که رویکردی واقع‌گرایانه‌تر نسبت به روش‌های سنتی تک‌حالته ارایه می‌دهد. چارچوب پیشنهادی با در نظر گرفتن هزینه‌های چرخه عمر تولیدکننده، به دنبال تعیین بازه زمانی بهینه وارانتی است که هم از نظر اقتصادی به‌صرفه باشد و هم رضایت مشتری را تامین کند. بر اساس شبیه‌سازی‌های انجام‌شده، دوره بهینه وارانتی در محدوده ۳٫۵ تا ۴٫۵ واحد زمانی شناسایی شد که تعادلی بین هزینه‌های تعمیر، تعویض و ارزش حفظ مشتری ایجاد می‌کند. تحلیل حساسیت پارامترها نشان داد که افزایش ۱۰ درصدی در احتمال خرابی‌های جزیی (P)، دوره بهینه را حدود ۰٫۳ واحد زمانی افزایش می‌دهد، رشد ۱۵ درصدی در نرخ خرابی (λ)، طول دوره وارانتی را تا ۰٫۴ واحد زمانی کاهش می‌دهد و مدل پیشنهادی در مقایسه با روش‌های مرسوم تا ۲۳% در کاهش هزینه‌های کل موثرتر عمل می‌کند. یافته‌های این تحقیق ابزار ارزشمندی برای مدیران زنجیره تامین فراهم می‌کند از جمله امکان تنظیم هوشمندانه سیاست‌های وارانتی بر اساس ویژگی‌های محصول، پیش‌بینی تاثیر تغییرات طراحی بر هزینه‌های پس از فروش و بهینه‌سازی موجودی قطعات یدکی با توجه به الگوی خرابی‌های پیش‌بینی‌شده. این مدل به‌ویژه برای تولیدکنندگان محصولات صنعتی با نرخ خرابی متغیر و هزینه‌های تعمیر بالا کاربرد دارد. اگرچه این مطالعه به پیشرفت‌های قابل‌توجهی در بهینه‌سازی دوره‌های وارانتی دست یافته، اما محدودیت‌هایی وجود دارد که زمینه را برای تحقیقات آینده هموار می‌سازد. نخست آنکه مدل حاضر خرابی‌های مستقل را در نظر گرفته و بررسی خرابی‌های وابسته و اثرات تجمعی آن‌ها می‌تواند به واقع‌گرایی بیشتر مدل بی‌انجامد. دوم اینکه ادغام این مدل با سیستم‌های پایش سلامت محصول (PHM) امکان پیش‌بینی دقیق‌تر خرابی‌ها را فراهم خواهد کرد. همچنین، تاثیر عوامل محیطی و شرایط عملیاتی بر پارامترهای مدل نیاز به بررسی عمیق‌تری دارد. سرانجام، اعتبارسنجی مدل با داده‌های واقعی از صنایع مختلف می‌تواند قدرت پیش‌بینی آن را افزایش دهد. رفع این محدودیت‌ها از طریق مطالعات آینده، این مدل را به ابزاری استراتژیک و کاربردی‌تر برای مدیران و تصمیم‌گیرندگان تبدیل خواهد کرد.

تشکر و قدردانی

عبارتی است به منظور تشکر از افرادی که در فرآیند نگارش مقاله، حامی و راهنمای نویسندگان بوده‌اند.

منابع مالی

هیچ‌گونه حمایت مالی برای این پژوهش دریافت نشده است.

تعارض با منافع

نویسندگان هیچ‌گونه تعارض منافعی را اعلام نمی‌کنند.

منابع

[1] Shafiee, M., & Chukova, S. (2013). Maintenance models in warranty: A literature review. *European journal of operational research*, *229*(3), 561–572. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.01.017

[2] Blischke, W. R., & Murthy, D. N. P. (1992). Product warranty management — I: A taxonomy for warranty policies. *European journal of operational research*, *62*(2), 127-148 https://doi.org/10.1016/0377-2217(92)90242-2

[3] Majid, H. A., Kasim, N. H., Jamahir, N. I., & Samah, A. A. (2012). Soft computing methods in warranty problems: Review and recent applications (2003-2012). *International journal of computer science issues (IJCSI)*, *9*(4), 190. https://B2n.ir/nt1501

[4] Yang, D., He, Z., & He, S. (2016). Warranty claims forecasting based on a general imperfect repair model considering usage rate. *Reliability engineering & system safety*, *145*, 147–154. https://doi.org/10.1016/j.ress.2015.09.012

[5] Murthy, D. N. P., & Djamaludin, I. (2002). New product warranty: A literature review. *International journal of production economics*, *79*(3), 231–260. https://doi.org/10.1016/S0925-5273(02)00153-6

[6] Stamenković, D., Popović, V., Spasojević-Brkić, V., & Radivojević, J. (2011). Combination free replacement and pro-rata warranty policy optimization model. *Istrazivanja I projektovanja za privredu*, *9*(4), 457–464. http://dx.doi.org/10.5937/jaes9-1202

[7] Wu, S. (2013). A review on coarse warranty data and analysis. *Reliability engineering & system safety*, *114*, 1–11. http://dx.doi.org/10.5937/jaes9-1202

[8] Park, M., Jung, K. M., & Park, D. H. (2017). Optimal maintenance strategy under renewable warranty with repair time threshold. *Applied mathematical modelling*, *43*, 498–508. https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.11.015

[9] Bai, J., & Pham, H. (2006). Cost analysis on renewable full-service warranties for multi-component systems. *European journal of operational research*, *168*(2), 492–508. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2004.03.034

[10] Cai, K., He, S., & He, Z. (2020). Information sharing under different warranty policies with cost sharing in supply chains. *International transactions in operational research*, *27*(3), 1550–1572. https://doi.org/10.1111/itor.12597

[11] Zhang, Y. L., & Wang, G. J. (2019). A geometric process warranty model using a combination policy. *Communications in statistics - theory and methods*, *48*(6), 1493–1505. https://doi.org/10.1080/03610926.2018.1433853

[12] Chang, C. C. (2021). Optimal preventive replacement policy for operating products with renewing free-replacement warranty. *Communications in statistics - theory and methods*, *50*(18), 4255–4270. https://doi.org/10.1080/03610926.2020.1713371

[13] Zhang, Y. L., & Wang, G. J. (2011). An extended replacement policy for a deteriorating system with multi-failure modes. *Applied mathematics and computation*, *218*(5), 1820–1830. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.06.066

[14] Barlow, R., & Hunter, L. (1960). Optimum preventive maintenance policies. *Operations research*, *8*(1), 90–100. https://doi.org/10.1287/opre.8.1.90

[15] Yeh, R. H., Chen, M. Y., & Lin, C. Y. (2007). Optimal periodic replacement policy for repairable products under free-repair warranty. *European journal of operational research*, *176*(3), 1678–1686. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.10.047

[16] Wang, L., Pei, Z., Zhu, H., & Liu, B. (2018). Optimising extended warranty policies following the two-dimensional warranty with repair time threshold. *Eksploatacja i niezawodność – maintenance and reliability*, *20*(4), 523–530. https://doi.org/10.17531/ein.2018.4.1

[17] Murthy, D. N. P., & Djamaludin, I. (2002). New product warranty: A literature review. *International journal of production economics*, *79*(3), 231–260. https://doi.org/10.1016/S0925-5273(02)00153-6

[18] Liu, P., & Wang, G. (2023). Optimal preventive maintenance policies for products with multiple failure modes after geometric warranty expiry. *Communications in statistics - theory and methods*, *52*(24), 8794–8813. https://doi.org/10.1080/03610926.2022.2076115

[19] Block, H. W., Borges, W. S., & Savits, T. H. (1985). Age-dependent minimal repair. *Journal of applied probability*, *22*(2), 370–385. https://B2n.ir/nt1501